

55

4

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
ANNO CCCLXIX
1972

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

ESTRATTO
dal vol. LIII - 2° sem., fasc. 6 - 1972 (Dicembre)



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1973

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LIII, fasc. 6 - Dicembre 1972

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota V di
TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Secondo una congettura di Grünbaum, ogni famiglia continua di curve che non sia un fascio dovrebbe ammettere almeno un punto tale che per esso passino esattamente due curve della famiglia. In questa Nota la congettura di Grünbaum è dimostrata per tutta una classe di famiglie; in particolare, per tutte quelle famiglie che non contengono cinque curve concorrenti.

1. La Note présente est consacrée à la suivante conjecture de M. B. Grünbaum:

CONJECTURE [1]. *Pour toute F.C.C. \mathcal{Q} qui n'est pas un fascicule,*

$$T_2(\mathcal{Q}) \neq \emptyset .$$

Ici, F.C.C. signifie « famille continue de courbes », dont la définition est trouvable, par exemple, dans la première Note [3] de cette série; *fascicule*, comme d'ailleurs tous les autres termes spéciaux que nous utiliserons, était défini dans [3]; $T_n(\mathcal{Q})$ dénote l'ensemble des points dans le domaine D (dont la fermeture contient les courbes de notre F.C.C.) qui se trouvent sur exactement n courbes de la famille.

Nous allons prouver ici et dans la Note VI que cette Conjecture est vraie pour deux classes assez larges de F.C.C.'s, mais laissons ouvert le problème dans le cas général.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

2. Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée continue, telle que pour tout point $\mu \in f((a, b))$, on ait $\text{card } f^{-1}(\mu) \geq 2$.

Appelons point du type $(+, +)$ (resp. $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$) tout point x de (a, b) tel que x soit un maximum (resp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f|_{(a, x]}$ et, simultanément, un maximum (resp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f|_{[x, b)}$; soit $[+, +]$ (resp. $[+, -]$, etc.) la classe des points du type $(+, +)$ (resp. $(+, -)$, etc.).

LEMME 1. Si pour tout $\mu \in f((a, b))$, $\text{card } f^{-1}(\mu) < \aleph$, alors tout point $x \in (a, b)$ est un extremum relatif stricte de chacune des restrictions $f|_{(a, x]}$ et $f|_{[x, b)}$.

Quoi que l'étude similaire faite dans [4] se réfère à une autre fonction f , la démonstration du Lemme 2 de là-bas peut être reprise entièrement.

LEMME 2. S'il y a un point $\pi \in f((a, b))$ tel que $\text{card } f^{-1}(\pi) = 2$, alors il y a aussi un point $\lambda \in f((a, b))$ tel que $\text{card } f^{-1}(\lambda) \geq 3$.

Démonstration. Il y a deux points $x_1, x_2 \in (a, b)$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = \pi.$$

D'après le Lemme 1, soit qu'il y a $\lambda \in f((a, b))$ avec $\text{card } f^{-1}(\lambda) \geq \aleph_0$, soit que l'on est dans une des huit situations suivantes:

- | | | |
|-----|-------------------|-------------------|
| (1) | $x_1 \in [+, +],$ | $x_2 \in [+, +]$ |
| (2) | $x_1 \in [+, +],$ | $x_2 \in [+, -]$ |
| (3) | $x_1 \in [+, -],$ | $x_2 \in [-, +]$ |
| (4) | $x_1 \in [+, -],$ | $x_2 \in [-, -]$ |
| (5) | $x_1 \in [-, +],$ | $x_2 \in [+, +]$ |
| (6) | $x_1 \in [-, +],$ | $x_2 \in [+, -]$ |
| (7) | $x_1 \in [-, -],$ | $x_2 \in [-, +]$ |
| (8) | $x_1 \in [-, -],$ | $x_2 \in [-, -].$ |

Nous démontrerons le Lemme seulement pour les situations (2) et (3), car les autres sont toutes analogues à une de ces deux.

Dans la situation (2), il y a deux voisinages V_1 et V_2 de x_1 et, respectivement, x_2 , tels que si $y_1, y_1' \in V_1, y_2 \in V_2, y_1 < x_1 < y_1'$ et $y_2 < x_2$, alors $v < \pi$, où $v = \max \{f(y_1), f(y_1'), f(y_2)\}$. D'après la propriété de Darboux, si $\lambda \in (v, \pi)$, alors il y a trois points différents, respectivement dans (y_1, x_1) , (x_1, y_1') et (y_2, x_2) , avec λ comme image par f ; donc $\text{card } f^{-1}(\lambda) \geq 3$.

Dans la situation (3), soit y un maximum absolu de $f|_{[x_1, x_2]}$. Si $\text{card } f^{-1}(f(y)) \geq 3$, prenons $\lambda = f(y)$. Si $\text{card } f^{-1}(f(y)) = 2$, alors il y a un point $z \in [x_1, x_2]$ différent de y , avec $f(z) = f(y)$. Evidemment,

$$y \in [+, +], \quad z \in [+, +]$$

et nous sommes à l'égard de y et z dans le cas (1), pour lequel la démonstration découle comme dans le cas déjà traité (2).

Soit maintenant \mathcal{L} une F.C.C..

LEMME 3 [2]. *Si $T_4(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, alors $M_5(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.*

74 2

3. THÉORÈME. *S'il y a dans \mathcal{L} une courbe sans points dans $M_4(\mathcal{L})$, alors $T_2(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soient $C = \text{bd } D$, $p \in C$ et A un des arcs (minimaux) de C avec les mêmes extrémités que $L(p)$. Considérons les homéomorphismes

$$\varphi: [a, b] \rightarrow A, \quad \psi: [c, d] \rightarrow L(p).$$

L'application $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ définie par

$$f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$$

est évidemment continue.

Supposons maintenant que $L(p) \cap M_4(\mathcal{L}) = \emptyset$ et aussi que $L(p) \cap T_2(\mathcal{L}) = \emptyset$. Cela signifie que, pour tout $\mu \in f((a, b))$, d'une part $\text{card } f^{-1}(\mu) < 3$ et, d'autre part $\text{card } f^{-1}(\mu) > 1$, c.-à-d. que $\text{card } f^{-1}(\mu) = 2$. Mais, en vue du Lemme 2, cela est impossible, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Si $M_5(\mathcal{L}) = \emptyset$, alors $T_2(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.*

La démonstration du Corollaire dérive immédiatement du Théorème précédent et du Lemme 3.

Nous remarquons à la fin que la classe des F.C.C.'s \mathcal{L} avec $M_5(\mathcal{L}) = \emptyset$ est assez large et que la classe de celles F.C.C.'s \mathcal{L} pour lesquelles seulement un sous-ensemble propre de courbes rencontre éventuellement $M_4(\mathcal{L})$ est encore plus large.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. GRÜNBAUM, « Arrangements and Spreads », Lectures delivered at a Regional Conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma, June 21-25, 1971.
- [2] T. ZAMFIRESCO, *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. », 21, 513-530 (1969).
- [3] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes I*, « Rend. Lincei », 42, 771-774 (1967).
- [4] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes II*, « Rend. Lincei », 43, 13-17 (1967).