TUDOR ZAMFIRESCO

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES ESEMBLES SIMPLICIALEMENT CONVEXES

Estratto dagli

Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Classe di Scienze Fisiche

Anno 261°

RENDICONTI

SERIE XII - TOMO X

TIPOGRAFIA COMPOSITORI - BOLOGNA

1973

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES ENSEMBLES SIMPLICIALEMENT CONVEXES

Nota di TUDOR ZAMFIRESCO
presentata (*) dall'Accademico Corrispondente residente GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

RESUMÉ - Le but de cette Note est de faire connaitre quelquesunes des plus élémentaires propriétés à caractère géométrique des ensembles simplicialement convexes.

Soit R^n l'espace euclidien n-dimensionnel.

L'*envellope l-simplicialement convexe* $\mathscr{S}_l(M)$ de l'ensemble $M \subset R^n$ est, par définition, la réunion de tous les simplexes à dimension ne dépassant pas $l-1$, dont les sommets sont dans M.

Un ensemble E de R^n est dit *l-simplicialement convexe* s'il existe un sousensemble $F \subset E$ tel que $E = \mathscr{S}_l(F)$. Plus vaguement, un ensemble est *simplicialement convexe* s'il est l-simplicialement convexe pour un certain $l \geqslant 2$ [2], [3].

A la fin de la Note [4] se trouvent quelques suggestions sur l'étude des ensembles simplicialement convexes et nous voulons reprendre une seule d'entre elles en présentant ici un nombre de propriétés géométriques desquelles jouissent les ensembles simplicialement convexes.

Soit $E \subset R^n$ un ensemble l-simplicialement convexe. Si

$$\mathscr{F}_l(E) = \{F \subset R^n \colon E = \mathscr{S}_l(F)\} ,$$

alors les éléments de $\mathscr{F}_l(E)$ seront nommés des *l-générateurs* pour E, $\cup\, \mathscr{F}_l(E)$ sera appelée *l-base* de E (et sera notée par $\mathrm{base}_l\, E$) et $\cap\, \mathscr{F}_l(E)$ sera appelée *ensemble des points l-extrémaux* de E (et sera notée par $\mathrm{ext}_l\, E$).

Comme d'habitude, $\mathrm{conv}\, M$ signifiera l'*envellope convexe* de $M \subset R^n$ et pour l'ensemble convexe compact C, $\mathrm{ext}\, C$ désignera l'*ensemble des points extrémaux* de C.

Pour tout C convexe compact, si $2 \leqslant l \leqslant n$, alors

$$\mathrm{ext}\, C = \mathrm{ext}_l\, C .$$

(*) Nella seduta del 12 novembre 1972.

En effet, si $F \in \mathscr{F}_l(C)$, alors $\operatorname{ext} C \subset F$, d'où $\operatorname{ext} C \subset \operatorname{ext}_l C$ et si $a \notin \operatorname{ext} C$, alors $C - \{a\} \in \mathscr{F}_l(C)$, d'où $a \notin \operatorname{ext}_l C$.

Si C est convexe et compact et $\operatorname{bd} C$ est différentiable en a, alors le vecteur unitaire normal extérieurement à $\operatorname{bd} C$ en a sera noté par $n_a(C)$.

Un ensemble $M \subset R^n$ est dit *localement symétrique* en $x \subset M$ s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap M$ soit symétrique par rapport à x. Soient $\operatorname{sym} M$ l'ensemble des points où M est localement symétrique et $\operatorname{asym} M = M - \operatorname{sym} M$.

Suivant [1], nous dirons que l'ensemble $M \subset R^n$ est du *type* L_q si pour tout couple de points $x, y \in M$ il existe une ligne polygonale à q côtés qui joint x avec y et est incluse dans M.

THÉORÈME 1. *Si E est un ensemble n-simplicialement convexe dans R^n, alors toute composante connexe bornée de $\complement E$ est convexe.*

En effet, si D était, par l'absurde, une composante connexe bornée et conconvexe de $\complement E$, alors il existerait une droite $\delta \subset R^n$ et trois points a, b, c situés dans cet ordre sur δ, tels que $a, c \in D$, mais $b \in E$. De la convexité n-simpliciale de E il résulte que, si F est un n-générateur de E, b se trouve dans un simplexe S, avec $\operatorname{ext} S \subset F$. Puisque D est borné, il y a encore un point $d \in \delta \cap E$ tel que c soit situé entre b et d. D'une manière analogue, il y a un simplexe T tel que $d \in T$ et $\operatorname{ext} T \subset F$. Evidemment,

$$\operatorname{bd} \operatorname{conv}(S \cup T) \subset \mathscr{S}_n(\operatorname{ext}(S \cup T)) \subset \mathscr{S}_n(\operatorname{ext} S \cup \operatorname{ext} T) \subset \mathscr{S}_n(F) = E .$$

Puisque

$$c \in \operatorname{int} \operatorname{conv}(S \cup T); \qquad a \in \operatorname{int} \complement \operatorname{conv}(S \cup T),$$

a et c sont séparés par $\operatorname{bd} \operatorname{conv}(S \cup T) \subset E$, ce qui contredit leur appartenance à une même composante connexe de $\complement E$.

THÉORÈME 2. *Si E est un ensemble compact n-simplicialement convexe dans R^n, alors toute composante connexe bornée de $\complement E$ est l'intérieur d'un polyhèdre convexe.*

Si D est une composante connexe bornée de $\complement E$, alors d'après le Théorème 1 elle est convexe; ce qui nous reste à prouver est que $\operatorname{ext} \bar{D}$ est fini.

Soient B un disque compact n-dimensionnel inclus dans l'ensemble (ouvert) D et S une hypersphère autour de l'ensemble E. Il existe un nombre γ tel que pour toute paire d'hyperplans H, K avec $H \cap K \cap S \neq \emptyset$ et faisant un angle ne dépassant pas γ, aucun disque

n-dimensionnel de diamètre égal à celui de B ne soit inclus dans conv $((H \cap S) \cup (K \cap S))$. Supposons, par l'absurde, que ext $\bar{D}$ est infini; alors il y a deux points a, b de différentiabilité pour bd D, tels que

$$\cos \gamma < n_a(\bar{D}) \cdot n_b(\bar{D}) < 1$$

et que les hyperplans d'appui de $\bar{D}$ en a et b, H_a et H_b, ont des points communs dans conv S. Il résulte de là que

$$\mathrm{bd}\, D \not\supset \mathrm{conv}\, \{a, b\} .$$

Puisque $a, b \in E$, il y a deux simplexes $P \subset H_a$ et $T \subset H_b$ tels que $a \in P$, $b \in T$ et ext $P \cup$ ext $T \subset F$, où F est un n-générateur de E. Il s'ensuit que

$$\mathrm{bd\, conv}\, (P \cup T) \subset E .$$

On a aussi

$$D \not\subset \mathrm{conv}\, (P \cup T) .$$

(En effet, si $D \subset \mathrm{conv}\, (P \cup T)$ était vraie, alors

$$B \subset \mathrm{conv}\, ((H_a \cap E) \cup (H_b \cap E)) \subset \mathrm{conv}\, ((H_a \cap S) \cup (H_b \cap S))$$

et une contradiction est obtenue.) En outre, des relations

$$\mathrm{conv}\, \{a, b\} \cap D \neq \emptyset$$

et

$$\mathrm{conv}\, \{a, b\} \subset \mathrm{conv}\, (P \cup T)$$

il résulte

$$D \cap \mathrm{conv}\, (P \cup T) \neq \emptyset .$$

Il s'ensuit que bd conv $(P \cup T) \cap D \neq \emptyset$, d'où $E \cap D \neq \emptyset$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 3. *Tout ensemble simplicialement convexe est du type L_3.*

En effet, si E est un ensemble l-simplicialement convexe et si $a, b \in E$, alors il y a deux simplexes S et T avec les sommets dans un l-générateur de E, tels que $a \in S$ et $b \in T$. Si v est un sommet de S et w un sommet de T, alors évidemment

$$\operatorname{conv}\{a, v\} \cup \operatorname{conv}\{v, w\} \cup \operatorname{conv}\{w, b\} \subset E ,$$

d'où E est du type L_3.

THÉORÈME 4. *Pour tout ensemble 2-simplicialement convexe E admettant un 2-générateur fini,* $\operatorname{ext}_2 E = \operatorname{asym} E$ *et* $\operatorname{ext}_2 E \in \mathscr{F}_2(E)$.

On voit facilement que $\operatorname{asym} E \subset \operatorname{ext}_2 E$, dans l'hypothèse qu'un 2-générateur fini existe. Prouvons maintenant que $\operatorname{asym} E \in \mathscr{F}_2(E)$, ce qui achévera la démonstration. Soient, en effet, $F \in \mathscr{F}_2(E)$ et $a \in E$. Il y a deux points $b, c \in F$ tels que $a \in \operatorname{conv}\{b, c\}$. Soient $d, e \in E$ les points les plus éloignés l'un de l'autre, tels que

$$a \in \operatorname{conv}\{d, c\} \cap \operatorname{conv}\{b, e\} .$$

Evidemment, $d, e \in \operatorname{asym} E$ et $a \in \mathscr{S}_2(\operatorname{asym} E)$, d'où $E \subset \mathscr{S}_2(\operatorname{asym} E)$. Aussi,

$$\mathscr{S}_2(\operatorname{asym} E) \subset \mathscr{S}_2(\operatorname{ext}_2 E) \subset \mathscr{S}_2(F) = E ,$$

donc $\mathscr{S}_2(\operatorname{asym} E) = E$.

THÉORÈME 5. *Pour tout ensemble 2-simplicialement convexe E admettant un 2-générateur fini,*

$$\operatorname{card}(\operatorname{ext}_2 E) \leqslant \operatorname{card}(\operatorname{base}_2 E) \leqslant \operatorname{card}(\operatorname{ext}_2 E) + 1 .$$

Soit H un 2-générateur fini de E. Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux points dinstincts

$$a, b \in \operatorname{base}_2 E \cap \operatorname{sym} E .$$

Alors il existe deux 2-générateurs F, G (non nécessairement différents), tels que $a \in F$ et $b \in G$. Soit $c_1 \in \operatorname{ext}\operatorname{conv} E$. Puisque $a, c_1 \in F$, on a $\operatorname{conv}\{a, c_1\} \subset E$. De $a \in \operatorname{sym} E$ il s'ensuit qu'il existe un point c_2 de l'autre côté de la droite déterminée par a et b, tel que $c_2 \in \operatorname{asym} E$ et $a \in \operatorname{conv}\{c_1, c_2\}$. De façon analogue, il y a un point c_3 distinct de c_1

et c_2 tel que $c_3 \neq b$, $c_3 \in \operatorname{asym} E$ et $b \in \operatorname{conv}\{c_2, c_3\}$; en continuant comme ça, on trouve une famille infinie $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ de points distincts et appartenant à $\operatorname{asym} E$, ce qui contredit

$$\operatorname{card}(\operatorname{asym} E) \leqslant \operatorname{card} H < \aleph_0 .$$

COROLLAIRE 1. *Les 2-générateurs d'un ensemble 2-simplicialement convexe sont soit tous finis, soit tous infinis.*

COROLLAIRE 2. *Si la 2-base d'un ensemble 2-simplicialement convexe est infinie, alors tout 2-générateur de l'ensemble est infini.*

Nous remarquons en fin qu'il y a des ensemble l-simplicialement convexes à l-base infinie, dont l'ensemble des points l-extrémaux est est fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HORN et F. A. VALENTINE: *Some properties of L-sets in the plane*, « Israel J. Math. », **2**, 27-32 (1964).

[2] T. ZAMFIRESCO: *Simplicial convexity in vector spaces*, « Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.R. », **9**, 137-149 (1965).

[3] T. ZAMFIRESCO: *On l-simplicial convexity in vector spaces*, « Pac. J. Math. », **22**, 565-573 (1967).

[4] T. ZAMFIRESCO: *The simplicial convexity of convex surfaces*, « Rev. Roum. Math. Pures et Appl. », **14**, 889-897 (1969).