

Les Partages d'un Polygone Convexe en 4 Polygones Semblables au Premier

G. VALETTE

Vrije Universiteit Brussel, 1050 Brussel, Belgium

ET

T. ZAMFIRESCU

Universität Dortmund, 46 Dortmund-Hombruch, Germany

Communicated by W. T. Tutte

Received March 22, 1973

1. INTRODUCTION

Dans [1], C. D. Langford posa le problème de déterminer les figures planes pouvant être partagées en 4 figures isométriques, semblables à la figure originale, et proposa quelques exemples de telles figures. Dans [2], S. W. Golomb allongea la liste obtenue et étudia le problème général des rep- n , figures pouvant être partagées en n "répliques" isométriques entre elles et semblables à la première.

L'impulsion initiale de notre travail et le désir de le mener à bonne fin ne proviennent cependant pas de la lecture des 2 articles précédents, mais du problème suivant que posa M. Bleicher à l'Institut d'Oberwolfach en juin 1971.

Classifier tous les partages d'un corps convexe plan K en n parties isométriques, semblables à K .

Dans un premier pas vers une solution, nous avons établi qu'un tel partage n'existe que si le corps K est un polygone. Ce résultat nous a tout naturellement amenés à définir les partages simples de polygones (dans un sens qui sera bientôt précisé) et à rechercher leur classification combinatoire. Il nous est alors apparu que celle-ci était un excellent point de départ pour étudier les partages semblables et les partages équiangulaires

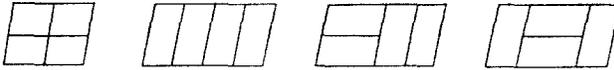
de polygones convexes. Ces avantages nous ont incités à mettre l'accent sur les partages de polygones convexes, notant seulement ici que les partages isométriques décrits ci-dessous couvrent tous les partages isométriques possibles des corps convexes du plan.

Si $n = 2$ ou 3 , le problème est simple et nous laissons au lecteur le plaisir de le résoudre. Nous nous intéressons au cas $n = 4$.

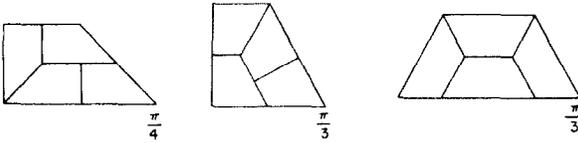
Voici deux des principaux résultats que nous établissons.

Si le polygone convexe P admet un partage semblable d'ordre 4 (partage en 4 polygones semblables à P), alors P est un trapèze ou un triangle.

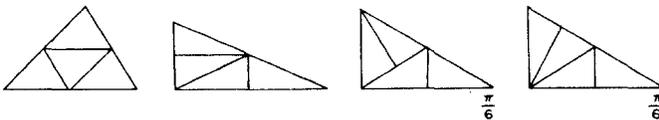
Si le polygone convexe P admet un partage isométrique d'ordre 4, alors P est un parallélogramme ou un trapèze tel que $b = 2a$ (a et b étant les longueurs des bases) ou un triangle. Si P est un parallélogramme, le partage a l'un des aspects suivants:



Si P est un trapèze, le partage a l'un des aspects suivants:



Si P est un triangle, le partage a l'un des aspects suivants:



La démonstration des théorèmes ci-dessus s'est faite en plusieurs étapes que nous résumons ici.

(1) Si les polygones P_1, P_2, P_3, P_4 forment un partage semblable de P , les frontières de P_i et P_j ont une intersection connexe. Pour n'oublier aucun cas, il est utile de classer topologiquement les partages d'un domaine de Jordan en 4 domaines de Jordan dont les frontières ont deux à deux des intersections connexes. Il y a 15 types topologiques qui sont décrits au paragraphe 2.

(2) Nous dirons que le partage du polygone convexe P par les polygones convexes P_1, P_2, \dots est *simple* si P_1, P_2, \dots ont même nombre de côtés que P . La seconde étape de la démonstration fut la classification combinatoire des partages simples d'ordre 4. Celle-ci fait l'objet du paragraphe 3 et comporte 35 types combinatoires.

(3) Nous dirons que deux polygones sont *équiangulaires* s'il existe une bijection entre les sommets du premier et ceux du second qui respecte l'adjacence et la mesure des angles. Un partage simple sera dit *équiangulaire* si les polygones P_1, P_2, \dots sont équiangulaires à P . Les partages équiangulaires d'ordre 4 font l'objet du paragraphe 4. Ils se répartissent assez naturellement en 42 familles. Un examen de celles-ci met en évidence la curiosité suivante: Si le polygone convexe P admet un partage équiangulaire d'ordre 4, mais n'est ni un trapèze, ni un triangle, alors P est un quadrilatère inscriptible dont les angles sont, en ordre circulaire, $\pi/5, 2\pi/5, 4\pi/5, 3\pi/5$.

(4) La dernière étape de la démonstration est résumée dans le paragraphe 5; elle consiste à déterminer les partages semblables dans chacune des 42 familles de classes de partages équiangulaires. C'est le résultat de cette étude qui fait l'objet du théorème énoncé précédemment. La classification des partages isométriques d'ordre 4 s'en déduit aussitôt.

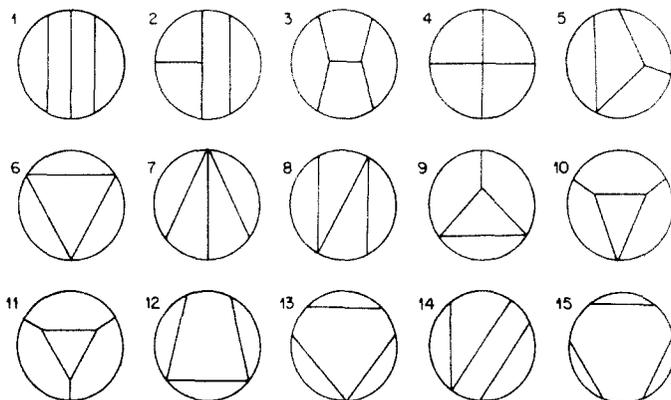
2. PARTAGES ADMISSIBLES D'UN DOMAINE DE JORDAN

Soit K un domaine de Jordan du plan euclidien E_2 . Un *partage d'ordre n de K* est un ensemble \mathcal{K} formé de n domaines de Jordan K_1, \dots, K_n tels que

- (1) $\bar{K} = \bigcup_{i=1}^n \bar{K}_i$;
- (2) si $i \neq j$, $K_i \cap K_j = \emptyset$.

De plus, nous dirons que le partage \mathcal{K} est *admissible* si $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j$ est connexe quels que soient i et j ; cette condition est évidemment réalisée si tous les K_i sont convexes. Du point de vue topologique, on considère les partages \mathcal{K} et \mathcal{L} de deux domaines K et L comme équivalents s'il existe un homéomorphisme de \bar{K} sur \bar{L} qui envoie \mathcal{K} sur \mathcal{L} . La classification topologique des partages admissibles d'ordre 4 est décrite dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *Il y a 15 types de partages admissibles d'ordre 4. Plus précisément, tout partage admissible d'ordre 4 est topologiquement équivalent à un et un seul des partages suivants:*



Cette classification s'obtient en analysant les cas d'intersections possibles des domaines du partage, puis en appliquant à plusieurs reprises le lemme suivant: Soient K et L deux domaines de Jordan. Tout homéomorphisme de la frontière de K sur la frontière de L peut être étendu en un homéomorphisme de K sur L .

Dans la suite nous dirons qu'un partage est de *type* i s'il est topologiquement équivalent au i -ème partage schématisé ci-dessus.

3. PARTAGES SIMPLES D'ORDRE 4

Nous nous limiterons dans la suite à l'étude de *partages polygonaux*. Cela signifie que les domaines de Jordan K, K_1, K_2, \dots considérés précédemment sont des polygones convexes. Si $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ est un tel partage du polygone P , nous définirons les *faces*, les *arêtes* et les *sommets* de \mathcal{P} respectivement comme étant les P_i , les côtés des P_i et les sommets des P_i .

Les faces, les arêtes et les sommets de \mathcal{P} forment un ensemble ordonné par inclusion, noté \mathcal{P} . Le type d'ordre de \mathcal{P} est appelé *type combinatoire* du partage \mathcal{P} ; autrement dit, deux partages \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont combinatoirement équivalents s'il existe une bijection croissante de \mathcal{P}_1 sur \mathcal{P}_2 .

Un partage polygonal \mathcal{P} de P est dit *simple* si les faces de \mathcal{P} sont des polygones convexes ayant même nombre de côtés que P . Nous allons déterminer les types combinatoires des partages simples d'ordre 4.

Deux partages combinatoirement équivalents étant topologiquement équivalents, la classification combinatoire des partages simples d'ordre 4 s'obtiendra en recherchant toutes les réalisations combinatoires distinctes des types topologiques schématisés dans la proposition 1. Cette étude se base sur les résultats suivants.

LEMME 1. *Si \mathcal{P} est un partage simple de type 1, 2 ou 3, alors les faces de \mathcal{P} sont des quadrilatères.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ un partage simple de type 1 du polygone P . Notons les P_i de telle sorte que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$ et $P_3 \cap P_4 \neq \emptyset$. Il est clair que P_2 a au moins 4 sommets, deux d'entre eux communs à P_1 , les deux autres communs à P_3 . Supposons que P_2 ait n autres sommets. Comme les P_i sont convexes, ces n points sont des sommets de P situés dans $P_2 \setminus (P_1 \cup P_3 \cup P_4)$. On voit de même qu'il y a n sommets de P dans $P_3 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_4)$, $n + 2$ sommets de P dans $P_1 \setminus (P_2 \cup P_3 \cup P_4)$ et $n + 2$ sommets de P dans $P_4 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$. Le nombre de sommets de P est donc supérieur ou égal à $4n + 4$. L'inégalité

$$n + 4 \geq 4n + 4 \quad (n \geq 0)$$

n'étant vraie que si $n = 0$, les P_i sont des quadrilatères.

La démonstration est très semblable si \mathcal{P} est un partage simple de type 2 ou 3.

LEMME 2. *Si \mathcal{P} est un partage simple de type 4 ou 5, alors les faces de \mathcal{P} sont des quadrilatères ou des triangles.*

LEMME 3. *Si \mathcal{P} est un partage simple de type 6, 7, 8, 9, 10 ou 11, alors les faces de \mathcal{P} sont des triangles.*

LEMME 4. *Il n'existe aucun partage simple dont le type topologique est 12, 13, 14 ou 15.*

Les démonstrations sont triviales pour les partages de types 6, 9, 10 et 11, analogues à la démonstration du lemme 1 pour les autres partages.

La classification combinatoire des partages simples d'ordre 4 est décrite dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Si le polygone convexe P admet un partage simple d'ordre 4, alors P est un quadrilatère ou un triangle. Il y a 35 types de partages simples d'ordre 4. Plus précisément, tout partage simple d'ordre 4 est combinatoirement équivalent à un et un seul des partages schématisés dans la première colonne du tableau figurant en fin d'article.*

Preuve. La classification combinatoire des partages de types 1, 2, et 3 se base sur le lemme 1 : les polygones P et P_i sont des quadrilatères. On voit immédiatement que les types topologiques 1 et 2 ne contiennent chacun qu'un seul type combinatoire. Le type topologique 3, par contre, se décom-

pose en 13 classes combinatoires qu'on obtient comme suit: on suppose d'abord que chaque sommet de P n'appartient qu'à un seul P_i ; les différentes manières de répartir les sommets de P dans les P_i conduisent aux partages de types 3.a, 3.b, 3.c et 3.d. On suppose ensuite qu'il y a un sommet unique de P qui appartient à deux polygones P_i ; on peut alors choisir les notations de telle sorte que ce sommet soit commun à P_1 et P_2 et que $P_1 \cap P_4 = \emptyset$. La classification revient alors à distribuer les 3 autres sommets de P sur P_1, P_2, P_3 et P_4 , étant donné qu'il y en a au moins un sur P_1 et un sur P_4 . Six cas sont possibles, ce qui fournit les types 3.e, 3.f, 3.g, 3.h, 3.i et 3.j. Enfin, si l'on suppose que deux sommets de P appartiennent à plus d'un P_i , on obtient les types 3.k, 3.l et 3.m. Les autres types topologiques se traitent de façon semblable en utilisant les lemmes 2, 3 et 4.

4. PARTAGES EQUIANGULAIRES D'ORDRE 4

Nous étudions maintenant les partages d'un polygone P en 4 polygones équiangulaires à P .

LEMMA 5. *Si le quadrilatère P admet un partage équiangulaire d'ordre 4, alors P est un trapèze ou un quadrilatère inscriptible, sauf peut-être si le partage est de type combinatoire 3.l.*

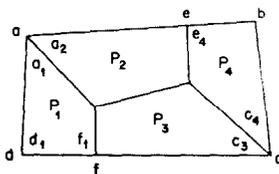
Preuve. Soit \mathcal{P} un partage équiangulaire de P . La liste des types combinatoires des partages simples d'ordre 4 nous apprend que \mathcal{P} contient au moins une face P_i ayant deux angles qui sont supplémentaires de deux angles appartenant à d'autres faces, sauf si \mathcal{P} est de type 3.l. On en déduit aussitôt que P_i a deux angles supplémentaires et que P a la même propriété. Donc P est un trapèze ou un quadrilatère inscriptible.

LEMME 6. *Il n'existe aucun partage équiangulaire ayant l'un des types combinatoires suivants: 3.j, 3.l, 3.m, 4.c, 4.d, 4.e, 7.b, 7.c, 9.b, 9.c, 9.d, 10.a, 10.b et 11.*

Preuve. Supposons par l'absurde que le quadrilatère P admette un partage équiangulaire \mathcal{P} dont le type combinatoire est 3.j. D'après le lemme 5, P est un trapèze ou un quadrilatère inscriptible. Le second cas est évidemment impossible car une face P_1 de \mathcal{P} a trois sommets communs avec P . Donc P est un trapèze. La position de P_1 dans P montre que P n'est pas un parallélogramme, que P et P_1 ont une base commune et que les angles communs à P et P_1 sont droits. D'autre part $P_2 \cup P_3 \cup P_4$ est un triangle isocèle. Puisqu'un tel triangle n'admet pas de partage en

3 trapèzes ayant des angles droits, il n'existe pas de partage équiangulaire de type 3.j.

Supposons par l'absurde que le quadrilatère P admette un partage équiangulaire \mathcal{P} dont le type combinatoire est 3.l, et utilisons les notations indiquées sur la figure ci-dessous:



En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 5, on voit que P a l'une des propriétés suivantes:

- (a) P est un quadrilatère inscriptible,
- (b) P est un trapèze,
- (c) e_4 et f_1 sont des angles droits et P n'est ni un quadrilatère inscriptible, ni un trapèze.

Envisageons chacun de ces cas:

(a) Puisque P et P_1 sont inscriptibles et ont un angle commun d_1 , les angles adjacents à d_1 sont les mêmes pour P et P_1 . Donc $c_3 + c_4 = a_1$. On voit de même que $a_1 + a_2 = c_4$. Donc $a_2 + c_3 = 0$ ce qui est absurde.

(b) Puisque P_2 et P_3 ne peuvent pas être tous deux des parallélogrammes, deux cas sont à considérer: ab parallèle à dc ou ad parallèle à bc . Si ab est parallèle à dc , on voit aussitôt que les bases de P_2 et P_3 sont parallèles à celles de P , tandis que les grandes bases de P_1 et P_4 sont les côtés non parallèles de P . On en déduit que P n'est pas équiangulaire à P_2 ou à P_3 , ce qui est absurde. Si ad est parallèle à bc , alors ae est la grande base de P_2 ou fc est la grande base de P_3 . Dans le premier cas, on en déduit que bc est la grande base de P et P_4 , ce qui est absurde; l'autre cas se traite de même.

(c) Puisque P_1 et P_4 ne sont ni des quadrilatères inscriptibles, ni des trapèzes, l'unique angle droit de P est en a ou en c . Par symétrie, on peut supposer $a_1 + a_2 = \pi/2$. L'angle opposé à l'angle droit de P est $c_3 + c_4$, tandis que l'angle opposé à l'angle droit de P_4 est c_4 . Ceci étant absurde, on a prouvé qu'il n'existe pas de partage équiangulaire de type 3.l. Les autres cas s'étudient de façon semblable, en faisant appel au lemme 5.

Deux partages équiangulaires \mathcal{P} de P et \mathcal{Q} de Q sont considérés comme *équivalents* s'il existe une bijection croissante de l'ensemble ordonné \mathcal{P} sur l'ensemble ordonné \mathcal{Q} qui respecte la mesure des angles des faces de \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

La classification des partages équiangulaires d'ordre 4 s'appuie sur la classification des partages simples et fait l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Si le polygone convexe P admet un partage équiangulaire d'ordre 4, alors P est un trapèze, un quadrilatère inscriptible ou un triangle. La classification des partages équiangulaires d'ordre 4 contient 42 familles qui sont décrites dans la 2ème colonne du tableau figurant en fin d'article.*

Preuve. Compte tenu du lemme 6, les types combinatoires susceptibles de fournir des partages équiangulaires sont les suivants: 1, 2, 3.a, 3.b, 3.c, 3.d, 3.e, 3.f, 3.g, 3.h, 3.i, 3.k, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6, 7.a, 8.a, 8.b, 9.a.

Considérons un partage $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ de P , dont le type combinatoire est 1, et utilisons les notations introduites dans la preuve du lemme 1. Deux cas sont a priori possibles: P est un trapèze ou P est un quadrilatère inscriptible. Dans le premier cas, on distingue deux possibilités: ou bien les bases de P sont des côtés de P_1 et P_4 et l'on obtient la famille de partages schématisés au début de la 2ème colonne du tableau général, ou bien les bases de P ne sont pas des côtés de P_1 et P_4 , ce qui conduit à une contradiction. Dans le second cas, on vérifie que $P_1 \cup P_2$ et $P_3 \cup P_4$ sont des trapèzes, de sorte que P est un trapèze; on retrouve ainsi une sous-famille de la famille trouvée ci-dessus. Comme invariants de la classification équiangulaire, on peut choisir les angles α et β , mais il faut noter que les couples (α, β) , (β, α) , $(\pi - \alpha, \pi - \beta)$ et $(\pi - \beta, \pi - \alpha)$ déterminent des partages équivalents. Les autres types combinatoires s'étudient de façon semblable.

5. PARTAGES SEMBLABLES D'ORDRE 4

Nous arrivons enfin à la classification des partages d'un polygone P en 4 polygones semblables à P .

THÉORÈME. *Si le polygone convexe P admet un partage semblable d'ordre 4, alors P est un quadrilatère ou un triangle; si P est un quadrilatère, c'est soit un parallélogramme, soit un trapèze ayant l'une au moins des deux propriétés suivantes (a et b étant les longueurs des bases):*

- (i) $(ab)^{1/2}$ est la longueur d'un côté,
- (ii) $b = 2a$.

La classification relative au groupe des similitudes des partages semblables d'ordre 4 contient une infinité de classes (exactement c). Ces classes se répartissent en 40 familles qui sont décrites dans la dernière colonne du tableau figurant en fin d'article.

TABLEAU I
Tableau des Partages d'Ordre 4

Partages simples		Partages equiangulaires		Partages semblables	
No.	Schémas	Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
1			$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$, les couples (α, β) , (β, α) , $(\pi - \alpha, \pi - \beta)$ et $(\pi - \beta, \pi - \alpha)$ étant identifiés		$\alpha + \beta = \pi$ $b = 2a$
2			$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$, les couples (α, β) et $(\pi - \alpha, \pi - \beta)$ étant identifiés		$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{5}{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = (\sqrt{3} + 1)a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b = 2a$
			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		
			$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$		
3.a			$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$, les couples (α, β) , (β, α) , $(\pi - \alpha, \pi - \beta)$ et $(\pi - \beta, \pi - \alpha)$ étant identifiés		$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{5}{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = (\sqrt{3} + 1)a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b = 2a$
			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		

Tableau à suivre

TABLEAU I (suite)

Partages simples		Partages equiangulaires		Partages semblables		
No.	Schémas	Schémas	Invariants	Schémas	Conditions	
3. b.		α	$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$		$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = 3a^2$	
		β			$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} a^2$	
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = 2a^2$		
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{5}{3} a^2$		
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = (1 + \sqrt{2})a^2$		
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = (1 + \sqrt{2})a^2$		
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \sqrt{3}a^2$		
				$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \sqrt{3}a^2$		
		α		$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$ mais $\alpha + \beta \neq \pi$		
		γ		$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ mais $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$		
α	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mais $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$					

Tableau à suivre

TABLEAU I (suite)

Partages simples		Partages equiangulaires		Partages semblables	
No.	Schémas	Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
3. c			$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$, les couples (α, β) et (β, α) étant identifiés		$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{3}{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{4}{3} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \sqrt{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \sqrt{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} a^2$
					$\alpha + \beta = \pi$ $b^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} a^2$
					$0 < \alpha < \pi$ mais $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$
3. d			$0 < \frac{\alpha}{\beta} < \pi$		$c^2 = ab$ $(a \neq b)$
			$0 < \alpha < \pi$ mais $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$		
3. e			Pas d'invariant		

Tableau à suivre

TABLEAU I (suite)

Partages simples No.	Schémas	Partages equiangulaires		Partages semblables	
		Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
3. f			Pas d'invariant		
3. g			Pas d'invariant		$c = a$
			Pas d'invariant		$c = 2a$
			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		
3. h			Pas d'invariant		
			Pas d'invariant		
			Pas d'invariant		
3. i			Pas d'invariant		
3. j					

Tableau à suivre

TABLEAU I (suite)

Partages simples		Partages equiangulaires		Partages semblables	
No.	Schémas	Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
3. k			Pas d'invariant		$c = a$
			Pas d'invariant		
3. i					
3. m					
4. a			$0 < \alpha < \pi,$ β les couples (α, β) et $(\pi - \alpha, \pi - \beta)$ étant identifiés		$\alpha + \beta = \pi$ $u = v$ $x = y$
			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		$c^2 = ab$
4. b			Pas d'invariant		
4. c					
4. d					
4. e					

Tableau à suivre

TABLEAU I (suite)

Partages simples No.	Schémas	Partages equiangulaires		Partages semblables	
		Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
5. a			Pas d'invariant		
5. b			Pas d'invariant		$\frac{\pi}{6}$
			Pas d'invariant		$\frac{\pi}{6}$
6			$0 < \pi - \alpha - \beta \leq \beta \leq \alpha < \pi$		
			$\alpha > \beta > 0$ et $\alpha + \beta < \pi$		
7. a			$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$		
			$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$		
7. b					
7. c					
8. a			Pas d'invariant		$\frac{\pi}{6}$

Tableau à suivre

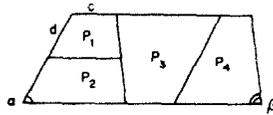
TABLEAU I (suite)

Partages simples		Partages equiangulaires		Partages semblables	
No.	Schémas	Schémas	Invariants	Schémas	Conditions
8. b			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		
			Pas d'invariant		
			Pas d'invariant		
9. a			$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		
			Pas d'invariant		
			Pas d'invariant		
9. b					
9. c					
9. d					
10. a					
10. b					
11					

Preuve. Le problème est de déterminer s'il existe, dans chacune des 42 familles de partages équiangulaires, des représentants qui soient des partages semblables, puis de classer ces représentants.

Considérons la famille de partages équiangulaires dont le type combinatoire est 1. Les trapèze P_1 et P ne peuvent être semblables que si $\alpha + \beta = \pi$. Les polygones sont donc des parallélogrammes. La situation des P_i dans P empêche les P_i d'être homothétiques à P . On en déduit que les P_i forment le partage schématisé au début de la dernière colonne du tableau.

Considérons ensuite la famille de partages équiangulaires dont le type combinatoire est 2 et utilisons les notations indiquées sur la figure ci-dessous.



Les trapèzes P_4 et P ne peuvent être semblables que si $\alpha + \beta = \pi$; P et les P_i sont donc des parallélogrammes; de plus, P_3 et P_4 ne sont pas homothétiques à P , mais isométriques entre eux. Compte tenu du fait que P_1 et P_2 jouent le même rôle, 3 cas sont à examiner:

- (1) P_1 et P_2 ne sont pas homothétiques à P ;
- (2) P_1 est homothétique à P , mais pas à P_2 ;
- (3) P_1 et P_2 sont homothétiques à P .

Dans le premier cas, les côtés c et d de P_1 sont deux fois plus petits que ceux de P_3 et P_4 , de sorte que les côtés de P sont $a = 2d$ et $b = 5c$. La similitude de P et P_1 fournit alors la condition $b^2 = 5a^2/2$. Dans le second cas, les côtés de P_2 valent c^2/d et c , et ceux de P_3 et P_4 mesurent $(c^2 + d^2)/c$ et $(c^2 + d^2)/d$; les côtés de P valent donc $a = (c^2 + d^2)/d$ et $b = c + 2(c^2 + d^2)/c$. La similitude de P et P_1 fournit ici la condition $d^2 = (\sqrt{3} - 1)c^2/2$, soit $b^2 = (\sqrt{3} + 1)a^2$. Dans le troisième cas, on trouve simplement $b = 2a$.

Pour ne pas allonger démesurément cet article, nous ne traiterons pas ici les 40 autres familles apparaissant dans la classification équiangulaire. Cette étude permet de compléter la démonstration du théorème et de dresser la dernière colonne du tableau ci-dessous.

REFERENCES

1. C. D. LANGFORD, Uses of a geometric puzzle, *Math. Gaz.* **24** (1940), 209–211.
2. S. W. GOLOMB, Replicating figures in the plane, *Math. Gaz.* **48** (1964), 403–412.