

L'HISTOIRE ET L'ETAT PRESENT
DES BORNES CONNUES POUR $P_k^j, C_k^j, \bar{P}_k^j$ et \bar{C}_k^j

Tudor ZAMFIRESCU

Is it true that in any finite connected graph there exists a vertex such that every longest simple path of the graph contains this vertex? (T. Gallai [4], en 1966).

Définitions. P_k^j (resp. C_k^j) est le nombre minimum de points qu'un graphe G peut avoir, tel qu'il soit k-connexe et que pour chaque ensemble de j points il y ait un chemin (circuit) de longueur maximum qui ne les contient pas. \bar{P}_k^j et \bar{C}_k^j sont les nombres similaires obtenus en se bornant au cas des graphes planaires. Dans le cas des circuits et pour $k = 1$, on demande en plus que les graphes ne soient pas des arbres. S'il n'y a pas de graphes ayant les propriétés précédentes, on met $P_k^j = \infty$ (resp. $C_k^j = \infty$, etc...).

Les nombres connus : $C_2^1, C_3^1, \bar{P}_4^j$ et \bar{C}_4^j . Le fait que le graphe de Petersen a le nombre minimum de points parmi les graphes hypohamiltoniens a été démontré et souvent redémontré (voir C. Berge [1], [2]), J.C. Herz - T. Gaudin - P. Rossi [9], R.G. Busacker - T.L. Saaty [3], Herz - J.J. Duby - F. Vigué [8]). Et nous affirmons avec B. Grünbaum [6] qu'il est facile de voir qu'en fait $C_2^1 = C_3^1 = 10$.

D'après le profond résultat de W.T. Tutte (1956 [14]), qui dit que tout graphe planaire 4-connexe est hamiltonien, il s'en suit que $\bar{P}_4^j = \bar{C}_4^j = \infty$ ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Rien n'est connu sur les C_4^j . Un premier, mais important (et difficile) pas serait de répondre au

Problème 1. $C_4^1 < \infty$?

C_1^j, \bar{C}_1^j et leur trivialité. Egalement connus sont C_1^j et \bar{C}_1^j pour des petites valeurs de j : $C_1^1 = \bar{C}_1^1 = 6$ et $C_1^2 = \bar{C}_1^2 = 9$; et il est trivial d'établir

$$C_1^j \leq \bar{C}_1^j \leq 3j + 3$$

car on peut prendre un graphe à $3j + 3$ points et ayant comme seuls circuits $j + 1$ triangles disjoints [19]. Moins triviale est cependant la question de savoir si on a toujours le signe d'égalité ci-dessus, ce qui n'est pas encore décidé.

Histoire de P_1^1 et \bar{P}_1^1 . Gallai (1966 [4]) demandait si $P_1^1 = \infty$; H. Walther (1969 [15]) a répondu : Non, $\bar{P}_1^1 \leq 25$. (Il utilisa pour son résultat le graphe de la fig. 1 dérivé d'une partie d'un graphe de Tutte [13].) Plus tard nous trouvons $P_1^1 \leq 12$ (1974 [6] et [19]), ce qui était établi de façon indépendante par Walther (1974 [17]) aussi (Fig. 2). Deux autres graphes G (Fig. 3) et H (Fig. 4) montrèrent successivement que $\bar{P}_1^1 \leq 20$, puis que $\bar{P}_1^1 \leq 19$ [19], mais finalement W. Schmitz [11] trouva que $\bar{P}_1^1 \leq 17$ (Fig. 5). Nous énonçons la

Conjecture 1 $P_1^1 = 12$ et $\bar{P}_1^1 = 17$.

Histoire de $\bar{P}_3^1, \bar{P}_3^2, \bar{C}_3^1$ et \bar{C}_3^2 . Grünbaum a résolu le problème (de prouver le caractère fini) pour $j=1$ dans le cas le plus géométrique : celui des graphes "polytopals". En transformant un graphe construit séparément par E.J. Grinberg (1968 [5]) et Tutte (see [7]), il [6] a obtenu le graphe J (Fig. 6) qui prouve que $\bar{C}_3^1 \leq 124$. En ouvrant J (en coupant l'un de ses triangles) et en l'introduisant ainsi dans K_4 , il [6] a obtenu un autre graphe, qui prouve que $\bar{P}_3^1 \leq 484$. En ouvrant J de la même façon, en l'introduisant dans J et en contractant certaines arêtes nous avons produit un graphe montrant que $\bar{C}_3^2 \leq 14\ 818$ et en introduisant un J ouvert dans un autre J ouvert, en mettant le graphe ainsi obtenu dans K_4 ; et en faisant quelques contractions d'arêtes, nous avons prouvé que $\bar{P}_3^2 = 57\ 838$ [19]. Ces quatre valeurs n'ont pas encore été améliorées!

Histoire de C_2^2 et C_3^2 . Un des premiers résultats (dans ce cercle de problèmes) a été $C_2^2 \leq 220$, établi par Walther (1970 [16]). Il est en étroite liaison avec une question formulée par H. Sachs, comme celle de Gallai, en 1966 à Tihany : $C_3^2 = \infty$? Donc Sachs posait le problème pour $k = 3$; mais d'après ce qu'on sait

aujourd'hui, et qui va être exposé immédiatement, le cas où $k = 3$ ne semble pas plus difficile que le cas où $k = 2$, de sorte qu'on peut croire que Sachs n'avait également pas de réponse au problème avec $k = 2$ et dans ce cas on peut se demander pourquoi alors il n'a pas posé la question pour $k = 2$. De toute façon c'est à cette dernière question que Walther a répondu dans [16]. Mais, plus tard, Grünbaum (1974 [6]) a introduit le graphe P' obtenu en ouvrant le graphe P de Petersen dans un point (à comparer avec F !) dans le graphe P et a obtenu ainsi un graphe montrant que $C_3^2 = 90$. En contractant 15 des arêtes de ce graphe nous avons montré enfin que $C_3^2 \leq 75$ (Fig. 7) [19]. Evidemment, on a alors aussi $C_2^2 \leq 75$ et vu que $C_3^1 = C_2^1 = 10$, on peut énoncer la

Conjecture 2. $C_2^2 = C_3^2$ (=75?)

et même se demander si $C_2^j = C_3^j$ en général! De toute façon, l'histoire le suggère.

Problème 2. $C_2^3 < \infty$?

Histoire de P_2^1 , P_3^1 et \bar{P}_2^1 . Pour P_3^1 on a eu d'abord seulement la récente inégalité $P_3^1 \leq 484$ déduite du cas plan traité par Grünbaum (1974 [6]). La découverte probablement encore plus récente d'un graphe hypotracable par J.D. Horton [10] montra que $P_3^1 \leq 40$ (ce graphe est 3-connexe, voir Fig. 8). Enfin nous avons réduit dans [19] la borne supérieure de P_3^1 à 36 en introduisant P' dans chaque point de K_4 (Fig. 9).

Déjà en 1972 nous [18] avons prouvé que $P_2^1 \leq 82$. En ce qui concerne P_2^1 , cette inégalité fut améliorée par $P_2^1 \leq P_3^1 \leq 36$. Peu après, C. Thomassen [12] nous communiqua son exemple d'un graphe 2-connexe hypotracable (Fig. 10), qui prouva alors $P_2^1 = 34$. Mais ensuite nous prouvâmes $P_2^1 \leq 32$ à l'aide d'un graphe (Fig. 11) construit en combinant deux graphes H (Fig. 4) [19]. Ce qui est étonnant est que cette (jusqu'à présent meilleure) inégalité fut établie à l'aide d'un graphe planaire! Donc on a également $\bar{P}_2^1 \leq 32$. Est-il vrai que $P_2^1 = \bar{P}_2^1$? Nous hésitons à le croire.

Problème 3. $P_4^1 < \infty$?

Histoire des P_k^2 . D'abord c'est Grünbaum (1974 [6]) qui démontra que $P_3^2 \leq 324$, à l'aide d'un graphe qui combine P' avec P' et le produit avec K_4 . En contractant certaines arêtes de ce graphe, nous [19] avons obtenu $P_3^2 \leq 270$. On ne sait rien de mieux à présent ni sur P_3^2 , ni sur P_2^2 . Mais, séparément, Schmitz (1974 [6] et [11]) et Walther (1974 [17]) ont prouvé $P_1^2 \leq 108$ à l'aide d'un graphe obtenu en introduisant P' dans le graphe F de Fig. 2. Cette inégalité fut améliorée par nous [20] : $P_1^2 \leq 93$ (Fig. 12) (la méthode a de nouveau consisté à contracter certaines arêtes du graphe de Schmitz-Walther).

Rien n'est connu sur P_4^2 , comme d'ailleurs sur tout P_4^j . Attendons d'abord une réponse au Problème 3:

On ne sait également rien sur les P_k^3 . Nous énonçons le

Problème 4. $P_1^3 < \infty$?

Histoire de \bar{P}_1^2 et \bar{P}_2^2 . Celle-ci n'est pas trop longue. Après avoir construit dans [19], à l'aide des graphes G (Fig. 3), J (Fig. 6) et K_4 , un graphe 2-connexe qui démontrait $P_1^2 \leq P_2^2 \leq 6050$, nous avons prouvé à l'aide de G et d'un graphe G^s similaire à G que $\bar{P}_1^2 \leq 308$ et à l'aide de G , de G^s et de K_4 que $\bar{P}_2^2 \leq 914$ [20].

On a donc établi le caractère fini des \bar{P}_k^2 pour $k \leq 3$ et l'infinité des autres \bar{P}_k^2 . Par contre, sur les \bar{P}_k^3 on ne sait que $\bar{P}_k^3 = \infty$ pour $k = 4$ ou 5 .

Problème 5. $\bar{P}_1^3 < \infty$?

Histoire des \bar{C}_2^j . En ce qui concerne \bar{C}_2^1 , c'est Walther (1969 [15]) qui prouva d'abord que $\bar{C}_2^1 = 105$. Mais le graphe T (Fig. 13) de Thomassen nous montre qu'en fait $\bar{C}_2^1 \leq 15$. Nous répétons une conjecture de [19]:

Conjecture 3. $\bar{C}_2^1 = 15$.

Sur \bar{C}_2^2 on a d'abord eu notre [19] résultat $\bar{C}_2^2 \leq 1550$, obtenue à l'aide du graphe G (Fig. 3) et du graphe J de Grünbaum (Fig. 6). Puis, c'est Schmitz [11] qui prouva que $\bar{C}_2^2 \leq 170$ à

l'aide de G et du graphe T de Thomassen (Fig. 13). Dans la section suivante nous allons prouver que $\bar{c}_2^2 \leq 135$.

Problème 6. $\bar{c}_2^3 < \infty$?

Une réponse affirmative aux problèmes 5 et 6 impliquerait évidemment une réponse affirmative aux problèmes 4 et 2, ce qui suggère qu'elles sont encore plus difficiles... .

Démonstration de l'inégalité $\bar{c}_2^2 \leq 135$. Soit L le graphe de la Fig. 14. Il ressemble à un graphe de Schmitz [11].

D'abord, quelques lemmes :

Lemme 1. Un arc de circuit "long" (c'est-à-dire de longueur maximum) dans L, qui passe successivement par B, A et A' a exactement 12 points dans A.

Lemme 2. Un arc de circuit "long" dans L, qui passe successivement par B, A et E a exactement 11 points dans A.

Lemme 3. Le plus long circuit de L passant successivement par A, B, C, D, E, E', D', C', B', A', A a 110 points.

Lemme 4. Le plus long circuit de L passant successivement par A, A', B', B, C, C', D', D, E, A a 110 points.

Nous ne prouvons pas ces lemmes ici, car les deux premiers ont été essentiellement établis dans [19] et les deux derniers ne nécessitent qu'un simple effort d'énumération.

Maintenant, il n'est pas difficile de démontrer à l'aide des Lemmes 3 et 4 que tout circuit "long" de L a un parcours similaire à l'un des deux décrits dans ces lemmes. D'autre part, pour chaque paire d'arêtes du graphe de la Fig. 15, il y a un circuit, de longueur 10 ou 9 et avec un parcours analogue à l'un de ceux décrits plus haut, qui ne les contient pas. Ce fait et la propriété du graphe G de la Fig. 3 de posséder pour tout point, un chemin "long" qui l'évite, prouvent que pour toute paire de points de L il y a un circuit "long" qui les évite tous les deux.

Le graphe L a 135 points, donc l'inégalité $\bar{c}_2^2 \leq 135$ est démontrée.

Questions nouvelles. On pourrait se contenter de moins. Par exemple, en considérant non seulement les chemins ou les circuits "longs", mais aussi d'autres un peu moins longs. Obtient-on alors de grandes réductions pour les nombres analogues aux P_k^j et C_k^j ?

Plus précisément, soit appelé n -maximal un chemin (ou un circuit) dont la différence entre sa longueur et la longueur maximum d'un chemin (circuit) ne dépasse pas n . Soient maintenant $P_k^j(n)$, $C_k^j(n)$, $\bar{P}_k^j(n)$ et $\bar{C}_k^j(n)$ les nombres définis comme P_k^j , C_k^j , \bar{P}_k^j et \bar{C}_k^j en remplaçant seulement les chemins (circuits) "longs" avec ceux n -maximaux. Donc $P_k^j(0) = P_k^j$, etc....

Sont-ce les bornes supérieures trouvables pour ces nombres, déjà dans le cas $n = 1$, beaucoup plus petites par rapport à celles connues pour $n = 0$? Nous indiquons seulement quelques inégalités immédiates, une étude détaillée restant à faire : $P_1^1(1) = 6$ (Fig. 16); $\bar{P}_2^1(1) \leq 18$ (Fig. 17); $\bar{C}_2^1(1) \leq 9$ (Fig. 18).

Autres questions nouvelles. Soit π_k^j (resp. Γ_k^j) le plus petit nombre n , tel qu'il y ait un graphe Q avec les propriétés suivantes :

- 1) Q n'a pas de chemins (circuits) hamiltoniens,
- 2) Q est k -connexe,
- 3) pour chaque ensemble de j points de Q , il y a un chemin (circuit) n -maximal qui ne les contient pas.

S'il n'y a aucun graphe Q , satisfaisant à 1) 2) 3), soit $\pi_k^j = \infty$ ($\Gamma_k^j = \infty$). Soient $\bar{\pi}_k^j$ et $\bar{\Gamma}_k^j$ les nombres analogues obtenus en demandant en plus à Q d'être planaire.

Nous connaissons exactement quelques uns de ces nombres, à savoir $\pi_k^j = \bar{\pi}_k^j = \Gamma_k^j = \bar{\Gamma}_k^j = 0$ pour $j \leq 2$ et $k \leq 3$, $\Gamma_1^j = \bar{\Gamma}_1^j = 0$ et $\bar{\pi}_4^j = \bar{\Gamma}_4^j = \infty$. Un seul résultat, concernant l'un des autres nombres, sera indiqué dans la dernière section du travail, qui suit.

Démonstration de l'inégalité $\Gamma_3^3 \leq 56$. En reprenant un idée de Grünbaum [6] (qui devait mener à $\Gamma_3^J = 0$), à savoir celle d'introduire le graphe de Petersen ouvert P' dans chaque point de P' , puis le graphe ainsi obtenu dans chaque point de P' , etc..., la dernière introduction étant faite dans le graphe de Petersen et non dans P' , on constate qu'en bornant le nombre des introductions à deux, on obtient un graphe M avec $10 \cdot 9^2$ points dont les circuits "longs" ont $9 \cdot 8^2$ points et avec la propriété que chaque triple points (de M) est évité par un circuit de longueur $8 \cdot 8^2$ (un rôle essentiel joue ici le fait que pour chaque triple d'arêtes du graphe P de Petersen, il y a un circuit de longueur au moins 8 dans P qui les évite). Mais cet exemple implique seulement l'inégalité $\Gamma_3^3 \leq 64$. On obtient une amélioration en contractant à chaque pas les arêtes du graphe dans lequel l'introduction a été faite. Ainsi, les "longs" circuits de ce nouveau graphe M' , qui a $10(9^2 - 12) - 15$ points, ont la longueur $9(8^2 - 7) - 9 = 9 \cdot 8 \cdot 7$, et chaque triple de points de M' est évité par un circuit de longueur $8(8^2 - 7) - 8 = 8 \cdot 8 \cdot 7$. Cela implique l'inégalité annoncée $\Gamma_3^3 \leq 56$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE, Problèmes plaisants et délectables, N°29, *Rev. Franç. Rech. Opérat.*, 7, (1963), 405-406.
- [2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [3] R.G. BUSACKER et T.L. SAATY, *Finite Graphs and Networks*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [4] T. GALLAI, Problème n°4, dans *Theory of Graphs* (Proc. Colloq. Tihany, 1966), édité par P. Erdős et G. Katona, Academic Press, New York, 1968, P; 362.

- [5] E.J. GRINBERG, Graphes homogènes plans de degré trois sans circuits hamiltoniens, *Latvian Math. Yearbook*, 4, (1968), 51-58 (en russe), Zinatne, Riga, 1968.
- [6] B. GRUNBAUM, Vertices Missed by Longest Paths or Circuits, *J. Comb. Theory (17)*, (1974), 31-38.
- [7] _____, Polytopes, Graphs and Complexes, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970), 1131-1201.
- [8] J.C. HERZ, J.J. DUBY et F. VIGUE, Recherche systématique des des graphes hypohamiltoniens, dans *Théorie des Graphes*, édité par P. Rosenthal, Dunod, Paris, 1967, pp. 153-160.
- [9] J.C. HERZ, T. GAUDIN et P. ROSSI, Solution du Problème N°29, *Rev. Franç. Rech. Opérat.*, 8, (1964), 214-218.
- [10] J.D. HORTON, A Hypotraceable Graph (sous presse).
- [11] W. SCHMITZ, Über längste Wege und Kreise in Graphen, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* (sous presse).
- [12] C. THOMASSEN, Hypohamiltonian and Hypotraceable Graphs, Aarhus Univ. Mat. Inst. Preprint Series 1972-3, n°61.
- [13] W.T. TUTTE, On Hamiltonian Circuits, *J. London Math. Soc.*, 21 (1946), 98-101.
- [14] _____, A theorem on Planar Graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, (1956), 99-116.
- [15] H. WALTHER, Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen, *J. Comb. Theory*, 6, (1969), 1-6.
- [16] _____, Über die Nichtexistenz zweier Knotenpunkte eines Graphen, die alle längsten Kreise fassen, *J. Comb. Theory*, 8, (1970), 330-333.
- [17] _____, Über Kreise in Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.
- [18] T. ZAMFIRESCO, A two-connected Planar Graph without Concurrent Longest Paths, *J. Comb. Theory (B)*, 13, (1972), 116-121.
- [19] _____, On Longest Paths and Circuits in Graphs, *Math. Scand.* (sous presse).
- [20] _____, Graphen, in welchen je zwei Eckpunkte durch einen längsten Weg vermieden werden (sous presse).

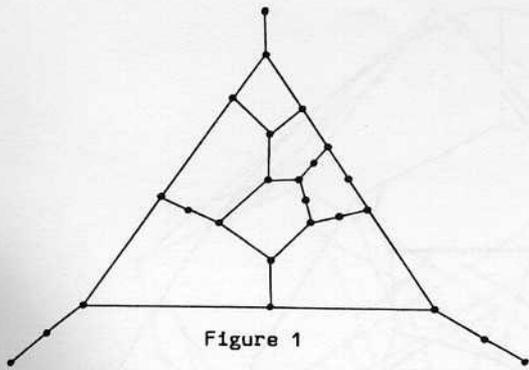


Figure 1

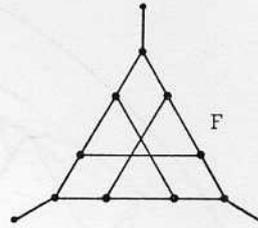


Figure 2

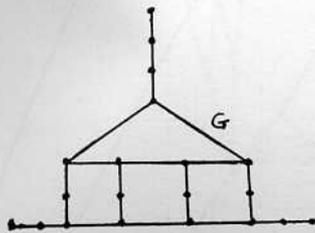


Figure 3

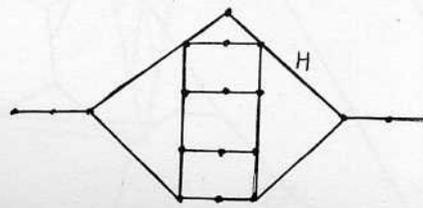


Figure 4

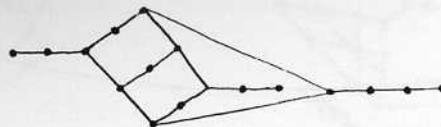


Figure 5.
(par W. Schmitz)

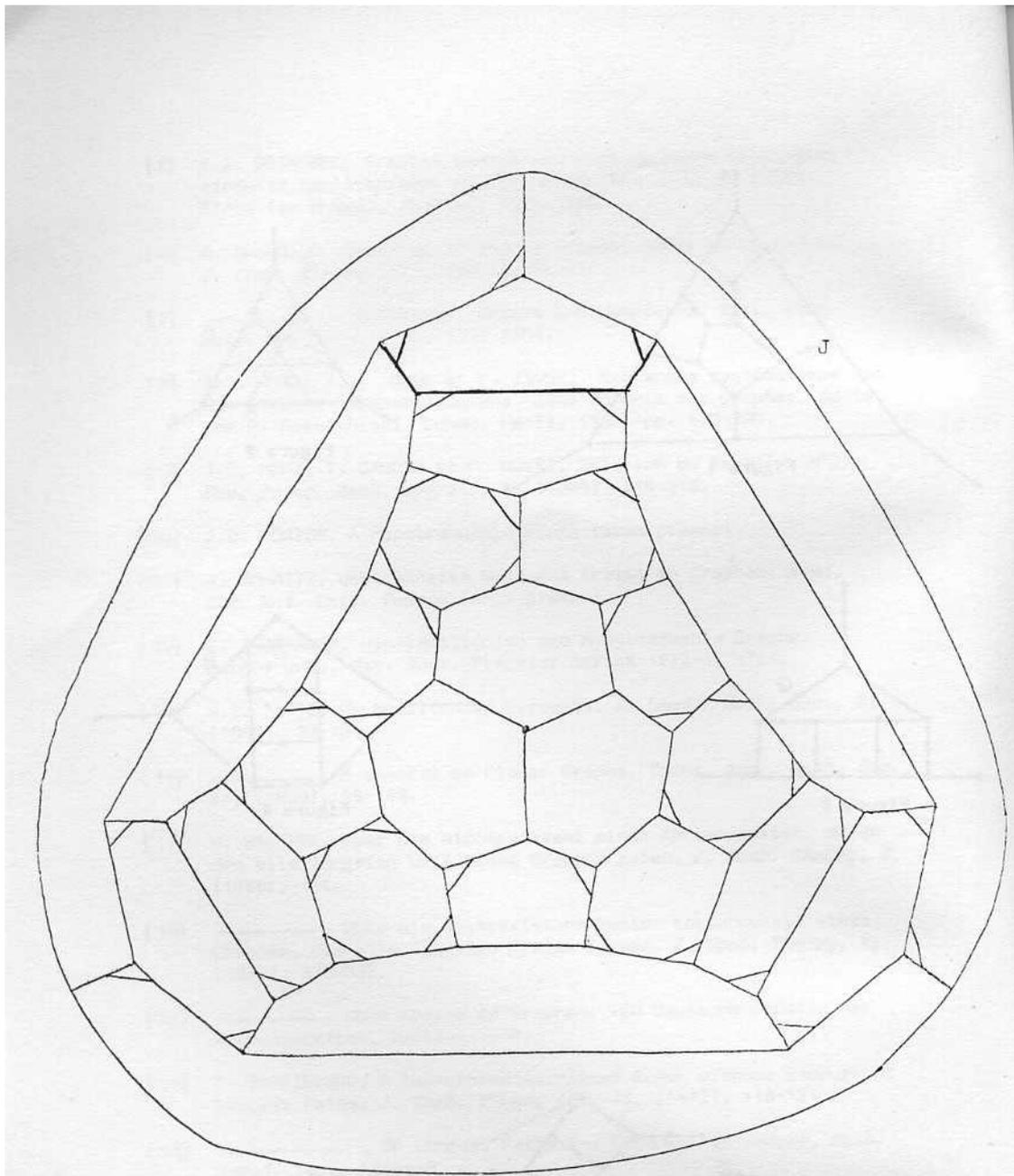


Figure 6.
(par B. Grünbaum)

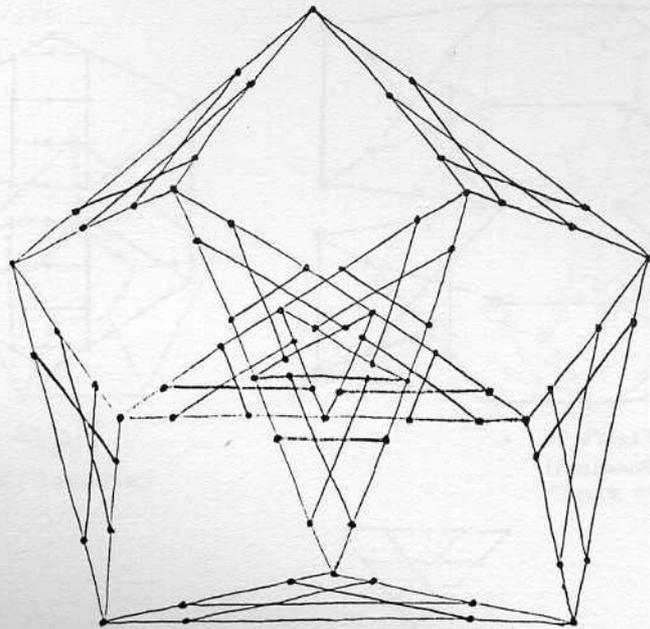


Figure 7

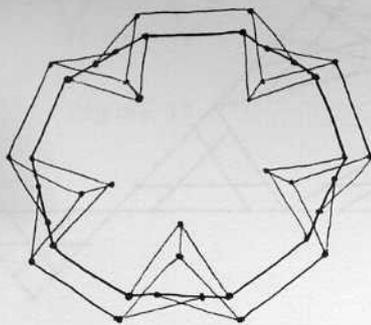


Figure 8.
(par J. Horton)

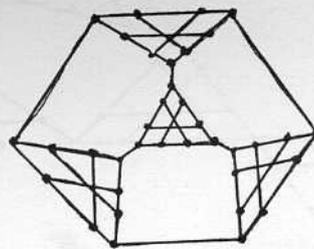


Figure 9

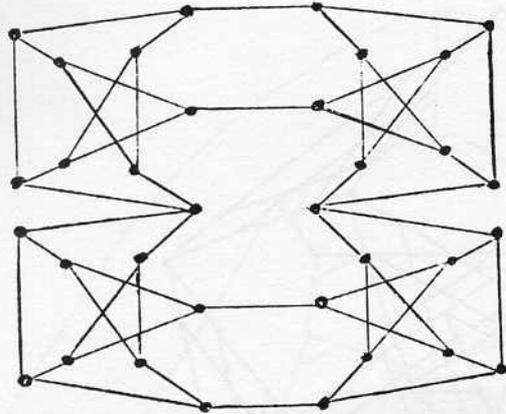


Figure 10
(C. Thomassen)

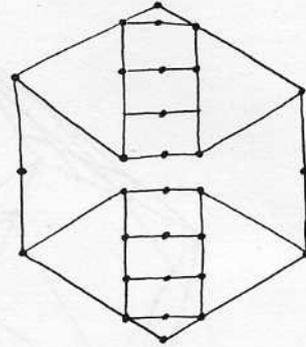


Figure 11.

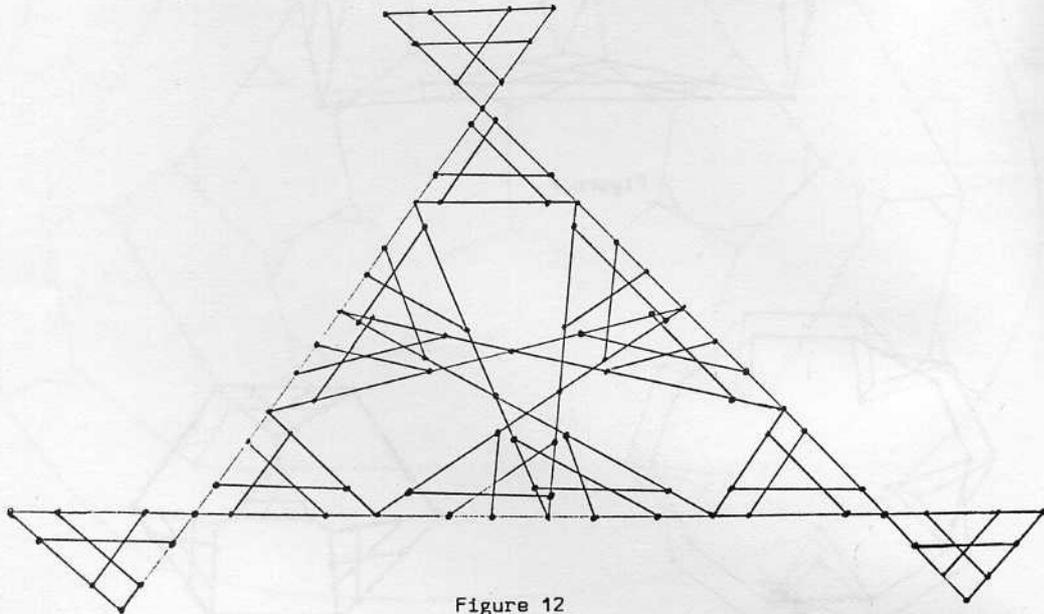


Figure 12

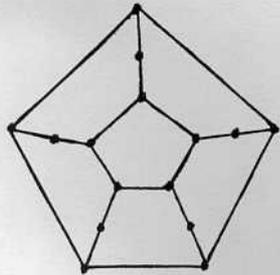


Figure 13
(C. Thomassen)

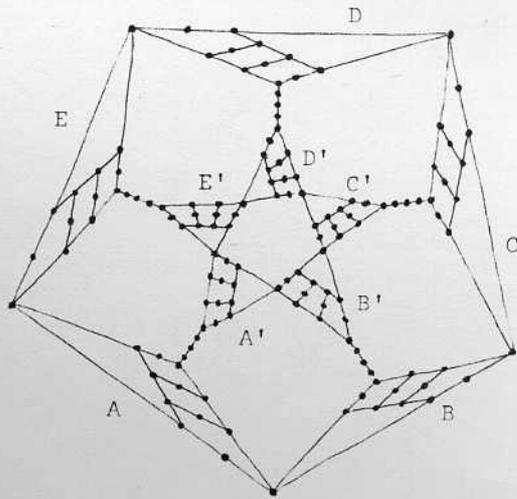


Figure 14

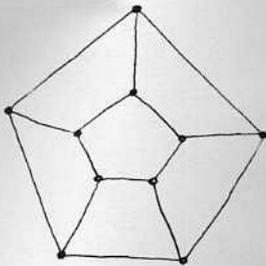


Figure 15.

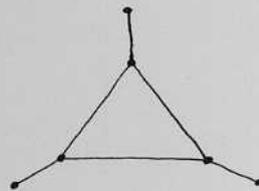


Figure 16.

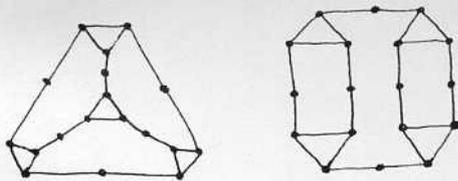


Figure 17.

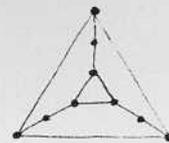


Figure 18.