

Graphen, in welchen je zwei Eckpunkte von einem längsten Weg vermieden werden.

TUDOR ZAMFIRESCU (*)

§ 1. – Wir haben in [7] die Frage nach der Abschätzung der Zahlen P_k^j , C_k^j , \bar{P}_k^j , \bar{C}_k^j gestellt. P_k^j ist die minimale Anzahl der Eckpunkte eines k -fach zusammenhängenden Graphen, der die Eigenschaft besitzt, daß es für je j Eckpunkte einen längsten Weg gibt, der diese vermeidet. P_k^j sei ∞ , wenn es keinen solchen Graphen gibt. C_k^j sei die analoge Zahl, in deren Definition Kreise statt Wege auftreten, und \bar{P}_k^j , \bar{C}_k^j seien die analogen Zahlen für den Fall, daß die betrachteten Graphen zusätzlich planar sind. Damit wurde ein Problem von T. GALLAI [1] verallgemeinert.

In dieser Arbeit geben wir neue (niedrigere) obere Schranken für die Zahlen P_1^2 , \bar{P}_1^2 und \bar{P}_2^2 an, indem wir die Ungleichungen $P_1^2 < 108$ (W. SCHMITZ [5]; B. GRÜNBAUM [2] hatte $P_3^2 < 324$ und damit als erster die Endlichkeit von P_1^2 bewiesen) und $\bar{P}_1^2 < \bar{P}_2^2 < 6050$ (T. ZAMFIRESCU [8]) durch die folgenden verbessern:

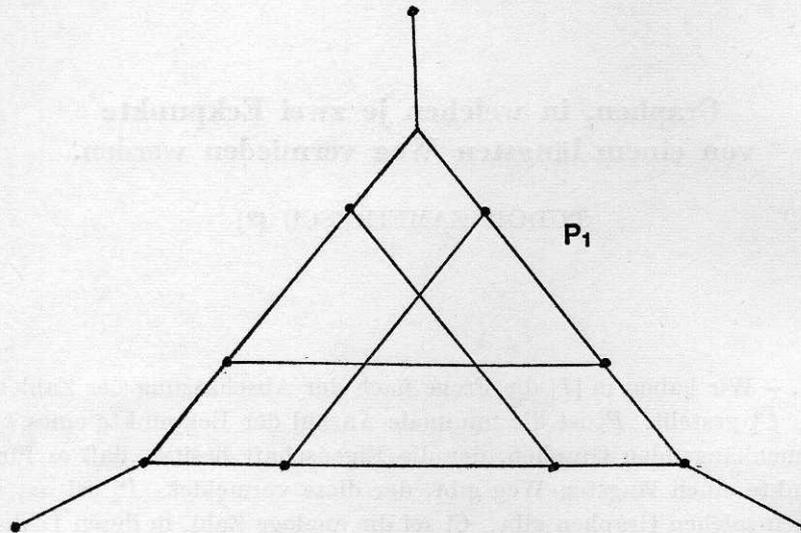
SATZ 1. $P_1^2 < 93$.

SATZ 2. $\bar{P}_1^2 < 308$.

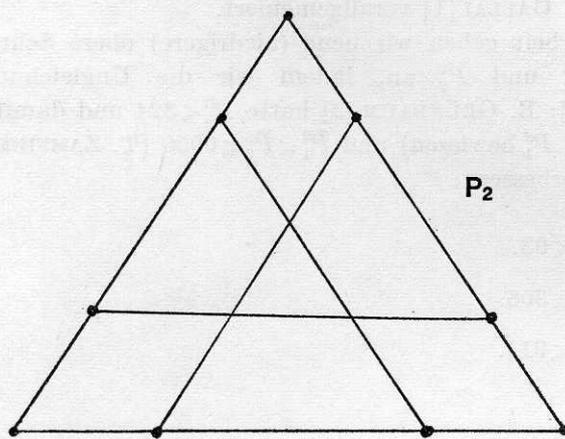
SATZ 3. $\bar{P}_2^2 < 914$.

§ 2. – In diesem Teil wollen wir Satz 1 beweisen. Zu jedem Graphen G , in dem 3 Eckpunkte als Endpunkte und die restlichen als innere Punkte betrachtet werden, und zu jedem Graphen G^* , dessen Eckpunkte höchstens den Grad 3 haben, wurde in [8] ein Graph $\mathcal{Q}(G, G^*)$ konstruiert. Wir bezeichnen nun den Graphen von Petersen, geöffnet in einem Eckpunkt, mit P_1 (sh. Fig. 1), und den Graphen von Petersen minus einen Eckpunkt (und die benachbarten Kanten) mit P_2 (sh. Fig. 2). Wir zeichnen die 3 Eckpunkte

(*) Indirizzo dell'autore: Universität Dortmund - Abteilung Mathematik - 46 Dortmund - Bundesrepublik Deutschland.



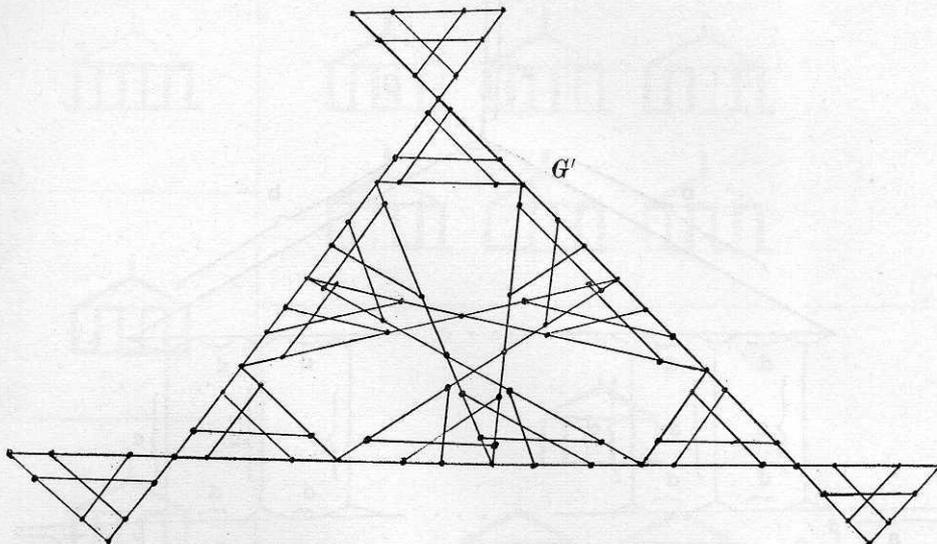
Figur 1



Figur 2

von P_2 vom Grad 2 als Endpunkte aus. Sei $G' = \mathcal{Q}(P_2, P_1)$ (sh. Fig. 3). Dieser Graph ist sehr ähnlich zum Graphen aus Fig. 5 von [5]. G' hat offensichtlich 93 Eckpunkte.

Aus dem Theorem 8 von [8] und seinem Beweis folgt, daß ein Weg W in G' innere Punkte in höchstens 10 Teilgraphen von G' haben kann, die isomorph zu P_2 sind. Darüber hinaus kann W in jedem dieser höchstens 10 Teilgraphen (allerdings mit zwei Ausnahmen, nämlich dort, wo die End-



Figur 3

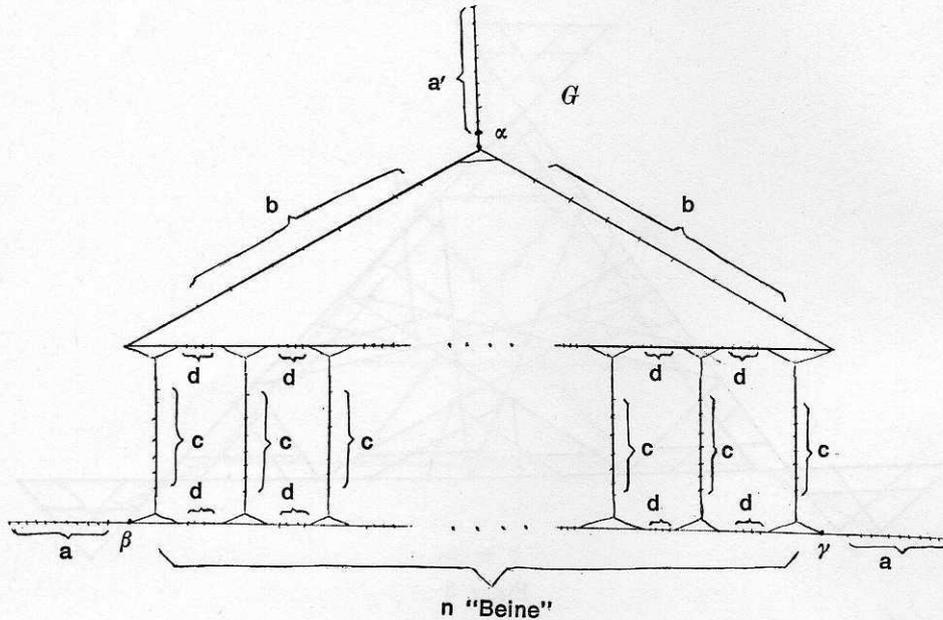
punkte von W liegen) höchstens 8 Eckpunkte haben. Also kann W höchstens 73 Eckpunkte enthalten. Die Existenz solcher Wege mit 73 Eckpunkten ist evident. Wie schon von SCHMITZ [5] bemerkt worden ist, wird jedes vorgegebene Paar von Kanten in P_1 von einem längsten Weg vermieden. Aus dieser Eigenschaft und aus Theorem 8 von [8] folgt nun, daß jedes beliebige Paar von Eckpunkten in G' von einem längsten Weg ausgelassen wird.

§ 3. – In diesem Abschnitt wird Satz 2 bewiesen. Wir werden nicht nur einen geeigneten Graphen mit 308 Eckpunkten angeben und beweisen, daß er unsere Bedingungen erfüllt, sondern auch einen Einblick in unsere Methode geben, die zu seiner Konstruktion geführt hat. Das wird denjenigen, die eine noch bessere Schranke für \bar{P}_1^2 finden wollen, etwas Arbeit ersparen.

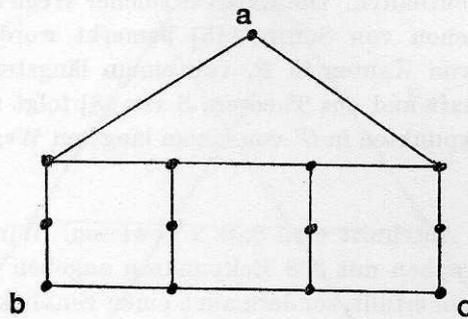
Wir betrachten den Graphen G aus Fig. 4. Jedes kleine Dreieck steht dabei für den Graphen der Fig. 5, und zwar so, daß a dem Eckpunkt mit größtem Winkel im Dreieck entspricht. Setzt man in G

$$a = 2, \quad a' = 3, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = 0, \quad n = 4$$

und kontrahiert alle kleinen Dreiecke zu Punkten, so erhält man den Graphen aus Fig. 1 in [8], dessen uns interessierende Eigenschaften auch G , in seiner allgemeineren Form, hat.



Figur 4



Figur 5

Nehmen wir vorläufig an, daß der Graph G längste Wege jedes in der Fig. 6 gezeigten Typs besitzt. Aus der Eigenschaft des Graphen der Fig. 1 in [8] (die sich entsprechend auf den Graphen der hiesigen Fig. 5 überträgt), für jeden Eckpunkt einen längsten Weg zu besitzen, der diesen vermeidet, und aus der Eigenschaft des Graphen H in Fig. 6 (von der man sich ohne große Mühe überzeugen kann), daß für je zwei Kanten von H ein Weg von einem der dort gezeigten Typen existiert, der diese Kanten vermeidet, folgt dann, daß es für je zwei Punkte von G einen längsten Weg gibt, der beide vermeidet.

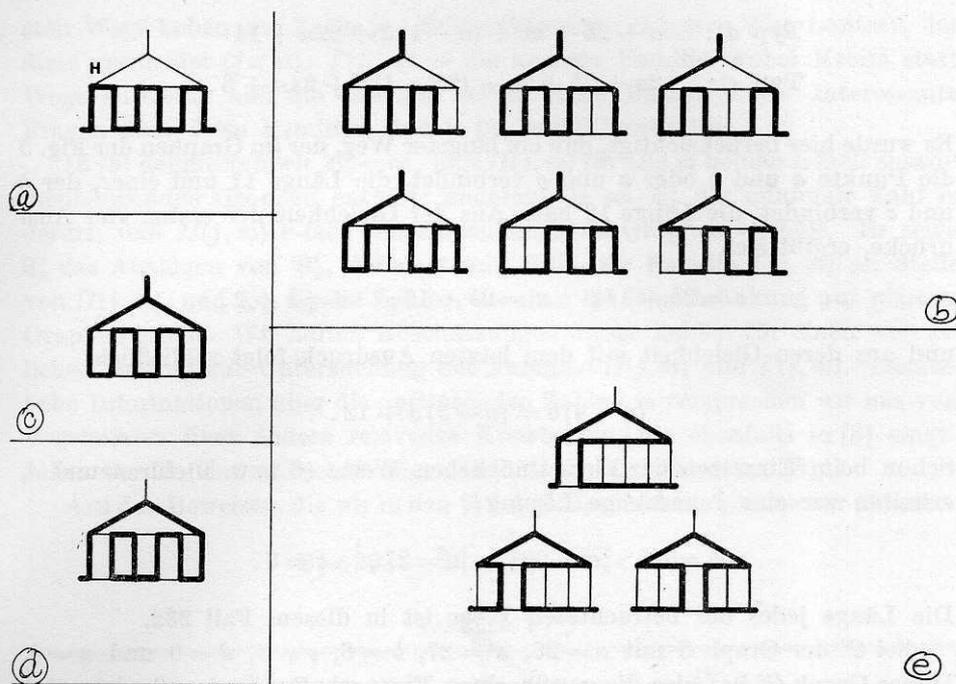


Figure 6

Man beachte, daß der Graph H in Fig. 6 dem Graphen G im Falle $n = 6$ entspricht; die Betrachtung für beliebiges n kann der Leser leicht nachvollziehen. Er wird aber merken, daß n gerade und mindestens 6 sein muß. (Für $n = 4$ können zwei bestimmte «Beine» nicht gleichzeitig vermieden werden. Aus dem gleichen Grund kann ein zum Graphen von Fig. 7 in [5] homöomorpher Graph, der aber mit mehr als drei «Beinen» ausgerüstet ist, nicht an Stelle des Graphen H als Hilfsgraph benutzt werden, wenn er 5 «Beine» hat.)

Es bleibt also, die Zahlen a, a', b, c, d und n so zu bestimmen, daß die Wege der Fig. 6 alle gleich lang werden. Daß dann diese Wege auch längste Wege sein werden, ist offensichtlich. Eine elementare Berechnung ergibt folgende Längen (Anzahl der Eckpunkte) für jeden Weg der 5 aufgeführten Typen (für beliebiges n):

$$\text{Typ } a): \quad 2a + nc + (n-1)d + 22n$$

$$\text{Typ } b): \quad a + a' + b + (n-1)c + (n-1)d + 22n + 1$$

$$\text{Typ } c): \quad a' + 2b + nc + (n-1)d + 22n + 13$$

$$\text{Typ } d): \quad a + 2b + nc + (n-1)d + 22n + 14$$

$$\text{Typ } e): \quad 2a + 2b + 2c + (2n-4)d + 24n + 8.$$

Es wurde hier berücksichtigt, daß ein längster Weg, der im Graphen der Fig. 5 die Punkte a und b oder a und c verbindet, die Länge 11 und einer, der b und c verbindet, die Länge 12 hat. Aus der Gleichheit der ersten vier Ausdrücke, ergibt sich

$$a = 2b + 14; \quad a' = 2b + 15; \quad c = b + 2,$$

und aus deren Gleichheit mit dem letzten Ausdruck folgt schließlich

$$(n-4)b = (n-3)d + 12.$$

Schon beim Einsetzen der kleinstmöglichen Werte (6 bzw. 0) für n und d , erhalten wir eine ganzzahlige Lösung:

$$b = 6, \quad a = 26, \quad a' = 27, \quad c = 8.$$

Die Länge jedes der betrachteten Wege ist in diesem Fall 232.

Sei G'' der Graph G mit $a = 26$, $a' = 27$, $b = 6$, $c = 8$, $d = 0$ und $n = 6$. Dieser Graph G'' hat also die gewünschten Eigenschaften und außerdem eine minimale Anzahl von Eckpunkten, nämlich 308, unter allen hier behandelten Graphen.

§ 4. — Es ist nicht notwendig, noch einen detaillierten Beweis von Satz 3 zu führen, da die Methode, nach der wir mittels des Beispiels von § 3 den Graphen G^\dagger konstruieren, schon mehrmals in [8] angewandt wurde. Die Konstruktion von G^\dagger sei trotzdem kurz dargestellt.

Wir bezeichnen mit G''' den Graphen G bei dem $a = 0$, $a' = 1$, $b = 6$, $c = 8$, $d = 0$, $n = 6$. Dann sind die Grade der Eckpunkte α , β , γ (sh. Fig. 4) beziehungsweise 1, 2, 2. Wir betrachten α , β , γ als Endpunkte von G''' . Der Graph G''' hat 230 Eckpunkte. K_4 bedeute den vollständigen Graphen mit vier Eckpunkten. Setzen wir

$$G^\dagger = \mathfrak{L}(G''', K_4),$$

so haben die längsten Wege in G^\dagger 769 und G^\dagger selbst 914 Eckpunkte. Es folgt:

$$\overline{P}_2^2 < 914.$$

§ 5. — In [2] führte GRÜNBAUM die folgenden Familien von Graphen ein: $II(j, m)$ — die Familie aller Graphen, die 1) m Eckpunkte mehr als ihre läng-

sten Wege haben und 2) für je j Eckpunkte einen längsten Weg besitzen, der diese vermeidet ($j < m$); $\Gamma(j, m)$ — die analoge Familie, wobei Kreise statt Wege auftreten und die Graphen selbst keine Bäume sind. Interessante Fragen über diese Familien sind in [2] und [3] enthalten.

In [8] definierten wir $\mathfrak{P}_k^j = \infty$, falls $\Pi(j, m)$ für alle m keinen k -fach zusammenhängenden Graphen enthält; anderenfalls sei \mathfrak{P}_k^j die minimale Zahl m derart, daß $\Pi(j, m)$ k -fach zusammenhängende Graphen enthält. Es seien \mathfrak{C}_k^j das Analogon von \mathfrak{P}_k^j , definiert mit Hilfe der Familie $\Gamma(j, m)$ an Stelle von $\Pi(j, m)$, und $\overline{\mathfrak{P}}_k^j, \overline{\mathfrak{C}}_k^j$ die Zahlen, die man bei Einschränkung auf planare Graphen erhält. Wir halten Abschätzungen dieser Zahlen für einen wesentlichen Beitrag zur Untersuchung der Familien $\Pi(j, m)$ und $\Gamma(j, m)$. Zusätzliche Informationen über die auftretenden Zahlen m versprechen wir uns von Ergebnissen über andere relevante Konstanten, die ebenfalls in [8] eingeführt worden sind (Abschätzungen enthält die Tabelle 4 von [8]).

Aus den Beweisen, die wir in den §§ 2-4 geführt haben, können wir ableiten:

$$\mathfrak{P}_1^2 < 20; \quad \overline{\mathfrak{P}}_1^2 < 76; \quad \overline{\mathfrak{P}}_2^2 < 145.$$

TABELLE 1 (*)

P_k^j				\overline{P}_k^j			
k^j	1	2	3	k^j	1	2	3
1	$< 12_Z$	< 93	?	1	$< 17_S$	< 308	?
2	$< 32_Z$	$< 270_Z$?	2	$< 32_Z$	< 914	?
3	$< 36_Z$	$< 270_Z$?	3	$< 484_G$	$< 57838_Z$?
4	?	?	?	4	∞	∞	∞

TABELLE 2 (*)

\mathfrak{P}_k^j				$\overline{\mathfrak{P}}_k^j$			
k^j	1	2	3	k^j	1	2	3
1	1_H	< 20	?	1	1_T	76	?
2	1_H	$< 29_Z$?	2	1_T	145	?
3	1_H	$< 29_Z$?	3	$< 6_{G,Z}$	< 1905	?
4	?	?	?	4	∞	∞	∞

(*) Die Buchstaben als Indices sind Literaturhinweise (für beide Tabellen): G: GRÜNBAUM [2], H: HORTON [4], S: SCHMITZ [5], T: THOMASSEN [6], Z: ZAMFIRESCU [8].

(Diese Ergebnisse verbessern die bisher vorhandenen Ungleichungen $\mathfrak{P}_1^2 \leq 26$ [5] und $\overline{\mathfrak{P}}_1^2 < \overline{\mathfrak{P}}_2^2 < 787$ [8].) Die Tabellen 1 und 2 zeigen den up-to-date Stand der Kenntnisse über P_k^j, \overline{P}_k^j , bzw. $\mathfrak{P}_k^j, \overline{\mathfrak{P}}_k^j$.

Es bleibt weiterhin die Frage offen, ob $P_4^1, C_4^1, P_1^3, C_2^3, \overline{P}_1^3$ und \overline{C}_2^3 endlich sind. Daß auch L. DANZER und B. GRÜNBAUM sich damit beschäftigt haben, deutet darauf hin, daß diese Frage nicht gerade trivial ist.

Pervenuto in Redazione il 18 dicembre 1974.

RIASSUNTO

In questa nota costruiamo dei grafi, nei quali per ogni coppia di punti esiste un cammino lunghissimo che non contiene questi punti. Questi esempi sono più piccoli di quelli noti sino ad ora; consideriamo separatamente i casi dei grafi non planari 1-connessi, planari 1-connessi e planari 2-connessi.

SUMMARY

In this paper we construct graphs in which for each two vertices there is a longest path avoiding both of them. These examples are smaller than those previously known; we treat separately the cases of nonplanar 1-connected, planar 1-connected and planar 2-connected graphs.

LITERATUR

- [1] P. ERDÖS - G. KATONA (Herausgeber), *Theory of Graphs*, Proc. Colloq. Tihany, 1966, Academic Press, New York, 1968.
- [2] B. GRÜNBAUM, *Vertices Missed by Longest Paths or Circuits*, J. Comb. Theory, **17** (1974), pp. 31-38.
- [3] B. GRÜNBAUM, *Polytopal Graphs* (erscheint in *Studies in Graph Theory*, Veröffentlichung der Math. Assoc. of America).
- [4] J. D. HORTON, *A hypotraceable graph* (erscheint demnächst).
- [5] W. SCHMITZ, *Über längste Wege und Kreise in Graphen* (erscheint demnächst).
- [6] C. THOMASSEN, *Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs*, Research Report Corr. 75-7, University of Waterloo.
- [7] T. ZAMFIRESCU, *A Two-connected Planar Graph without Concurrent Longest Paths*, J. Comb. Theory, **13** (1972), pp. 116-121.
- [8] T. ZAMFIRESCU, *On longest paths and circuits in graphs* (erscheint in der Math. Scand.).