QUELQUES QUESTIONS SUR LES FAMILLES

CONTINUES DE COURBES

par Tudor Zamfirescu

Il s'agit ici des familles de courbes introduites par B. Grünbaum dans [1] de la façon suivante :

Soit C une courbe de Jordan fermée, dans le plan euclidien et D le domaine borné ayant C comme frontière. Une famille $\mathcal{L}$ d'arcs simples (*courbes*) dans $\overline{D}$ est appelée *famille continue de courbes* si

i) chaque courbe de $\mathcal{L}$ (sauf les extrémités) se trouve dans D et ses extrémités appartiennent à C,

ii) chaque point $p \in C$ est l'extrémité d'une courbe $L(p) \in \mathcal{L}$ et d'une seule,

iii) si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sont différentes, alors $L_1 \cap L_2$ est réduit à un point,

iv) $L(p)$ dépend continûment de $p \in C$.

Ces familles de courbes sont surtout utiles dans l'étude de plusieurs familles de segments ou d'autres lignes associées à un corps convexe plan.

1. Un ensemble connexe maximal de $\mathcal{L}$ dont les éléments passent par un point $a \in D$ s'appelle *fascicule*. Soit A_a la famille de tous les fascicules de $\{L \in \mathcal{L} : a \in L\}$. $\mathcal{L}$ s'appelle *triviale* si elle est un fascicule. On pose

$$P_x(\mathcal{L}) = \{a \in D : \text{card } A_a \geq x\},$$

$$V_x(\mathcal{L}) = \{a \in D : \text{card } A_a = x\}$$

et

$$M_x(\mathcal{L}) = \{a \in D : \text{card } \{L \in \mathcal{L} : a \in L\} \geqslant x\},$$

$$T_x(\mathcal{L}) = \{a \in D : \text{card } \{L \in \mathcal{L} : a \in L\} = x\}.$$

Si $M_{\aleph_0}(\mathcal{L}) = \phi$, le domaine D admet une partition naturelle en deux ensembles E et F, dont les points se trouvent sur exactement un nombre pair - respectivement impair - de courbes de $\mathcal{L}$. Lequel est le plus grand ?

Nous avons démontré [4, 10] que, pour tout n pair,

1) $V_n(\mathcal{L})$ est rare,
2) $P_n(\mathcal{L}) \neq \phi \Rightarrow \text{int } P_{n+1}(\mathcal{L}) \neq \phi$.

Donc, toujours dans l'hypothèse $M_{\aleph_0}(\mathcal{L}) = \phi$, E est de la première catégorie de Baire et F de la deuxième.
L'ensemble E *est-il rare ?* [10]

2. En étendant un résultat de Grünbaum [1], nous avons démontré dans [5] que si $\mathcal{L}$ n'est pas triviale, alors

$$\text{int } (L \cap M_2(\mathcal{L})) \subset T_2(\mathcal{L})$$

(il s'agit de l'intérieur relatif à L) sur trois courbes de $\mathcal{L}$ tout au plus. D'un théorème de [6] il résulte que

$$\text{int } (L \cap M_2(\mathcal{L})) \subset T_4(\mathcal{L})$$

sur une courbe de $\mathcal{L}$ tout au plus. Les nombres 3 et 1 sont les meilleurs possibles. C. Ivan [3] a démontré que

$$\text{int } (L \cap M_2(\mathcal{L})) \subset T_{2k}(\mathcal{L}) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sur une famille dénombrable de courbes L tout au plus.

Y a-t-il une famille (toujours nontriviale) $\mathcal{L}$ *et un nombre* k *tels que l'inclusion précédente soit vraiment satisfaite pour une infinité de courbes* L *?*

Sur combien de courbes L *a-t-on*

$$\mathrm{int}\,(L \cap M_2(\mathcal{L})) \subset T_6(\mathcal{L}) \ ?$$

3. On dit [8, 10] que $\mathcal{L}$ *a la propriété* P_3 *dans* $p \in C$ si

$$\left.\begin{array}{ll} p_n, q_n \in C & (n \in \mathbb{N}) \\ L(p_n) \neq L(q_n) & (n \in \mathbb{N}) \\ p_n \to p & \\ q_n \to p & \end{array}\right\} \Rightarrow \{L(p_n) \cap L(q_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ est convergent,}$$

ce qui est significatif seulement pour $p = q$. Si $\mathcal{L}$ a la propriété P_3 dans chaque point de C, alors elle est appelée *famille de type* C_3. Nous avons des exemples de familles $\mathcal{L}$ du type C_3, telles que $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}) \neq \phi$.

Y a-t-il une famille continue de courbes $\mathcal{L}$ *avec* $V_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}) = \mathbb{C}$? [10]

4. On dit [10] que L *est de type* C_2 si

$$\left.\begin{array}{ll} p \in C & \\ p_n \in C & (n \in \mathbb{N}) \\ p_n \to p & \\ L(p_n) \neq L(P) & (n \in \mathbb{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow \{L(p_n) \cap L(p)\} \text{ est convergent.}$$

Evidemment, chaque famille de type C_3 est aussi du type C_2, mais la réciproque n'est pas vraie [10].

Il découle aisément de quelques résultats de Grünbaum [1] que

$$T(\mathcal{L}) \subset \mathrm{int}\, M_2(\mathcal{L}) \subset \mathrm{int}\, \overline{T(\mathcal{L})},$$

où $T(\mathcal{L})$ désigne la réunion de tous les triangles de D, un *triangle* étant le domaine de Jordan déterminé par trois courbes non concourantes de $\mathcal{L}$.

Nous avons démontré dans [9] qu'en fait

$$T(\mathcal{L}) = \operatorname{int} M_2(\mathcal{L}).$$

Mais il y a des familles de type C_2 telles que $T(\mathcal{L}) \neq \operatorname{int} \overline{T(\mathcal{L})}$ [10]. D'autre part, $T(\mathcal{L}) = \operatorname{int} \overline{T(\mathcal{L})}$ pour toute famille de type C_3 [10].

Cette égalité est-elle vraie si les courbes de $\mathcal{L}$ sont toutes des segments ? [10]

5. Dans [7] nous avons établi que $M_5(\mathcal{L}) = \phi$ implique $T_2(\mathcal{L}) \neq \phi$. D'autre part, si $\mathcal{L}$ a la propriété P_3 au moins dans un point de C, alors $T_2(\mathcal{L})$ est non seulement non vide, mais même non dénombrable [8].

Il est facile d'en déduire que

$$T_2(\mathcal{L}) \subset \partial T(\mathcal{L}).$$

Si $\mathcal{L}$ est une famille non triviale du type C_3, alors $T(\mathcal{L})$ est un domaine de Jordan et $T_2(\mathcal{L})$ est dense et de la deuxième catégorie de Baire sur $\partial T(\mathcal{L})$ [8]. Mais, dans le cas général, la conjecture de Grünbaum [2]

$$T_2(\mathcal{L}) \neq \phi$$

reste ouverte. On peut aussi se poser les questions intermédiaires :

Est-ce que $M_6(\mathcal{L}) = \phi \Rightarrow T_2(\mathcal{L}) \neq \phi$?

Est-il vrai que $T_2(\mathcal{L}) \neq \phi$ si $\mathcal{L}$ est du type C_2 ?

Est-il vrai que $T_2(\mathcal{L}) \neq \phi$ si les courbes de $\mathcal{L}$ sont toutes des segments ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Grünbaum, *Continuous families of curves*, Can. J. Math. 18 (1966) 529-537.

[2] - " - , Arrangements and Spreads, Lectures delivered at a regional conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma (1971).

[3] C. Ivan, *On spreads of curves*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 55 (1973) 46-49.

[4] T. Zamfirescu, *On planar continuous families of curves*, Can. J. Math. 21 (1969) 513-530.

[5] - " - , *Sur les familles continues de courbes I*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 42 (1967) 771-774.

[6] - " - , *Sur les familles continues de courbes II*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 43 (1967) 13-17.

[7] - " - , *Sur les familles continues de courbes V*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 53 (1972) 505-507.

[8] - " - , *On continuous families of curves VI*, à paraître.

[9] - " - , *Sur les points multiples d'une famille continue de courbes*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 18 (1969) 103-112.

[10] - " - , *Spreads*, à paraître dans les Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.