

TUDOR ZAMFIRESCU

SULLE FAMIGLIE CONTINUE DI CURVE. VII (*)

SUMMARY - *In this paper we present a theorem regarding the mutual positions of the various sets of multiple points in a spread. It will follow that the set of points of finite maximal multiplicity n (if such an n exists) is open.*

Lo studio delle famiglie continue di curve è motivato in primo luogo per le loro applicazioni nella teoria degli insiemi convessi. B. Grünbaum è stato quello che, nel 1966, ha constatato il carattere topologico comune di molti risultati ottenuti su alcune famiglie di archi di curve, in generale segmenti, associati ad un corpo convesso piano. Si può consultare per dettagli storici e bibliografici il lavoro di Grünbaum [2].

Sia C una curva di Jordan chiusa nel piano euclideo e D il dominio limitato che ha C come frontiera. Una famiglia \mathcal{L} di archi di Jordan, che saranno chiamati in seguito *curve*, in \bar{D} (la chiusura topologica di D) si chiama *famiglia continua di curve* se [1]:

- i) ogni curva $L \in \mathcal{L}$ (escludendo le sue estremità) si trova in D e le sue estremità appartengono a C ,
- ii) ogni punto $p \in C$ è l'estremità di una e una sola curva $L(p) \in \mathcal{L}$,

Classificazione per soggetto AMS (MOS) 1970: 54F99 e 57A05.

(*) Ricerca eseguita dall'A. in qualità di « professore visitatore » presso l'Istituto di Geometria dell'Università di Torino.

iii) se L_1, L_2 sono due curve distinte in \mathcal{Q} , allora $L_1 \cap L_2$ ha sempre un singolo punto,

iv) la curva $L(p)$ dipende in modo continuo da $p \in C$.

In questa definizione consideriamo \mathcal{Q} come sottoinsieme dello spazio degli insiemi compatti del piano, munito della metrica di Hausdorff.

Un sottoinsieme connesso (nella topologia di \mathcal{Q}) massimale di una famiglia continua di curve \mathcal{Q} , i cui elementi sono curve tutte passanti per uno stesso punto, si chiama *fascio* [4] e il punto comune è detto *centro* (per i fasci che contengono più di una curva).

Siano $a \in D$, \mathfrak{A} la famiglia di tutti i fasci,

$$\mathfrak{A}_a = \{ \{L \in F : a \in L\} : F \in \mathfrak{A} \text{ e } a \in \cup F \}$$

e x un numero cardinale; denotiamo

$$P_x(\mathcal{Q}) = \{a \in D : \text{card } \mathfrak{A}_a \geq x\},$$

$$V_x(\mathcal{Q}) = \{a \in D : \text{card } \mathfrak{A}_a = x\},$$

$$M_x(\mathcal{Q}) = \{a \in D : \text{card } \{L \in \mathcal{Q} : a \in L\} \geq x\},$$

$$T_x(\mathcal{Q}) = \{a \in D : \text{card } \{L \in \mathcal{Q} : a \in L\} = x\}.$$

Ovviamente

$$V_x(\mathcal{Q}) \subset T_x(\mathcal{Q}) \cup T_c(\mathcal{Q}),$$

$$P_x(\mathcal{Q}) \subset M_x(\mathcal{Q}).$$

La componente limitata del complementare dell'unione di tre curve non-concorrente di \mathcal{Q} si chiama *triangolo*. Si indica con $T(\mathcal{Q})$ l'unione di tutti i triangoli in D .

Siano anche $[r]^+$ il più piccolo numero intero $\geq r$ e $[r]^{++}$ il più piccolo numero pari $\geq r$.

In questa Nota si presenta un teorema riguardante la mutua posizione degli insiemi $P_n(\mathcal{Q})$. Si ottiene in particolare come Corollario che $T_n(\mathcal{Q})$ è aperto per il più grande n con $T_n(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$, se un tale n esiste ed è finito.

TEOREMA. Per ogni intero n e ogni numero dispari k tali che $3 \leq k \leq n+1$,

$$P_n(\mathcal{Q}) \subset \text{int } P_k(\mathcal{Q}) \cup \text{bd int } P_{\left[\begin{smallmatrix} k-1 \\ k-2 \end{smallmatrix} n \right]^{++} - 1}(\mathcal{Q}).$$

(Con $\text{int } A$ e $\text{bd } A$ si indica l'interno e la frontiera di A .)

Dimostrazione: Sia $a \in P_n(\varrho)$. Esistono i punti

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1} \in C,$$

tali che

$$\bigcap_{i=1}^n L(x_i) = \{a\}, \quad x_{n+1} = -x_1,$$

$$y_i \in x_i x_{i+1}, \quad a \notin L(y_i) \quad (i=1, \dots, n).$$

Consideriamo la funzione $h: \{1, \dots, n\} \rightarrow \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ così definita:

$$h(i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } a \text{ si trova a sinistra di} \\ & L(y_i) \text{ riguardando da } y_i \\ -\frac{1}{2} & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

Osserviamo che dopo una nuova notazione delle estremità di $L(x_i)$ e $L(y_i)$ la funzione h si trasforma in h^* con

$$h^*(i) = \begin{cases} h(i+1) & \text{per } i=1, \dots, n-1 \\ -h(1) & \text{per } i=n. \end{cases}$$

Infatti dopo la nuova notazione delle x_i con x_{i-1} ($i=2, \dots, n+1$), della $-x_2$ con x_{n+1} , delle y_j con y_{j-1} ($j=2, \dots, n$) e della $-y_1$ con y_n , la funzione h si trasforma in h^* . Osserviamo anche che se la variazione totale di h non oltrepassa $k-2$, allora dopo un'eventuale nuova notazione, h si trasforma in h^* di variazione totale al più $k-3$. Infatti, se la variazione totale è esattamente $k-2$ e se $h(1)=h(2)=\dots=h(\xi) \neq h(\xi+1)$, allora è sufficiente procedere alla rinotazione precedente ξ volte. Rimangono due casi da trattare:

Caso I: la variazione totale di h è superiore a $k-2$.

In questo caso esistono k numeri

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n,$$

tali che a sia fra $L(y_j) \cap L(x_1)$ e $L(y_{i_j+1}) \cap L(x_1)$ sulla $L(x_1)$ per ogni $j \leq k-1$. Allora, se P è la componente connessa che contiene a del complementare di

$$\bigcup_{j=1}^k L(y_j),$$

si deduce dal Lemma 1 di Grünbaum [1] che $P \subset P_k(\varnothing)$. Dunque

$$a \in \text{int } P_k(\varnothing).$$

Si noti che il Caso I è possibile solo se $k \neq n+1$.

Caso II: la variazione totale di h è inferiore a $k-2$.

Supponiamo che la variazione totale di h sia esattamente $k-3$. Si verifica facilmente che, se

$$m = \max \{k : \exists i \geq 0 \text{ con } h(i+1) = h(i+2) = \dots = h(i+k)\},$$

allora

$$m \geq \left[\frac{n}{k-2} \right]^+.$$

Dopo aver eventualmente applicato più volte la rinotazione introdotta all'inizio, si può arrivare ad una funzione h tale che

$$h(1) = h(2) = \dots = h(m) = \frac{1}{2}.$$

Si hanno due possibilità, o

$$\text{card } h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \geq \left[\frac{n-m}{2} \right]^+ + m$$

oppure

$$\text{card } h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left[\frac{n-m}{2} \right]^+.$$

Nel secondo caso procediamo ancora m volte alla rinotazione ed

otteniamo

$$\text{card } h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor^+ + m.$$

Poichè i due casi sono simmetrici, trattiamo soltanto il primo. Ma prima di continuare, consideriamo anche il caso nel quale h ha variazione totale minore di $k-3$. Allora si arriva, procedendo se necessario ad una rinotazione, ad una variazione totale pari di h e si ottiene la stessa disuguaglianza per $\text{card } h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ oppure $\text{card } h^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, e una più forte per m . Il caso meno felice quindi, è proprio quello che abbiamo già trattato.

Sia V un intorno di a aperto, connesso e disgiunto dalle $L(y_1), \dots, L(y_n)$. Sia W il sottoinsieme di V di tutti i punti che si trovano a sinistra di $L(x_1)$ riguardando da x_1 e a destra di $L(x_2)$ riguardando da x_2 . Sia anche $b \in W$. Se

$$h(i_j) = \frac{1}{2} \quad (j=1, \dots, q),$$

con

$$q \geq \left\lfloor \frac{n-m}{2} \right\rfloor^+ + m = \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor^+,$$

allora possiamo trovare i punti $z_j \in y_{i_j}x_{i_j+1}$ ($j=1, \dots, q$) e $z'_j \in x_{i_j}y_{i_j}$ ($j=2, \dots, q$) tali che

$$b \in L(z_j) \quad (j=1, \dots, q)$$

e

$$b \in L(z'_j) \quad (j=2, \dots, q).$$

Dunque $W \subset M_{2q-1}(\mathcal{Q})$. Poichè tra le due curve qualsiasi delle $2q-1$ precedenti esiste sempre una $L(x_i)$, abbiamo anche $W \subset P_{2q-1}(\mathcal{Q})$. In quanto W è aperta e $a \in \text{bd } W$, abbiamo

$$a \in \overline{\text{int } P_{2q-1}(\mathcal{Q})},$$

dove

$$q \geq \left[\frac{n+m}{2} \right]^+ \geq \left[\frac{1}{2} \left(n + \left[\frac{n}{k-2} \right]^+ \right) \right]^+ \\ = \left[\frac{1}{2} \left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^+ \right]^+.$$

Poichè

$$2q - 1 \geq 2 \left[\frac{1}{2} \left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^+ \right]^+ - 1 \\ = \left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^{++} - 1,$$

deduciamo

$$a \in \text{int } P_{\left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^{++} - 1}(\varrho)$$

e, in quanto si ha $\left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^{++} - 1 \geq k$,

$$a \in \text{int } P_k(\varrho) \cup \text{bd int } P_{\left[\frac{k-1}{k-2} n \right]^{++} - 1}(\varrho).$$

La dimostrazione è terminata.

Per $k=3$, abbiamo il

COROLLARIO 1. Per ogni $n \geq 2$,

$$P_n(\varrho) \subset \text{int } P_3(\varrho) \cup \text{bd int } P_{2n-1}(\varrho).$$

Se si tiene conto che $P_n(\varrho) \subset M_n(\varrho)$, $\text{int } M_3(\varrho) = T(\varrho)$ [5] e $M_n(\varrho) \subset P_n(\varrho) \cup F(\varrho)$, dove con $F(\varrho)$ si indica l'insieme dei centri di tutti i fasci che contengono più di una curva, si ottiene il

COROLLARIO 2 [5]. Per ogni $n \geq 2$,

$$M_n(\varrho) \subset T(\varrho) \cup F(\varrho) \cup \text{bd int } M_{2n-1}(\varrho).$$

Per $k=n+1$, abbiamo il

COROLLARIO 3 [6]. Per ogni numero pari $n \geq 2$,

$$P_n(\varrho) \subset \overline{\text{int } P_{n+1}(\varrho)} ,$$

dunque $V_n(\varrho)$ è raro e $P_n(\varrho) \neq \emptyset$ implica $\text{int } P_{n+1}(\varrho) \neq \emptyset$.

COROLLARIO 4 [3]. Per ogni numero pari $n \geq 2$,

$$M_n(\varrho) \subset \overline{\text{int } M_{n+1}(\varrho)} ,$$

dunque $T_n(\varrho)$ è raro e $M_n(\varrho) \neq F(\varrho)$ implica $\text{int } M_{n+1}(\varrho) \neq \emptyset$.

COROLLARIO 5. Se l'estremo superiore dell'insieme dei numeri cardinali n tali che $P_n(\varrho) \neq \emptyset$ è un numero finito m , allora m è dispari e $P_m(\varrho)$ è aperto.

Infatti, se m è pari, allora per il Corollario 3,

$$\text{int } P_{m+1}(\varrho) \neq \emptyset ,$$

che è assurdo. Dunque m è dispari e, secondo il Teorema (con $n=k=m$),

$$\begin{aligned} P_m(\varrho) &\subset \text{int } P_m(\varrho) \cup \text{bd int } P_{\left[\frac{m-1}{m-2} m\right]++-1}(\varrho) \\ &= \text{int } P_m(\varrho) \cup \text{bd int } P_{m+2}(\varrho) \\ &= \text{int } P_m(\varrho) . \end{aligned}$$

Ora è ovvio il

COROLLARIO 6. Se l'estremo superiore dell'insieme dei numeri cardinali n tali che $M_n(\varrho) \neq \emptyset$ è un numero finito m , allora m è dispari e $M_m(\varrho)$ è aperto.

L'A. ringrazia il dott. M. Burzio per la sua collaborazione nella redazione in lingua italiana della presente Nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, Can. J. Math. 18 (1966), 529-537.
- [2] — — *Arrangements and Spreads*, Lectures delivered at a regional conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma (1971).
- [3] T. ZAMFIRESCU, *On planar continuous families of curves*, Can. J. Math. 21 (1969), 513-530.
- [4] — — *Sur les familles continues de courbes I*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 42 (1967), 771-774.
- [5] — — *Sur les points multiples d'une famille continue de courbes*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 18 (1969), 103-112.
- [6] — — *Spreads*, in corso di pubblicazione, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

TUDOR ZAMFIRESCU, Department of Mathematics, University of Dortmund, Germania.