ESTRATTO DAGLI
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
I. - Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

Vol. 118 (1984)

Ellipsoïdes et hyperboloïdes généralisés

Nota di TUDOR ZAMFIRESCU
presentata dal Socio corrispondente Franco FAVA
nell'adunanza del 6 Giugno 1984

Sunto. *Nous généralisons ici les notions d'ellipse et hyperbole définies à l'aide des points focaux au cas où ces points deviennent deux (ou plusieurs) ensembles convexes compacts et la dimension de l'espace est quelconque. Nous étudions ensuite, du point de vue des corps convexes, les surfaces plus générales ainsi obtenues. Une attention spéciale est donnée au cas où les surfaces considerées sont homofocales.*

Dans ce travail nous associons à une collection finie d'ensembles convexes compacts et à un nombre positif une surface que nous appelons ellipsoïde généralisé. Nous démontrons sa convexité et différentiabilité. En outre nous nous proposons de trouver des bornes inférieures et supérieures pour la distance de Hausdorff entre les ellipsoïdes généralisés homofocaux. Ensuite, nous définissons les hyperboloïdes généralisés dont nous vérifions la différentiabilité. Enfin nous retrouvons la bien connue propriété d'orthogonalité entre les ellipsoïdes et les hyperboloïdes homofocaux, à ces surfaces plus générales.

Notations

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors $[x, y]$ désigne le segment joignant x et y, $[x, y)$ la semidroite ayant une extrémité dans x et contenant y, (x, y) la droite passant par x et y, $\|x\|$ la norme euclidienne de x, $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire entre x et y. Aussi,

$$S^{n-1}=\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

$$d(M, N)= \inf_{\substack{x\in M\\ y\in N}} \|x-y\|, \quad d(x, M)=d(\{x\}, M) \quad (M, N \subset \mathbb{R}^n),$$

$p_X(x)$ représente la projection de x sur X, où $x \in \mathbb{R}^n$ et X est un ensemble convexe fermé. Si $M \subset \mathbb{R}^n$, alors $[M]$ est l'enveloppe convexe, $\bar{M}$ la fermeture et $bd\,M$ la frontière de M. On utilise aussi la fonction d'appui

$$H_C(\omega) = \sup_{x \in C} \langle x, \omega \rangle \quad (\omega \in S^{n-1})$$

et la fonction "image sphérique"

$\nu_C(x) = \{\omega \in S^{n-1} : \langle \omega, x - y \rangle \geqslant 0$ pour tout $y \in C\} \quad (x \in bd\, C)$,

associées à chaque corps convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.

Ellipsoïdes généralisés

Considérons dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ les ensembles convexes compacts $C_1, \dots, C_m$ et le nombre

$$k > \sup_{\substack{x \in C_j \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \sum_{i=1}^{m} d(x, C_i).$$

Nous appelons *k-ellipsoïde généralisé aux ensembles focaux* $C_1, \dots, C_m$ ou simplement *ellipsoïde généralisé* l'ensemble

$$\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m} d(x, C_i) = k\}$$

Dans le cas $m = n = 2$, les ellipsoïdes généralisés ont été considérés par F.A. Valentine dans [3], Exercise 10.4, où meur convexité est mentionée. Deux autres généralisations des ellipses se trouvent dans [1] et [2].

Soit E un k-ellipsoïde généralisé aux ensembles focaux $C_1, \dots, C_m$ et considérons le point $a \in E$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{m} \|a - p_{C_i}(a)\| = k.$$

Il est bien connu que l'hyperplan $P_i(a)$ passant par $p_{C_i}(a)$ et orthogonal à $(a, p_{C_i}(a))$ est un hyperplan d'appui de C_i. Nous voyons que

$$\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m} d(x, P_i(a)) = k\}$$

est un hyperplan et que

$$G_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m} \|x - p_{C_i}(a)\| = k\}$$

est une hypersurface algébrique.

Lemme 1. *Les ensembles*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m} d(x, C_i) < k\}$$

et

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{m} d(x, C_i) \leqslant k\}$$

sont convexes.

Démonstration. L'assertion résulte du fait bien connu que les m fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_i(x) = d(x, C_i) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

sont convexes.

Lemme 2. *Pour tout point* $a \in \mathrm{bd}\, A$, *il y a un demi-espace ouvert* $E_+(a)$ *borné par* Π_a *et un voisinage* V_a *de* a *tels que*

$$\sum_{i=1}^{m} d(y, C_i) > k$$

pour tout point $y \in V_a \cap E_+(a)$.

Démonstration. Evidemment, $a \in E$. Puisque

$$E \cap \bigcup_{i=1}^{m} C_i = \emptyset ,$$

il y a un voisinage V_a^i de a séparé de l'intérieur de C_i par $P_i(a)$ $(i = 1, \dots, m)$; donc chaque hyperplan $P_i(a)$ sépare

$$V_a' = \bigcap_{i=1}^{m} V_a^i$$

de l'intérieur de C_i.

En vertu du Lemme 1, A est convexe. En outre, si $x \in V_a' \cap \Pi_a$, alors

$$\sum_{i=1}^{m} d(x, C_i) = \sum_{i=1}^{m} \|x - p_{C_i}(x)\| \geqslant \sum_{i=1}^{m} \|x - y_i\|$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} \|x - p_{P_i(a)}(x)\| = k ,$$

où

$$\{y_i\} = (x, p_{C_i}(x)) \cap P_i(a).$$

Donc Π_a est un hyperplan d'appui de $\overline{A}$.

Puisque $C_i \subset A$, si c est un point situé dans le demi-espace ouvert $E_+(a)$ borné par Π_a et disjoint de A, alors c et C_i sont séparés par Π_a. Soit maintenant

$$V_a = \{x \in V_a' : p_{\Pi_a}(x) \in V_a'\} .$$

Si

$$y \in V_a \cap E_+(a),$$

alors

$$\sum_{i=1}^{m} d(y, C_i) > \sum_{i=1}^{m} d(p_{\Pi_a}(y), C_i) \geqslant k$$

et le lemme est prouvé.

Théorème 1. *Les ellipsoïdes généralisés sont des hypersurfaces convexes différentiables.*

Démonstration. Pour démontrer que E est une hypersurface convexe, il ne reste qu'à prouver l'égalité

$$E = \overline{A} - A$$

à savoir l'inclusion $E \subset \overline{A} - A$, car l'autre est triviale. Evidemment, $E \cap A = \emptyset$, mais supposons qu'il existe un point $u \in E - \overline{A}$. Si $v \in A$ et

$$r \in bd\, A \cap [u, v] ,$$

alors, d'après le Lemme 2, il y a un voisinage V_r de r et un demi-espace $E_+(r)$ avec Π_r comme frontière tels que

$$V_r \cap E_+(r) \cap B = \emptyset \ ,$$

donc

$$[u, r] - B \neq \emptyset \ ;$$

mais u, $r \in B$, d'où B n'est pas convexe, ce qui contredit le Lemme 1.

La démonstration sera terminée lorsqu'on prouvera la différentiabilité de E. Puisque l'hypersurface algébrique convexe G_a admet un hyperplan tangent en $a \in E$, il suffit de montrer que $G_a \subset B$. En effet, soit $b \in G_a$. On a

$$\sum_{i=1}^{m} d(b, C_i) = \sum_{i=1}^{m} \|b - p_{C_i}(b)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|b - p_{C_i}(a)\| = k,$$

ce qui vérifie l'inclusion précédente.

Dans le cas $m = 2$, on déduit de la bien connue propriété de reflexion de l'ellipsoïde G_a la géneralisation suivante, mentionnée aussi, pour $n = 2$, par F. A. Valentine [3].

Si $m = 2$ et E est un mirroir, alors dans chaque point $a \in E$ le point $p_{C_1}(a)$ voit une image de $p_{C_2}(a)$.

La distance entre les ellipsoïdes généralisés homofocaux

Evidemment, le k_1-ellipsoïde généralisé avec les ensembles focaux C_1, C_2 est contenu dans la composante bornée du complémentaire du k_2-ellipsoïde généralisé aux mêmes ensembles focaux, si $k_1 < k_2$. Nous allons calculer ici des bornes (inférieures et supérieures) assez simples pour la distance de Hausdorff entre les deux hypersurfaces.

Soient donc $k_1 < k_2$ et E_i un k_i-ellipsoïde généralisé ($i = 1, 2$). Faisons les notations suivantes:

$$b = (k_2 - k_1)/2 \quad , \; d_\omega = |H_{[E_1]}(\omega) - H_{[E_2]}(\omega)| \, .$$

En vertu du Théorème 1, $\nu_{[E_i]} : E_i \to S^{n-1}$ est une fonction univoque.

La métrique de Hausdorff sera désignée par ρ.

Il est facile à vérifier le lemme suivant.

Lemme 3. *Si, pour un certain $\omega \in S^{n-1}$, $\nu^{-1}_{[E_j]}(\omega)$ n'est pas un seul point, alors*

$$p_{C_i}(v) = p_{P_i}(v_0) \qquad (i = 1, 2; \qquad v \in \nu^{-1}_{[E_j]}(\omega)) \; ,$$

où v_0 est un point fixé quelconque de $\nu^{-1}_{[E_j]}(\omega)$ ($j = 1, 2$).

En vertu du Lemme 3, la mesure de l'angle entre $[v, p_{C_1}(v))$ et $[v, p_{C_2}(v))$ reste constante lorque v varie dans $\nu^{-1}_{[E_j]}(\omega)$ ($j = 1, 2$)

pour tout $\omega \in S^{n-1}$. Notons la moitié de cette constante par α_ω si $j = 1$ et par β_ω si $j = 2$.

Lemme 4. *Pour tout point* $\omega \in S^{n-1}$,

$$d_\omega \cos \alpha_\omega \leqslant b.$$

Démonstration. Considérons le point $u \in \overset{-1}{\nu}_{[E_1]}(\omega)$, l'hyperplan $P_i = P_i(u)$, l'hyperplan Q_i parallèle à P_i et passant par u ($i = 1, 2$) et l'hyperplan Π tangent à E_2 tel que

$$\Pi \cap E_2 = \overset{-1}{\nu}_{[E_2]}(\omega).$$

Soit $v \in \overset{-1}{\nu}_{[E_2]}(\omega)$. On a

$$\begin{aligned} k_1 + 2b = k_2 &= \|v - p_{C_1}(v)\| + \|v - p_{C_2}(v)\| \\ &\geqslant \|v - p_{P_1}(v)\| + \|v - p_{P_2}(v)\| \\ &= \|u - p_{P_1}(u)\| + \|u - p_{P_2}(u)\| \\ &\quad + \|p_\Pi(u) - p_{Q_1}(p_\Pi(u))\| + \|p_\Pi(u) - p_{Q_2}(p_\Pi(u))\| \\ &= k_1 + 2d_\omega \cos \gamma = k_1 + 2d_\omega \cos \alpha_\omega, \end{aligned}$$

γ étant la mesure de l'angle $[p_\Pi(u), p_{Q_1}(p_\Pi(u))) \cup [p_\Pi(u), p_{Q_2}(p_\Pi(u)))$, d'où nous obtenons l'inégalité de l'énoncé.

Lemme 5. *On a l'inégalité*

$$\max_{x \in E_1} d(x, E_2) \leqslant \max_{x \in E_2} d(x, E_1).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E_1$ tel que

$$d(x_0, E_2) = \max_{x \in E_1} d(x, E_2).$$

Puisque x_0 appartient à l'intérieur de $[E_2]$, la normale extérieure en x_0 à E_1 rencontre E_2 dans un point y_0. On a

$$\max_{x \in E_2} d(x, E_1) \geqslant d(y_0, E_1) = \|x_0 - y_0\| \geqslant d(x_0, E_2),$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 6. *Il y a un point* $\omega \in S^{n-1}$ *tel que*

$$d_\omega = \rho(E_1, E_2).$$

Démonstration. En vertu du Lemme 5,

$$\rho(E_1, E_2) = \max_{x \in E_2} d(x, E_1)\ ;$$

soit $x_0 \in E_2$ tel que

$$d(x_0, E_1) = \max_{x \in E_2} d(x, E_1)\ .$$

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans orthogonaux en $p_{[E_1]}(x_0)$ et x_0 à $(x_0, p_{[E_1]}(x_0))$. Puisque l'hypersurface E_1 est convexe, elle admet H_1 comme hyperplan d'appui. Si H_2 séparait l'hyperplan H_1 d'un point $z \in E_2$, alors on aurait l'inégalité absurde

$$d(z, E_1) = \|z - p_{[E_1]}(z)\| > \|v - w\| \geqslant d(H_1, H_2)$$
$$= \|x_0 - p_{[E_1]}(x_0)\| = \rho(E_1, E_2),$$

où

$$\{v, w\} = (z, p_{[E_1]}(z)) \cap (H_1 \cup H_2)\ ;$$

donc H_2 est tangent à E_2. Il s'ensuit que

$$\nu_{[E_1]}(p_{[E_1]}(x_0)) = \nu_{[E_2]}(x_0)$$

et que

$$|H_{[E_1]}(\omega) - H_{[E_2]}(\omega)| = \rho(E_1, E_2),$$

où $\omega = \nu_{[E_2]}(x_0)$. Le lemme est vérifié.

Lemme 7. *Pour tout point* $\omega \in S^{n-1}$,

$$b \leqslant d_\omega \cos\beta_\omega\ .$$

Démonstration. Soient $u \in \overset{-1}{\nu}_{[E_1]}(\omega)$ et $v \in \overset{-1}{\nu}_{[E_2]}(\omega)$. Menons l'hyperplan S_i parallèle à $P_i = P_i(v)$ et passant par u $(i = 1, 2)$ et l'hyperplan Π tangent à E_2 dans v. On a

$$\begin{aligned}k_1 + 2b = k_2 &= \|v - p_{C_1}(v)\| + \|v - p_{C_2}(v)\| \\ &= \|u - p_{P_1}(u)\| + \|u - p_{P_2}(u)\| \\ &+ \|v - p_{S_1}(v)\| + \|v - p_{S_2}(v)\| \\ &\leqslant \|u - p_{C_1}(u)\| + \|u - p_{C_2}(u)\| \\ &+ \|p_\Pi(u) - p_{S_1}(p_\Pi(u))\| + \|p_\Pi(u) - p_{S_2}(p_\Pi(u))\| \\ &= k_1 + 2d_\omega \cos\beta_\omega\end{aligned}$$

et la démonstration est finie.

Théorème 2. *Si*

$$\alpha = \max_{\omega \in S^{n-1}} \beta_n \quad et \quad \beta = \max_{\omega \in S^{n-1}} \beta_n \ ,$$

alors

$$b \sec\beta \leqslant \rho(E_1, E_2) \leqslant b \sec\alpha\ .$$

Démonstration. Soit, en effet, $\omega \in S^{n-1}$. En vertu du Lemme 7,

$$b \sec\beta_\omega \leqslant d_\omega\ .$$

Si $v \in \overset{-1}{\nu}_{[E_2]}(\omega)$ et Π' est un hyperplan tel que

$$\Pi' \cap E_1 = \overset{-1}{\nu}_{[E_1]}(\omega)\ ,$$

alors

$$d_\omega = d(v, \Pi') \leqslant d(v, E_1)\ .$$

En vertu du Lemme 5,

$$\rho(E_1, E_2) = \max_{x \in E_2} d(x, E_1)\ ;$$

par conséquent,

$$b \sec\beta_\omega \leqslant d_\omega \leqslant d(v, E_1) \leqslant \rho(E_1, E_2)$$

et la première inégalité de l'énoncé est prouvée.

Suivant le Lemme 6, il y a un point $\omega \in S^{n-1}$ tel que

$$d_\omega = \rho(E_1, E_2)\ .$$

D'après le Lemme 4,

$$d_\omega \leqslant b \sec\alpha_\omega\ ;$$

donc

$$\rho(E_1, E_2) \leqslant b \sec \alpha ,$$

ce qui achève la démonstration.

Ellipsoïdes et hyperboloïdes généralisés homofocaux

Selon le Théorème 1, les ellipsoïdes généralisés sont des variétés différentiables. La même chose est valable à l'égard des hyperboloïdes généralisés, que nous définissons de la manière suivante:

Si C_1 et C_2 sont deux ensembles convexes compacts tels que

$$\delta = d(C_1, C_2) > 0$$

et si $0 \leqslant k < \delta$, alors

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x, C_1) - d(x, C_2)| = k\}$$

est appelé *k-hyperboloïde généralisé aux ensembles focaux* C_1, C_2 ou simplement *hyperboloïde généralisé.*

Nous laissons au lecteur le plaisir de vérifier que H est une variété $(n-1)$-dimensionnelle; le fait que cette variété est différentiable est confirmé par le lemme suivant.

Lemme 8. *Si le point a appartient au k-hyperboloïde généralisé H, alors il y a un voisinage* V_a *de a tel que, dans* V_a, *H se trouve entre les morceaux de paraboloïdes* $P_1 \cap V_a$ *et* $P_2 \cap V_a$, *où*

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x, P_1(a)) - \|x - p_{C_2}(a)\|| = k\},$$

$$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x, P_2(a)) - \|x - p_{C_1}(a)\|| = k\},$$

donc H est différentiable.

Dans a, H est orthogonal à la bissectrice extérieure de l'angle $A = [a, p_{C_1}(a)) \cup [a, p_{C_2}(a))$.

Démonstration. Soit V_a un voisinage de a séparé de l'intérieur de C_i par $P_i = P_i(a)$ $(i = 1, 2)$. Supposons que, par exemple,

$$\|a - p_{C_1}(a)\| \leqslant \|a - p_{C_2}(a)\|.$$

Dans le cas où l'inégalité ci-dessus est stricte, supposons le voisinage V_a choisi tel que

$$\|x - p_{C_1}(x)\| < \|x - p_{C_2}(x)\|$$

pour tout $x \in V_a$.

Si $k \neq 0$,

$$P_1 \cap V_a = \{x \in V_a : \|x - p_{C_2}(a)\| - \|x - p_{P_1}(x)\| = k\},$$

car

$$\|x - p_{C_2}(a)\| \geqslant \|x - p_{C_2}(x)\| > \|x - p_{C_1}(x)\| \geqslant \|x - p_{P_1}(x)\| ;$$

de façon analogue,

$$P_2 \cap V_a = \{x \in V_a : \|x - p_{P_2}(x)\| - \|x - p_{C_1}(a)\| = k\} .$$

Donc $P_1 \cap V_a$ et $P_2 \cap V_a$ sont des morceaux de paraboloïdes et on sait bien qu'ils sont orthogonaux à la bissectrice extérieure de A.

Le lemme sera prouvé si nous montrons que

$$(P_1^+ \cup P_2^+) \cap H = \emptyset \quad .$$

où

$$P_1^+ = \{x \in V_a : \|x - p_{C_2}(a)\| - d(x, P_1) < k\} ,$$
$$P_2^+ = \{x \in V_a : d(x, P_2) - \|x - p_{C_1}(a)\| > k\} .$$

En effet, si $y \in P_1^+$, alors

$$d(y, C_2) - d(y, C_1) \leqslant \| y - p_{C_2}(a)\| - d(y, P_1) < k ,$$

d'où $y \notin H$. Si $y \in P_2^+$, alors

$$d(y, C_2) - d(y, C_1) \geqslant d(y, P_2) - \| y - p_{C_1}(a)\| > k,$$

donc $y \notin H$.

Théorème 3. *Si un ellipsoïde généralisé et un hyperboloïde généralisé ont la même paire d'ensemble focaux, alors ils sont orthogonaux dans leurs points communs.*

Démonstration. Soient E un ellipsoïde et H un hyperboloïde généralisés ayant C_1, C_2 comme ensembles focaux et choisissons un point $a \in E \cap H$. D'après la remarque qui succède au Théorème 1, E est orthogonal à la bissectrice intérieure de l'angle

$$A = [a, p_{C_1}(a)) \cup [a, p_{C_2}(a)).$$

Selon le Lemme 8, H est orthogonal, dans le point a, à la bissectrice extérieure de A. Il s'ensuit que E et H sont orthogonaux et la démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hartman P. et Valentine F.A., *On generalized ellipses,* Duke Math. J. **26** (1959), 373-385.

[2] Valentine F.A., *A class of convex curves related to the conic sections,* Amer. Math. Monthly **58** (1951), 671-674.

[3] Valentine F.A., Convex Sets, McGraw-Hill, 1964.