

SUR LES GRAPHES TRACABLES LES
MOINS HAMILTONIENS

Tudor ZAMFIRESCU* – Andreana ZUCCO**

(Received April 2, 1984 ; revised August 19, 1985)

Abstract. This paper studies those traceable graphs which are in a certain sense most non-hamiltonian. The difference between the diameter and the minimal distance between the end-points of hamiltonian paths is taken as significant coefficient and it is shown that this coefficient may become 0 for n -connected and for 3-connected cubic graphs, 2 for 3-connected planar graphs and 6 for 3-connected cubic planar graphs, the number of vertices being in each case arbitrarily large.

Introduction. Soit G un graphe traçable, c'est-à-dire un graphe qui contient au moins un chemin hamiltonien, d la distance habituelle dans G , $\delta(G)$ son diamètre et

$$t(G) = \min \{ d(x, y) : x \text{ et } y \text{ sont joints par un chemin hamiltonien} \}$$

Evidemment

$$1 \leq t(G) \leq \delta(G).$$

Puisque $t=1$ caractérise les graphes hamiltoniens parmi les graphes traçables, il est naturel de se poser le problème d'étudier le cas opposé, où t est égal ou voisin à δ . A cet effet nous introduisons le coefficient

$$\mu(\mathcal{G}) = \liminf_{G \in \mathcal{G}} (\delta(G) - t(G))$$

pour toute famille infinie \mathcal{G} de graphes traçables. Il est facile de constater que $\mu(\mathcal{G}) = 0$ pour la famille \mathcal{G} des graphes planaires 2-connexes traçables. Soient $\mathcal{G}(n)$, \mathcal{C} , \mathcal{P} les ensembles des graphes traçables respectivement n -connexes, 3-connexes cubiques, 3-connexes planaires. Dans cette note nous montrerons que

AMS (1980) Subject Classification. Primary 05C45.

* Universität Dortmund, Abteilung Mathematik, 46 Dortmund, Germany.

** Università di Torino, Dipartimento di Matematica, via Principe Amedeo 8, 10123 Torino, Italy.

$$\mu(\mathcal{G}_{(n)}) = \mu(\mathcal{C}) = 0, \quad \mu(\mathcal{P}) \leq 2, \quad \mu(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}) \leq 6.$$

Dans les théorèmes qui suivent, on utilise des suites $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ de graphes tels que $\{\delta(G_n)\}_{n=1}^{\infty}$ soit une suite de nombres naturels consécutifs à partir d'un certain nombre t_0 , sans essayer de rendre t_0 minimum. Donc le problème de rendre t_0 minimum est encore ouvert. Mais le problème principal reste celui d'améliorer les bornes trouvées pour μ .

Pour exemplifier le type de résultats que nous présenterons dans les sections suivantes, nous nous proposons de considérer d'abord le cas de l'ensemble $\mathcal{G}_{(n)}$ des graphes n -connexes et de montrer que $\mu(\mathcal{G}_{(n)}) = 0$.

Soient, en effet, F et F' deux graphes disjoints et isomorphes au graphe biparti-complet $K_{n,n}$. Soient A, B et A', B' les partitions naturelles des ensembles $V(F)$ et $V(F')$ des sommets de F et F' , c'est-à-dire telles que chaque arête de F ou F' joint un sommet de A à un de B ou un de A' à un de B' et viceversa.

Considérons le nombre entier $r \geq 3$. Soient G_1, \dots, G_{r-3} des graphes isomorphes au graphe complet K_n , disjoints entre eux et de F et F' . Soient

$$\begin{aligned} f_0 &: A \longrightarrow V(G_1) \\ f_i &: V(G_i) \longrightarrow V(G_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, r-4) \\ f_{r-3} &: V(G_{r-3}) \longrightarrow A' \end{aligned}$$

des fonctions bijectives.

Soit G le graphe contenant

$$G' = F \cup F' \cup \bigcup_{i=1}^{r-3} G_i,$$

ayant les mêmes sommets que G' et comme arêtes, outre celles de G' , les arêtes $(\alpha, f_i(\alpha))$ avec $\alpha \in A$ et $i = 0$, ou $\alpha \in V(G_i)$ et $1 \leq i \leq r-3$.

Puisque tout chemin hamiltonien de G a une extrémité dans B et l'autre dans B' , on a

$$t(G) = r.$$

En outre on vérifie aisément que G est n -connexe et que

$$\delta(G) = r$$

d'où $t(G) = \delta(G)$, donc $\mu(\mathcal{G}_{(n)}) = 0$.

Graphes 3-connexes cubiques. Considérons le graphe G de la Figure 1, où $n \geq 4$ est pair. Dans ce graphe xyz est le sousgraphe ade de la Figure 1 de [2], avec $x = a$. Soient F le sousgraphe de G ayant les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, a , b , c (et toutes les arêtes adjacentes) et F' le sousgraphe de G (isomorphe à F) avec les sommets 7, 8, 9, 10, 11, 12, a' , b' , c' . Nous faisons les observations suivantes.

Dans le graphe F il n'y a pas de chemins hamiltoniens avec les deux extrémités dans l'ensemble $\{a, b, c\}$. En effet on constate que si l'on ajoute à F le sommet t et les arêtes (t, a) , (t, b) , (t, c) , on obtient le graphe de Petersen, qui n'est pas hamiltonien.

Tout chemin hamiltonien de G a une extrémité dans le sousgraphe F et l'autre dans le sousgraphe F' . Cela se déduit de l'observation précédente.

L'arête (a_2, x) ne se trouve sur aucun chemin hamiltonien de G . En effet, d'après l'observation précédente, tout chemin hamiltonien de G doit intersecter le sousgraphe xyz d'après un chemin de xyz joignant deux des points x, y, z , donc joignant nécessairement les sommets y et z (voir § 1 de [2]).

Il n'y a pas de chemins hamiltoniens de G ayant une extrémité dans l'ensemble $\{a, b, c, a', b', c'\}$. Supposons en effet qu'il y a un chemin hamiltonien H qui part de a . Alors H ne peut pas visiter au début le graphe F tout entier (voir une observation précédente). Donc H sort immédiatement de F et revient pour visiter le reste. La même chose est vraie à l'égard de F' , d'où $H \cdot (F \cup F')$ a trois composantes connexes. Donc chacune des arêtes (a_2, x) , (b_2, b_3) , (c_2, c_3) se trouve sur H , ce qui contredit l'observation précédente.

Théorème 1. *Pour tout nombre naturel $r \geq 11$, il y a un graphe G 3-connexe cubique tel que*

$$t(G) = \delta(G) = r.$$

Démonstration. D'abord on considère le graphe 3-connexe et cubique G construit auparavant. Pour calculer le diamètre on observe que si $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $y \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ alors $d(x, y) = 2n + 3$. Puisque les autres

couples de points ont une distance qui n'est pas plus grande, on a

$$\delta(G) = 2n + 3.$$

Le graphe G est traçable : on voit qu'il y a un chemin hamiltonien aux extrémités 1 et 7. Les observations précédentes impliquent

$$t(G) = d(1, 7) = 2n + 3.$$

Cela prouve $t(G) = \delta(G) = r$ pour $r \equiv 3 \pmod{4}$. Afin d'étendre la démonstration à tout $r \geq 11$, nous modifions le graphe G en remplaçant les sommets a_1, b_1, c_1 par le graphe de la Figure 2_{*i*} pour $r \equiv i \pmod{4}$, où $i = 0, 1, 2$.

Graphes 3-connexes planaires. Soit G le graphe montré dans la Figure 3, où $n \geq 2$ est un nombre pair. Puisque les graphes F et F' sont bipartis, tout chemin hamiltonien de G doit avoir une extrémité dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'autre dans l'ensemble $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Théorème 2. *Pour tout nombre naturel $r \geq 5$, il y a un graphe G 3-connexe et planaire, tel que $\delta(G) = r$ et*

$$\delta(G) - t(G) = 2.$$

Démonstration. D'abord on considère le graphe G construit auparavant. On vérifie facilement qu'il s'agit d'un graphe 3-connexe et que $\delta(G) = 2n + 3$.

Le graphe G est vraiment traçable : en effet, il y a par exemple un chemin hamiltonien aux extrémités 1 et 6 ; $t(G)$ est égal au minimum des distances entre $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $y \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$, qui sont d'ailleurs toutes égales, donc

$$t(G) = d(1, 6) = 2n + 1.$$

Comme au Théorème 1, en utilisant les Figures 2₀, 2₁, 2₂, on étend la démonstration à tout $r \geq 5$. Les sommets de G remplacés sont ceux représentés comme petits carrés noirs dans la Figure 3.

Graphes 3-connexes cubiques et planaires. Soit G le graphe de la Figure 4, avec

$n \geq 2$ pair. On tient compte des symmétries de G . Démontrons qu'il n'y a pas de chemins hamiltoniens de F_1 ou de $F_1 - \{a_1''\}$ ayant les extrémités a_1 et a_1' . Supposons qu'un tel chemin existe et qu'il part de a_1 ; puisque T_1'' doit être touché, on arrive dans le triangle T_1'' par b_1' , mais il n'y a pas de chemins hamiltoniens de T_1' joignant b_1' à a_1' (voir [1]).

De cette remarque on déduit que tout chemin hamiltonien de G (s'il existe) a une extrémité dans F_1 et l'autre dans F_2 .

Nous calculons maintenant $t(G)$.

D'abord nous démontrons qu'il n'y a pas de chemins hamiltoniens de G ayant une extrémité dans l'ensemble $\{a_1, a_1', a_1'', a_2, a_2', a_2''\}$. Supposons qu'il y a un chemin hamiltonien H ayant une extrémité dans a_1 . Alors H ne peut pas visiter tout F_1 et puis sortir de F_1 . Aussi H ne peut pas parcourir une partie de F_1 plus grande que $\{a_1\}$ mais plus petite que F_1 entier et puis sortir, parce que dans ce cas H devrait finir dans F_1 et donc avoir les deux extrémités dans F_1 . Alors H doit sortir tout de suite de F_1 et puis retourner, visiter tous les sommets de F_1 , sauf a_1 , et ressortir de F_1 , ce qui contredit une des remarques précédentes.

Ensuite nous observons qu'il y a un sommet de F_1 à distance 1 de a_1 et un sommet de F_2 à distance 1 de a_2 joints par un chemin hamiltonien. Un tel chemin est indiqué sur la Figure 4. Donc

$$t(G) = 2n + 3.$$

Théorème 3. Pour tout nombre naturel $r \geq 13$, il y a un graphe G 3-conexe, planaire et cubique, tel que $\delta(G) = r$ et

$$\delta(G) - t(G) = 6.$$

Démonstration. On considère le graphe G de la Figure 4 ($n \geq 2$ pair). Pour calculer $\delta(G)$ il suffit de remarquer que les sommets de T_1 les plus éloignés de F_2 (ceux marqués sur la Figure 4) ont la distance 4 de a_1 . Donc

$$\delta(G) = 2n + 9$$

et

$$\delta(G) - t(G) = 6,$$

ce qui prouve le théorème pour tout $r \geq 13$ impair. Le cas des $r \geq 13$ pairs peut être élucidé en remplaçant les sommets r_1, s_1, u_1 par le graphe de la Figure 2₀.

Bibliographie

- [1] W. T. Tutte : On Hamiltonian Circuits, J. London Math. Soc., **21** (1946) 98–101.
- [2] T. Zamfirescu : Three Small Cubic Graphs with Interesting Hamiltonian Properties, J. Graph Th. **4** (1980) 287–292.

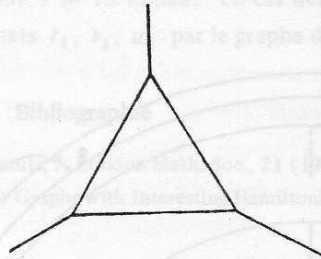
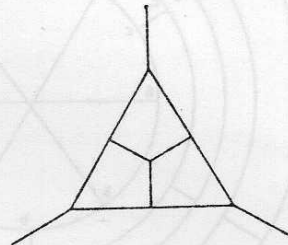
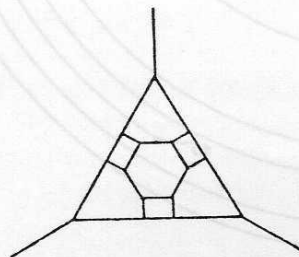
Figure 2₀Figure 2₁Figure 2₂

Figure 2

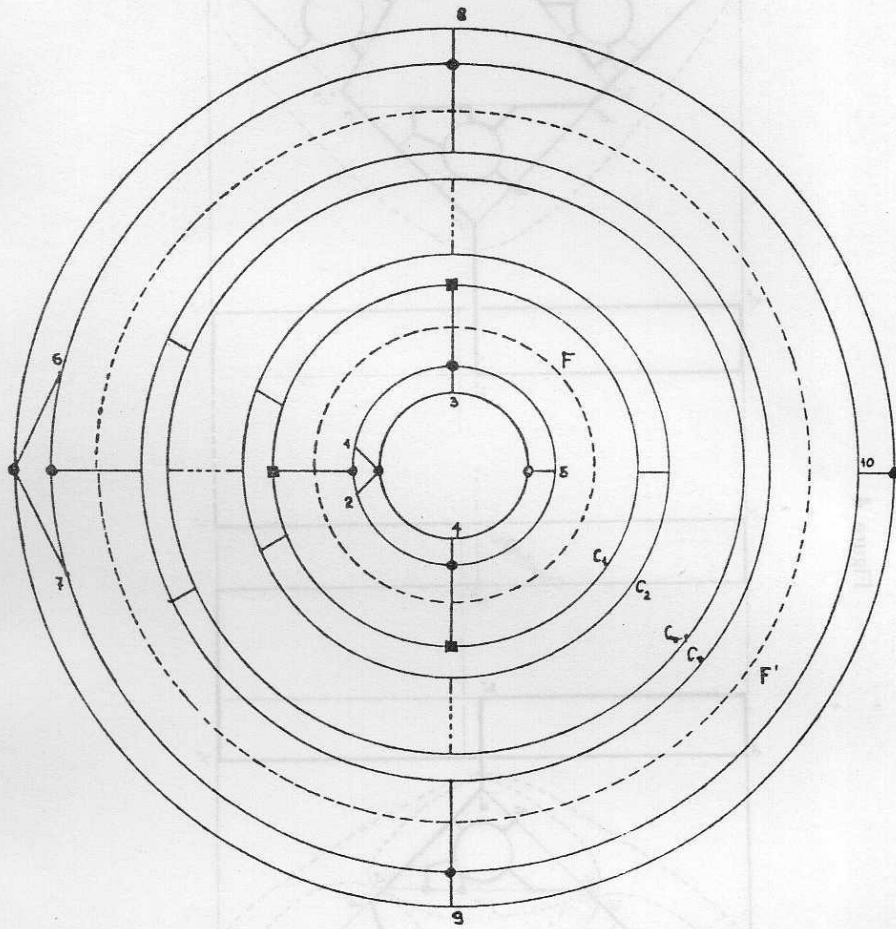


Figure 3

Figure 4

