Segments et géodésiques sur les surfaces convexes typiques

T. Zamfirescu

Universität Dortmund

L'importance des catégories de Baire en analyse est notoire : on distingue des ensembles "grands" et des ensembles "petits", ou bien on arrive à démontrer des existences surprenantes.

En 1959 V. Klee [4] trouve le premier résultat de ce type en géométrie convexe, en montrant que la plupart des surfaces convexes sont lisses, c'est-à-dire de classe C^1, et strictement convexes. En 1977 P. Gruber continue dans la même direction sans connaître l'article de Klee. Après cette date toute une série de travaux ont formé ce qu'aujourd'hui on peut appeler un sousdomaine de la géométrie convexe.

Nous disons que *la plupart* des éléments d'un espace de Baire ont une certaine propriété si tous ceux qui ne l'ont pas forment un ensemble de première catégorie. Les éléments avec cette propriété sont appelés *typiques*.

L'espace S de toutes les surfaces convexes (frontières d'ouverts convexes bornés) dans $\mathbb{R}^d$, avec la métrique habituelle de Pompeiu-Haus-~~Pompeiu-Haus~~dorff, est un espace de Baire.

Un ensemble M dans un espace métrique (X, ρ) s'appelle *poreux en* $x \in X$ s'il y a un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour chaque $\epsilon > 0$, on puisse trouver un point y dans la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ de centre x et de rayon ϵ vérifiant

$$B(y, \alpha\rho(x, y)) \cap M = \emptyset.$$

Un ensemble poreux en tous ses points est appelé *poreux* [8]. Une réunion dénombrable d'ensembles poreux est appelée *σ-poreuse*. Nous disons qu'*à peu près tous* les éléments d'un espace métrique de Baire possèdent une certaine propriété si ceux qui ne la possèdent pas forment un ensemble σ-poreux.

Soit $S \in \mathcal{S}$. Un arc de longueur minimum joignant deux points de S s'appelle *segment*. L'image d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par une application continue $c : I \to S$ est appelée *géodésique* si chaque point de I a un voisinage $V \subset I$ tel que $c(V)$ soit un segment. Si $I = \mathbb{R}$ et c est périodique, alors $c(I)$ est appelé *géodésique fermée*. Une géodésique fermée homéomorphe à un cercle est appelée *géodésique simple fermée*. Si $I = [a, b]$ et $c(a) = c(b)$, nous appelons $c(I)$ un *arc géodésique fermé* (segment géodésique fermé dans la terminologie de Klingenberg [5]).

Un point d'une surface convexe qui n'est un point intérieur d'aucune géodésique est appelé *final*. Il est facile à constater que tout point conique (où la mesure $(d-2)$-dimensionnelle de l'intersection du cône tangent avec S^{d-1} n'est pas égale à celle de S^{d-2}) est final. Mais il y en a aussi des points finaux où la surface est lisse ([1], p. 58-59). Si, pourtant, la surface est de classe C^2, alors il n'y a aucun point final.

Au premier moment on peut être choqué de voir possible une présence aussi massive des points finaux, comme celle décrite par le théorème suivant.

Théorème 1. Sur la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}$, la plupart des points sont finaux [7].

On sait bien que sur certaines surfaces convexes on peut trouver un point x et une direction tangente τ de manière qu'aucune géodésique ne parte de x en direction τ. Cette direction τ est alors appelée *singulière*. A.D. Aleksandrov présente des exemples de surfaces convexes lisses avec un ensemble dense de directio singulières en un certain point ([1], p.59). Mais il démontre aussi que (au sens de la mesure) presqu'aucune direction tangente dans un point quelconque d'une surface convexe n'est singulière ([1], p. 213). Et si la surface est de classe C^2, alors aucune direction tangente n'est singulière. ns

Théorème 2. Sur la plupart des surfaces convexes $S \subset \mathbb{R}^3$, en tout point $x \in S$ la plupart des directions tangentes sont singulières [7].

Deux points d'une surface convexe joints par au moins deux segments sont appelés *conjugués*.

Théorème 3. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface convexe. Alors, si $x \in S$, à-peu-près chaque point de S n'est pas conjugué à x [10].

Le résultat suivant est facile à vérifier.

Théorème 4. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface convexe. Alors, si $x \in S$, l'ensemble des points joints avec x par au moins trois segments est au plus dénombrable.

En dimension supérieure on a seulement le résultat suivant.

Théorème 5. Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}$ et pour chaque surface $S \in \mathcal{S}$ de classe C^3, si $x \in S$, la plupart des points de S ne sont pas conjugués à x. ([2], [9]).

Conjecture. Le théorème 5 est valable pour n'importe quelle surface de $\mathcal{S}$ [9].

D'autre part, sur la plupart des surfaces convexes il y a pas mal de points conjugués :

Théorème 6. Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}$, si $x \in S$ alors l'ensemble des points conjugués à x est dense dans S [10].

Conjecture. Pour toute surface $S \in \mathcal{S}$ et tout point $x \in S$, l'ensemble des points conjugués à x est connexe.

Revenons maintenant aux géodésiques. D'après un bien connu théorème de L. Lusternik et L. Schnirelman [6] il y a toujours au moins trois géodésiques simples fermées différentes sur une surface convexe $S \subset \mathbb{R}^3$ si S est suffisamment différentiable. Par contre sur les polyèdres convexes il n'y a que rarement une telle géodésique ou même une géodésique fermée arbitraire ([1], p. 377, 378). Pour la plupart des surfaces convexes, P. Gruber a démontré le beau théorème suivant.

Théorème 7. La plupart des surfaces convexes $S \subset \mathbb{R}^3$ n'admettent aucune géodésique fermée [3].

Ce théorème n'implique pas la possibilité de l'inexistence des arcs géodésiques fermés. Mais l'existence de ceux-ci n'a également pas été démontrée, pour une surface convexe arbitraire.

Théorème 8. Sur la plupart des surfaces convexes dans $\mathbb{R}^3$ il y a une infinité d'arcs géodésiques fermés, deux à deux disjoints [11].

A propos des longueurs des géodésiques, on ne sait pas si sur une surface convexe quelconque $S \in \mathcal{S}$, il y a toujours une géodésique de longueur plus grande que le diamètre intrinsèque de la surface. Pour la plupart des surfaces on a des résultats bien plus précis.

Théorème 9. Pour la plupart des surfaces convexes $S \subset \mathbb{R}^3$, qui sont lisses d'après le résultat de Klee mentionné, l'assertion suivante est vraie : pour tout $r \in \mathbb{R}$ il y a un ensemble T dense dans le fibré sphérique associé à S tel que, pour chaque $(x, \tau) \in T$, nous avons une
δ r géodésique de longueur r, avec son milieu en x et de directions τ et $-\tau$ en x [11].

Si ce théorème est plus faible que la réalité en géométrie différentielle (S de classe C^3), donc pas surprenant, le suivant est plus fort, donc probablement plus surprenant pour le géomètre différentiel.

Théorème 10. Sur la plupart des surfaces convexes $S \subset \mathbb{R}^3$ il y a des géodésiques sans auto-intersections, de longueurs finies arbitraires [11].

Sur les polyèdres convexes il y a toujours des géodésiques de longueur infinie. Nous finissons notre petit article de présentation en formulant la conjecture suivante, qui n'est probablement pas trop facile.

Conjecture. Sur la plupart des surfaces convexes dans $\mathbb{R}^3$ il n'y a aucune géodésique de longueur infinie.

Références

[1] A.D. Aleksandrov, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Adademie-Verlag, Berlin, 1955.

[2] P. Gruber, *Geodesics on typical convex surfaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur (8), 82 (1988) 651-659.

[3] P. Gruber, *A typical convex surface contains no closed geodesics !*, J. Reine Angew. Math. 416 (1991) 195-205.

[4] V.L. Klee, *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces*, Math. Ann., 139 (1959) 51-63.

[5] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian Geometry in the large*, Ann. Math., 69 (1959) 654-666.

[6] L.A. Lusternik - L.G. Schnirelman, *Sur le problème des trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre* 0, C.R. Acad. Sci. Paris, 189 (1929) 269-271.

[7] T. Zamfirescu, *Many endpoints and few interior points of geodesics*, Invent. Math., 69 (1982) 253-257.

[8] T. Zamfirescu, *Porosity in Convexity*, Real Analysis Exch., 15(1989-90) 424-436.

[9] T. Zamfirescu, *Baire Categories in Convexity*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 39 (1991) 279-304.

[10] T. Zamfirescu, *Conjugate points on convex surfaces*, Mathematika, 38 (1991) 312-317.

[11] T. Zamfirescu, *Long geodesics on convex surfaces*, Math. Ann. 293(1992) 109-114.