DE LA PEPENI LA BANANE

de prof. dr. Tudor Zamfirescu, Univ. Dortmund (Germania)

Întâlnind o gospodină la piaţă cu un pepene în plasă, îi poţi dezvălui că majoritatea pepenilor nu pot fi atinşi de plasă decât într-o minoritate de puncte, oricum i-ai aşeza. Dacă gospodina încearcă să pătrundă sensul spuselor tale, o poţi ajuta zicând că "majoritatea" şi "minoritatea" sunt înţelese în sensul categoriilor *Baire*. La care, desigur, gospodina se va lumina uşurată la faţă ca un om care nu mai are nici un dubiu, va rearanja niţel pepenele ca să te mulţumească, şi drum bun! Rămâi satisfăcut, deşi o umbră de îndoială te cuprinde uitându-te în urma femeii: a înţeles ea oare că distanţa din spaţiul pepenilor e cea obişnuită între mulţimile compacte, introdusă demult de *Pompeiu* şi *Hausdorff* ?

Oricum, este o satisfacţie extraordinară a studia suprafeţele de pepeni, într-o ţară unde pepenii nu cresc. Pentru a nu mânia pe Dumnezeu, care deţine personal patentul pepenelui, numim suprafeţele acestea convexe.

Pentru a explica întrucâtva categoriile *Baire*, să zicem că X este un spaţiu metric, adică între orice două puncte u, v ale sale avem o distanţă $d(u, v)$. Atunci $Y \subset X$ este *densă* dacă oricât de aproape de orice punct din X există unul în Y, precum mulţimea numerelor raţionale în dreapta numerelor reale **R**. O mulţime din X este *rară* dacă nu este densă în nici o sferă plină $\{v \in X : d(u, v) < r\}$. Iar o mulţime din X este *de prima categorie Baire* dacă este o reuniune numărabilă de mulţimi rare.

Multe spaţii metrice, precum $\mathbf{R}^n$, o suprafaţă convexă (cu metrica intrinsecă), spaţiul tuturor suprafeţelor convexe (cu metrica *Pompeiu–Hausdorff*) nu sunt de prima categorie. Într-un asemenea spaţiu, complementul unei mulţimi de prima categorie nu poate fi de prima categorie, deci este mai "mare" decât mulţimea însăşi, formează *majoritatea* elementelor spaţiului.

O mulţime în $\mathbf{R}^3$ este *convexă* dacă odată cu orice două puncte conţine şi segmentul de dreaptă care le uneşte. Frontiera (mulţimea punctelor pentru care putem găsi oricât de aproape atât puncte din mulţime cât şi puncte din complementul ei) unei mulţimi convexe mărginite (incluse într-o sferă plină) se cheamă *suprafaţă convexă*. Pe ea avem ca distanţă (metrica intrinsecă) între două puncte lungimea arcului cel mai scurt de pe suprafaţă care le uneşte.

Fascinante şi surprinzătoare sunt multe din proprietăţile majorităţii suprafeţelor convexe [12], [4].

Luaţi două puncte a şi b pe o suprafaţă convexă S şi uniţi-le printr-un drum de lungime minimă, pe care să-l numim *scurtătură*. Se cheamă *deschisă* o scurtătură fără capetele a şi b. Vă închipuiţi că reuniunea U a tuturor scurtăturilor deschise poate forma o minoritate în S? Ei bine, aceasta este situaţia pentru majoritatea suprafeţelor convexe [9]! Pentru a înţelege cum se poate ca $S \neq U$, consideraţi un cub şi veţi constata că vârfurile sale nu se află în U (dar nici nu formează majoritatea pe S).

Sunt în general netede suprafeţele convexe, adică au în fiecare punct un plan tangent unic? Am fi tentaţi să zicem că nu, dar am greşi. Deja în 1959 *Victor Klee* (Seattle) a arătat că sunt [5].

O suprafaţă convexă S poate fi foarte plată (de curbură nulă) în multe locuri. Un exemplu simplu e cubul. Mai precis, pentru orice punct x dintr-o mulţime densă pe S, nici o sferă care trece prin x nu întâlneşte S doar în x înconjurând-o, dar există sfere înconjurate de S care au cu S doar punctul x în comun [6]. Dar cubul are colţuri. Majoritatea suprafeţelor convexe au proprietatea de mai sus fiind în acelaşi timp netede. În plus, pe majoritatea suprafeţelor convexe S mai avem o altă mulţime densă, mai mare: Pentru majoritatea punctelor $x \in S$, orice sferă care trece prin x, oricât de mare sau de mică ar fi, taie suprafaţa S, adică separă unele puncte din S de altele [7]. În astfel de puncte x, în sensul geometriei diferenţiale nu există curbură.

Privind înamorat la lună, vezi secera ei netedă de partea sa convexă, şi parcă mai puţin netedă de partea sa concavă, chiar din ce în ce mai neclară cu cât amorul creşte. Într-adevăr, majoritatea suprafeţelor convexe sunt netede, cum spuneam (de unde netezimea părţii convexe), dar luminate de la infinit, frontiera dintre lumină şi întuneric (între zi şi noapte, pe lună) este o curbă în zig-zag, de lungime infinită [11]! Ceea ce elimină orice neclaritate în neclaritatea lunii în lunile de amor.

Reuniunea unui şir de scurtături $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_{-1}, \Sigma_2, \Sigma_{-2}, \ldots$ astfel încât Σ_m şi Σ_{m+1} să aibă un arc în comun ($m \in \mathbf{Z}$) se cheamă *geodezică*. De exemplu, orice scurtătură e o geodezică, un cerc mare pe o sferă e o geodezică, o spirală pe un cilindru la fel. Dacă este homeomorfă cu un cerc (închisă şi fără puncte de autointersecţie) (precum cercul mare pe sferă), geodezica se cheamă *simplă închisă*. Geometrii diferenţiali au stabilit că pe o suprafaţă convexă de clasă C^n (dată parametric de funcţii cu a n-a derivată parţială continuă), cu n nu tocmai mic, există cel puţin trei geodezice simple închise. Acest splendid rezultat formulat mai întâi de *Liusternik* şi *Schnirelman*, a trebuit să fie demonstrat şi redemonstrat în mai multe rânduri, atât pentru a se corija unele lipsuri, cât şi pentru a se reduce clasa de diferenţiabilitate. Nu se cunoaşte însă nici până azi minimalul n pentru care rezultatul rămâne adevărat.

Pentru $n=1$ nu este, pentru că *Peter Gruber* (Viena) a arătat că majoritatea suprafeţelor convexe nu admit nici o geodezică simplă închisă.

Ce se întâmplă dacă întindem un şiret pe o suprafaţă convexă? Se naşte o geodezică. Pe majoritatea suprafeţelor convexe, majoritatea punctelor trebuie să fie evitate de un şiret, după cum am văzut (altfel se împotmoleşte în ele); el îşi croieşte deci drumul printre ele. Cât de lung poate ajunge şiretul, dacă e şiret, în asemenea condiţii? Răspunsul este: oricât de lung. Mai mult, pe majoritatea suprafeţelor convexe există geodezice oricât de lungi fără puncte de autointersecţie [13]! Un cilindru are această proprietate. Vrei o geodezică de 1 km, găseşti o spirală de 1 km (cu pasul extrem de mic). Dar cilindrul (fără baze) se poate desfăşura pe un plan, o proprietate foarte specială, care desigur lipseşte majorităţii suprafeţelor convexe.

Merită să menţionăm cu această ocazie noţiunea de punct conjugat. Pe o geodezică G ce pleacă din x există desigur un punct y astfel ca subarcul ei de la x la y să fie o scurtătură, dar orice subarc mai mare, cu un capăt în x să nu fie. Totuşi acest subarc mai mare poate să continue să fie de lungime minimă, nu pe întreaga suprafaţă, dar într-o vecinătate mică a subarcului. Dacă dincolo de o poziţie z şi această proprietate se pierde, acest punct se numeşte *conjugatul* lui x pe G. (Dacă z nu există, conjugatul este ∞). Luaţi de pildă suprafaţa formată dintr-un disc şi o hemisferă, ambele de rază 1, cu x pe cercul comun. Atunci, dacă geodezica pleacă din x pe hemisferă perpendicular pe cerc şi o prelungim cât putem, ea devine un semicerc plus un diametru al cercului (geodezică simplă închisă), y este un punct pe semicerc la distanţa (pe suprafaţă) $\pi/2+1$ de x, iar z este punctul cercului diametral opus lui x. Pe majoritatea suprafeţelor convexe, netede cum sunt, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, aproape de orice punct şi direcţie tangentă există un punct x, o direcţie tangentă τ şi o geodezică G plecând din x în direcţia τ, astfel încât distanţa dintre x şi conjugatul său pe G să depăşească n [15].

La un însemnat concurs de magie din ţara puricilor, premiul II a fost câştigat de un purice care a venit cu o oglindă magică. Ba dintr-un lôc, ba dintr-altul, de unde tot sărea el, vedea puricele în oglindă o infinitate de imagini ale sale. Cum a făcut? Foarte simplu, a ales o oglindă din majoritatea oglinzilor convexe. Pentru fiecare dintre ele, din orice punct al majorităţii punctelor lui $\mathbf{R}^3$ se pot duce o infinitate de normale la oglindă [10]. Premiul I a fost atribuit unui purice care vedea în oglinda lui dintr-o infinitate de poziţii o infinitate nenumărabilă de purici aidoma lui [1]. În juriu se afla şi *Imre Bárány* (Budapesta).

Din ţara puricilor în lumea fotbalului. Borussia Dortmund a devenit campioana Germaniei. Bucurie mare, petrecere pe străzi, dar o întâmplare în aparenţă neînsemnată l-a tulburat tare pe preafericitul antrenor. La un meci de antrenament, se acordă 11 m pentru Borussia. Chapuisat îşi pune mingea să tragă, şi-o mai aranjează, iar vine să şi-o pună mai bine, că oricum o pune nu-i găseşte o poziţie de echilibru. Stă peste ea, o pune şi-o repune să stea bine, dar mingea nu vrea şi pace! Arbitrul fluieră nervos, cei de tuşă sar în sus şi în jos, publicul mârâie, antrenorului i se chapuizează toată răbdarea, până ce lovitura este anulată. Exasperat, antrenorul dispune pe loc achiziţionarea unei mingi cu foarte multe poziţii de echilibru stabil. O şansă unică pentru mine! Am luat o minge din majoritatea mingilor convexe, bineînţeles atât de aproape de o sferă încât cu ochiul liber să nu se vadă şi cu piciorul să nu se simtă nici o diferenţă. (Şi o sferă ar fi mers, dar cine izbuteşte realizarea unei asemenea perfecţiuni?) Aceste mingi au toate o infinitate de poziţii de echilibru stabil [14]. Borussia a fost încântată – şi are şi bani, mai ales acum. Om m-am făcut! Imediat am venit la Bucureşti aşa plin de bani, să mituiesc Redacţia ca să-mi publice articolul. Să vedem dacă voi reuşi. Şi-am încălecat pe-o şa şi v-am spus povestea-aşa.

Dar n-am încălecat pe-o roată, că n-am spus povestea toată. Căci marele avantaj al geometriei convexe este lipsa sa de diferenţiabilitate postulată, deci gradul de generalitate în această privinţă. Dar marele dezavantaj al geometriei convexe – faţă de geometria diferenţială – este mărginirea la studiul unor suprafeţe, e drept importante, dar totuşi foarte speciale. S-ar putea extinde metodele geometriei convexe la studiul varietăţilor topologice, cerându-le doar puţină diferenţiabilitate sau chiar deloc? Da, a zis *A.D. Aleksandrov* acum câteva decenii. Metodele geometriei diferenţiale clasice cer în general măcar apartenenţa la clasa C^2. Dar plecând de la faptul că pe o suprafaţă de curbură cel puţin $k \in \mathbb{R}$ fiecare unghi al unui triunghi geodezic nu este mai mic decât cel corespunzător al unui triunghi izometric de pe sfera, planul sau pseudosfera de curbură constantă k (teorema lui *Toponogov*) (pentru $k=0$ avem cazul convex), se poate introduce axiomatic un *spaţiu metric* (complet) *de curbură cel puţin k în sensul lui A.D. Aleksandrov*, cum se spune de obicei. Într-un asemenea spaţiu, pe scurt *spaţiu Aleksandrov*, pot apărea toate patologiile descrise mai înainte la suprafeţele convexe. La fel se pot introduce spaţii de curbură mărginită superior sau şi inferior şi superior. Acestea generalizează suprafeţele *Riemann*, dar nu şi suprafeţele convexe. Fundamentele studiului spaţiilor metrice complete cu curbura mărginită inferior au fost puse solid abia în 1992 de către *Burago*, *Gromov* şi *Perelman* [2].

Aceste spaţii generalizează simultan varietăţile *Riemann* şi (hiper)suprafeţele convexe, iar lumea lor este mai bizară, mai patologică, mai puţin ideală decât cea cu care lucrează geometrul diferenţial, dar mai apropiată de splendorile haotice ale naturii încă nealiniate de om. Vă recomand cu căldură să trăiţi în ele.

Revăd gospodina în piaţă. Acum are o plasă cu banane şi îmi face cu ochiul. Am înţeles-o imediat: spaţii *Aleksandrov* 2-dimensionale cu curbura mărginită inferior...

Bibliografie

[1] *I. Bárány, T. Zamfirescu*, Diameters in typical convex bodies, Canadian J. Math. **42** (1990), 50–61.

[2] *Y. Burago, M. Gromov, G. Perelman*, A.D. Aleksandrov spaces with curvature bounded below, Russian Math. Surveys **47**, 2 (1992), 1–58.

[3] *P. Gruber*, A typical convex surface contains no closed geodesics, J. Reine Ang. Math. **416** (1991), 195–205.

[4] *P. Gruber*, Baire categories in Convexity, in: Handbook of Convex Geometry, eds. P. Gruber, J. Wills, Amsterdam: Elsevier Science, 1993.

[5] *V. Klee*, Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces, Math. Ann. **139** (1959), 51–63.

[6] *T. Zamfirescu*, The curvature of most convex surfaces vanishes almost everywhere, Math. Z. **174** (1980), 135–139.

[7] *T. Zamfirescu*, Nonexistence of curvature in most points of most convex surfaces, Math. Ann. **252** (1980), 217–219.

[8] *T. Zamfirescu*, Most convex mirrors are magic, Topology **21** (1982), 65–69.

[9] *T. Zamfirescu*, Many endpoints and few interior points of geodesics, Invent. Math. **69** (1982), 253–257.

[10] *T. Zamfirescu*, Points on infinitely many normals to convex surfaces, J. Reine Ang. Math. **350** (1984), 183–187.

[11] *T. Zamfirescu*, Too long shadow boundaries, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 587–590.

[12] *T. Zamfirescu*, Baire categories in Convexity, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **39** (1991), 139–164.

[13] *T. Zamfirescu*, Long geodesics on convex surfaces, Math. Ann. **293** (1992), 109–114.

[14] *T. Zamfirescu*, How do convex bodies sit? Mathematika **42** (1995), 178–181.

[15] *T. Zamfirescu*, Conjugate points and closed geodesic arcs on convex surfaces, Geom. Dedicata, va apare.