An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 3(2), 1995, 167–174

GÉODÉSIQUES ET LIEUX DE COUPURE SUR LES SURFACES CONVEXES TYPIQUES

Tudor Zamfirescu

1 Introduction

C'est en 1959 que V. Klee [6] trouvait les premiers résultats utilisant les catégories de Baire en géométrie convexe, par lesquels il montrait que la plupart des surfaces convexes sont lisses, c'est à dire de classe C^1, et strictement convexes. En 1977, P. Gruber, sans connaître l'article de Klee, retrouvait les résultats mentionnés et allait encore plus loin. Après cette date toute une série de travaux ont formée qu'aujourd'hui on peut appeler la géométrie convexe générique, un sousdomaine de la géométrie convexe.

Nous disons que la *plupart* des éléments d'un espace de Baire ont une certaine propriétési tous ceux qui ne l'ont pas forment un ensemble de première catégorie. Les éléments avec cette propriétésont appelés ***typiques*** (et la propriété est appelée *générique*).

L'espace $\mathbb{R}^d$ avec la métrique Euclidienne, une surface convexe avec sa métrique intrinsèque et l'espace $\mathcal{S}^d$ de toutes les surfaces convexes (frontières d'ouverts convexes bornés) dans $\mathbb{R}^d$ avec la métrique habituelle de Pompeiu – Hausdorff sont tous des espaces de Baire.

Dans cet article nous présentons quelques résultats récents de la géométrie générique des surfaces convexes liés aux géodésiques et aux lieux de coupure. Pour d'autres dévelopements dans la géométrie convexe générique voir [5], [16].

Un ensemble M dans un espace métrique (X, ρ) s'appelle ***poreux en x*** s'il y a un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour chaque $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un point y dans la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε vérifiant

$$B(y, \alpha\rho(x, y)) \cap M = \emptyset.$$

Received by the editors: December 1995

Un ensemble poreux en tous ses points est appelé*poreux* [14]. Cette notion a étéintroduite par Dolzhenko en 1967, mais essentiellement elle était déjà connue par Denjoy. Une réunion dénombrable d'ensembles poreux est appelée *σ-poreuse*. Nous disons qu'*à peu près* tous les éléments d'un espace métrique de Baire possèdent une certaine propriétési ceux qui ne la possèdent pas forment un ensemble σ-poreux.

Une certaine version du théorème de densitéde Lebesgue nous assure que chaque ensemble σ-poreux est mesurable et de mesure nulle (voir par exemple [11]); cela dans $\mathbb{R}^d$ ou sur $S \in \mathcal{S}^d$ (où une projection Lipschitzienne sur une sphère intérieure est employée). En même temps chaque ensemble σ-poreux est de première catégorie, par définition.

Soit $S \in \mathcal{S}^d$. Un arc de longueur minimum joignant deux points de S s'appelle *segment*. L'image d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par une application continue $c : I \to S$ est appelée *géodésique* si chaque point de I a un voisinage $[a, b] \subset I$ tel que $c([a, b])$ soit un segment de $c(a)$ à $c(b)$. Si J est un sousintervalle de I, alors évidemment $c(J)$ est aussi une géodésique. Si $J = [a, b]$ est maximum tel que $c(J)$ réalise la longueur minimum parmi tous les arcs de $c(a)$ à $c(b)$ dans un voisinage de $c(J)$, alors les extrémités $c(a)$ et $c(b)$ sont appelées *conjuguées* sur $c(I)$ (voir [8], [10], [21]). Si $I = \mathbb{R}$ et c est périodique, alors $c(I)$ est appelée *géodésique fermée*. Une géodésique fermée homéomorphe à un cercle est appelée *géodésique simple fermée*. Si $I = [a, b]$ et $c(a) = c(b)$, nous appelons $c(I)$ un *arc géodésique fermé* (segment géodésique fermédans la terminologie de Klingenberg [7]).

Un point d'une surface convexe qui n'est un point intérieur d'aucune géodésique est appelé*final*. Il est facile à constater que tout point conique (où la mesure $(d-2)$-dimensionnelle de l'intersection du cône tangent avec S^{d-1} n'est pas égale à celle de S^{d-2}) est final. Mais il y en a aussi des points finaux où la surface est lisse ([1], p. 58-59). Si pourtant la surface est de classe C^2 alors il n'y a aucun point final.

2 Points finaux et points multijoints

Au premier moment on pourrait être choquéde constater la possibilité d'une présence aussi massive des points finaux, comme celle décrite par le théorème suivant.

Théorème 1. *Sur la plupart des surface $S \in \mathcal{S}^d$, la plupart des points sont finaux [13].*

On sait bien que sur certaines surfaces convexes on peut trouver un point x et une direction tangente τ de manière qu'aucune géodésique ne parte de x en direction τ. Cette direction τ est alors appelée *singulière*. A. D. Aleksandrov présente des exemples de surfaces convexes lisses avec un ensemble dense de directions singulières en un certain point ([1], p. 59). Mais il démontre aussi que (au sens de la mesure) presqu'aucune direction tangente dans un point quelconque d'une surface convexe de $\mathcal{S}^3$ n'est singulière ([1], p. 213). Et si la surface est de classe C^2 alors aucune direction tangente n'est singulière.

Théorème 2. *Sur la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$, en tout point $x \in S$, la plupart des directions tangentes sont singulières [13].*

Deux points d'une surface convexe de $\mathcal{S}^d$ joints par au moins deux segments seront appelés *multijoints.*

Théorème 3. *Soit $S \in \mathcal{S}^3$ et $x \in S$. Alors à peu près chaque point de S n'est pas multijoint à x [15].*

Soient $S \in \mathcal{S}^d$ et $x \in S$. Désignons par T_x l'ensemble des points de S joints avec x par au moins trois segments.

Théorème 4. *Si $S \in \mathcal{S}^3$ et $x \in S$, alors T_x est au plus dénombrable [17].*

En dimension supérieure on a le résultat suivant.

Théorème 5. *Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^d$ et pour chaque surface $S \in \mathcal{S}^d$ de classe C^3, si $x \in S$ alors la plupart des points de S ne sont pas multijoints à x [3], [16].*

P. Gruber [5] à annoncéd'avoir prouvéque le théorème 5 est valable pour n'importe quelle surface de $\mathcal{S}^d$, ce qui fait l'objet d'une Conjecture de [17].

D'autre part, sur la plupart des surfaces convexes il y a pas mal de points multijoints:

Théorème 6. *Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^d$, si $x \in S$ alors l'ensemble des points multijoints à x est dense dans S [15].*

3 Les nœuds du lieu de coupure et les points les plus éloignés

Pour $S \in \mathcal{S}^d$ et $x \in S$ considérons les segments maximaux à une extrémitéen x. L'ensemble des autres extrémités s'appelle *lieu de coupure* $C(x)$ de x.

Dorénavant $d = 3$. Alors, du point de vue topologique, le lieu de coupure est toujours un arbre (chaque paire de points sont joints par un arc de Jordan unique).

Si un point d'un arbre n'est pas intérieur à aucun sousarc de Jordan, il est appelé *extrémité* de l'arbre.

On sait que chaque point de $C(x)$ qui n'est pas une extrémitéest multijoint à x [8]. Quand aux extrémités de $C(x)$, elles sont toutes conjuguées à x [21].

Si dans un arbre il y a trois arcs de Jordan ayant une extrémitéy et aucun autre point en commun, alors y est appelé*nœud*. Les nœuds de $C(x)$ sont précisément les points de T_x.

Puisque $C(x)$ contient tous les points finaux de $S \in \mathcal{S}^3$, sur une surface convexe typique la plupart des points appartiennent à $C(x)$, donc $C(x)$ est dense. Mais on peut imaginer un arbre dense dans S avec un seul nœud.

Théorème 7. *Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$, si $x \in S$ alors T_x est dense dans S [19].*

En tenant compte que, typiquement, $C(x)$ contient la plupart des points de S, le Théorème 3 implique l'étrange résultat qui suit.

Théorème 8. *Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$, si $x \in S$ alors la plupart des points de S sont des extrémités de $C(x)$ [21].*

D'après le Théorème 8, sur une surface convexe typique chaque lieu de coupure a plus d'extrémités que d'autres points!

Un autre sousensemble important du lieu de coupure $C(x)$ est l'ensemble F_x des points les plus éloignés. En répondant à une question de H. Steinhaus, nous avons établi une caractérisation topologique de F_x: C'est un sousensemble compact quelconque d'un arc de Jordan sur la surface [20]. L'arc dont nous parlons est d'ailleur contenu dans $C(x)$.

Théorème 9. *Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$ et la plupart des points $x \in S$, il y a un point unique dans F_x, joint avec x par exactement trois segments [19].*

Toujours ouverte est la belle conjecture suivante de Steinhaus.

Conjecture. *Sur chaque surface $S \in \mathcal{S}^3$ il y a un point $x \in S$ tel que*

$$F_x \cap T_x \neq \emptyset.$$

Ces questions de Steinhaus, ainsi que la suivante, apparaissent dans [2]. Est-il vrai que, sur chaque surface $S \in \mathcal{S}^3$, pour "presque tout" point $x \in S$ l'ensemble F_x contient un seul point? Mais oui:

Théorème 10. *Soit $S \in \mathcal{S}^3$. Pour à peu près tous les points $x \in S$, F_x contient un seul point [22].*

4 Géodésiques et points conjugués

Revenons maintenant aux géodésiques. D'après un bien connu théorème de L. Lusternik et L. Schnirelman [9] il y a toujours au moins trois géodésiques simples fermées différentes sur une surface convexe $S \in \mathcal{S}^3$ si S est suffisamment différentiable. Par contre, sur les polyèdres convexes il n'y a que rarement une telle géodésique ou même une géodésique fermée arbitraire ([1], p. 377, 378). Pour la plupart des surfaces convexes, P. Gruber a démontréle beau théorème suivant.

Théorème 11. *La plupart des surfaces convexes $S \in \mathcal{S}^3$ n'admettent aucune géodésique fermée [4].*

Ce théorème n'implique pas la possibilitéde l'inexistence des arcs géodésiques fermés. Mais l'existence de ceux-ci n'a également pas été démontrée, pour une surface convexe arbitraire de $\mathcal{S}^3$.

Théorème 12. *Sur la plupart des surfaces convexes de $\mathcal{S}^3$ il y a une infinitéd'arcs géodésiques fermés et un nombre (fini) arbitraire d'arcs géodésiques fermés deux à deux disjoints [18], [21].*

Nous appelons la surface $S \in \mathcal{S}^3$ *unimodale* si pour tout point $x \in S$ la distance jusqu'à x est une fonction unimodale (c. à-d. qu'elle possède un seul maximum) sur chaque arc de Jordan dans $C(x)$. Liéau Théorème 12 est le suivant résultat inclus dans un manuscrit encore incomplet.

Théorème 13. *La plupart des surfaces convexes de $\mathcal{S}^3$ ne sont pas uni - modales. Plus précisément, la distance à un point $x \in S$ a une infinité de minimums et maximums relatifs sur un certain arc dans $C(x)$.*

À propos des longueurs des géodésiques, c'est troublant que la question qui suit est toujours ouverte:

Problème. *Sur une surface convexe quelconque de $\mathcal{S}^3$, y a-t-il toujours une géodésique de longueur plus grande que le diamètre intrinsèque de la surface?*

Pour la plupart des surfaces convexes on a des résultats bien plus précis.

Pour la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$, qui sont lisses d'après le théorème de Klee mentionné, l'assertion suivante est vraie: pour tout $r \in \mathbb{R}$ on trouve un ensemble T dense dans le fibrésphérique tangent associéà S tel que, pour chaque $(x,\tau) \in T$, il y ait une géodésique de longueur r, avec son milieu en x, de directions τ et $-\tau$ en x et aux extrémités conjuguées [18], [21].

Encore plus surprenant pour le géomètre differentiel apparaît, à notre avis, le dernier théorème de cette courte présentation (est-ce que la courbure nulle presque partout en est responsable? [12])

Théorème 14. *Sur la plupart des surfaces $S \in \mathcal{S}^3$ il y a des géodésiques sans auto-intersections, de longueurs finies arbitraires et avec les extrémités conjuguées [18], [21].*

Bibliographie

[1] A. D. Aleksandrov, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Berlin, Akademie-Verlag 1955.

[2] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, New York, Springer-Verlag 1991.

[3] P. Gruber, *Geodesics on typical convex surfaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur, (8) **82** (1988) 651-659.

[4] P. Gruber, *A typical convex surface contains no closed geodesics*, J. Reine Ang. Math., **416** (1991) 195-205.

[5] P. Gruber, *Baire categories in Convexity*, in: *Handbook of Convex Geometry*, eds. P. Gruber, J. Wills, Amsterdam: Elsevier Science, 1993.

[6] V. L. Klee, *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces*, Math. Ann., **139** (1959) 51-63.

[7] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large*, Ann. Math., **69** (1959) 654-666.

[8] J. Kunze, *Der Schnittort auf konvexen Verheftungsflächen*, Berlin, Deut-scher Verlag der Wissenschaften 1969.

[9] L. A. Lusternik - L. G. Schnirelman, *Sur le problème des trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0*, C. R. Acad. Sci. Paris, **189** (1929) 269-271.

[10] W. Rinow, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag 1961.

[11] S. Sachs, *Theory of the Integral* (2nd Ed.), Dover Publications 1964.

[12] T. Zamfirescu, *The curvature of most convex surfaces vanishes almost everywhere*, Math. Z., **174** (1980) 135-139.

[13] T. Zamfirescu, *Many endpoints and few interior points of geodesics*, Invent. Math., **69** (1982) 253-257.

[14] T. Zamfirescu, *Porosity in Convexity*, Real Analysis Exch., **15** (1989/ 1990) 424-436.

[15] T. Zamfirescu, *Conjugate points on convex surfaces*, Mathematika, **38** (1991) 312-317.

[16] T. Zamfirescu, *Baire categories in Convexity*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, **39** (1991) 139-164.

[17] T. Zamfirescu, *Segments et géodésiques sur les surfaces convexes typiques*, Travaux des "Journées de Géométrie Convexe et Optimisation", Valenciennes – Liège, 1992.

[18] T. Zamfirescu, *Long geodesics on convex surfaces*, Math. Ann., **293** (1992) 109-114.

[19] T. Zamfirescu, *Points joined by three shortest paths on convex surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[20] T. Zamfirescu, *Farthest points on convex surfaces*, Math. Z., to appear.

[21] T. Zamfirescu, *Conjugate points and closed geodesic arcs on convex surfaces*, Geom. Dedicata, to appear.

[22] T. Zamfirescu, *Points with unique farthest points*, to appear.

Institut de Mathématiques, Université de Dortmund, 44221 Dortmund, Allemagne,
e-mail address: zamfi@steinitz.mathematik.uni-dortmund.de