Problem L Wannabe Hop(croft)

原案：千田
解答：千田、山下

問題概要

- 頂点数nの重み付き有向グラフが与えられる
- 各頂点の出次数は２で重みは片方が１でもう片方が０
- 頂点iと等価な頂点数を答えよ

想定解法

- 前処理で各頂点と等価な頂点数を数える
  - Bool型の２次元配列table[i][j]を用意する
  - table[i][j] := 頂点iと頂点jが等価か？(true or false)

想定解法

- まず、明らかに等価でない頂点の対に対応するtableにfalseを入れる
  - 丸い頂点と六角形の頂点

想定解法

- 次にそれ以外の頂点の対について考えるが、
  - 頂点i,jが等価でないとき、それらを等価でないと既に判定されている頂点の対に遷移させる数列が存在する
  - このような数列のうち最も短いものの長さは１である
    - 長さ２以上の数列は最後の１つ以外を使って遷移することで結局長さ１の数列と頂点の対にできるため

想定解法

- 頂点i,jに対して0か1で遷移させ、既に等価でないとわかっている頂点の対に遷移するればtable[i][j] = false とする
- これを繰り返せばよい

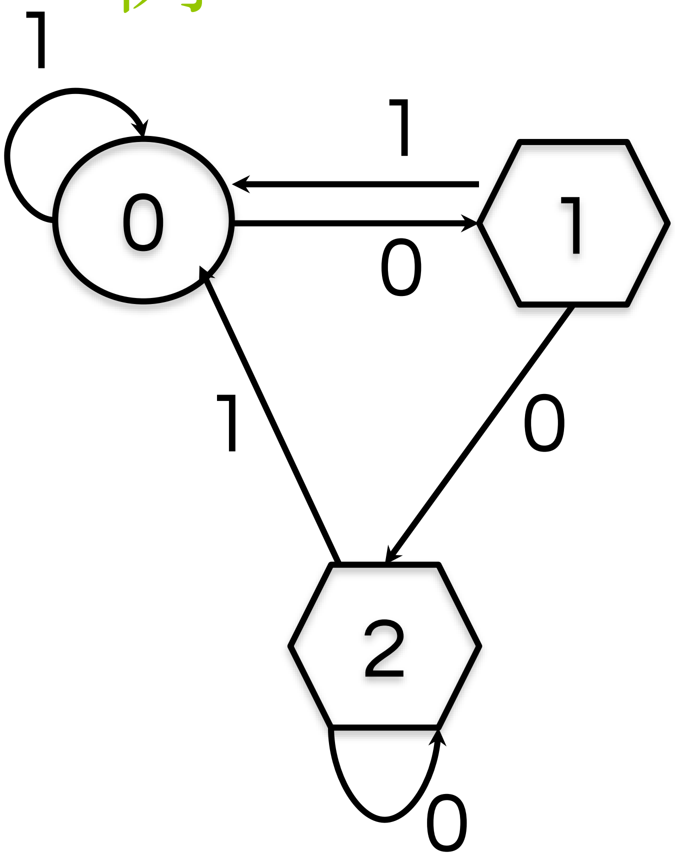
想定解法

- 愚直にやると
  - 頂点i,jを決めるのに3000*3000
  - tableの更新は高々3000*3000
  - $O(n^4)$ 間に合わない

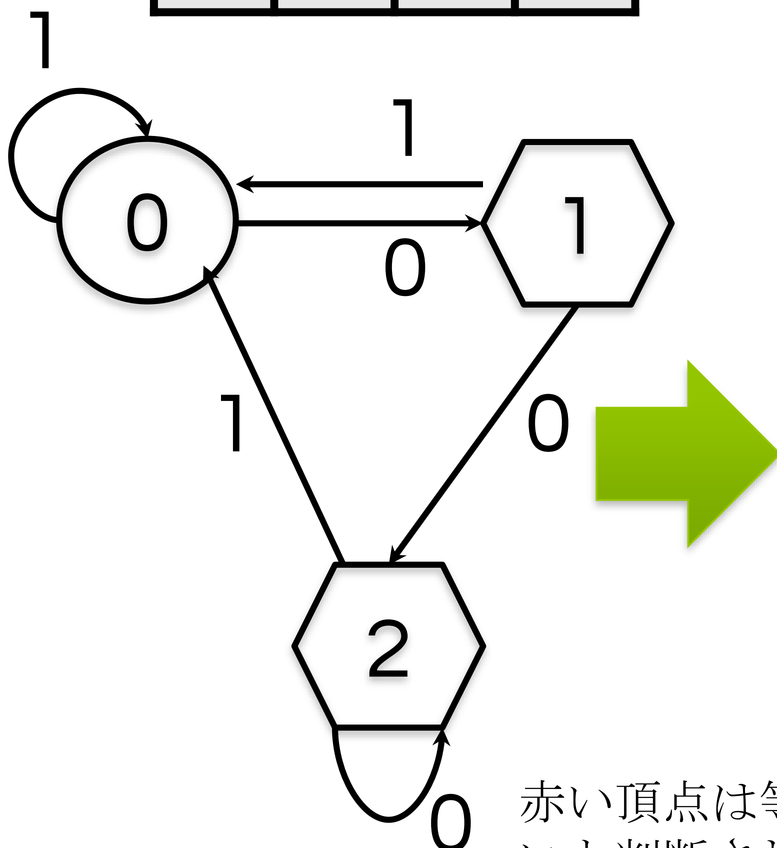
想定解法

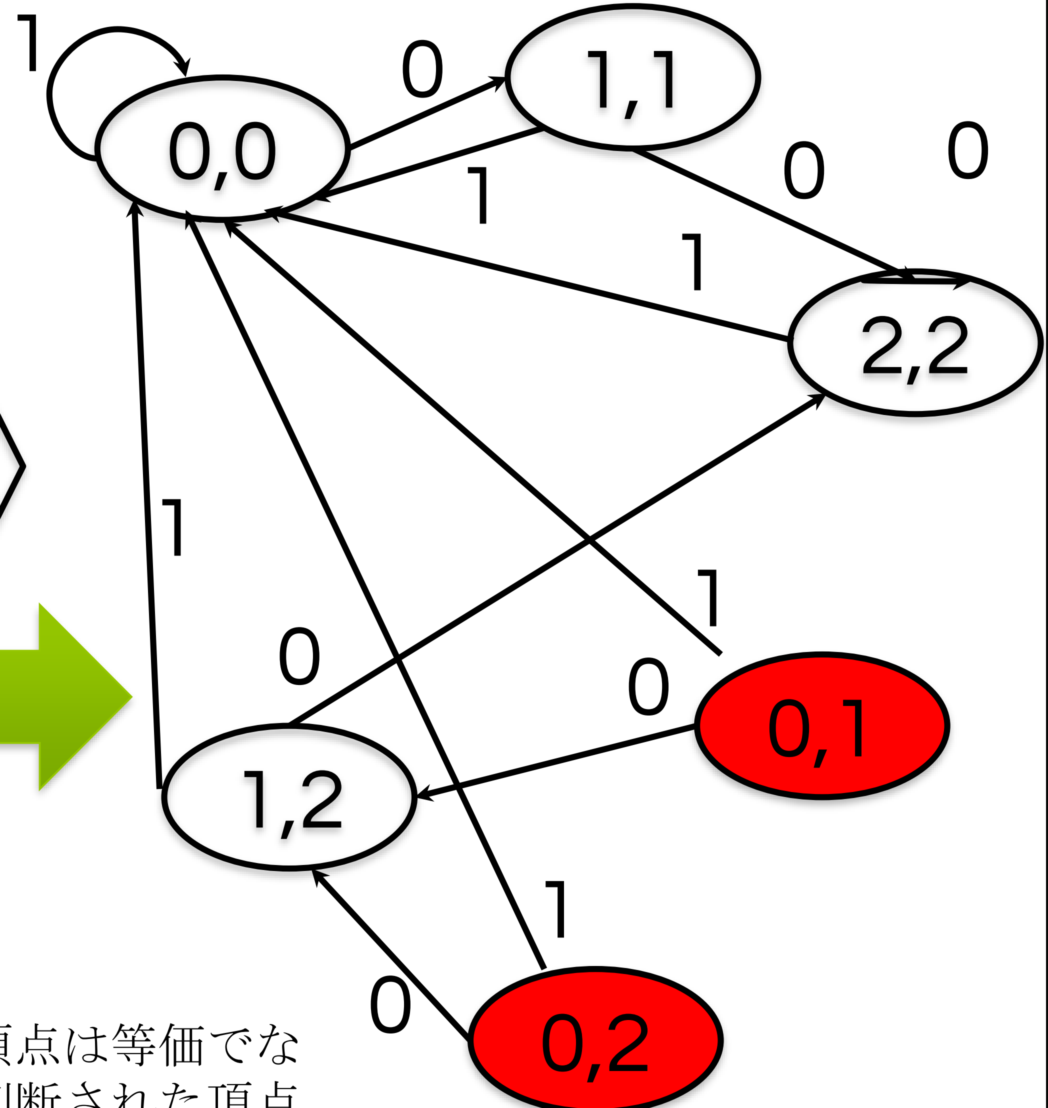
- 頂点i,j を新たに頂点とする重み付き有向グラフを作成
- 明らかに等価でないと判断された頂点i,jに対応する頂点から辺を逆向きに移動して到達できる頂点は全て等価でない
- これであれば
  - グラフの作成に3000*3000
  - tableを埋めるのに3000*3000
  - これらは別の処理なので$O(n^2)$　間に合う

例



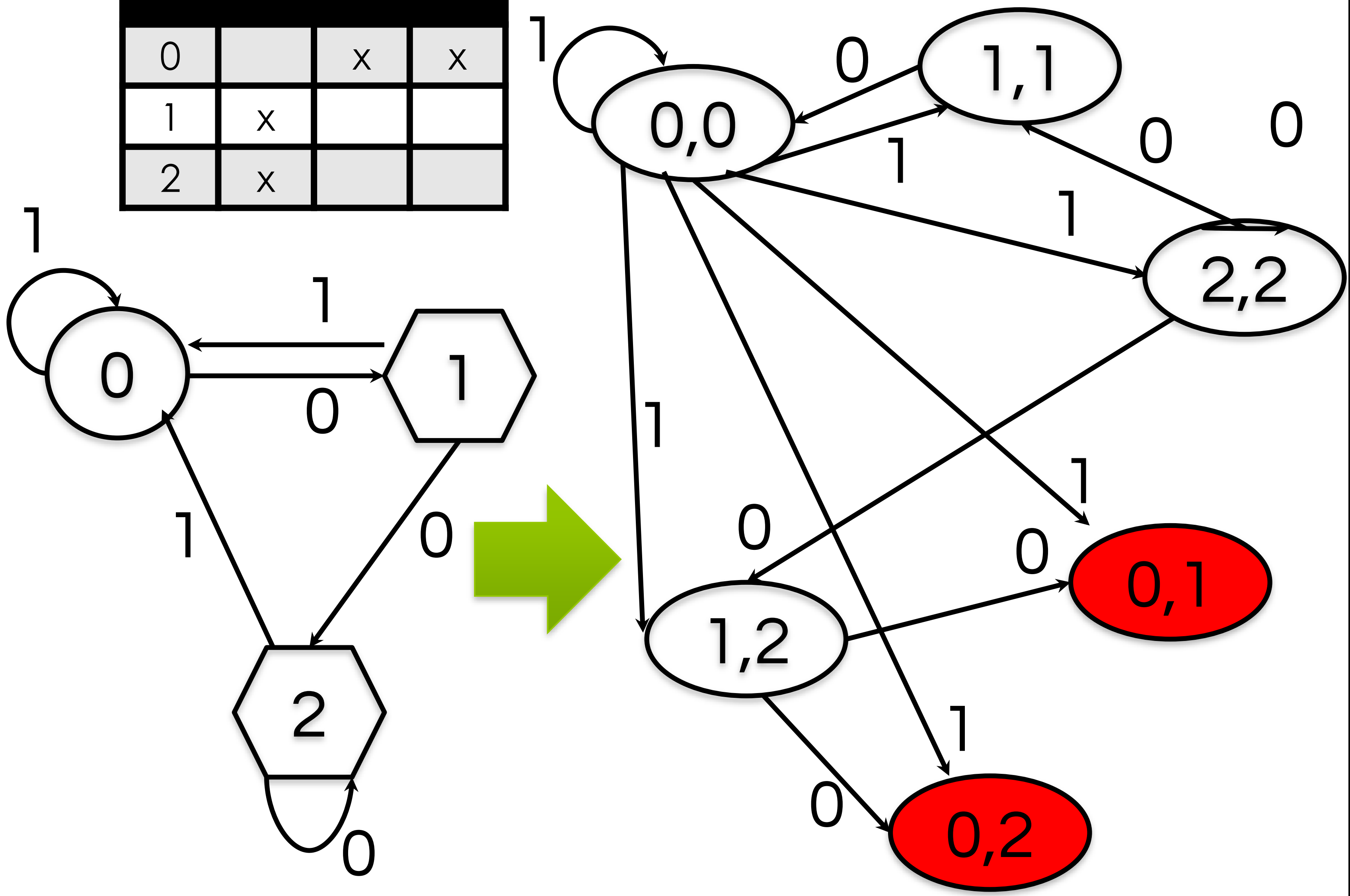
0		x	x
1	x		
2	x		





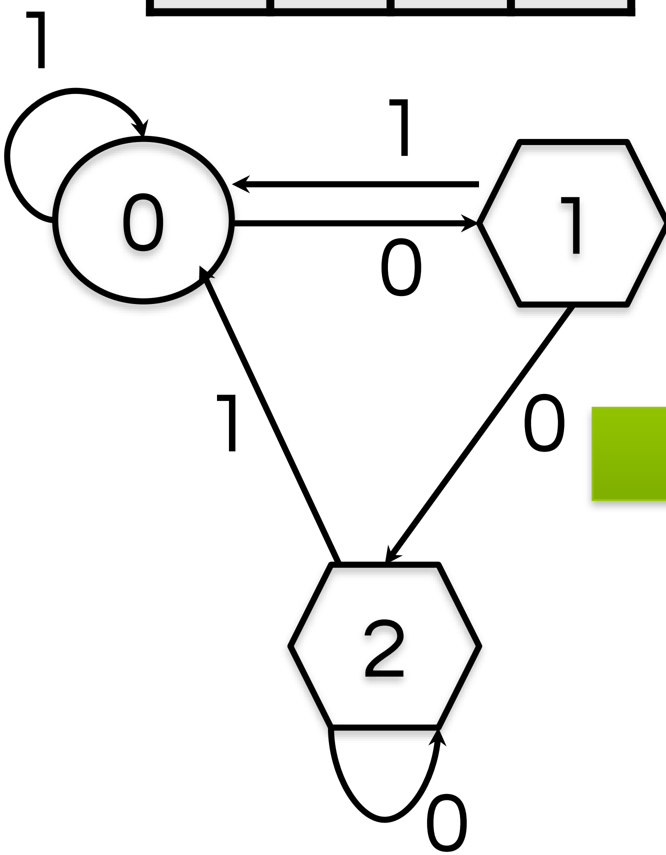
赤い頂点は等価でない
いと判断された頂点
の対に対応する頂点

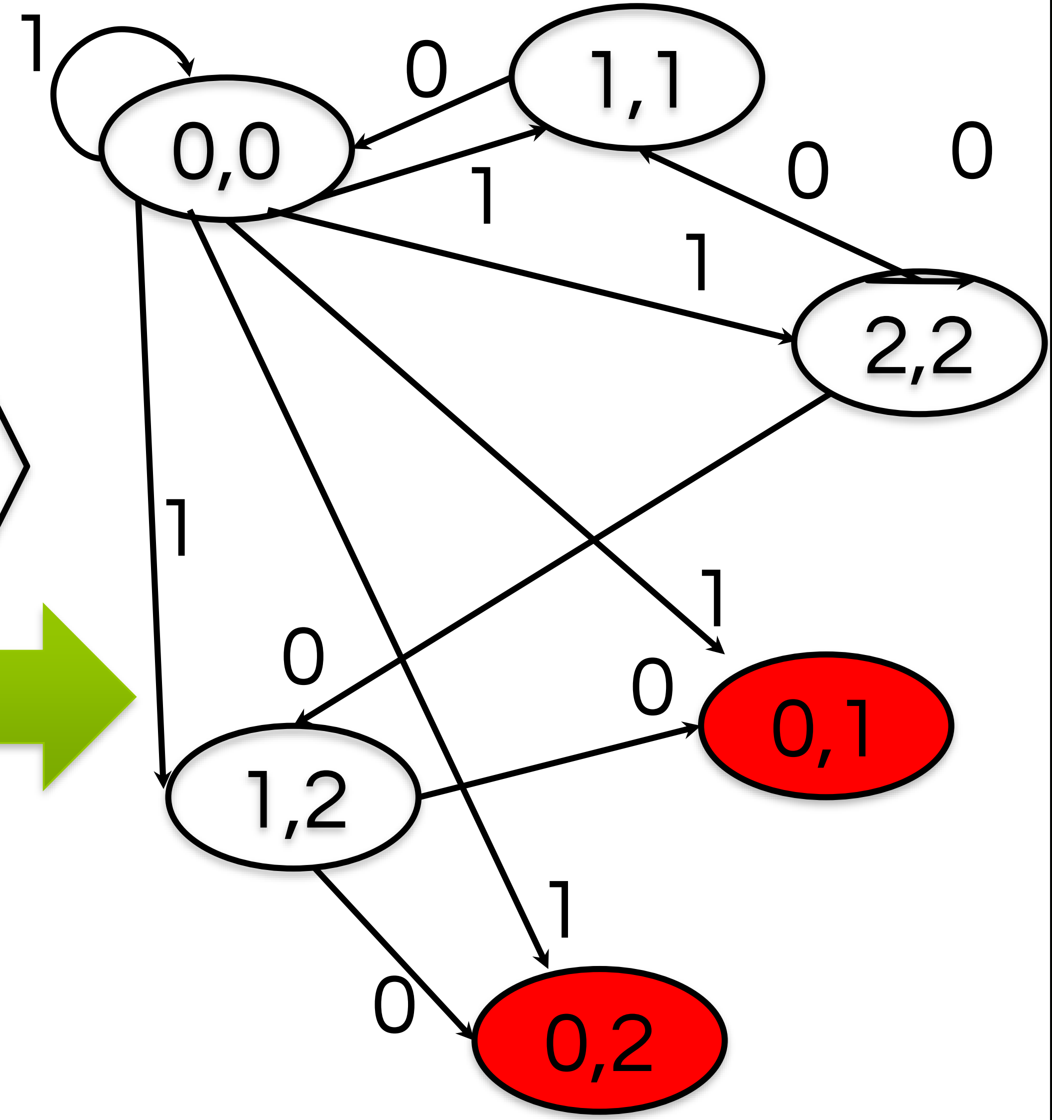
0		x	x
1	x		
2	x		



逆向きに移動したいので辺を逆向きにする

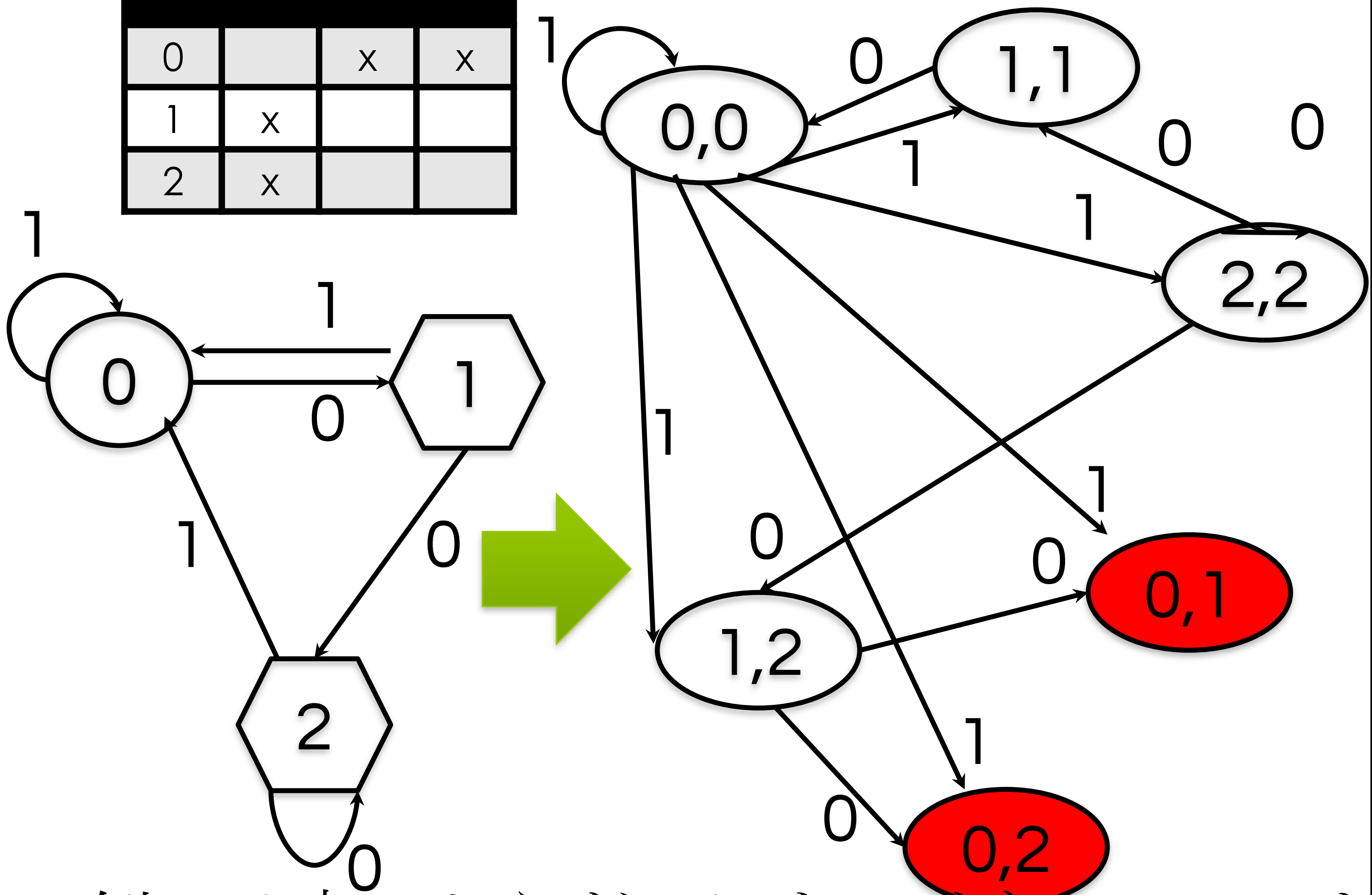
[redacted]			
0		x	x
1	x		
2	x		



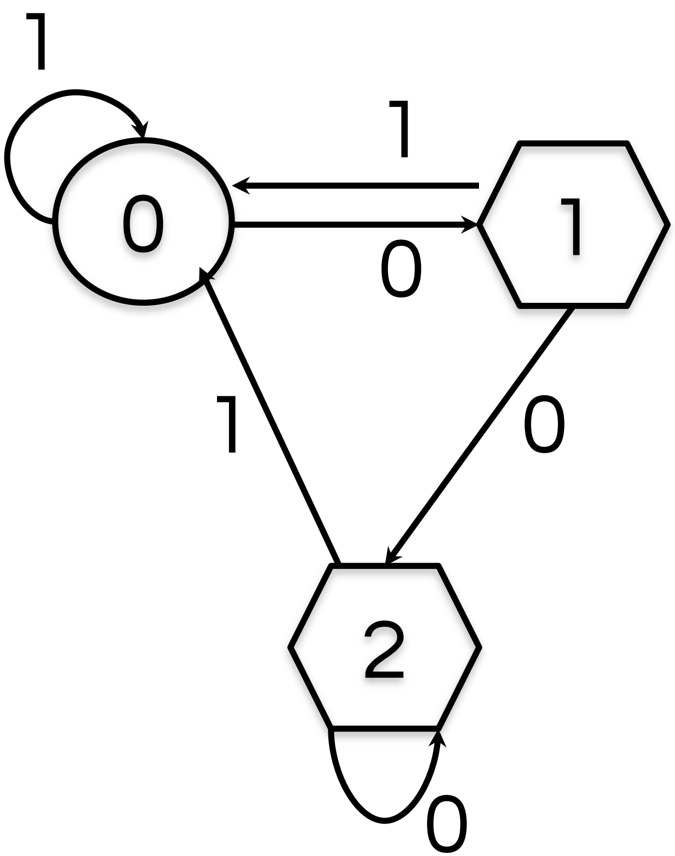


赤い頂点から到達可能な頂点は等価でない

0		x	x
1	x		
2	x		



この例では赤いからどこにもいけないのでこれが答え



0		x	x
1	x		
2	x		

xは等価でないことを表す
空白は等価を表す
頂点０と等価な頂点はない
頂点１と等価な頂点は２
頂点２と等価な頂点は１

注意点

- 再帰によるstack overflow

ちなみに

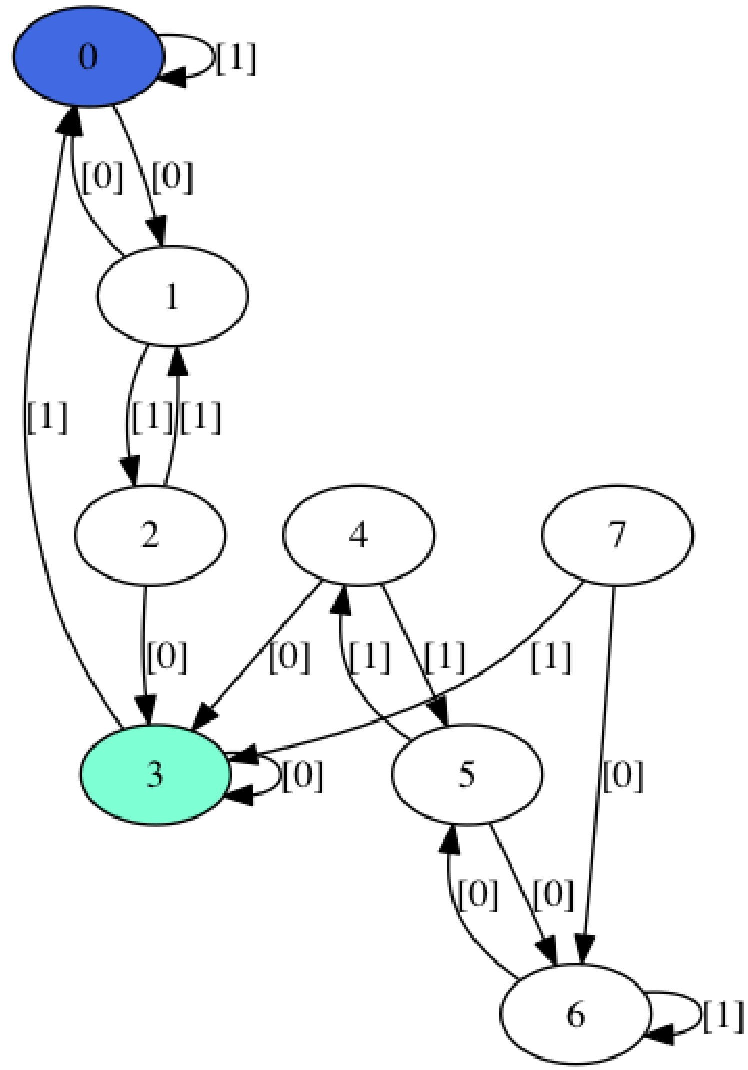
- これは決定性有限オートマトン(DFA)の状態数を最小化するアルゴリズム
  - Table-filling algorithm
- 等価な頂点は１つの頂点にまとめることができる
  - ただし初期状態から到達できないような状態は削除すること（初期状態から到達不能なら存在していても意味が無い）

ちなみに

- 今回は辺の重みが０、１に固定だったがそうである必要はない
- また、出次数が２に固定だったがそうである必要はない
  - 足りない分はDead stateという失敗用の頂点を追加しそこに辺をはることで解決できる
- Hopcroft’s algorithmを使うとO(nlogn)で解けるらしい
- ちなみにこれで２つのDFAの等価判定もできる

ちなみに

- 最小化の例
- 入力



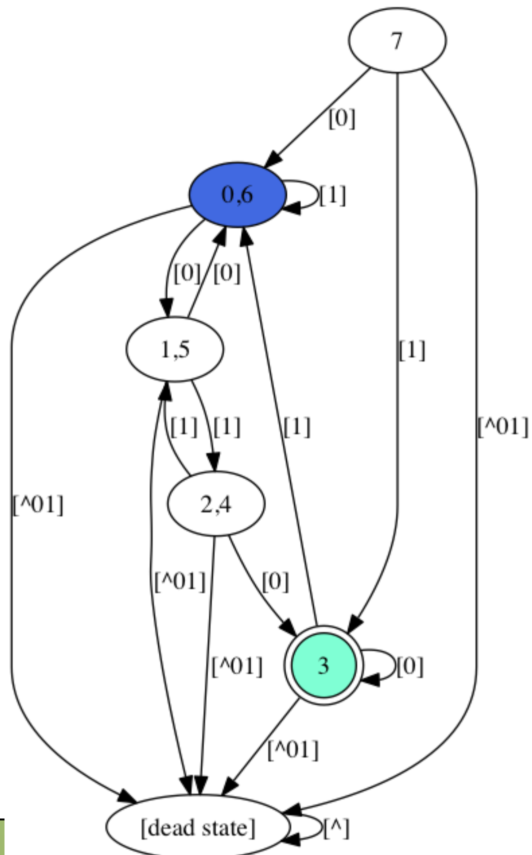
青：初期状態
緑：受理状態

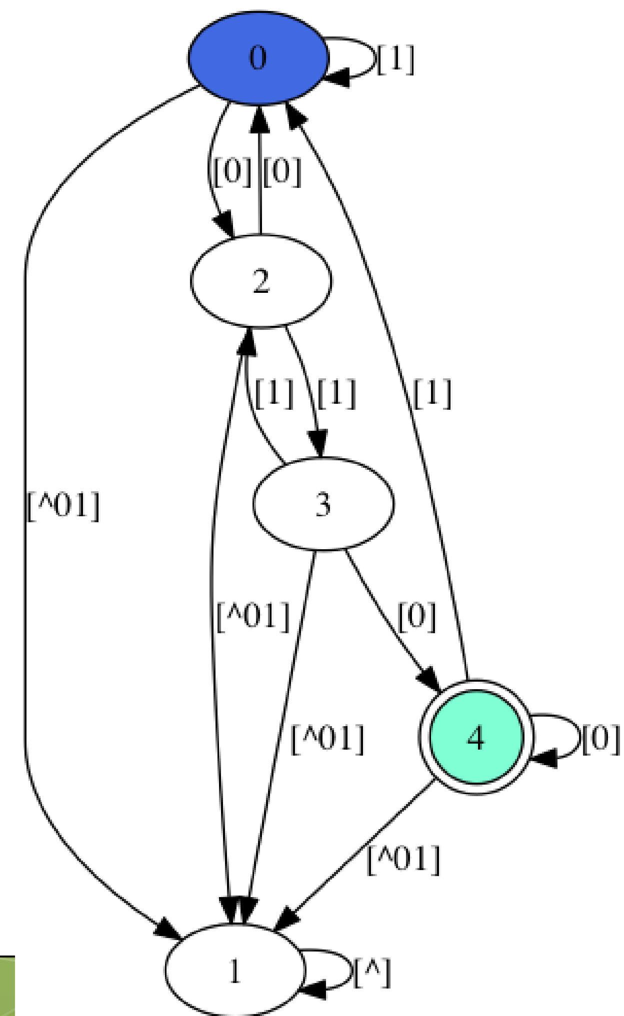
Brozozowskiの最小化法
オートマトンAの逆向きオートマトンをrev(A),
部分集合構成法から得られたオートマトンをdet(A)とすると、
最小のオートマトンmin(A) = det(rev(det(rev(A))))

ちなみに

右の頂点番号は入力のものと一致してないので注意
左は一致してる

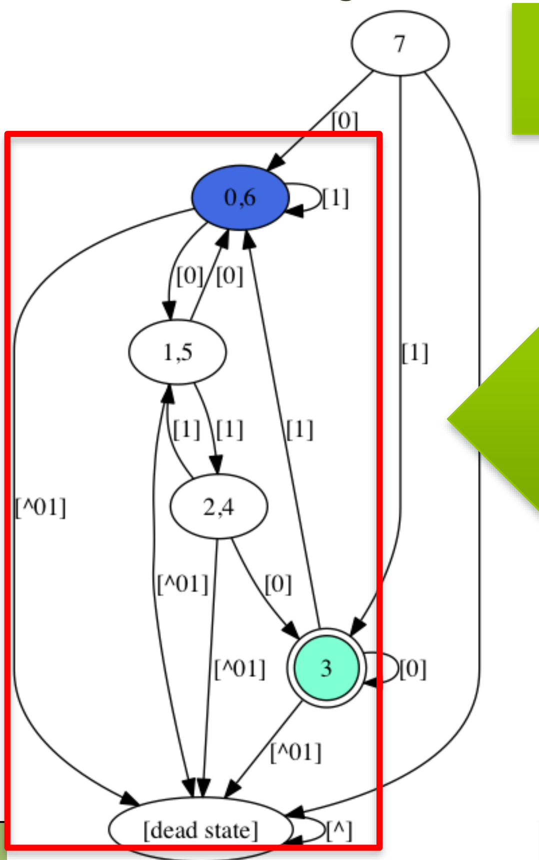
- 左:table-filling 右:検証用Brozozowski



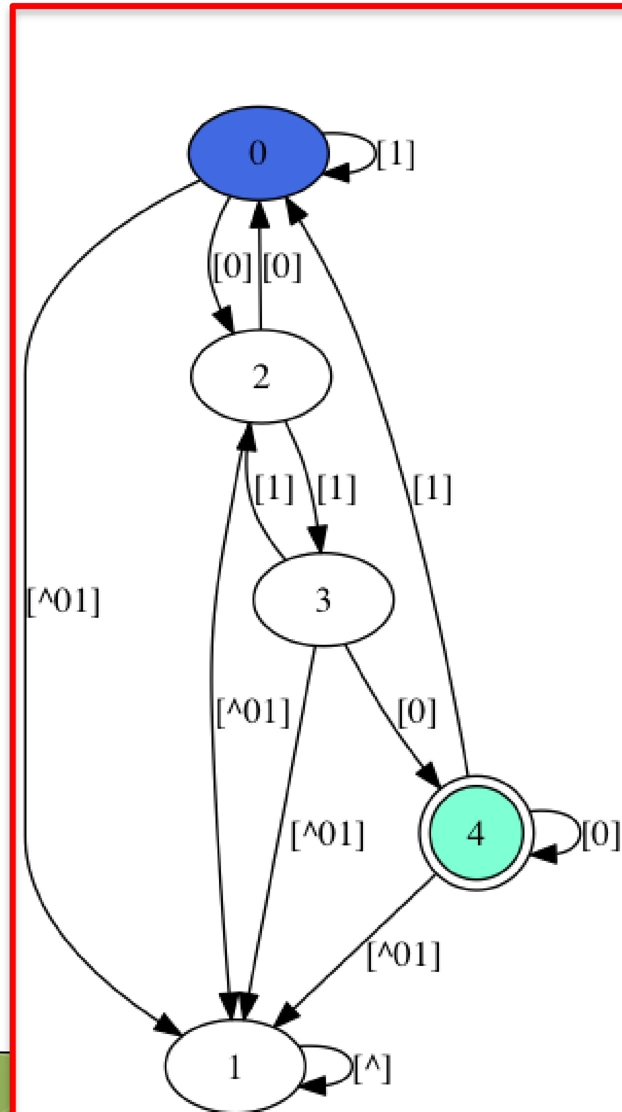


ちなみに

- 左:table-filling 右:検証用Brozozowski



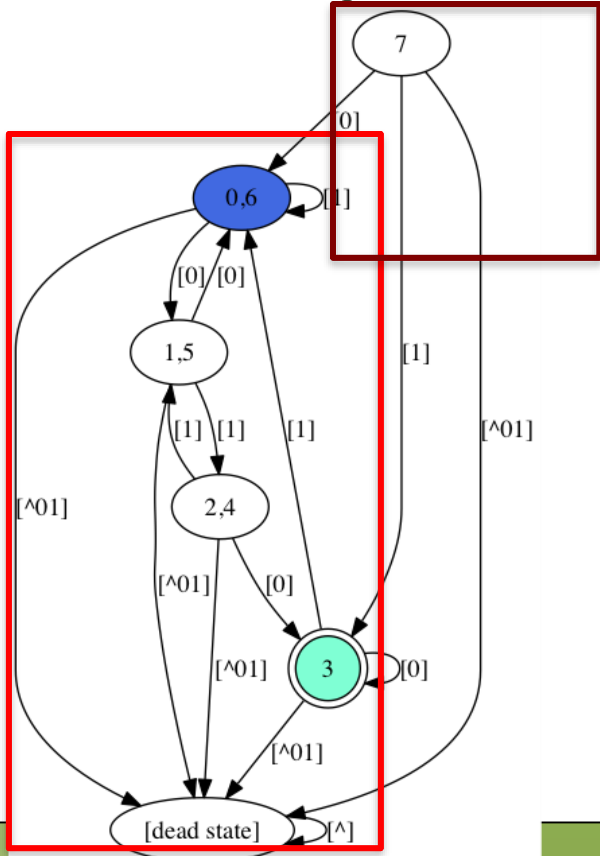
最小のDFA

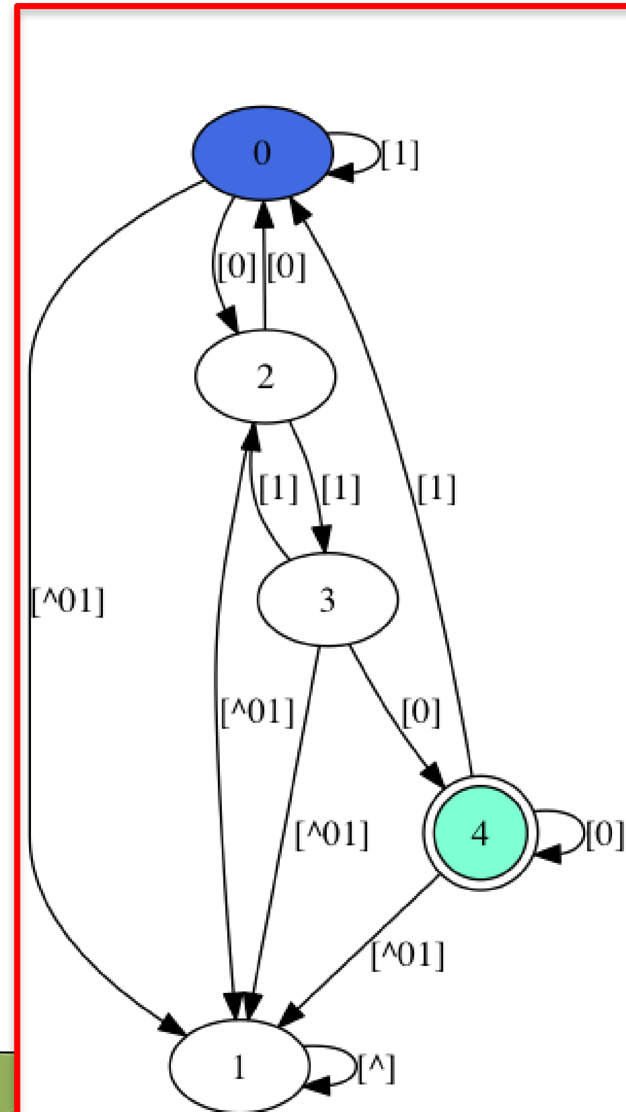


ちなみに

初期状態から到達不
可能な頂点について
は削除すると良い

- 左:table-filling 右:検証用Brozozowski





ちなみに

- 詳しくは
  - オートマトン言語理論計算論I（サイエンス社）
  - 正規表現技術入門（技術評論社）

など

提出状況

- First Acceptance
  - オンサイト --- ()
  - オンライン --- ()