La suite du lézard et autres inventions

Éric Angelini généralise un crible inventé par Ératosthène il y a 2300 ans et examine les propriétés de la décimation pronée par le terrible général romain Marcus Licinius Crassus (115 - 53 av. J.-C.).

Souvent, trop souvent, l'enseignement des mathématiques succombe à la facilité d'une délimitation précise de ce que les élèves doivent savoir, et le cours de mathématiques se ramène à l'apprentissage de quelques recettes de calcul, ou, dans les meilleurs des cas, de raisonnement. Bien sûr, l'avantage de cette conception est qu'un peu de travail assure de bonnes notes ce qui satisfait les élèves, leurs parents et les enseignants. Malheureusement, les mathématiques sont le contraire de cette science ennuyeuse et sans imagination résultant de cette réduction didactique ; elles sont le domaine de l'invention perpétuelle et de la création libre qui sans cesse se surpasse et va explorer des territoires inconnus. À l'étonnement général, se poursuit donc la découverte de concepts nouveaux, parfois simples, et de problèmes inattendus dont la résolution exige inventivité et efforts, ou reste inaccessible aux méthodes répertoriées qu'il faut donc compléter sans relâche.

Même dans le domaine millénaire des suites numériques, de nouvelles idées simples sont régulièrement introduites et conduisent à des questions d'une grande difficulté. Les deux familles de suites numériques inventées par Eric Angelini que nous allons examiner ici sont des exemples de cette ébullition créatrice ininterrompue de l'esprit mathématique qui même en arithmétique élémentaire sait mettre au jour d'étincelantes nouveautés.

Après les nombres premiers : les nombres seconds

Ératosthène, mathématicien grec du troisième siècle avant notre ère, inventa un procédé de calcul des nombres premiers, dénommé crible d'Ératosthène, qui est une définition algorithmique des nombres premiers. Son principe est :

A. On considère les nombres entiers plus grands que 1. Le *premier* de ces nombres, par définition, est un « nombre *premier* ».

B. Nommons ensuite « nombre *premier* » le *premier* entier non divisible par un nombre *premier* déjà trouvé et plus grand que ceux déjà trouvés.

C. Recommençons l'opération précédente tant que cela est possible. Cela définit la suite des nombres *premiers*.

Prenons l'ensemble des entiers plus grands que 1 :
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Marquons en bleu le premier de ces nombres, 2, ce sera le plus petit nombre premier. Marquons en rouge les autres multiples de 2 qui ne pourront pas être des nombres premiers (nous pourrions aussi les éliminer de la liste, mais nous préférons les garder en rouge pour bien visualiser la méthode et sa généralisation).
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

D'après B, le nombre 3 (le premier nombre resté noir situé après 2) est un nombre premier. Marquons-le en bleu et marquons en rouge tous les multiples de 3 non déjà marqués.
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

Toujours d'après B, le nombre 5 (le premier nombre resté noir situé après 3) est un nombre premier. Nous le marquons

1. Le goût pour les suites d'Éric Angelini.

... l'ont amené à participer à la fête de la 100000[e] suite entière de l'OEIS, l'encyclopédie électronique des suites entières *(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences)*, une base de données en ligne destinée à la recherche de suites entières d'intérêt mathématique : elle contenait plus de 126000 suites en janvier de cette année. Elle a été créée par le mathématicien Neil Sloane lorsqu'il était étudiant en 1960, pour soutenir son travail en combinatoire. François le Lionnais et Raymond Queneau, membres fondateurs de l'*Oulipo* (Ouvroir de littérature potentielle) figurent dans l'OEIS (ce dernier pour ses recherches sur les suites *s*-additives). Éric Angelini participe aux travaux de la liste *Oulipo*, laquelle fut source d'inspiration pour de nombreuses suites. Élisabeth Chamontin lui a dédié un poème pour son anniversaire où tous les vers sont des anagrammes de « Les cinquante ans d'Éric Angelini » son nom se lit en acrostiche également. Autre hommage de Gilles Esposito-Farese sous forme d'ambigramme et de quasi palindrome (*Il a l'âge égal à L*).

en bleu et nous marquons en rouge tous les multiples de 5 non déjà marqués.
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

En poursuivant, nous obtenons en bleu la liste des nombres premiers.
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

En pratique, si nous nous intéressons aux nombres premiers jusqu'à N, il suffit de poursuivre le marquage en bleu jusqu'à la racine carrée de N, car alors tous les nombres qui ne seront pas rouges seront premiers. Cela provient de ce que, si un entier est composé $N = a.b$, $a>1$, $b>1$ alors au moins un des deux nombres a ou b est inférieur ou égal à la racine carrée de N. Le crible d'Ératosthène est encore utilisé aujourd'hui lorsqu'on a besoin d'une liste exhaustive de nombres premiers.

Il y a quelques mois Eric Angelini a proposé de suivre la définition millénaire A-B-C en remplaçant le mot premier par le mot second ou le mot troisième etc. Cette généralisation élémentaire de la définition des nombres premiers conduit donc aux définitions des nombres seconds, des nombres troisièmes, etc. définitions qui, très étrangement, ne semblent avoir été envisagées par personne avant novembre 2006 !

Examinons les nombres seconds. Leur définition est donnée par la généralisation du crible d'Ératosthène.

A- On considère les nombres entiers plus grands que 1. Le **second** de ces nombres, par définition, est un « nombre **second** ».

B- Nommons ensuite « nombre **second** » le second entier non divisible par un nombre **second** déjà trouvé et plus grand que ceux déjà trouvés.

C- Recommençons l'opération précédente tant que cela est possible. Cela définit la suite des nombres **seconds**.

Au départ, on a l'ensemble des entiers plus grands que 1 :
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

On marque en bleu le second de ces nombres, 3, ce sera un nombre second, et on marque en rouge tous les multiples de 3, ils ne pourront pas être des nombres seconds.
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

Les cinquante ans d'Éric Angelini

Éric qui est-il nain dans ce Glénan
Risquant l'indigence alsacienne
Îécrit dans quel ancien sang nié
Cinna l'ange désincarné qui est-il
Ancien quel sang l'incise rida net
N'est-il que le cancanier si gandin
Grandi à la science qu'en tennis il
Encadre qu'il signe Caïn en lisant
L'écran ni délinquance ni tissage
Il écrit quand l'ancienne assigne
Ne sait-il quel grain d'encens inca
Il a cinquante années gris déclin
...

Élisabeth Chamontin

2. Nombres seconds, troisièmes, quatrièmes...

Nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 5769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, ...

Nombres seconds

3, 5, 8, 13, 17, 22, 28, 31, 38, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 77, 82, 89, 97, 101, 107, 113, 121, 127, 133, 139, 148, 151, 158, 163, 167, 179, 191, 197, 203, 209, 218, 227, 233, 241, 251, 257, 262, 269, 274, 281, 284, 293, 307, 313, 317, 322, 332, 343, 347, 353, 361, 367, 379, 386, 397, 401, 409, 419, 422, 431, 437, 443, 449, 457, 461, 467, 479, 491, 499, 509, 521, 526, 541, 547, 553, 557, 566, 571, 581, 7, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 7593, 599, 607, 617, 622, 631, 643, 653, 661, 667, 673, 677, 691, 698, 703, 718, 721, 727, 739, 746, 757, 763, 769, 778, 781, 796, 809, 821, 827, 839, 842, 853, 857, 863, 869, 878, 883, 892, 911, 916, 919, 929, 941, 947, 956, 967, 974, 983, 994, 1006, 1013, 1021, 1033, 1043, 1049, 1058, 1063, 1073, 1087, 1093, 1099, 1108, 1117, 1126, 1129, ...

Nombres troisièmes

4, 7, 11, 17, 23, 27, 31, 39, 45, 53, 59, 67, 74, 82, 87, 95, 103, 111, 122, 127, 131, 141, 146, 151, 163, 169, 178, 183, 193, 199, 211, 215, 223, 229, 237, 247, 251, 263, 271, 278, 290, 298, 307, 314, 325, 334, 342, 349, 358, 362, 369, 377, 383, 394, 401, 415, 421, 433, 445, 454, 463, 470, 479, 485, 498, 503, 514, 523, 537, 543, 551, 559, 565, 571, 582, 591, 601, 611, 617, 625, 634, 642, 653, 659, 673, 678, 685, 695, 703, 710, 719, 725, 734, 745, 750, 758, 771, 778, 787, 794, 807, 817, 822, 829, 838, 843, 857, 863, 877, 881, 887, 898, 909, 919, 925, 934, 941, 951, 963, 974, 982, 991, 998, 1011, 1018, 1025, 1033, 1041, 1051, 1063, 1070, 1079, 1087, 1093, 1097, 1109, 1119, 1129, 1138...

Nombres quatrièmes

5, 9, 14, 21, 26, 33, 39, 46, 51, 59, 67, 73, 79, 87, 93, 101, 109, 116, 123, 129, 137, 143, 152, 163, 169, 178, 187, 193, 203, 212, 221, 227, 239, 247, 253, 259, 269, 278, 284, 293, 301, 311, 318, 328, 334, 343, 349, 359, 367, 377, 383, 391, 398, 409, 419, 427, 437, 446, 452, 461, 471, 482, 491, 498, 503, 514, 523, 529, 541, 547, 559, 566, 577, 583, 592, 599, 611, 618, 628, 634, 642, 653, 664, 673, 679, 688, 694, 703, 713, 722, 731, 743, 752, 761, 769, 778, 787, 793, 802, 814, 824, 833, 842, 849, 857, 866, 883, 889, 899, 907, 916, 923, 932, 941, 951, 967, 974, 983, 992, 1004, 1013, 1021, 1034, 1041, 1049, 1057, 1067, 1079, 1086, 1093, 1103, 1117, 1126, 1133, 1146, 1156, 1164, 1174, 1182, 1191, 1202, 1211, 1219, 1229, 1238, 1252, 1261, 1267, 1282, 1291,...

Le **second** nombre non marqué en rouge placé au-delà de 3 est 5. Par définition, il s'agit d'un nombre **second**. On le marque en bleu et on marque en rouge tous les multiples de 5 non déjà marqués.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

Le **second** nombre non marqué en rouge placé au-delà de 5 est 8. Par définition, il s'agit d'un nombre second. On le marque en bleu et on marque en rouge tous les multiples de 8 non déjà marqués.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48,...

On obtient ainsi la liste en bleu des nombres seconds.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Par construction, entre deux nombres seconds consécutifs, se trouve un seul nombre resté en noir. Notons que la définition n'assure pas que le procédé se poursuit indéfiniment. Tout se bloquerait si, à un moment du calcul, les nombres au-delà du dernier nombre bleu étaient tous marqués en rouge : nous n'aurions alors qu'un nombre fini de nombres seconds. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

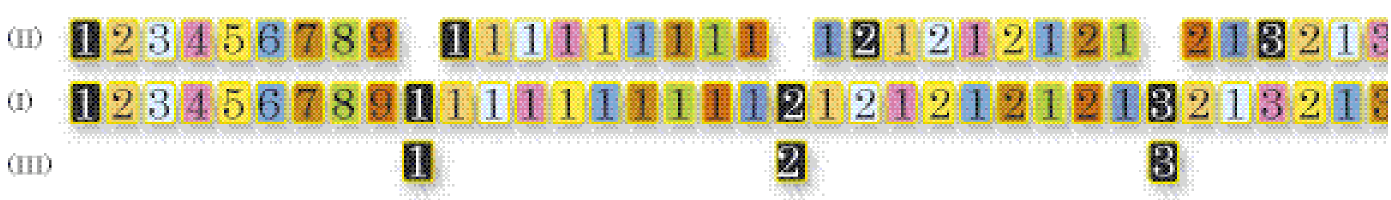
Les nombres seconds jusqu'à 1000 sont indiqués sur la figure 2. Cette suite des nombres seconds est répertoriée depuis quelques semaines, sous le numéro A123929, dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane : http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html

La définition des nombres troisièmes – on recopie les règles A-B-C en remplaçant premier par troisième – conduit de la même façon à un marquage des entiers en bleu, rouge et noir, avec dans chaque espace compris entre deux nombres bleus – les nombres troisièmes – deux nombres restés noirs exactement. Le début des listes de nombres troisièmes, quatrièmes, cinquièmes est donné sur la figure 2.

Une nouvelle ère arithmétique ?

Bien sûr, même si ces suites semblent des généralisations simples et presque évidentes de la suite des nombres premiers, il est peu vraisemblable qu'elles soient amenées à jouer un rôle aussi essentiel que la suite des nombres premiers qui est au cœur de toute l'arithmétique et est importante pour l'ensemble des sciences mathématiques.

La première raison en est que la suite des nombres premiers peut être définie de plusieurs façons différentes, par exemple en disant qu'un nombre premier est un nombre plus grand que 1, divisible seulement par 1 et lui-même, alors que pour les nombres seconds (ou troisièmes, etc.) on ne connaît pas d'autres définitions que celle provenant du crible d'Ératosthène généralisé par Éric Angelini. De telles définitions alternatives des nombres seconds (ou



3.La suite de décimation

Une suite de décimation est telle que [voir la frise en bas de page figurant les suites (I), (II) et (III)] :
(a) si on enlève un terme sur dix de la suite (le dixième, le vingtième, le trentième, etc.) alors ce qu'on enlève, la suite (III), est identique à la suite (I) elle-même et,
(b) ce qui reste, la suite (II) quand on a enlevé ces termes est encore identique à la suite initiale.
Construisons en une, la suite (I), en fixant les 9 premiers éléments, par exemple : 1 2 3 4 5 6 7 8 9.
Le dixième est nécessairement 1, car, d'après *(a)* c'est le début de la suite extraite et elle doit être identique à la suite elle-même : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1. Le onzième terme est un 1, car d'après *(b)* quand on aura enlevé le dixième terme, on devra obtenir la suite initiale, or quand on enlève le dixième terme, le onzième prend la place du dixième. Donc :1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1
De proche en proche, le même raisonnement oblige à mettre un 1 aux places 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
Le vingtième terme, d'après *(a)*, est nécessairement un 2 :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2
Le 21^e d'après *(b)* est nécessairement un 1, le 22^e un 2, etc. :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 3 2 1 3 2 1 3 ...
La suite est ainsi, de proche en proche, entièrement déterminée par la connaissance de ses neuf premiers termes.

Voici les 1000 premiers termes de cette suite :
1234567891 1111111112 1212121213 2132132134 2134213425
1342513426 5134265137 4265137428 6513742869 5137428691
5137428691 1513742861 9115137421 8619115131 7421861911
1513174211 8619111511 3174211861 1911151131 1742118612
1911151131 1174211862 1219111511 1311174212 1862121911
1151113112 1742121861 2121911112 5111311211 7421218613
2121911112 2511131121 1174212183 6132121912 1112251111
3112111743 2121836132 2121912111 1225111133 1121117434
2121836132 2212191211 1112251113 1331121114 7434212182
3613222121 1912111113 2251113134 3112111472 4342121825
3613222121 1191211113 1322511134 1343112112 1472434215
2182536131 2221211193 1211113134 2251113412 3431121126
1472434215 5218253611 3122212113 1931211114 3134225112
1341234316 1211261475 2434215521 1825361133 1222121137
1931211114 4313422512 1213412346 3161211265 1475243421
1552118253 3611331227 2121137194 3121111442 3134225128
1213412346 6316121125 6514752431 4211552113 8253361137
3122721214 1371943122 1111442318 3422512816 2134123469
6316121125 5651475241 3142115523 1138253367 1137312274
2121413712 9431221118 1442318346 2251281629 1341234691
En prenant le dernier chiffre de chaque paquet de 10 (en rouge), on reconstitue la suite toute entière et, de plus, ce qui reste est aussi la suite toute entière.

troisièmes, etc.) existent peut-être, mais nul ne le sait aujourd'hui.

La découverte d'une généralisation aussi élémentaire d'un concept central et ancien des mathématiques est amusante et suggère de nombreuses questions dont bien sûr la plus fondamentale est celle de leur infinité. L'infinité des nombres premiers est connue et démontrée depuis Euclide. Elle est vraie aussi pour les nombres seconds (troisièmes, etc.) car c'est une conséquence de celle des nombres premiers.

Montrons par exemple l'infinité des nombres seconds : il nous suffit de prouver que le procédé de coloriage en rouge laisse à chaque étape au moins deux nombres en noirs au-delà du plus grand nombre bleu (ce qui assurera qu'il n'y a jamais de blocage dans le déroulement de l'étape B du crible). Or cela est évident car un nombre premier ne peut être colorié qu'en bleu : les nombres en rouge sont des multiples d'autres nombres et ne peuvent donc pas être des nombres premiers. À chaque instant du déroulement du calcul, seuls un nombre fini d'entiers sont colorés en bleu et donc il reste une infinité de nombres premiers noirs, et donc une infinité de nombres noirs après le dernier nombre bleu, et donc au moins deux. Il n'y a jamais blocage, les nombres seconds sont une infinité.

Ce que l'on connaît des nombres premiers va bien au-delà de l'affirmation qu'ils constituent un ensemble infini. Le théorème de Hadamard et de la Vallée Poussin démontré en 1896, nous indique par exemple que la densité des nombres premiers autour de n est environ $1/\log(n)$. Puisque $\log(10^9)$ vaut 20,7232... on en déduit que, parmi les nombres proches d'un milliard, un nombre sur 21 environ est premier.

Ce théorème se généralise-t-il aux nombres seconds, troisièmes, etc. ? Sous quelle forme ? Les théories dont disposent les mathématiciens permettent-ils de traiter facilement la question ? Voilà un défi posé aux spécialistes de théorie des nombres et aux expérimentateurs – amateurs ou professionnels – qui s'attacheront d'abord à trouver l'énoncé exact de la propriété correspondante. Dans ce travail, bien sûr, nos amis les ordinateurs auront sans doute leur rôle à jouer.

Ces nouveaux nombres suggèrent une multitude d'autres questions dont voici quelques exemples.

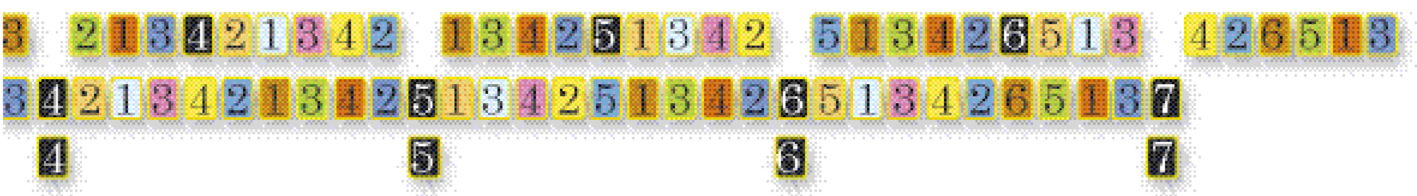
- Les nombres à la fois premiers et seconds sont-ils nombreux ? Comment les reconnaître ?

- De même, pour les nombres à la fois seconds et troisièmes, ou à la fois premiers, seconds et troisièmes, etc.

- Peut-on donner un sens à la notion de décomposition en facteurs seconds (ou troisièmes, etc.) ? Si oui, quelles sont les propriétés de ces décompositions ?

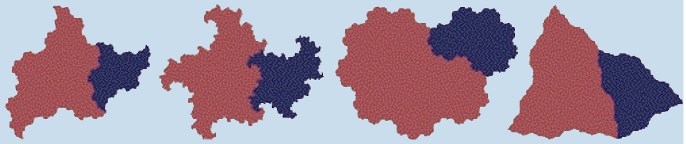
- Tout nombre pair assez grand est-il la somme de deux nombres seconds (généralisation de la conjecture de Goldbach) ?

- Existe-t-il un algorithme polynomial de test de « secondarité » (adaptation du théorème de Agrawal-Kayal-Saxena démontré en 2002 indiquant qu'il existe un algorithme polynomial de test de primalité) ?



4. La suite du lézard

Si vous prenez un terme sur trois (le troisième, le sixième, le neuvième, etc.) vous obtenez la suite elle-même, et de plus ce qui reste est encore la suite elle-même. C'est la seule suite de 0 et de 1 commençant par 0, possédant cette propriété fractale.
0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0
0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1
0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1
0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 ...
se sépare en deux morceaux :
0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1
0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 ...
et 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0
1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1
0 1 1 0 0 1 1 ... qui sont en fait la même suite, elle-même identique à la suite initiale.
En bas de cet encadré à gauche on a représenté 10 000 valeurs de la suite du Lézard selon un tableau de 50 lignes de 200 petits carrés (noirs pour 1, blancs pour 0). Loin de produire un gris uniforme cette représentation fait apparaître des zones plus claires (plus forte densité de 0) ou plus foncées (plus forte densité de 1) et on se surprend à y distinguer vaguement écrit en noir sur blanc les symboles d'une improbable écriture. A défaut de lire un texte secret peut-être peut-on s'amuser à en tirer un morceau de musique ?
Voici quelques fractales ayant une propriété géométrique équivalente à celle de la suite du lézard : on peut en enlever un tiers (semblable au tout) en laissant une figure elle-même semblable au tout. Pour des compléments sur ces fractales particulières consulter : http://www.meden.demon.co.uk/Fractals/pisot.html



J'invite les lecteurs de *Pour la science* à m'envoyer les résultats de leurs recherches sur ce thème. Les contributions les plus intéressantes seront mentionnées dans cette rubrique.

La décimation mathématique : un petit miracle

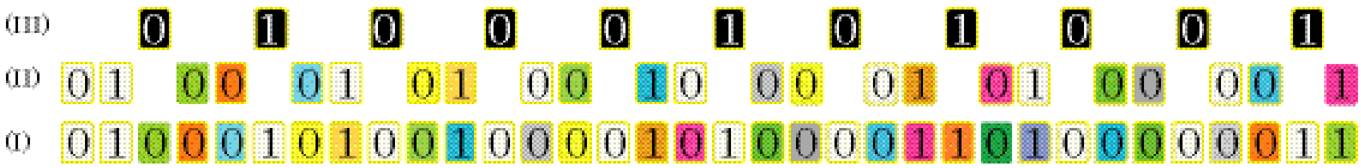
Eric Angelini qui s'intéresse depuis longtemps à l'autoréférence (voir son site : http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/) a proposé une autre nouvelle catégorie de suites numériques particulièrement étranges et fascinantes : les suites de décimation.

Ceux qui connaissent la sinistre invention du général Romain Crassus l'ont deviné, l'opération de décimation d'une suite, consiste à enlever un terme sur 10 de la suite, comme ce fut l'usage avec les soldats des armées romaines dont on était mécontent. On part de : s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{20}, s_{21}, s_{22}, ... on enlève un terme sur 10 c'est-à-dire s_{10}, s_{20}, s_{30}, etc. ce qui donne : s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{11}, s_{12}, s_{12}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{21}, s_{22},....

Une suite de décimation, S, est, par définition, une suite non constante, telle qu'après l'opération de décimation la suite restante est la même que celle de départ, et telle que, de plus la suite enlevée (s_{10}, s_{20}, s_{30}, ...) est aussi identique à celle de départ. Si on note $S/10$ la suite obtenue en prenant un terme sur 10 de la suite S, les contraintes imposées à S s'écrivent symboliquement avec la double égalité : $S = S/10 = S - S/10$.

Ces conditions sont très fortes et l'existence de telles suites semble au premier abord improbable. Pourtant, il existe des suites de décimation et Eric Angelini a proposé un procédé général pour en construire, procédé qui d'ailleurs les trouvent toutes. Voir à la figure 3, une méthode de construction de ces suites.

Examinons une de ces étranges suites de décimation S :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 3 2 1 3
2 1 3 2 1 3 4 2 1 3 4 2 1 3 4 2 5 1 3 4 2 5 1 3 4 2 6 5 1 3 4 2 6
5 1 3 7 4 2 6 5 1 3 7 4 2 8 6 5 1 3 7 4 2 8 6 9 5 1 3 7 4 2 8 6 9



1 5 1 3 7 4 2 8 6 9 1 1 5 1 3 7 4 2 8 6 1 9 1 1 5 1 3 7 4 2 1 8 6 1 9 1 1 5 1 3 1 7 4 2 1 8 6 1 9 1 1 1 5 1 3 1 7 4 2 1 1 8 6 1 9 1 1 1 5 1 1 3 1 7 4 2 1 ...La suite bleue extraite de la suite *S* en prenant un terme sur 10 est identique à la suite *S*, et si on l'enlève à *S*, ce qui reste est encore identique à *S*.

Le nombre de suites de décimations vraiment différentes est fini ; on s'en aperçoit en regardant de près les règles de la définition qui montrent que connaître les neuf premiers termes de la suite la déterminent entièrement.

De telles suites méritent plus que tout autres le nom de suites fractales. En effet, une suite de décimation est présente en elle-même sous une double forme : la structure complexe du tout, *S*, est composée deux fois de *S*, une fois en version réduite de taille 1/10, et une autre fois en version réduite de taille 9/10.

Les suites du lézard

On pourrait aussi appeler cette genre de suites numériques des suites lézard, car quand on leur arrache la queue (un dixième d'elle-même !) la suite, comme l'animal, n'en est pas vraiment changée : la queue repousse.

Le plus étrange dans les suites de décimation est que malgré leur définition simple et les procédés efficaces dont on dispose pour les calculer, elles semblent imprévisibles et il paraît délicat d'en déterminer les propriétés globales, par exemple la densité des 1.

Il se pourrait qu'on soit dans la situation caractéristique du monde de la complexité : aucune approche analytique ne semble fonctionner et pour connaître la suite très loin, on ne sait pas faire mieux que d'en calculer les termes en utilisant systématiquement la définition : pas de formule autre que celle provenant directement de la définition. Pour l'instant, l'inexistence d'une formule directe et efficace fournissant chaque terme n'a pas été démontrée ; il se peut d'ailleurs qu'elle soit fausse et qu'un mathématicien, plus malin que les autres, démêle l'écheveau de la suite et en propose une définition explicite simple.

Au lieu d'enlever un terme sur 10, on peut n'en supprimer qu'un sur 9 ou un sur 8, etc. Le cas extrême, donc le plus intéressant, est le cas où on enlève un terme sur 3. Si on enlève un terme sur 2, il est immédiat de voir que la suite est nécessairement constante, autrement dit les seules solutions de la double équation de suites $S = S/2 = S - S/2$ sont les suites constantes.

Les solutions des équations de suites $S = S/3 = S - S/3$ ne sont pas toutes constantes. Celles qui ne le sont pas utilisent seulement deux nombres et se ramènent par substitution à la suite binaire suivante :

0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0
0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1
0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1....

Cette suite que je propose de dénommer suite binaire du lézard est remarquable à cause de la propriété fractale extrême qu'elle possède. Elle est pour l'instant mal connue. Elle apparaît désordonnée et imprévisible. Pourtant elle n'est pas aléatoire car aucune suite résultant d'un calcul algorithmique n'est aléatoire, ni même ne peut être considérée comme une suite pseudo-aléatoire, car elle comporte sensiblement plus de 0 que de 1. Le calcul des 100 000 premiers éléments de la suite montre qu'on y trouve 68967 fois le 0 et 31033 fois le 1. Il semble que le rapport du nombre de 0 sur le nombre de 1 converge. Qui saura le démontrer ? Quelle est la limite de ce rapport si elle existe ?

Parmi les questions qu'on peut se poser concernant la suite binaire du lézard, celles-ci intéresseront peut-être les lecteurs de *Pour la Science* :

- la suite est-elle périodique à partir d'un certain rang ? (il est vraisemblable que non, mais comment l'établir rigoureusement ?) ;

- la suite comporte-t-elle des séquences de 0 aussi longues qu'on veut, ou au contraire, existe-t-il une longueur maximale pour une suite consécutive de 0 ?

- la suite est-elle une suite univers ? (une suite univers est une suite telle que chaque séquence finie de 0 et de 1 se trouve présente quelque part dans la suite ; on croit, sans l'avoir démontré, que les chiffres du nombre π écrit en binaire constituent une suite univers, de même que ceux de racine de 2 et de nombreuses constantes irrationnelles.)

- le nombre réel dont l'écriture en base 2 est donnée par les chiffres de la suite du lézard est-il un nombre transcendant (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) comme c'est le cas pour π et la suite binaire de Thue-Morse 0110100110010110... (voir la rubrique *Logique et calcul* du mois de septembre 2006 ; cette suite est définie par l'opération *ajout de l'inverse* 0 -> 01 -> 0110 -> 0110 1001 -> 01101001 10010110) ?

Si cette dernière question est sans doute assez difficile, ce n'est peut être pas le cas des autres qu'on peut aborder expérimentalement à l'aide de petits programmes informatiques. Comme à propos des suites de nombres seconds, troisièmes,... si vous découvrez des résultats intéressants, faites-les moi parvenir pour que je les mentionne dans cette rubrique. Ces suites sont très récentes et si belles qu'on ne les oubliera plus. Elles ont été peu étudiées, aussi l'occasion est-elle bonne d'inscrire votre nom dans l'histoire des mathématiques...

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

ERIC ANGELINI, *One, two, three... thousand Zeta functions!*, 2006 : http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/Thousand-Zetas.htm

ERIC ANGELINI, *Decimation-like sequences*, 2006 : http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/Decimation.htm

JEAN-PAUL DELAHAYE, Des mots magiques infinis, *Pour la science*, septembre 2006, pp. 90-95.

Neil Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://www.research.att.com/ffnjas/sequences/index.html