

# Het Doorbuigen van een Dunne Plaat

door Menno van der Ploeg





# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Natuurkundige Afleiding van de Dunne Plaat Vergelijking</b>	<b>2</b>
2.1	De Stress en de Strain Tensor . . . . .	2
2.2	De Vrije Energie van de Plaat . . . . .	4
2.3	De Minimale Vrije Energie . . . . .	6
2.4	Randvoorwaarden . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Eén Dimensie</b>	<b>12</b>
3.1	Vrije Oplegging . . . . .	13
3.2	Ingeklemd . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Vrije Oplegging in Twee Dimensies</b>	<b>20</b>
4.1	Eigenfuncties van de Laplace Vergelijking . . . . .	20
4.2	De Greense Functie als Eigenfunctie Expansie . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusie</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Literatuurlijst</b>	<b>26</b>



# 1 Inleiding

Veel natuurfenomenen kunnen we in de wiskunde beschrijven aan de hand van differentiaalvergelijkingen. Een differentiaalvergelijking is grofweg een wet waaraan een systeem moet voldoen. Men kan door het bestuderen van differentiaalvergelijkingen het gedrag van een natuurfenomeen, zoals een golf, een electron of een planeet, voorspellen. Dit is natuurlijk van groot belang voor onderzoek in de natuurkunde. Ook wordt de theorie van differentiaalvergelijkingen veelvuldig toegepast in de geneeskunde, biologie en scheikunde. Als wiskundige is het vooral de taak om manieren te bedenken waarmee de differentiaalvergelijkingen onderzocht kunnen worden, zodat er zoveel mogelijk informatie uit theoretisch onderzoek naar buiten kan komen.

Een natuurfenomeen dat we in dit stuk een beetje gaan uitdiepen is het buiggedrag van een dunne metalen plaat of staaf. We zijn dan in het bijzonder geïnteresseerd in het geval dat een plaat waar gewicht op steund op een andere plek ineens omhoog buigt zoals in het plaatje op de voorkant gebeurt. We gaan dus uit de natuurkundige wetten via pure theorie laten zien of dit wel of niet zal gebeuren. Aangezien het niet zo makkelijk is om het meest algemene geval te behandelen zullen we onze plaat rechthoekig veronderstellen. Andere stukken behandelen onder andere een limacon [1], [2], de annulus [3] en vele andere vormen in [4]. We gaan verschillende gevallen af; een dunne staaf die vrij opgelegd is of ingeklemd is aan de randen en een dunne plaat die vrij opgelegd is aan de randen. We zouden graag ook het geval behandelen van een dunne plaat die is ingeklemd aan de randen. Het is echter niet gelukt in de tijd die we hadden om dit geval te behandelen.

Op het plaatje op de voorkant is een dunne plaat, een gelamineerd A3 papier, waarvan de randen op houtjes rusten en aan drie randen is ingeklemd. Een wijnfles is geplaatst als gewicht zodat is te zien dat de plaat aan de andere kant omhoog doorbuigt. Zelfs als we deze kant ook zouden inklemmen is het zo dat de plaat op zijn minst nog een beetje omhoog door zal buigen ergens tussen waar hij nu buigt en de wijnfles. Dit was alleen te weinig om op foto te kunnen zien. Het werkt echter net als een tentzeil waar lucht onder zit; duw je de bubbel in, dan komt deze ergens anders weer omhoog.

## 2 Natuurkundige Afleiding van de Dunne Plaat Vergelijking

De differentiaalvergelijking die de evenwichtstoestand beschrijft van een dunne plaat waar gewicht op rust heet de dunne plaat vergelijking. Het gaat dus om de buiging van een dunne plaat op het moment dat deze in een stabiele toestand is gekomen. De dunne plaat vergelijking volgt uit de elasticiteitstheorie door gebruik te maken van het feit dat de vrije energie in de plaat minimaal is zodra deze in evenwicht is. We gaan hierbij uit van een plaat die dun is in vergelijking met zijn oppervlak.

### 2.1 De Stress en de Strain Tensor

We beginnen met het afleiden van de zogeheten stress tensor. In een ongebogen plaat liggen de moleculen zodanig dat een thermisch evenwicht bereikt is, waardoor de plaat in een mechanisch evenwicht verkeert. Dit betekent dat in elk punt van de plaat de krachten die er op werken optellen tot nul.

Wanneer een plaat echter gebogen wordt herschikken de moleculen zich, waardoor er krachten ontstaan die de plaat in zijn evenwichtsvorm proberen terug te brengen. Deze krachten heten interne stress.

We noteren  $\mathbf{F}$  als het vectorveld van krachten op punten en  $\mathbf{F}dV$  als de kracht per volume eenheid, dus  $\int \mathbf{F}dV$  is de totale kracht in de plaat. Volgens de derde wet van Newton moet de totale kracht in de plaat gelijk zijn aan nul. De totale kracht in een gegeven stuk van de plaat kan daardoor worden gezien als minus de som van de krachten in de rest van de plaat. We weten echter uit de natuurkunde dat deze krachten op het oppervlak van het stuk plaat werken. We concluderen dat de totale kracht in een stuk plaat kan worden gerepresenteerd met een integraal over de krachten die op zijn oppervlak werken.

Dus elk van de drie componenten  $\int F_i dV$  van de totale kracht op een willekeurig deel van de plaat kan worden geschreven als integraal over het oppervlak van dat deel. Uit de analyse weten we dat dat alleen kan als de vector  $F_i$  de divergentie van een tensor van de tweede rang is, oftewel

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (2.1)$$

waarbij we Einsteins sommatie conventie gebruiken.

Uit het bovenstaande blijkt dus dat dan

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k \quad (2.2)$$

waarbij  $df_k$  de componenten zijn van het oppervlakte element vector  $d\mathbf{f}$  geï Orienteerd langs de naar buiten wijzende normaal. De tensor  $\sigma_{ik}$  heet de stress tensor.

Een andere tensor die van belang is is de strain tensor. Laat  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  en  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  punten zijn van de plaat. Als de plaat gebogen wordt veranderen de posities van deze punten, zeg naar  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  en  $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, y'_3)$ . Laat  $d\mathbf{x}$  een vector zijn die van  $\mathbf{x}$  naar  $\mathbf{y}$  wijst zijn en laat  $d\mathbf{x}'$  de vector zijn die van  $\mathbf{x}'$  naar  $\mathbf{y}'$  wijst zijn. Laat verder

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}, \quad dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \quad (2.3)$$

de afstand noteren tussen de punten in de ongebogen plaat respectievelijk de punten in de gebogen plaat.

We introduceren de vector die van de plek waar het punt voor de buiging was naar waar het punt bij buiging is wijst

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}. \quad (2.4)$$

We zien dan dat

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)^2$$

als we nu  $du_i = (\partial u_i / \partial x_k) dx_k$  substitueren krijgen we

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Als we hier in de tweede term de indicés  $i$  en  $k$  verwisselen en in de derde term de indicés  $i$  en  $l$ , dan krijgt de vergelijking de vorm

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k,$$

waar de tensor  $u_{ik}$  gegeven wordt door

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (2.5)$$

Deze tensor heet de strain tensor. Merk op dat de strain tensor symmetrisch is in  $i$  en  $k$ . Voor kleine vervormingen kunnen we de tweede orde termen negeren en krijgen we

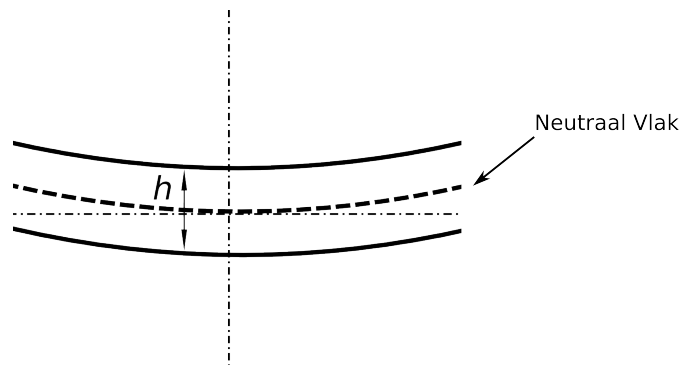
$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.6)$$

## 2.2 De Vrije Energie van de Plaat

De strain tensor en de stress tensor kunnen worden gezien als variabelen die we hebben bepaald om het rekenwerk en de notatie te vereenvoudigen. Uit de natuurkundewetten kunnen we een relatie vinden tussen de strain tensor en de stress tensor voor een dunne plaat die in een stabiele toestand is. Om niet alles te hoeven herleiden tot de big bang zullen we die relatie gewoon geven

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right). \quad (2.7)$$

Hier is  $\delta_{ik}$  de Kronecker delta. Verder is  $\sigma$  de ratio van de belasting door compressie ten opzichte van het  $xy$ -vlak en de belasting door uitdijing ten opzichte van de  $z$ -as, beter bekend in de natuurkunde als Poisson's ratio. Tot slot is  $E$ , het natuurkundige begrip, Young's modulus. De relatie (2.7) is geldig wanneer Hooke's Law geldig is; dat is voor een groot gebied van metalen in bepaalde temperaturen. Materialen waarvoor Hooke's Law geldt heten lineair-elastisch of Hookse materialen. Het is afhankelijk van de krachten die op het materiaal werken of Hooke's Law geldt. Materialen die aan Hooke's Law voldoen gaan vaak snel weer in hun oorspronkelijke staat nadat ze gebogen worden. Voor staal, bijvoorbeeld, is heel veel kracht nodig om er voor te zorgen dat Hooke's Law niet opgaat, ook bij hogere of lagere temperaturen. Daardoor is staal uitermate geschikt als bouwmetaal. Rubber is een goed voorbeeld van een "niet-Hooks" materiaal.



Wanneer de plaat gebogen is wordt het uitgerekt aan de convexe zijde en ingedrukt aan de concave zijde. Er bestaat dus een neutraal vlak binnen de plaat waar de plaat niet wordt ingedrukt of uitgerekt. Deze ligt in halverwege in de plaat. We kiezen coördinaten waarbij de oorsprong in het neutrale vlak ligt van de ongebogen plaat en de  $z$ -as loodrecht op de plaat staat. We gebruiken  $\zeta(x, y)$  voor de functie van de verticale verplaatsing van een punt in het neutrale vlak, oftewel zijn  $z$ -coördinaat. Aangezien de horizontale verplaatsing van een punt klein is van de tweede orde is het geoorloofd deze gelijk aan nul te stellen.



Laat  $\mathbf{P}$  de externe kracht noteren op een oppervlakte eenheid van het oppervlak van de plaat. Als de plaat in evenwicht is, moet de kracht op een oppervlakte eenheid gelijk zijn aan de interne stress die op die oppervlakte eenheid werkt. We moeten dus hebben dat  $P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0$ . Als we  $df_k = n_k df$ , waarbij  $\mathbf{n}$  de normaal is van het oppervlak, substitueren vinden we

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \quad (2.8)$$

Hieraan moet dus worden voldaan in elk punt op het oppervlak van de plaat.

Aangezien de plaat die we bekijken dun is, zijn er relatief kleine krachten nodig op het oppervlak om het te buigen. Het is daarom geoorloofd om de krachten  $P_i$  te negeren. We houden dan  $\sigma_{ik} n_k = 0$  over. Omdat de plaat slechts een beetje gebogen wordt kunnen we de normaal parallel aan de  $z$ -as kiezen. Onze eis wordt dan dus dat op het oppervlak van de plaat geldt dat  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . Aangezien onze plaat heel dun is weten we dat deze hoeveelheden klein zijn binnen de plaat. We stellen ze dus gelijk aan nul en gebruiken de relatie met de strain tensor om de eis verder te ontwikkelen

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xz}, & \sigma_{yz} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{yz}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left( (1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy}) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Als we bij deze vergelijkingen de stress tensoren gelijk aan nul stellen en gebruiken dat  $u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$  vinden we de eisen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x}, & \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ u_{zz} &= -\frac{\sigma}{(1-\sigma)} (u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

We kunnen in de eerste twee vergelijkingen  $u_z$  vervangen door  $\zeta(x, y)$  met voldoende nauwkeurigheid en krijgen na primitiveren

$$u_x = -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (2.11)$$

We hebben de integratieconstante gelijk aan nul gekozen om te krijgen dat

$$u_x = u_y = 0 \quad \text{voor} \quad z = 0.$$

Nu we  $u_x$  en  $u_y$  kennen, kunnen we alle componenten van de strain tensor bepalen:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, & u_{yy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, & u_{xy} &= -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0, & u_{zz} &= \frac{\sigma}{1-\sigma} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Een dunne plaat kan alleen in evenwichtstoestand verkeren als de hoeveelheid vrije energie minimaal is. We kunnen de vrije energie uitdrukken in de strain tensor. De formule voor de vrije energie  $F$  per volume eenheid is

$$F = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{il}^2 \right). \quad (2.13)$$

Als we in deze formule onze gevonden componenten van de strain tensor substitueren ontstaat de formule

$$F = z^2 \frac{E}{1 + \sigma} \left\{ \frac{1}{2(1 - \sigma)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \quad (2.14)$$

De totale vrije energie wordt nu verkregen door (2.14) te integreren over het volume van de plaat. In de  $z$ -richting integreren we van  $-\frac{1}{2}h$  tot  $+\frac{1}{2}h$  waar  $h$  de dikte van de plaat is. We krijgen dan dat de totale energie  $F_{\text{pl}} = \int F dV$  gelijk is aan

$$F_{\text{pl}} = \frac{Eh^3}{24(1 - \sigma^2)} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (2.15)$$

Omdat de plaat slechts een beetje gebogen wordt hebben we een oppervlakte element vereenvoudigd tot  $dx dy$ .

### 2.3 De Minimale Vrije Energie

Om nu het minimum van de totale vrije energie  $F_{\text{pl}}$  te vinden gebruiken we de calculus van variaties. Om deze theorie toe te kunnen passen moeten we  $F_{\text{pl}}$  zien als een functionaal  $F_{\text{pl}}(\zeta)$ . Volgens de theorie moet nu voor een minimum  $\zeta$  gelden dat voor elke willekeurige functie  $\chi$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} F_{\text{pl}}(\zeta + \epsilon\chi) \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

De linkerkant van deze vergelijking kan natuurlijk, zonder beperking der algemeenheid, met een  $c \neq 0$  vermenigvuldigd worden om notatie te vereenvoudigen. We kunnen (2.15) opsplitsen in twee integralen en dan elk apart variëren.

Als we de eerste integraal variëren krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \int \left[ \Delta(\zeta + \epsilon\chi) \right]^2 df \Big|_{\epsilon=0} &= \int \Delta\zeta \Delta\chi df \\ &= \int \Delta\zeta (\nabla \cdot \nabla) \chi df \\ &= \int \nabla \cdot (\Delta\zeta \nabla \chi) df - \int \nabla \chi \cdot \nabla (\Delta\zeta) df. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Hierbij zijn dus alle vector operatoren ten opzichte van het twee-dimensionale coördinaten systeem  $(x, y)$ . Met de Gauss Divergentie Stelling kunnen we de eerste integraal omzetten in een contourintegraal:

$$\int \nabla \cdot (\Delta\zeta \nabla\chi) df = \oint \Delta\zeta (\mathbf{n} \cdot \nabla\chi) dS = \oint \Delta\zeta \frac{\partial\chi}{\partial n} dS.$$

In de tweede integraal gebruiken we dezelfde transformaties als in (2.16) en krijgen

$$\int \nabla\chi \cdot \nabla(\Delta\zeta) df = \int \nabla \cdot [\chi \nabla(\Delta\zeta)] df - \int \chi \Delta^2\zeta df = \oint \chi \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n} dS - \int \chi \Delta^2\zeta df.$$

We vinden dus dat

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \int [\Delta(\zeta + \epsilon\chi)]^2 df \Big|_{\epsilon=0} = \int \chi \Delta^2\zeta df - \oint \chi \frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n} dS + \oint \Delta\zeta \frac{\partial\chi}{\partial n} dS. \quad (2.17)$$

Als we de tweede integraal van (2.15) variëren krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \int \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} + \epsilon \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \epsilon \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \right) df \Big|_{\epsilon=0} = \\ = \int 2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} df. \end{aligned} \quad (2.18)$$

De integrand kan geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \right).$$

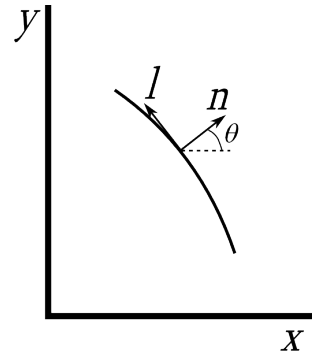
Dit is dus de divergentie van een bepaalde vector. We kunnen nu de Gauss Divergentie Stelling toepassen en krijgen dat de volgende formule voor de variatie van de tweede integraal

$$\begin{aligned} \int 2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} df = \oint \sin\theta \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \right\} dS + \\ + \oint \cos\theta \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right\} dS, \end{aligned} \quad (2.19)$$

waarbij  $\theta$  de hoek is tussen de  $x$ -as en de normaal.

Als we de afgeleiden van  $\chi$  naar  $x$  en  $y$  uitdrukken in afgeleiden naar de normaal  $\mathbf{n}$  en de tangënt  $\mathbf{l}$  langs de rand krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial n} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial l}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial n} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial l}. \end{aligned} \quad (2.20)$$



We kunnen dan (2.19) omschrijven als

$$\begin{aligned} & \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right\} dS + \\ & + \oint \frac{\partial \chi}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.21)$$

We kunnen de tweede contourintegraal partieel integreren. Aangezien we langs een gesloten contour integreren zullen de randen van integratie hetzelfde punt zijn en houden we

$$- \oint \chi \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}$$

over.

Als we nu alle informatie bij elkaar verzamelen vinden we voor de variatie van de totale vrije energie

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{pl}} = & \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \left( \int \chi \Delta^2 \zeta df - \oint \chi \left[ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left( \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\} \right] dS \right. \\ & \left. + \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} \left\{ \Delta \zeta + (1-\sigma) \left[ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dS \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Om de vergelijking van die een dunne plaat in equilibrium te vinden moeten we de gevonden variatie optellen met de variatie van de potentiaal energie op de plaat, van externe krachten die op de plaat werken, en gelijk stellen aan nul. De variatie van de potentiaal energie is  $\int P \chi df$  waarbij  $P$  weer de externe kracht op de plaat per oppervlakte eenheid is. We moeten dus hebben dat

$$\delta F_{\text{pl}} - \int P \chi df = 0. \quad (2.23)$$

Aan de linkerkand van deze vergelijking hebben we zowel oppervlakte als contour integralen. De oppervlakte integraal is

$$\int \left( \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P \right) \chi df. \quad (2.24)$$

Omdat de functie  $\chi$  willekeurig is kan de integraal alleen verdwijnen als de coëfficiënt van  $\chi$  nul is, dus als

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta - P = 0. \quad (2.25)$$

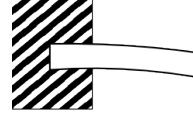
Dit is dan de gezochte dunne plaat vergelijking. De constante  $Eh^3/12(1-\sigma^2)$  wordt door wiskundigen altijd genegeerd omdat de absolute mate van buiging eigenlijk niet van

belang is. De contourintegralen kunnen gelijk aan nul worden gesteld om randvoorwaarden te vinden. Als we willen hebben dat de contourintegralen nul zijn zonder dat we een eis leggen op de rand, dus dat er geen krachten werken op de rand, krijgen we de eis dat de coëfficiënten van  $\chi$  en  $\frac{\partial \chi}{\partial n}$  in (2.22) nul moeten zijn. Als de plaat echter wordt ingeklemd of vrij opgelegd wordt, dan vinden we veel simpelere randvoorwaarden.

## 2.4 Randvoorwaarden

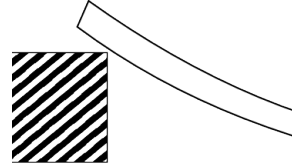
Als de plaat wordt ingeklemd moet er geen verticale verplaatsing mogelijk zijn en de plaat kan niet gebogen worden aan de rand. We krijgen dus dat

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (2.26)$$



Aangezien de functie  $\chi$  hier ook aan moet voldoen krijgen we dat de contourintegralen in (2.22) automatisch gelijk aan nul zijn.

Ook belangrijk is het geval dat we de plaat vrij opleggen, dus dat de plaat aan de randen op zijn plaats blijft, maar de richting van de plaat mag variëren. We krijgen dan dat  $\chi = 0$  in de contourintegraal, maar niet per se  $\partial \chi / \partial n = 0$ . Dus moeten we eisen dat die coëfficiënt nul is, dus dat



$$\Delta \zeta + (1 - \sigma) \left\{ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} = 0. \quad (2.27)$$

We kunnen deze eis in een mooiere vorm krijgen als we de afgeleiden van  $\zeta$  naar  $x$  en  $y$  omschrijven in afgeleiden naar  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{l}$ . We kunnen ook nog gebruiken dat aangezien  $\zeta = 0$  op de rand er ook geldt dat  $\partial \zeta / \partial l = 0$  en  $\partial^2 \zeta / \partial l^2 = 0$ . Verder geldt nog dat  $\partial \theta / \partial n = 0$  per definitie. We zien dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} + \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} + \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}. \end{aligned}$$

Als we deze informatie substitueren in (2.27) krijgen we voor de eerste term

$$\Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n},$$

en verder krijgen we voor de tweede term

$$\begin{aligned}
& 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \\
& = 2 \sin \theta \cos \theta \left[ \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right] - \\
& \quad - \sin^2 \theta \left[ \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} + \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right] - \\
& \quad - \cos^2 \theta \left[ \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n \partial l} + \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right] = \\
& = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} (2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + \\
& \quad + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial l \partial n} (2 \sin \theta \cos^3 \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta + 2 \sin^3 \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos^3 \theta) + \\
& \quad + \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (-2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^4 \theta - \cos^4 \theta) = \\
& = \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (-2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^4 \theta - \cos^4 \theta) = \\
& = \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (-\sin^2 \theta (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \cos^4 \theta) = \\
& = \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (-\sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta) = \\
& = \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (-\cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta) = -\frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n}.
\end{aligned}$$

Met de bovenstaande informatie krijgen we als randvoorwaarden voor de vrije oplegging

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (2.28)$$

Dit is vreemd genoeg een andere randvoorwaarde dan de meeste wiskundigen gebruiken voor het geval van vrije oplegging. We zullen in de komende paragrafen, in plaats van deze randvoorwaarde, de randvoorwaarde

$$\zeta = 0, \quad \Delta \zeta = 0 \quad (2.29)$$

gebruiken voor vrije oplegging. Als echter  $\sigma = -1$ , dan komen deze randvoorwaarden overeen.

De plaat op de voorkant is dus aan drie randen ingeklemd en aan één rand opgelegd. Uit het plaatje blijkt echter dat aan de zijde waar de plaat is opgelegd de plaat nog omhoog kan buigen. In het model gaan we bij vrije oplegging er dus van uit dat de plaat niet omhoog gaat aan de randen. Als we er echter ook rekening mee willen houden dat de plaat aan de rand omhoog kan komen, dan krijgen we aan de vrij opgelegde rand de voorwaarde

dat ten eerste

$$\zeta \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0.$$

Ten tweede moet nog gelden dat daar waar  $\zeta \neq 0$  de coëfficiënt van  $\chi$  in (2.22) nul is.

Er zijn nog meer mogelijkheden om randvoorwaarden te kiezen voor de plaat. We kunnen bijvoorbeeld de plaat aan een aantal kanten inklemmen en aan de andere kanten volledig vrij laten of vrij opleggen. We krijgen dan simpelweg op de plekken waar de plaat is ingeklemd de randvoorwaarden van de ingeklemde plaat en waar de plaat vrij is de vrije randvoorwaarden. Ook zouden we de plaat kunnen inklemmen onder een hoek. Als we de plaat inklemmen op een bepaalde plek onder een hoek van  $\alpha$ , dan krijgen we de daar de randvoorwaarde

$$\zeta = 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \alpha.$$

Als we de plaat op een bepaalde rand hoger willen inklemmen of opleggen krijgen we daar voor de eerste randvoorwaarde

$$\zeta = b,$$

waarbij  $b$  de hoogte is. We kunnen dit variëren over de rand zodat we als randvoorwaarden

$$\zeta = b(x, y) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \alpha(x, y) \tag{2.30}$$

krijgen, waarbij dan natuurlijk de functies  $b$  en  $\alpha$  continu moeten zijn.

Het afleiden van differentiaalvergelijking voor een dunne staaf gaat op soortgelijke wijze als wat we hier hebben gedaan. Als we een staaf bekijken die in slechts één dimensie buigt, dus bijvoorbeeld een staaf waar een gewicht op ligt, dan krijgen we dezelfde differentiaalvergelijking als we gevonden hebben, maar dan in één dimensie. Deze ziet er uit als

$$C\zeta''''(x) = f(x), \tag{2.31}$$

waarbij  $C$  een natuurkundige constante is.

### 3 Eén Dimensie

We bekijken het geval van een dunne staaf. We gaan de evenwichtstoestand bepalen van een dunne staaf waarop gewicht wordt gezet zodat deze gaat buigen. We hebben het hier hebben over gewicht dat op de staaf rust en niet het algemenere geval dat er krachten op de staaf worden uitgeoefend in verschillende richtingen. Daarom kunnen we volstaan met twee dimensies. In de horizontale dimensie ligt de staaf en in de verticale dimensie vindt de buiging plaats. Hiervoor bekijken we de differentiaalvergelijking

$$u'''' = f \quad U = (0, 1) \quad (3.1)$$

waarbij  $f$  de resulterende krachten zijn op de staaf,  $U$  het gebied waarin de staaf ligt en  $u$  de buiging van de staaf. We kiezen het gebied  $U$  gelijk aan  $(0, 1)$  liever dan een variabel gebied omdat we weten dat de dunne staaf vergelijking invariant is onder translaties en schaling. Verder moeten we nog randvoorwaarden kiezen. Als we een staaf willen bekijken die vrij opgelegd is, dus een staaf die bijvoorbeeld aan twee kettingen aan de uiteinden hangt, kiezen we de randvoorwaarden

$$u = u'' = 0 \quad \partial U. \quad (3.2)$$

Als we de staaf inklemmen aan de uiteinden, dan kiezen we de randvoorwaarden

$$u = u' = 0 \quad \partial U. \quad (3.3)$$

Dit zijn precies de randvoorwaarden die je uit de natuurkundewetten zou hebben gevonden. Volgens de theorie van differentiaalvergelijkingen heeft deze differentiaalvergelijking een oplossing die er uitziet als

$$u(x) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x_0) dx_0, \quad (3.4)$$

waarbij  $G : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  de Greense functie is. Dit is niet de definitie, maar een eigenschap van de Greense functie. We zien aan deze formule dat als de Greense functie een tekenwisseling heeft, dat we dan een gewicht kunnen vinden zodat de oplossing  $u$  ook van teken wisselt, dus dat de staaf omhoog doorbuigt. Als we dus willen weten of de staaf kan doorbuigen kunnen we volstaan met het beschrijven van de Greense functie en bepalen of deze van teken wisselt.

Laten we beginnen met het geval dat de staaf vrij opgelegd is. We kunnen de Greense functie afleiden door gebruik te maken van de definitie van de Greense functie

**Definitie 3.1** *De Greense functie  $G$ , in een punt  $x_0$ , van een lineaire operator  $L$ , die werkt op distributies over een variëteit  $M$ , is een willekeurige oplossing van*

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0), \quad (3.5)$$

waarbij  $\delta$  de Dirac delta functie is.



**Definitie 3.2** De Dirac delta functie is een distributie die er voor zorgt dat voor een willekeurige functie  $f$

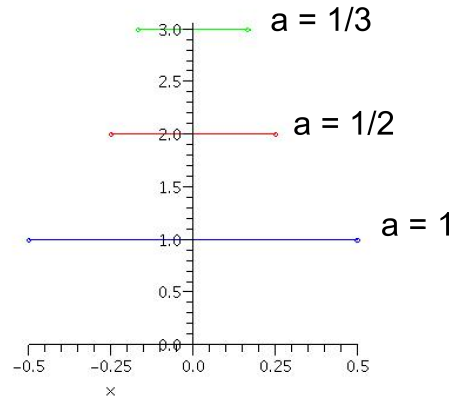
$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0). \quad (3.6)$$

De Dirac delta functie kan worden gezien als de limiet van  $a$  naar 0 van de functie

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Natuurlijk bestaat deze limiet niet als functie, maar wel is het zo dat

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int f(x)\delta_a(x)dx = \int f(x)\delta(x)dx.$$



Figuur 1: Grafiek van  $\delta_a$  voor verschillende waarden van  $a$

### 3.1 Vrije Oplegging

De operator die we dus bekijken is de differentiaaloperator gedefineerd door de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned} u'''' &= f \quad U = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De Greense functie, in  $x_0 \in [0, 1]$ , is dus een oplossing van het stelsel

$$\begin{aligned} \frac{d^4 G}{dx^4}(x, x_0) &= \delta(x - x_0) \quad U = (0, 1) \\ G(0, x_0) &= G(1, x_0) = \frac{d^2 G}{dx^2}(0, x_0) = \frac{d^2 G}{dx^2}(1, x_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

dus de vierde afgeleide van de Greense functie is nul, behalve als  $x = x_0$ . De Greense functie is dus van de vorm

$$G(x, x_0) = \begin{cases} c_1(x_0) + c_2(x_0)x + c_3(x_0)x^2 + c_4(x_0)x^3 & x < x_0, \\ c_5(x_0) + c_6(x_0)(x - 1) + c_7(x_0)(x - 1)^2 + c_8(x_0)(x - 1)^3 & x \geq x_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

waarbij  $\{c_1, \dots, c_8\}$  de, nog nader te bepalen, coëfficiënten zijn die nog van  $x_0$  mogen afhangen. We hebben voor het gemak voor de polynoom in het geval dat  $x$  groter is dan  $x_0$  telkens één van  $x$  af getrokken zodat het rekenwerk verderop iets gemakkelijker wordt, maar merk op dat elk derde graads polynoom zo te schrijven is.

Als we nu de randvoorwaarden bekijken, zien we dat we een aantal coëfficiënten al kunnen bepalen.

$$\begin{aligned} G(0, x_0) = 0 &\Rightarrow c_1(x_0) = 0, \\ G(1, x_0) = 0 &\Rightarrow c_5(x_0) = 0, \\ \frac{d^2 G}{dx^2}(0, x_0) = 0 &\Rightarrow c_3(x_0) = 0, \\ \frac{d^2 G}{dx^2}(1, x_0) = 0 &\Rightarrow c_7(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Verder willen we hebben dat de Greense functie en zijn eerste twee afgeleiden continu zijn. Dit geeft de voorwaarden

$$c_2(x_0)x_0 + c_4(x_0)x_0^3 = c_6(x_0)(x_0 - 1) + c_8(x_0)(x_0 - 1)^3, \quad (3.10)$$

$$c_2(x_0) + 3c_4(x_0)x_0^2 = c_6(x_0) + 3c_8(x_0)(x_0 - 1)^2, \quad (3.11)$$

$$6c_4(x_0)x_0 = 6c_8(x_0)(x_0 - 1). \quad (3.12)$$

We weten ook dat de Greense functie de oplossing is van bovenstaande differentiaalvergelijking (3.8). Als we links en rechts integreren vinden we een sprongconditie

$$\begin{aligned} \frac{d^4 G}{dx^4}(x, x_0) &= \delta(x - x_0) \\ \int_U \frac{d^4 G}{dx^4}(x, x_0) dx &= \int_U \delta(x - x_0) dx \\ \frac{d^3 G}{dx^3}(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= 1 \\ 6c_8(x_0) - 6c_4(x_0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Als we het stelsel van deze laatste vier vergelijkingen (3.10-3.13) in matrixvorm schrijven krijgen we

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_0^3 & -(x_0 - 1) & -(x_0 - 1)^3 \\ 1 & 3x_0^2 & -1 & -3(x_0 - 1)^2 \\ 0 & 6x_0 & 0 & -6(x_0 - 1) \\ 0 & -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2(x_0) \\ c_4(x_0) \\ c_6(x_0) \\ c_8(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Als we de matrix van dit stelsel inverteren krijgen we de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -(x_0 - 1) & \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 - \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 - \frac{1}{6} & \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}(x_0 - 1) \\ 1 & -x_0 & \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{6} & \frac{1}{6}(x_0^2 - 1)x_0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}x_0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Voor de coëfficiënten  $c_2(x_0)$ ,  $c_4(x_0)$ ,  $c_6(x_0)$  en  $c_8(x_0)$  vinden we dus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_2(x_0) \\ c_4(x_0) \\ c_6(x_0) \\ c_8(x_0) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(x_0 - 1) & \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 - \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 - \frac{1}{6} & \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}(x_0 - 1) \\ 1 & -x_0 & \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{6} & \frac{1}{6}(x_0^2 - 1)x_0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1) \\ \frac{1}{6}(x_0 - 1) \\ \frac{1}{6}(x_0^2 - 1)x_0 \\ \frac{1}{6}x_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dus de Greense functie van de dunne plaat vergelijking met vrije oplegging in één dimensie is dus

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1)x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)x^3 & x < x_0 \\ \frac{1}{6}(x_0^2 - 1)x_0(x - 1) + \frac{1}{6}x_0(x - 1)^3 & x \geq x_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

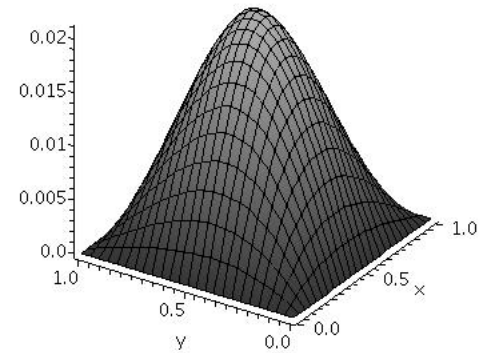
Dit is dan *een* representatie van deze Greense functie, men kan via bijvoorbeeld eigenfunctie expansie een andere representatie van deze Greense functie vinden. Met deze schrijfwijze is het relatief makkelijk om te zien dat de Greense functie symmetrisch is in de zin van

$$G(x, x_0) = G(x_0, x).$$

Met wat omschrijven krijgen voor we  $x < x_0$

$$\begin{aligned} G(x, x_0) &= \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1)x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)x^3 = \\ &= \frac{1}{6}(x_0 - 1)^3x - \frac{1}{6}(x_0 - 1)x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)x^3 = \\ &= \frac{1}{6}(x_0 - 1)^3x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)(x^3 - x) = \\ &= \frac{1}{6}(x_0 - 1)^3x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)(x^2 - 1)x = \\ &= G(x_0, x). \end{aligned}$$

Voor  $x \geq x_0$  kunnen we ook volstaan met het bovenstaande.



Figuur 2: Grafiek van de Greense functie van de vrij opgelegde dunne staaf.

We willen nu weten of deze functie tekenwisselingen heeft. We beginnen met het geval dat  $x < x_0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1)x + \frac{1}{6}(x_0 - 1)x^3 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & ((x_0 - 1)^2 - 1)(x_0 - 1) + (x_0 - 1)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & ((x_0 - 1)^2 - 1) + x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x_0^2 - 2x_0 + x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

We hebben in de eerste stap gebruikt dat  $x$  positief is en in de tweede stap dat  $(x_0 - 1)$  negatief is. De laatste uitspraak kunnen we bewijzen door gebruik te maken van het gegeven dat  $x_0 > x$ .

$$\begin{aligned} & x < x_0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow & x_0^2 + x^2 < 2x_0^2 < 2x_0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow & x_0^2 - 2x_0 + x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Hier hebben we in de tweede stap gebruikt dat  $0 \leq x_0 \leq 1$ . Wegens de symmetrie eigenschap van de Greense functie concluderen we dat de Greense functie ook positief is als  $x \geq x_0$ .

## 3.2 Ingeklemd

Als we nu de staaf niet vrij opleggen, maar inklemmen hebben we dus te maken met de differentiaalvergelijking

$$u'''' = f \quad U = (0, 1), \quad (3.17)$$

met de randvoorwaarde

$$u = u' = 0 \quad \partial U. \quad (3.18)$$

De Greense functie die hoort bij deze randvoorwaarde is dus de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^4 G}{dx^4}(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad U = (0, 1), \quad (3.19)$$

$$G(0, x_0) = G(1, x_0) = \frac{dG}{dx}(0, x_0) = \frac{dG}{dx}(1, x_0) = 0. \quad (3.20)$$

Net als bij de vrij opgelegde staaf kunnen we beredeneren dat de Greense functie de volgende vorm heeft:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} c_1(x_0) + c_2(x_0)x + c_3(x_0)x^2 + c_4(x_0)x^3 & x < x_0, \\ c_5(x_0) + c_6(x_0)(x - 1) + c_7(x_0)(x - 1)^2 + c_8(x_0)(x - 1)^3 & x \geq x_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

We kunnen een aantal coëfficiënten bepalen met de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} G(0, x_0) = 0 &\Rightarrow c_1(x_0) = 0, \\ G(1, x_0) = 0 &\Rightarrow c_5(x_0) = 0, \\ \frac{dG}{dx}(0, x_0) = 0 &\Rightarrow c_2(x_0) = 0, \\ \frac{dG}{dx}(1, x_0) = 0 &\Rightarrow c_6(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Verder moeten de Greense functie en zijn eerste twee afgeleiden continu zijn. Dit geeft de eisen

$$c_3(x_0)x_0^2 + c_4(x_0)x_0^3 = c_7(x_0)(x_0 - 1)^2 + c_8(x_0)(x_0 - 1)^3, \quad (3.22)$$

$$2c_3(x_0)x_0 + 3c_4(x_0)x_0^2 = 2c_7(x_0)(x_0 - 1) + 3c_8(x_0)(x_0 - 1)^2, \quad (3.23)$$

$$2c_3(x_0) + 6c_4(x_0)x_0 = 2c_7(x_0) + 6c_8(x_0)(x_0 - 1). \quad (3.24)$$

Tot slot moet ook nog gelden dat de Greense functie een oplossing is van

$$\frac{d^4G}{dx^4}(x, x_0) = \delta(x - x_0).$$

Als we links en rechts integreren krijgen we

$$\begin{aligned} \int_U \frac{d^4G}{dx^4}(x, x_0) dx &= \int_U \delta(x - x_0) dx \\ \frac{d^3G}{dx^3}(x, x_0) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} &= 1 \\ 6c_8(x_0) - 6c_4(x_0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Als we deze voorwaarden (3.22-3.25) opschrijven in matrixvorm krijgen we

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0^3 & -(x_0 - 1)^2 & -(x_0 - 1)^3 \\ 2x_0 & 3x_0^2 & -2(x_0 - 1) & -3(x_0 - 1)^2 \\ 2 & 6x_0 & -2 & -6(x_0 - 1) \\ 0 & -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3(x_0) \\ c_4(x_0) \\ c_7(x_0) \\ c_8(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Als we de matrix van dit stelsel inverteren krijgen we

$$\begin{pmatrix} 3 & -3x_0 + 2 & \frac{1}{2}(x_0 - 1)(3x_0 - 1) & \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2x_0 \\ -2 & 2x_0 - 1 & -x_0(x_0 - 1) & -\frac{1}{6}(x_0 - 1)^2(2x_0 + 1) \\ -3 & 3x_0 - 1 & -\frac{1}{2}x_0(3x_0 - 2) & -\frac{1}{2}(x_0 - 1)x_0^2 \\ -2 & 2x_0 - 1 & -x_0(x_0 - 1) & -\frac{1}{6}x_0^2(2x_0 - 3) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

We krijgen dus voor onze coëfficiënten

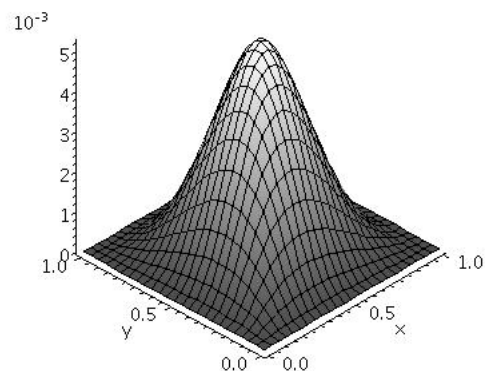
$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} c_3(x_0) \\ c_4(x_0) \\ c_7(x_0) \\ c_8(x_0) \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 3 & -3x_0 + 2 & \frac{1}{2}(x_0 - 1)(3x_0 - 1) & \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 x_0 \\ -2 & 2x_0 - 1 & -x_0(x_0 - 1) & -\frac{1}{6}(x_0 - 1)^2(2x_0 + 1) \\ -3 & 3x_0 - 1 & -\frac{1}{2}x_0(3x_0 - 2) & -\frac{1}{2}(x_0 - 1)x_0^2 \\ -2 & 2x_0 - 1 & -x_0(x_0 - 1) & -\frac{1}{6}x_0^2(2x_0 - 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 x_0 \\ -\frac{1}{6}(x_0 - 1)^2(2x_0 + 1) \\ -\frac{1}{2}(x_0 - 1)x_0^2 \\ -\frac{1}{6}x_0^2(2x_0 - 3) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Onze Greense functie ziet er dus uit als

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 x_0 x^2 - \frac{1}{6}(x_0 - 1)^2(2x_0 + 1)x^3 & x < x_0, \\ -\frac{1}{2}(x_0 - 1)x_0^2(x - 1)^2 - \frac{1}{6}x_0^2(2x_0 - 3)(x - 1)^3 & x \geq x_0. \end{cases} \quad (3.28)$$

We zien op het plaatje hier rechts de grafiek van deze Greense functie. Bekijk nog eens de grafiek van de Greense functie voor de vrij opgelegde dunne staaf. Allereerst valt op dat de ingeklemde Greense functie naar de rand toe horizontaal wordt, maar als we kijken hoe hoog de top van de functie ligt, dan zien we dat dus kennelijk bij de ingeklemde staaf ongeveer vier keer zoveel kracht nodig is om hem even ver te buigen als we een puntgewicht in het midden plaatsen.

We weten uit de theorie dat de Greense functie symmetrisch is, maar we zullen het voor deze specifieke Greense



Figuur 3: Grafiek van de Greense functie voor de ingeklemde dunne staaf

functie even aantonen. Voor  $x < x_0$  hebben we

$$\begin{aligned}
G(x, x_0) &= \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 x_0 x^2 - \frac{1}{6}(x_0 - 1)^2 (2x_0 + 1)x^3 = \\
&= x^2(x_0 - 1)^2 \left( \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{3}x_0 x - \frac{1}{6}x \right) = \\
&= x^2(x_0 - 1)^2 \left( -\frac{1}{2}(x - 1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(x_0 - 1) - \frac{1}{3}(x_0 - 1)x \right) = \\
&= x^2(x_0 - 1)^2 \left( -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{6}(x_0 - 1)(2x - 3) \right) = \\
&= -\frac{1}{2}(x - 1)x^2(x_0 - 1)^2 - \frac{1}{6}x^2(2x - 3)(x_0 - 1)^3 = \\
&= G(x_0, x).
\end{aligned}$$

Het geval dat  $x \geq x_0$  volgt hier direct uit. Het blijkt dat ook deze Greense functie positief is. Dus een dunne staaf die wordt ingeklemd kan niet omhoog doorbuigen door er gewicht op te zetten. We kunnen zelfs bewijzen dat deze Greense functie positief is.

We beginnen met het geval dat  $x < x_0$ , dus

$$\begin{aligned}
G(x, x_0) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 x_0 x^2 - \frac{1}{6}(x_0 - 1)^2 (2x_0 + 1)x^3 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{6}(2x_0 + 1)x \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{3}x_0 x - \frac{1}{6}x \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0 \geq \frac{1}{3}x_0 x + \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

De laatste uitspraak is een direct gevolg van het feit dat  $x < x_0$  en  $x, x_0 \in [0, 1]$ . Het geval dat  $x \geq x_0$  volgt direct uit de symmetrie van de Greense functie.

In één dimensie krijgen we dus geen tekenwisselingen. Een dunne staaf zal dus niet omhoog doorbuigen als we er een gewicht op zetten. We hopen natuurlijk dat we in twee dimensies kunnen voorspellen dat een dunne plaat omhoog kan buigen zoals in het plaatje op het voorblad. Op dit plaatje is te zien dat we de plaat hebben ingeklemd, maar van een plaat die vrij opgelegd is weten we echter nog niets.

## 4 Vrije Oplegging in Twee Dimensies

We bekijken nu het geval van een dunne plaat die vrij opgelegd is. We bekijken dus de differentiaalvergelijking

$$\Delta^2 u = f \quad U = (0, L) \times (0, K). \quad (4.1)$$

De vrije oplegging wordt beschreven door de randvoorwaarden

$$u = \Delta u = 0 \quad \partial U. \quad (4.2)$$

Deze randvoorwaarde is, zoals al eerder vermeld, de randvoorwaarde die volgens de natuurkunde moet gelden als tenminste de Poisson ratio  $\sigma = -1$ . We gaan de Greense functie bepalen met behulp van eigenfunctie expansie. Het is dus van belang dat we de eigenfuncties van de bovenstaande differentiaaloperator bepalen. Het is gemakkelijk na te gaan dat onze differentiaaloperator het kwadraat is van de Laplace differentiaaloperator met Dirichlet randvoorwaarden. Anders gezegd, laat  $F$  de bovenstaande differentiaaloperator zijn en laat  $H$  de differentiaaloperator

$$\Delta u = f \quad U = (0, L) \times (0, K) \quad (4.3)$$

$$u = 0 \quad \partial U \quad (4.4)$$

zijn, dan is  $H^2 = F$ . Deze differentiaalvergelijking heet de Laplace vergelijking en heeft zijn voornaamste toepassing in de thermodynamica.

### 4.1 Eigenfuncties van de Laplace Vergelijking

We kunnen de Laplace vergelijking gebruiken doordat we uit de functionaalanalyse weten dat  $\lambda$  een eigenwaarde is van  $H$  met eigenfunctie  $v$ , dan en slechts dan als  $\lambda^2$  een eigenwaarde is van  $F$  met dezelfde eigenfunctie  $v$ . Van de Laplace operator kunnen we met behulp van het scheiden van variabelen de eigenwaarden en eigenfuncties bepalen. We moeten dan dus oplossingen vinden van de differentiaalvergelijking

$$\Delta \phi = -\lambda \phi \quad U = (0, L) \times (0, K) \quad (4.5)$$

$$\phi = 0 \quad \partial U. \quad (4.6)$$

Als we aannemen dat de oplossing  $\phi$  te schrijven is als een product van functies die van één variabele afhangen

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (4.7)$$

dan geldt dat

$$\Delta \phi = Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2}(x) + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2}(y) = -\lambda X(x)Y(y),$$



en dus

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2}(y) = -\lambda. \quad (4.8)$$

Merk op dat, met deze schrijfwijze, de eerste term alleen afhangt van  $x$  af en de tweede term alleen van  $y$ . Bij elkaar opgeteld moeten ze constant zijn voor alle  $x$  en  $y$ . Dat kan alleen als zowel de eerste term als de tweede term constant is, dus in formule is dat

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) = -\mu, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2}(y) = -(\lambda - \mu). \quad (4.10)$$

We krijgen dan twee gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(x) = -\mu X(x), \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2}(y) = -(\lambda - \mu)Y(y), \quad (4.12)$$

met de randvoorwaarden

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (4.13)$$

$$Y(0) = Y(K) = 0. \quad (4.14)$$

We kiezen een min-teken voor de  $\mu$  en  $(\lambda - \mu)$  omdat dat een conventie is; we leggen geen eis op het teken van  $\mu$  of  $\lambda - \mu$ .

We gaan deze differentiaalvergelijkingen oplossen en we beginnen met de eerste. De constante  $\mu$  kan in drie verschillende gebieden liggen

$$\mu < 0, \quad \mu = 0 \quad \mu > 0. \quad (4.15)$$

Slechts in één van deze gebieden vinden we een oplossing. In het geval dat  $\mu = 0$  moet  $X$  van de vorm

$$X(x) = A + Bx \quad (4.16)$$

zijn. Als we nu de randvoorwaarden toepassen vinden we dat

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Het geval  $\mu = 0$  geeft ons dus geen oplossing. Voor de gevallen dat  $\mu < 0$  en  $\mu > 0$  vinden we oplossing door te kijken naar de karakteristieke vergelijking

$$z^2 = -\mu.$$

Als  $\mu$  positief is, dan is

$$z = \pm i\sqrt{\mu},$$

en als  $\mu$  negatief is, dan is

$$z = \pm\sqrt{-\mu}.$$

We laten zien dat het laatste geval geen oplossingen voortbrengt. De oplossing is, in het laatste geval, van de vorm

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\mu}x} + Be^{-\sqrt{-\mu}x}, \quad (4.17)$$

waarbij  $A$  en  $B$  constanten zijn. Om te voldoen aan de randvoorwaarden krijgen we eisen op de constanten

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ae^{\sqrt{-\mu}L} + Be^{-\sqrt{-\mu}L} &= 0. \end{aligned}$$

De eerste geeft ons dat  $B = -A$ . De tweede wordt nu dus

$$A\left(e^{\sqrt{-\mu}L} - e^{-\sqrt{-\mu}L}\right) = 0$$

Dat kan alleen als  $A = 0$  en dat betekent dus dat de oplossing die we vinden de nulfunctie is.

We zijn dus waarschijnlijk beter af als we  $\mu$  positief nemen. Onze oplossing is dan van de vorm

$$X(x) = Ae^{i\sqrt{\mu}x} + Be^{-i\sqrt{\mu}x}. \quad (4.18)$$

Dat is ook te schrijven als

$$X(x) = A \sin \sqrt{\mu}x + B \cos \sqrt{\mu}x, \quad (4.19)$$

waarbij  $A$  en  $B$  nu wel andere constanten zijn dan in (4.18).

Om te voldoen aan onze randvoorwaarden moet nu gelden dat

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ A \sin \sqrt{\mu}L + B \cos \sqrt{\mu}L &= 0. \end{aligned}$$

Als we de eerste voorwaarde in acht nemen wordt de tweede voorwaarde

$$A \sin \sqrt{\mu}L = 0.$$

Dat kan alleen als  $A = 0$  of  $\sin \sqrt{\mu}L = 0$ . Als  $A = 0$  krijgen we alleen de nulfunctie, maar als we eisen dat  $\sin \sqrt{\mu}L = 0$ , krijgen we dat

$$\mu = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad (4.20)$$

waarbij  $n \in \mathbb{N}$ .

Onze oplossing wordt dus

$$X(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (4.21)$$

Aan de constante  $A$  wordt dus geen eis gesteld, dus we kunnen gewoon  $A = 1$  kiezen.

Laten we nu onze tweede gewone differentiaalvergelijking bekijken

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -(\lambda - \mu) Y(y). \quad (4.22)$$

Deze tweede differentiaalvergelijking is eigenlijk hetzelfde eigenwaarden probleem. Gegeven een  $\mu$  kunnen we  $\lambda - \mu$  vrij bepalen door een juiste keuze van  $\lambda$ . We kunnen dus gegeven een  $n$  een oplossing vinden bij eigenwaarde nummer  $m$

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2, \quad (4.23)$$

$$Y_{nm}(y) = \sin \frac{m\pi y}{K}. \quad (4.24)$$

De eigenwaarden en eigenfuncties van de Laplace vergelijking zijn dus

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2 \quad (4.25)$$

$$\phi_{nm} = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K}. \quad (4.26)$$

## 4.2 De Greense Functie als Eigenfunctie Expansie

Omdat de dunne plaat vergelijking met vrije oplegging het kwadraat is van de Laplace vergelijking, heeft volgens de functionaalanalyse de dunne plaat vergelijking met vrije oplegging de eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_{nm} = \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2 \right]^2, \quad (4.27)$$

$$\phi_{nm} = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K}. \quad (4.28)$$

We halen de dunne plaat vergelijking er weer even bij

$$\Delta^2 u = f \quad U = (0, L) \times (0, K), \quad (4.29)$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \partial U. \quad (4.30)$$

We zoeken nu de functie  $u$  die de dunne plaat vergelijking met vrije oplegging oplost als gegeneraliseerde Fourier reeks van de eigenfuncties

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \phi_{nm} \quad (4.31)$$

Aangezien zowel  $\phi_{nm}$  en  $u$  aan dezelfde homogene randvoorwaarden voldoen mogen we termsgewijs differentieren

$$f = \Delta^2 u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \Delta^2 \phi_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \lambda_{nm} \phi_{nm} \quad (4.32)$$

Wegens de orthogonaliteit van de eigenfuncties  $\phi_{nm}$  geldt dat

$$a_{nm} \lambda_{nm} = \frac{\int_U f \phi_{nm} dS}{\int_U \phi_{nm}^2 dS} \quad (4.33)$$

Als we dit weer in (4.31) invullen en integratie en sommatie verwisselen krijgen we

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^K \int_0^L \left\{ f(x_0, y_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_{nm}(x, y) \phi_{nm}(x_0, y_0)}{\lambda_{nm} \int_U \phi_{nm}^2 dS} dx_0 dy_0 \right\} \\ &= \int_0^K \int_0^L \left\{ f(x_0, y_0) G(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

waarbij  $G$  dus de Greense functie is uitgedrukt in eigenfuncties

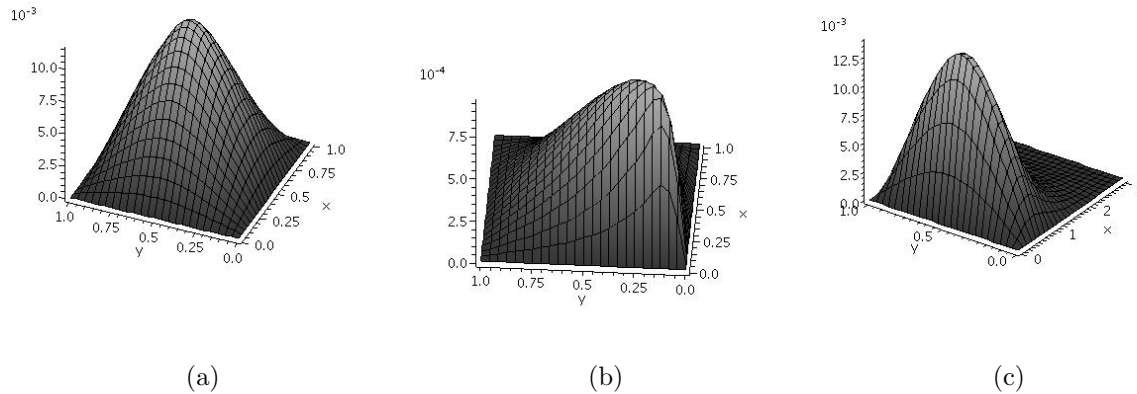
$$\begin{aligned} G(x, y, x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_{nm}(x, y) \phi_{nm}(x_0, y_0)}{\lambda_{nm} \int_U \phi_{nm}^2 dS} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{m\pi y_0}{K}}{\left( \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{K} \right)^2 \right)^2 \frac{L \cdot K}{4}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

We kunnen deze Greense functie moeilijk in één plaatje weergeven aangezien deze dan vijf dimensies zou moeten weergeven. We kunnen echter wel een aantal plaatjes maken waarbij we bepaalde variabelen constant houden om zo twee dimensies minder over te houden.

Volgens de theorie is de Greense functie positief als de eerste eigenfunctie positief is. De eerste eigenfunctie is

$$\phi_{11}(x, y) = \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{K}.$$

Deze is duidelijk positief in het interval  $(0, L) \times (0, K)$ . We hebben dus ook in twee dimensies geen doorbuiging van de dunne plaat die vrij opgelegd is.



Figuur 4: Verschillende doorsneden van de Greense functie van de vrij opgelegde dunne plaat. (a)  $G(x, y, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $L, K = 1$ , (b)  $G(x, y, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ ,  $L, K = 1$ , (c)  $G(x, y, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $L = 3, K = 1$

## 5 Conclusie

We zouden graag ook willen onderzoeken of de ingeklemde dunne plaat omhoog kan doorbuigen. We weten dat dit zal gebeuren voor bepaalde rechthoeken, omdat het is te lezen in [5]. Voor algemene vormen zal de dunne zeker niet omhoog doorbuigen. We hebben toch zeker enkele duidelijke resultaten geboekt. We weten nu dat in één dimensie de dunne staaf niet omhoog zal doorbuigen. Ook zal de dunne plaat niet omhoog doorbuigen als deze vrij wordt opgelegd.

Ik heb met de opstelling van het plaatje op de voorkant ook gekeken wat er gebeurt als die plaat vrij opgelegd wordt. Er gebeurt precies datgene wat er volgens het model zou moeten gebeuren. De plaat buigt naar beneden en vormt een kuil. Hieruit blijkt maar hoe goed het model werkt.

We zouden graag nog willen onderzoeken hoe het komt dat wiskundigen een verkeerde randvoorwaarde kiezen voor de vrije oplegging

## 6 Literatuurlijst

- [1] A. Dall'Acqua , G. Sweers: *The Clamped Plate Equation for the Limacon*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **Volume 184, Number 3 / August**, (2005), 361-374.
  
- [2] Dube, R.S.: *Green's function of an elastic plate in the shape of Pascal's Limacon and clamped along the boundary*, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **2**, ((1971)), 59-68.
  
- [3] M. Engli, J. Peetre: *A Green's function for the annulus*, *Ann. Mat Pura Appl.*, **71**, (1996), 313-377.
  
- [4] G. Sweers: *When is the first eigenfunction for the clamped plate equation of fixed sign?*, *Electron. J. Diff. Eqns., Conf.*, **06**, (2001), 285-296..
  
- [5] R.J. Duffin: *On a question of Hadamard concerning super-biharmonic functions*, *J. Math. Phys.*, **27**, (1949), 253-258..
  
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Theory of Elasticity*, **ISBN: 08-006465-5** Course of Theoretical Physics, **7**, (1959), 1-15,44-51.
  
- [7] R. Haberman: *Applied Partial Differential Equations*, **ISBN: 0-13-065243-1** , (1983).