

VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM

BACHELORPROJECT

---

# Het Gibbs effect bij Fourier- en Gegenbauerreeksen

---

*Auteur:*  
Florian Reuter

*Begeleider:*  
Prof. dr. R.C.A.M.  
Vandervorst

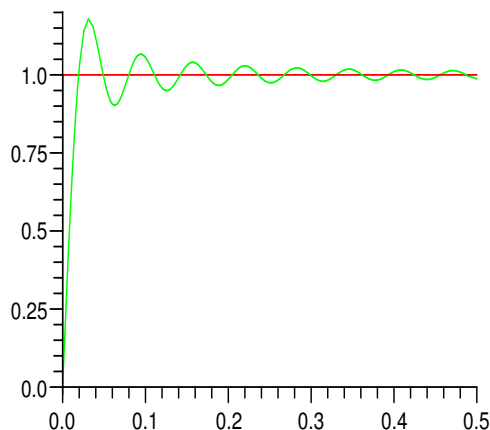
19 april 2008

# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>1 Het Gibbs effect bij Fourierreeksen</b>	<b>4</b>
1.1 De blokgolf . . . . .	4
1.2 Het Gibbs effect in het algemeen . . . . .	7
<b>2 De Gegenbauerpolynomen</b>	<b>8</b>
2.1 Orthogonale polynomen in een ruimte met een dichtheid . . . . .	8
2.2 Eigenschappen van de orthogonale polynomen . . . . .	11
2.3 Gegenbauerpolynomen als orthonormaal stelsel . . . . .	11
<b>3 Gibbs effect bij de Gegenbauerpolynomen</b>	<b>13</b>
3.1 De blokgolf . . . . .	13
3.2 Het Gibbs effect in het algemeen . . . . .	19
3.3 Gegenbauerpolynomen als speciaal geval van hypergeometrische functies . .	20
<b>4 Conclusie</b>	<b>24</b>
<b>Referenties</b>	<b>25</b>

## Inleiding

Als een functie in  $L^2(T)$  zit, hoeft de functie niet continu te zijn. In deze scriptie gaan wij kijken naar het gedrag van Fourier- en Gegenbauerreeksen van een functie rond de discontinuïteit. In de onderstaande grafiek is de zogenaamde blokgolf te zien met een eindig aantal termen van de Fourierreeks. De blokgolf is negatief voor  $-1 < x < 0$  en positief voor  $0 < x < 1$ . Wij zien hier een hevige oscillatie rond de discontinuïteit in  $x = 0$ . Deze verdwijnt niet bij een groter aantal termen van de Fourierreeks, maar zal alleen meer richting de discontinuïteit schuiven. We gaan laten zien dat de maximale uitwijking naar een vaste waarde convergeert. Dit fenomeen wordt het Gibbs-effect genoemd. Dit betekent ook dat de Fourierreeks niet uniform convergent hoeft te zijn, ondanks het feit dat de reeks wel in norm convergeert.



GIBBSEFFECT BIJ EEN FOURIERREEKS

Het fenomeen is door verschillende mensen waargenomen, voordat het door J. Willard Gibbs wiskundig verklaard werd. De natuurkundige Albert Michelson maakte aan het eind van de negentiende eeuw een machine die na het invoeren van de Fouriercoëfficiënten de reeks kon schetsen. Ook na de toevoeging van meer termen bleef er rond een discontinuïteit een hevige oscillatie. Er werd eerst aan een fout in het apparaat gedacht, maar uiteindelijk zag Gibbs dat het een wiskundig fenomeen was. Hij heeft vervolgens een wiskundige verklaring gegeven. Henry Bôcher heeft in 1906 een uitgebreide analyse gegeven en vernoemde het effect naar Gibbs.

De Gegenbauerpolynomen, ook wel ultraspherical polynomials genoemd, zijn polynomen die in  $L^2_\mu(T)$  een compleet stelsel vormen., waarbij de bijbehorende absoluut-continue maat  $\mu$  later wordt gedefinieerd. Hier zal ook de bijbehorende Gegenbauerreeks in norm naar de functie in  $L^2_\mu(T)$  convergeren. Bij een discontinuïteit is hier ook het Gibbs-effect te zien. Het belangrijkste resultaat van deze scriptie is dat er wordt laten zien dat de waarde van de maximale uitwijking voor de Fourier- en Gegenbauerreeksen gelijk is. Dit werd in 2005 door Sidi Mahmoud Kaber bewezen. Hij bouwde voort op een resultaat van David Gottlieb uit 1977.

Voor de Gegenbauerpolynomen wordt er eerst uitgebreid naar algemene orthogonale polynomen gekeken. De herkomst en een aantal eigenschappen worden genoemd. Bij de analyse van het Gibbsseffect wordt vervolgens het Gibbsseffect bij de blokgolf helemaal uitgewerkt. Met de kennis die hier opgedaan wordt, is het nog een kleine stap naar een algemene discontinue functie in de bijbehorende ruimte.

# 1 Het Gibbs effect bij Fourierreeksen

Als een functie  $f$  in de ruimte  $L^2(-\pi, \pi)$  zit, kan  $f$  worden uitgedrukt in een Fourierreeks. Deze reeks convergeert in de  $L^2$ -norm naar  $f$ . Dit kunnen wij noteren als

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

De coëfficiënten van de reeks worden gegeven door

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Dit kan worden uitgebreid naar functies over andere intervallen door transformaties toe te passen, maar voor het gemak wordt hier in het vervolg de Fourierreeks genomen van een functie in  $L^2(T)$  met  $T = [-\pi, \pi]$ .

## 1.1 De blokgolf

Voor  $-\pi < x < \pi$  bekijken wij de functie

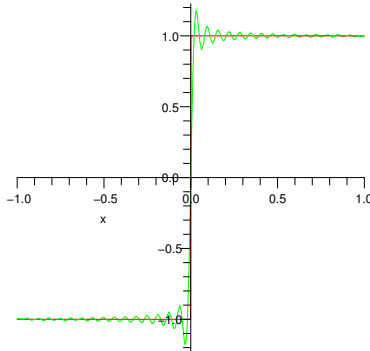
$$S(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

De notatie  $S$  komt van de signfunctie  $\text{sgn}$  die, op  $\text{sgn}(0) = 0$  na, gelijk is aan de blokgolf. De blokgolf zit in  $L^2(-\pi, \pi)$ , want het is een stapfunctie. De Fourierreeks van  $S$  zal nu in de  $L^2$ -norm convergeren naar  $S$ . De functie is oneven, dus zijn de coëfficiënten  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos kx \, dx$  altijd nul. Dit geeft een sinusreeks met coëfficiënten

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} S(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k).$$

De coëfficiënten zijn nul voor *even* waarden van  $k$ , dus alleen de oneven termen dragen bij aan de Fourierreeks van  $S$  door

$$S(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$



DE BLOKGOLF MET 100 TERMEN VAN DE FOURIERREEKS

Bij de grafiek van  $S$  en de grafiek van de eerste honderd termen van de reeks zien wij een hevige oscillatie van de reeks rond de discontinuïteit in  $S(0)$ . Als wij meer termen van de reeks nemen, zullen deze oscillaties alleen opschuiven naar de discontinuïteit. De convergentie geeft dat de afstand (in  $L^2$ -norm) tussen de functie en de reeks naar nul gaat, maar bij een discontinue functie heeft dit een verdichting van de oscillaties als gevolg.

Wij gaan nu kijken wat de waarde van de maximale oscillatie is en gebruiken daarvoor dat de afgeleide van de partiële sommen in dat punt nul moet zijn. Voor het gemak wordt de factor  $\frac{4}{\pi}$  uit de reeks weggelaten. De partiële som  $S_{2n+1}(x)$  en zijn afgeleide worden gegeven door

$$S_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad S'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \cos(2k+1)x.$$

De afgeleide kan worden vereenvoudigd met de goniometrische identiteit  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$  tot

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(2k+1)x &= \sum_{k=0}^n \frac{2 \cos(2k+1)x \sin x}{2 \sin x} \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^n 2 \cos \left( \frac{(2k+2)x + 2kx}{2} \right) \sin \left( \frac{(2k+2)x - 2kx}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^n \sin(2k+2)x - \sin 2kx \\ &= \frac{\sin(2n+2)x}{2 \sin x}. \end{aligned} \tag{1}$$

De functie is oneven, dus wij kunnen ons beperken tot de oscillatie bij  $x > 0$ . Voor de waarden  $0 < x < \pi$  heeft de afgeleide nulpunten in  $x_m = \frac{m\pi}{2(n+1)}$  voor  $m \in \{1, \dots, 2n+1\}$ .

We gaan nu kijken welke uiterste waarde van  $S_{2n+1}(x_m)$  de grootste is. De noemer van de afgeleide wordt bij toenemende  $m$  groter en de teller is nul in de punten  $x_m$ . Dit zijn afwisselend maxima en minima in  $S_{2n+1}(x_m)$ , omdat het teken van de afgeleide tussen de punten afwisselend positief en negatief is. De partiële som  $S_{2n+1}(x) = \int_0^x S'_{2n+1}(t)dt$ , omdat  $S_{2n+1}(0) = 0$ . De afgeleide is tussen twee nulpunten kleiner dan tussen de voorgaande nulpunten, dus moet tussen twee maxima van  $S_{2n+1}$  de eerste groter zijn. Dit geldt voor elk paar maxima, dus het eerste maximum moet het grootst zijn.

Wij kunnen nu kijken wat er met de waarde van de maximale oscillatie gebeurt, als er meer termen van de Fourierreeks worden genomen. De limiet wordt gegeven door

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \left( \pi \frac{2k+1}{2(n+1)} \right)}{2k+1}.$$

Deze som kan herschreven worden tot een Riemanssom. We maken een partitie van  $[0, \pi]$  met punten  $t_k = \frac{k\pi}{n+1}$  voor  $k = 0, \dots, n+1$  en middens  $x_k = \frac{t_k+t_{k+1}}{2} = \pi \frac{2k+1}{2(n+1)}$ . De lengte van een deelinterval wordt nu  $\Delta x = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{n+1}$ . De limiet van de partiële som kan nu herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \left( \pi \frac{2k+1}{2(n+1)} \right)}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sin x_k}{2k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\pi}{n+1} \cdot \frac{\sin x_k}{x_k} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

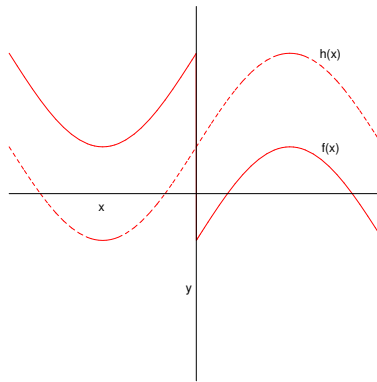
In het begin is de factor  $\frac{4}{\pi}$  eruit gelaten. Met deze factor erbij krijgen wij nu de waarde van de maximale uitwijking. Deze constante wordt ook wel de Gibbsconstante genoemd.

$$\mathcal{G} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.1789797$$

## 1.2 Het Gibbs-effect in het algemeen

Na het uitvoerig bestuderen van de blokgolf is het eenvoudig om discontinue functies in het algemeen te behandelen. We nemen een willekeurige  $f$  in  $L^2(T)$  met een discontinuïteit in  $x_0$ . We introduceren eerst  $f(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ ,  $f(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$  en  $[f]_{x_0} = f(x_0+) - f(x_0-)$ . Hiermee kan samen met de blokgolf  $S$  een nieuwe continue functie geconstrueerd worden:

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}[f]_{x_0}S(x - x_0), \text{ met } S \text{ de blokgolf.}$$



DISCONTINUE FUNCTIE  $f$  MET CONTINUE FUNCTIE  $h$

Deze  $h$  is continu in  $x_0$ , want  $h(x_0-) = f(x_0-) - \frac{1}{2}[f]_{x_0} \cdot 1 = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$  en  $h(x_0+) = f(x_0+) - \frac{1}{2}[f]_{x_0} \cdot 1 = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$ .

De Fourierreeks van  $f$  kan nu worden opgevat als een combinatie van de reeksen van  $h$  en de blokgolf met als coëfficiënten  $f_n = h_n + \frac{1}{2}[f]_{x_0}S_n$ . De reeks van  $h$  zal geen problemen geven rond  $x_0$ , omdat  $h$  continu is. Daarom zal de reeks hetzelfde gedrag als de blokgolf hebben en zal de sprong naar  $[f]_{x_0}\mathcal{G}$  convergeren. Dit geeft een uitwijking van ongeveer 9% voor een functie met één discontinuïteit. Wij kunnen hetzelfde argument gebruiken om uit te breiden naar een stuksgewijs continue functie in  $L^2(T)$ .



## 2 De Gegenbauerpolynomen

### 2.1 Orthogonale polynomen in een ruimte met een dichtheid

Met de Fourierreeks kunnen de functies in  $L^2(-\pi, \pi)$  in norm worden benaderen. In dit geval door een orthonormaal stelsel met het Gram-Schmidt-proces te construeren uit de verzameling

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}.$$

Wij kunnen ook kijken naar de reeks met polynomen als orthogonale functies. Een van de bekendste voorbeelden zijn de Legendrepolynomen. Deze polynomen krijgt men door het Gram-Schmidtproces in  $L^2(-1, 1)$  uit te voeren op de functies uit de verzameling  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . Zo ontstaat de volgende orthonormale basis

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \dots$$

Dit idee kan verder worden uitgebreid door een ruimte  $L^2_\mu(-1, 1)$  te gebruiken met een maat  $\mu$  die absoluut-continu is ten opzichte van de Lebesguemaat met een bijna-overal positieve, meetbare dichtheid  $\rho(x)$ . De dichtheid moet bijna-overal positief zijn, omdat de maat  $\mu$  een  $\mathbb{R}_+$ -waardige functie moet zijn. Voor een functie  $f$  betekent dit dat

$$f \in L^2_\mu(-1, 1) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f^2 d\mu < \infty \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)^2 \rho(x) dx < \infty.$$

In het geval van de Legendrepolynomen is  $\mu$  gewoon de standaard Lebesgue-maat en is  $\rho(x) = 1$ . In de uitgebreidere ruimte kan weer het Gram-Schmidtproces worden uitgevoerd, maar daarvoor moeten wij eerst nog wat werk doen. Ten eerste is de ruimte ook daadwerkelijk een Hilbertruimte met het inproduct

$$(f, g) = \int_{-1}^1 fg d\mu = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\rho(x) dx.$$

Ten tweede moeten de functies  $x^n$  in de ruimte zitten. Dat wil zeggen dat  $\int_{-1}^1 x^{2n} \mu(dx) < \infty$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ . Dit is ook het geval als  $\mu$  begrensd is, want dan

$$\int_{-1}^1 x^{2n} \mu(dx) = \int_{-1}^1 x^{2n} \rho(x) dx \leq \int_{-1}^1 \rho(x) dx = \mu((-1, 1]) < \infty.$$

Er is nog een eigenschap van de maat  $\mu$  die wij verder moeten onderzoeken. Om het Gram-Schmidtproces uit te kunnen voeren, is er een lineair onafhankelijke rij machtsfuncties nodig. Voor de procedure moet elk element uit de rij machtsfuncties onafhankelijk zijn van de voorgaande elementen. Dit betekent dat een polynoom  $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$   $\mu$ -bijna-overal ongelijk aan 0 moet zijn, want anders kan  $x^n$  als combinatie van de andere machtsfuncties geschreven worden en kunnen wij geen onafhankelijke rij maken. Wij

kunnen de maat echter uitdrukken in de dichtheid door  $\mu(A) = \int_A \rho(x) dx$ . Wij hebben aangenomen dat de dichtheid bijna-overal positief is, waardoor  $\mu$  alleen nul kan zijn op een nulverzameling met betrekking tot de standaard Lebesguemaat. Aangezien  $Q(x) \neq 0$  bijna-overal, geldt dit ook  $\mu$ -bijna-overal en kan het Gram-Schmidtproces worden uitgevoerd.

Wij willen elke functie  $f$  in  $L^2_\mu(-1, 1)$  als een aftelbare combinatie van de orthonormale basisfuncties  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  kunnen schrijven, zoals wij dat ook hebben gedaan met de Fourierreeks en de Legendrepolynomen. Precies gezegd willen wij dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n a_k f_k\| = 0$ . We gaan hiervoor eerst naar een algemene Hilbertruimte  $H$  kijken, om de voorwaarden te bepalen voor de basisfuncties.

Een Hilbertruimte betekent een complete inproductruimte, waardoor de limiet van elke Cauchyrij in  $H$  bestaat. In ons geval willen wij dat de reeks  $g_n = \sum_{k=1}^n a_k f_k$  met  $a_k = (f, f_k)$  convergeert naar  $f$ . Dat wil zeggen dat voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $N$  is zodat voor elke  $n \geq N$  geldt dat  $\|f - g_n\| < \epsilon$ . Een stelsel  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  heet *compleet* in  $H$  als voor elke  $f$  in  $H$  geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n a_k f_k\| = 0$ .

Een voldoende (en noodzakelijke) voorwaarde hiervoor is dat de verzameling  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  *gesloten* is in  $H$ . Een orthonormaal stelsel heet *gesloten*, als alleen voor de functie  $f = 0$  kan gelden dat  $(f, f_k) = 0$  voor elke  $k$ . Deze voorwaarde is voor de orthogonale polynomen in  $L^2_\mu(-1, 1)$  makkelijk na te gaan.

**Stelling 2.1** *In een Hilbertruimte is een orthonormale verzameling  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  compleet als en alleen als deze gesloten is.*

BEWIJS. Wij gaan er eerst vanuit dat het orthonormale stelsel gesloten is. Kies een willekeurige  $f$  in  $H$  en laat

$$g_n = f - \sum_{k=1}^n a_k f_k \text{ met } a_k = (f, f_k).$$

Elke  $g_n$  is een lineaire combinatie van elementen uit  $H$ , dus zit elke  $g_n$  ook in  $H$ . Voor de rij  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geldt voor  $n > m$  dat

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k f_k \right\|^2 = \left( \sum_{k=m+1}^n a_k f_k, \sum_{l=m+1}^n a_l f_l \right) \\ &= \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n a_k a_l (f_k, f_l) = \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n a_k a_l \delta_{kl} \\ &= \sum_{k=m+1}^n a_k^2 \leq \|f\|^2. \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid van Bessel. Aangezien de norm van  $f$  eindig is, kunnen wij nu de reeks  $\sum_{k=m+1}^n a_k^2$  en daarmee  $\|g_m - g_n\|$  willekeurig klein maken

voor  $n, m$  groot genoeg. De rij is een Cauchyrij en de limiet van de rij bestaat, omdat  $H$  een Hilbertruimte is. Wij hebben nu aangetoond dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n a_k f_k\| = 0$ , dus  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  is compleet. Wij hebben tevens aangetoond dat de coëfficiënten van de reeks gelijk zijn aan  $a_k = (f, f_k)$ . Deze coëfficiënten worden ook wel de Fouriercoëfficiënten genoemd.

Wij gaan er nu vanuit dat wij een compleet stelsel hebben en willen laten zien dat het stelsel dan ook gesloten is. Stel dat wij een  $f$  in  $H$  hebben met  $a_k = (f, f_k) = 0$  voor elke  $k$ , dan geldt dat door compleetheid

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n a_k f_k\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (f - \sum_{k=1}^n a_k f_k, f - \sum_{l=1}^n a_l f_l) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|f\|^2 - 2(f, \sum_{k=1}^n a_k f_k) + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \\ &= \|f\|^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat  $f = 0$ , dus het stelsel is gesloten. □

De polynomen die met het Gram-Schmidtproces in  $L_{\mu}^2(-1, 1)$  kunnen worden verkregen, vormen ook een compleet stelsel. Hiervoor maken wij gebruik van het volgende lemma:

**Lemma 2.2** *Als voor een  $\mu$ -integreerbare functie  $f$  en voor elke  $n \in \mathbb{N}$  geldt*

$$\int_{-1}^1 f(x) x^n \rho(x) dx = 0,$$

*dan geldt  $f = 0$   $\mu$ -bijna-overal.*

BEWIJS. Voor een willekeurige  $t \in \mathbb{R}$  geldt dat

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) e^{-itx} \mu(dx) &= \int_{-1}^1 f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itx)^n}{n!} \mu(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \int_{-1}^1 f(x) x^n \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dus voor elke  $t \in \mathbb{R}$  geldt dat  $\int_{-1}^1 f(x) e^{-itx} \mu(dx) = \int_{-1}^1 f(x) \rho(x) e^{-itx} dx = 0$ . In het bewijs dat de Fourierreeks compleet is, zijn wij deze vergelijking al een keer eerder tegengekomen en hieruit halen wij dat dan  $f\rho = 0$  bijna overal. Hiermee is ook  $f = 0$   $\mu$ -bijna-overal. □

Met dit lemma is het nu te bewijzen dat een compleet orthonormaal stelsel in  $L_{\mu}^2(-1, 1)$  geconstrueerd kan worden als de maat begrensd is en de dichtheid bijna-overal positief.

**Stelling 2.3** *Het orthonormale stelsel dat met het Gram-Schmidtproces geconstrueerd kan worden, is een compleet stelsel in  $L^2_\mu(-1, 1)$ .*

BEWIJS. Wij hebben al eerder aangetoond dat er met het Gram-Schmidtproces een orthonormaal stelsel gemaakt kan worden. Wij hebben in het voorgaande lemma laten zien dat alleen de nulfunctie in  $L^2_\mu(-1, 1)$  orthogonaal is aan de functies  $\{1, x, x^2, \dots\}$ , dus is alleen de nulfunctie orthogonaal aan elke aftelbare lineaire combinatie van  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . Daarmee is de nulfunctie ook de enige functie die orthogonaal is aan het orthonormale stelsel. Hierdoor is  $L^2_\mu(-1, 1)$  een gesloten, dus compleet stelsel.  $\square$

## 2.2 Eigenschappen van de orthogonale polynomen

In dit deel gaan wij naar een aantal eigenschappen kijken die wij later nodig zullen hebben. De stellingen worden niet bewezen, daarvoor wordt wel verwezen naar literatuur. De eerste eigenschap is een recurrente betrekking van de orthogonale polynomen. De polynomen uit  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  van de vorm  $p_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  voldoen aan de betrekking

$$p_{n+1} = (A_n x + B_n)p_n - C_n p_{n-1} \quad (2)$$

met

$$A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad B_n = -a_{n+1}(x^{n+1}, p_n), \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}, \quad C_0 = 0.$$

Met behulp van deze betrekking kan ook de formule van Christoffel-Darboux worden afgeleid:

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \left[ \frac{p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y} \right]. \quad (3)$$

Een andere opmerkelijke eigenschap van de orthogonale polynomen is dat voor de nulpunten  $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$  van polynoom  $p_n(x)$  geldt

$$-1 < x_{1,n} < \dots < x_{n,n} < 1 \text{ en } x_{k,n} \in \mathbb{R} \text{ voor elke } 1 \leq k \leq n. \quad (4)$$

## 2.3 Gegenbauerpolynomen als orthonormaal stelsel

In de vorige paragraaf zijn wij al de Legendrepolynomen tegengekomen door de ruimte  $L^2(-1, 1)$  te gebruiken met dichtheid  $\rho(x) = 1$ . Een interessanter voorbeeld zijn de Jacobipolynomen. Hiervoor gebruiken wij als dichtheid  $\rho_{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  met  $\alpha, \beta > -1$ . Deze dichtheid is meetbaar, positief op het interval  $(-1, 1)$  en de maat is begrensd door de keuze van  $\alpha, \beta > -1$ . Met deze maat kan dus een compleet orthogonaal stelsel geproduceerd worden in  $L^2_\mu(-1, 1)$ .

Door het kiezen van de juiste waarden van  $\alpha$  en  $\beta$  is te zien dat deze klasse een aantal klassieke voorbeelden van orthogonale polynomen omvat.

<i>Naam</i>	<i>Constantes</i>	<i>Dichtheid</i>
Legendrepolynomen	$\alpha = \beta = 0$	1
Chebyshevpolynomen van de eerste soort	$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshevpolynomen van de tweede soort	$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Gegenbauerpolynomen	$\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}, \lambda > -\frac{1}{2}$	$(1 - x^2)^{\lambda-1/2}$

Alle orthogonale polynomen die in de voorgaande tabel staan hebben allemaal een natuurkundige betekenis. Alle polynomen zijn oplossingen van tweede orde differentiaalvergelijkingen, die allemaal zijn te omvatten in een differentiaalvergelijking voor de Jacobi-polynomen. Vanuit deze differentiaalvergelijking zijn deze polynomen met de specifieke dichtheid  $\rho_{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  ook ontdekt. Wij zullen ons beperken tot de Gegenbauerpolynomen die worden genoteerd als  $C_n^{(\lambda)}(x)$  met dichtheid  $\rho_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$ . Zij voldoen aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$\left((1-x^2)^{\lambda+1/2}[C_n^{(\lambda)}]'(x)\right)' + n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-1/2}C_n^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Deze vergelijking kan herschreven worden tot

$$\left(\rho_{\lambda+1}(x)[C_n^{(\lambda)}]'(x)\right)' + n(n+2\lambda)\rho_\lambda(x)C_n^{(\lambda)}(x) = 0. \quad (5)$$

Om het Gibbseffect te kunnen onderzoeken bij de Gegenbauerpolynomen worden eerst een aantal eigenschappen genoemd die nodig zijn om het Gibbseffect te analyseren. Hiervoor zullen de waarden van de polynomen in  $x = 0$  relevant zijn. Ook de afgeleide en vooral de waarde van de afgeleide in  $x = 0$  zullen wij nodig hebben. Hier zit immers de discontinuïteit van de blokgolf.

Met de recurrente betrekking (2) kan een fraaie betrekking worden afgeleid voor de Gegenbauerpolynomen met

$$C_0^{(\lambda)}(x) = 1, \quad C_1^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} x & \lambda = 0 \\ 2\lambda x & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

en voor  $n \geq 1$

$$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)x C_n^{(\lambda)}(x) - (2+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x). \quad (6)$$

Hieruit kunnen wij gelijk een eigenschap halen. Door de term  $x C_n^{(\lambda)}(x)$  zijn de polynomen even functies voor  $n$  even en oneven functies voor  $n$  oneven.

### 3 Gibbseffect bij de Gegenbauerpolynomen

Bij het bestuderen van het Gibbseffect bij Fourierreeksen bleek de blok golf  $S$  de kern van het probleem te bevatten. Hetzelfde geldt voor het Gibbseffect bij de Gegenbauerpolynomen. Als het Gibbseffect van de Gegenbauerreeks van de blok golf uitgewerkt is, kan daarmee het Gibbseffect van elke discontinue functie in  $L^2_\mu$  met dichtheid  $\rho_\lambda$  worden beschreven. Het gedrag van de reeks in de sprong kan namelijk op dezelfde manier als bij de Fourierreeks in paragraaf 1.2 worden omschreven naar het gedrag van de blok golf. In het volgende hoofdstuk wordt ook bewezen dat bij de Chebyshevpolynomen, waar  $\lambda = 0$ , de orde van convergentie van de extreme waarden van de partiële reeks hetzelfde is als bij de partiële Fourierreeks.

#### 3.1 De blok golf

Hiervoor zal er eerst uitgebreid naar de blok golf worden gekeken met het voorschrift

$$S(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Deze functie zit in elke ruimte  $L^2_\mu$  met een begrensde maat, omdat het een stapfunctie is. De Gegenbauerreeks  $\sum_{k=0}^\infty a_k C_k^{(\lambda)}(x)$  zal dan ook convergeren naar  $S$ . De waarden van de coëfficiënten  $a_k$  kunnen worden bepaald met

$$\begin{aligned} a_k &= \left( S, \frac{C_k^{(\lambda)}}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \right) = \int_{-1}^1 S(x) \frac{C_k^{(\lambda)}(x)}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \rho_\lambda(x) dx \\ &= \frac{1}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \left( \int_{-1}^0 -C_k^{(\lambda)}(x) \rho_\lambda(x) dx + \int_0^1 C_k^{(\lambda)}(x) \rho_\lambda(x) dx \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Deze integralen kunnen worden vereenvoudigd met de differentiaal vergelijking (5) voor de Gegenbauerpolynomen. De vergelijking kan worden herschreven tot

$$-\frac{\left( \rho_{\lambda+1}(x) [C_k^{(\lambda)}]'(x) \right)'}{k(k+2\lambda)} = \rho_\lambda(x) C_k^{(\lambda)}(x).$$

Met deze herformulering is (7) te herschreven tot

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \left( \int_{-1}^0 \frac{\left( \rho_{\lambda+1}(x) [C_k^{(\lambda)}]'(x) \right)'}{k(k+2\lambda)} dx + \int_0^1 -\frac{\left( \rho_{\lambda+1}(x) [C_k^{(\lambda)}]'(x) \right)'}{k(k+2\lambda)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \left( \left[ \frac{\rho_{\lambda+1}(x) [C_k^{(\lambda)}]'(x)}{k(k+2\lambda)} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{\rho_{\lambda+1}(x) [C_k^{(\lambda)}]'(x)}{k(k+2\lambda)} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{\|C_k^{(\lambda)}\|^2} \frac{2[C_k^{(\lambda)}]'(0)}{k(k+2\lambda)} \end{aligned} \quad (8)$$

Bij deze laatste vergelijking wordt er gebruik gemaakt van  $\rho_\lambda(\pm 1) = 0$  en  $\rho_{\lambda+1}(0) = 1$ . De coëfficiënten zijn nog verder te vereenvoudigen met een eigenschap van de afgeleide van de Gegenbauerpolynomen. Door de betrekking te differentiëren ontstaat er een betrekking voor de afgeleide. Hiermee kunnen de afgeleiden worden uitgedrukt in de Gegenbauerpolynomen met

$$[C_n^{(\lambda)}]' = 2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)} \text{ en } [C_n^{(0)}]' = 2C_{n-1}^{(1)}. \quad (9)$$

Om de coëfficiënten van de blokgolf te bepalen is de waarde van de afgeleide in  $x = 0$  nodig. Door de voorgaande eigenschap van de afgeleide is het voldoende om  $C_{n-1}^{(\lambda+1)}(0)$  te bepalen. Voor deze waarde is de recurrente betrekking (6) te vereenvoudigen tot  $C_n^{(\lambda)}(0) = -\frac{n+\lambda-2}{n}C_{n-2}^{(\lambda)}(0)$ . Met  $C_0^{(\lambda)}(0) = 1$  en  $C_1^{(\lambda)}(0) = 0$  is voor  $m > 0$  de waarde  $C_{2m}^{(0)}(0) = \frac{(-1)^m}{m!}$  en

$$C_{2m}^{(\lambda)}(0) = \frac{(-1)^m}{m!}(\lambda)_m \text{ en } C_{2m+1}^{(\lambda)}(0) = 0. \quad (10)$$

Hier wordt het Pochhammersymbool  $(\lambda)_n$  gebruikt, waarbij

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \lambda(\lambda+1) \cdot \dots \cdot (\lambda+n-1) & n \geq 1. \end{cases}$$

Met de afgeleide uitgedrukt in de polynomen en de voorgaande eigenschap is het nog maar een kleine stap naar de helling in  $x = 0$ . Door te gebruiken dat de afgeleide van een even en oneven functie symmetrisch is om  $x = 0$ , geldt dat  $[C_{2m}^{(\lambda)}]'(0) = 2\lambda C_{2m-1}^{(\lambda+1)}(0) = 0$  en

$$[C_{2m+1}^{(\lambda)}]'(0) = \begin{cases} 2C_{2m}^{(1)}(0) = 2(-1)^m & \lambda = 0 \\ 2\lambda C_{2m}^{(\lambda+1)}(0) = 2\frac{(-1)^m}{m!}(\lambda)_{m+1} & \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Al deze eigenschappen zijn samen te vatten in de volgende stelling.

**Stelling 3.1** *Voor de coëfficiënten  $a_n$  van de blokgolf  $S$  geldt dat  $a_{2k} = 0$  en*

$$a_{2k+1} = \frac{4\lambda C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{(2k+1)(2k+1+2\lambda)\|C_{2k+1}^{(\lambda)}\|^2}.$$

BEWIJS. Wij hebben in (8) aangetoond dat voor de coëfficiënten geldt  $a_n = \frac{1}{\|C_n^{(\lambda)}\|^2} \frac{2[C_n^{(\lambda)}]'(0)}{n(n+2\lambda)}$ .

De waarden zijn nul voor  $n = 2k$  en door (11) geldt  $[C_{2k+1}^{(\lambda)}]'(0) = 2\lambda C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)$  waardoor

$$a_{2k+1} = \frac{4\lambda C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{(2k+1)(2k+1+2\lambda)\|C_{2k+1}^{(\lambda)}\|^2}.$$

□

Het volgende doel voor het bepalen van de maximale uitwijking, is het bepalen van de afgeleide van de partiële som van de blokgolf  $S_N$ . Hiervoor kan een eigenschap van de norm van de Gegenbauerpolynomen worden gebruikt, die volgt uit de recurrente betrekking (6)

en de identiteit  $(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)$ , met de gammafunctie  $\Gamma(z)$ . Voor  $\lambda \neq 0$  en  $n \geq 1$  geldt

$$\|C_n^{(\lambda)}\|_\lambda^2 = \frac{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}. \quad (12)$$

Voor de speciale gevallen geldt  $\|C_0^{(0)}\|_0^2 = \pi$  en  $\|C_n^{(0)}\|_0^2 = \frac{2\pi}{n^2}$ . Deze eigenschap zal van pas komen in het volgende lemma.

**Lemma 3.2** *De partiële som van de blok golf is*

$$S_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{C_{2k}^{(\lambda+1)}(0) C_{2k+1}^{(\lambda)}(x)}{\lambda \|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2}$$

BEWIJS. Door de eigenschap van de norm (12) geldt

$$\begin{aligned} \frac{\|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2}{\|C_{2k+1}^{(\lambda)}\|_\lambda^2} &= \frac{\pi 2^{1-2(\lambda+1)} \Gamma(2k+2(\lambda+1))(2k+1)(2k+1+\lambda)(\Gamma(\lambda))^2}{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(2k+1+2\lambda)(2k)!(2k+\lambda+1)(\Gamma(\lambda+1))^2} \\ &= \frac{2^{-2}(2k+1)\Gamma(2k+2\lambda+2)(\Gamma(\lambda))^2}{\Gamma(2k+2\lambda+1)(\Gamma(\lambda+1))^2} \\ &= \frac{(2k+1)(2k+2\lambda+1)}{4\lambda^2}. \end{aligned}$$

Deze laatste gelijkheid komt door het twee keer gebruiken van de eigenschap  $\Gamma(z+1)/\Gamma(z) = z$ . Zoals bekend is  $a_{2k} = 0$ , dus voor de partiële som geldt nu, door gebruik te maken van de voorgaande eigenschap,

$$S_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{4\lambda C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{(2k+1)(2k+1+2\lambda)\|C_{2k+1}^{(\lambda)}\|_\lambda^2} C_{2k+1}^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{\lambda \|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} C_{2k+1}^{(\lambda)}(x).$$

□

Deze som kunnen wij termsgewijs differentiëren, waardoor

$$S'_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{\lambda \|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} [C_{2k+1}^{(\lambda)}]'(x).$$

Met eigenschap (9), die de afgeleide van de Gegenbauerpolynomen uitdrukt in de polynomen zelf, is de afgeleide  $S'_{2N+1}(x)$  te vereenvoudigen tot

$$S'_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{C_{2k}^{(\lambda+1)}(0)}{\lambda \|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} 2\lambda C_{2k}^{(\lambda+1)}(x) = 2 \sum_{k=0}^N \frac{C_{2k}^{(\lambda+1)}(0) C_{2k}^{(\lambda+1)}(x)}{\|C_{2k}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2}.$$

Nu kan, net als bij de partiële Fourierreeks, de som worden weggewerkt. In dit geval door gebruik te maken van de Cristoffel-Darbouxformule (3), die voor alle orthonormale polynomen geldt. In dit geval zijn de polynomen ook genormeerd.



**Stelling 3.3** Voor  $\lambda > -\frac{1}{2}$  geldt

$$S'_{2N+1}(x) = \frac{2N+1}{(2N+1+\lambda)\|C_{2N}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} \frac{C_{2N}^{(\lambda+1)}(0)C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(x)}{x}.$$

Voor het speciale geval  $\lambda = 0$  geldt

$$S'_{2N+1}(\cos \theta) = (-1)^N \frac{4 \sin(N+1)2\theta}{\pi \sin 2\theta}.$$

BEWIJS. De Cristoffel-Darbouxformule geeft

$$\begin{aligned} S'_{2N+1}(x) &= \frac{2k_{2N}^{(\lambda+1)}}{k_{2N+1}^{(\lambda+1)}} \frac{1}{\|C_{2N+1}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(0)C_{2N}^{(\lambda+1)}(x) - C_{2N}^{(\lambda+1)}(0)C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(x)}{x} \\ &= \frac{2k_{2N}^{(\lambda+1)}}{k_{2N+1}^{(\lambda+1)}} \frac{1}{\|C_{2N+1}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(0)C_{2N}^{(\lambda+1)}(x)}{x}, \end{aligned} \quad (13)$$

omdat  $C_{2N}^{(\lambda+1)}(0) = 0$ . De waarde  $k_n^{(\lambda)}$  is de coëfficiënt van de term met de hoogste graad van  $C_n^{(\lambda)}(x)$ . Deze waarde kunnen wij uit de recurrente betrekking voor de polynomen halen:

$$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)x C_n^{(\lambda)}(x) - (2+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

Voor de Chebyshevpolynomen, waar  $\lambda = 0$ , geldt dat  $k_0^{(0)} = k_1^{(0)} = 1$  en voor hogere termen geldt  $k_n^{(0)} = \frac{2^n}{n}$ , doordat in de betrekking de term met de hoogste graad van  $C_n^{(0)}(x)$  wordt bepaald door  $2\frac{n-1}{n}x C_{n-1}^{(0)}(x)$ . Voor het geval dat  $\lambda \neq 0$  geldt dat de coëfficiënt van  $x^n$  wordt bepaald door  $2\frac{n+\lambda-1}{n}x C_{n-1}^{(\lambda)}(x)$  en geldt er

$$k_n^{(\lambda)} = \frac{2^n}{n!}(\lambda)_n.$$

Dit betekent dat

$$\frac{k_{2N}^{(\lambda+1)}}{k_{2N+1}^{(\lambda+1)}} = \frac{2^{2N}(\lambda+1)_{2N}(2N+1)!}{2^{2N+1}(\lambda+1)_{2N+1}(2N)!} = \frac{2N+1}{2(\lambda+2N+1)}.$$

en voor  $\lambda = 0$

$$\frac{k_{2N}^{(1)}}{k_{2N+1}^{(1)}} = \frac{2^{2N}(2N+1)}{2^{2N+1}2N} = \frac{2N+1}{N}.$$

Door dit te combineren met (13) volgt nu dat

$$S'_{2N+1}(x) = \frac{2N+1}{(2N+1+\lambda)\|C_{2N}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} \frac{C_{2N}^{(\lambda+1)}(0)C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(x)}{x}.$$

Voor het geval dat  $\lambda = 0$  geldt er zelfs

$$S'_{2N+1}(x) = \frac{2N+1}{2N+1} \frac{1}{\|C_{2N}^{(1)}\|_1^2} \frac{C_{2N}^{(1)}(0)C_{2N+1}^{(1)}(x)}{x} = (-1)^N \frac{2}{\pi} \frac{C_{2N+1}^{(1)}(x)}{x},$$

door gebruik te maken van  $\|C_{2N}^{(1)}\|_1^2 = \frac{\pi}{2}$  door (12) en  $C_{2N}^{(1)}(0) = (-1)^N$  door (10). Dit speciale geval is om te schrijven naar het Gibbs-effect bij de partiële Fourierreeks en zijn de berekeningen rechtstreeks uit te voeren. Om de stelling te bewijzen is het nog nodig om te laten zien dat

$$\frac{C_{2N+1}^{(1)}(\cos \theta)}{\cos \theta} = \frac{2 \sin(N+1)2\theta}{\sin 2\theta}. \quad (14)$$

Hiervoor kan eerst de recurrente betrekking (6) voor  $\lambda = 1$  worden omgeschreven tot

$$(n+1)C_{n+1}^{(1)}(x) = 2(n+1)x C_n^{(1)}(x) - (n+1)C_{n-1}^{(1)}(x),$$

waardoor

$$C_{n+1}^{(1)}(x) = 2x C_n^{(1)}(x) - C_{n-1}^{(1)}(x)$$

en dan

$$C_{n+2}^{(1)}(x) = 2x \left( 2x C_n^{(1)}(x) - C_{n-1}^{(1)}(x) \right) - C_n^{(1)}(x) = (4x^2 - 1)C_n^{(1)}(x) - 2x C_{n-1}^{(1)}(x).$$

In combinatie met  $C_{n-1}^{(1)}(x) = \frac{1}{2x} \left( C_n^{(1)}(x) + C_{n-2}^{(1)}(x) \right)$  geeft dit

$$\begin{aligned} C_{n+2}^{(1)}(x) &= (4x^2 - 1)C_n^{(1)}(x) - C_n^{(1)}(x) + C_{n-2}^{(1)}(x) \\ &= (4x^2 - 2)C_n^{(1)}(x) + C_{n-2}^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Deze betrekking past nu in een inductiebewijs voor (14). Het is makkelijk na te gaan dat de formule voldoet voor  $N = 1$ . Voor de inductiestap zijn de goniometrische identiteiten  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$  en  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  nodig. Door de betrekking geldt

$$\begin{aligned} C_{2N+1}^{(1)}(\cos \theta) &= (4 \cos^2 \theta - 1)C_{2N-1}^{(1)}(\cos \theta) - C_{2N-3}^{(1)}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos 2\theta \frac{2 \sin N 2\theta \cos \theta}{\sin 2\theta} - \frac{2 \sin(N-1)2\theta \cos \theta}{\sin 2\theta} \\ &= 2 \frac{\cos \theta}{\sin 2\theta} (2 \cos 2\theta \sin N 2\theta - \sin(N-1)2\theta) \\ &= 2 \frac{\cos \theta}{\sin 2\theta} (2 \sin(N-1)2\theta + 2 \sin(N+1)2\theta - 2 \sin(N-1)2\theta) \\ &= \frac{2 \sin(N+1)2\theta \cos \theta}{\sin 2\theta}. \end{aligned}$$

Nu geldt

$$S'_{2N+1}(\cos \theta) = (-1)^N \frac{4 \sin(N+1)2\theta}{\pi \sin 2\theta}. \quad (15)$$

□

Doordat de afgeleide van de partiële som nu bekend is, kan de maximale waarde van  $S_{2N+1}(x)$  bepaald worden in het geval dat  $\lambda = 0$ . De afgeleide (15) heeft nulpunten in  $\theta = \frac{k\pi}{2(N+1)}$ . Het kleinste positieve nulpunt is dan

$$x_N = \cos\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right).$$

De maximale uitwijking wordt dan gegeven door  $S'_{2N+1}(x)$  te integreren van  $0 = \cos(\frac{\pi}{2})$  tot  $x_N = \cos(\frac{N\pi}{2(N+1)})$ , omdat  $S_{2N+1}(0) = 0$ . De waarde wordt dan

$$\begin{aligned} S_{2N+1}(x_N) &= \int_0^{x_N} S'_{2N+1}(x) dx = \int_0^{x_N} (-1)^N \frac{4 \sin[(N+1)2\theta]}{\pi \sin 2\theta} d \cos \theta \\ &= \int_{\frac{N\pi}{2(N+1)}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^N \frac{4 \sin[(N+1)2\theta]}{\pi \sin 2\theta} \sin \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{N\pi}{2(N+1)}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^N \frac{2 \sin[(N+1)2\theta]}{\pi \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

In de laatste vergelijking wordt er gebruik gemaakt van de goniometrische identiteit  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ . Met de substitutie  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$  en de identiteit  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$  kan er verder vereenvoudigd worden tot

$$\begin{aligned} S_{2N+1}(x_N) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} (-1)^{N+1} \frac{\sin[(N+1)2(\frac{\pi}{2} - \phi)]}{\sin \phi} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} (-1)^{N+1} \frac{\sin[(N+1)\pi] \cos[2(N+1)\phi] - \sin[2(N+1)\phi] \cos[(N+1)\pi]}{\sin \phi} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} (-1)^{2N} \frac{\sin[2(N+1)\phi]}{\sin \phi} d\phi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin[(2N+2)\phi]}{2 \sin \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is al een keer eerder uitgerekend voor de afgeleide (1), want hier staat de partiële som van de blokgolf bij de Fourierreeks met dezelfde grensen. De orde van de convergentie is daarom in beide gevallen hetzelfde. Voor de partiële som bij de Gegenbauerpolynomen geldt dus ook de Gibbsconstante  $\mathcal{G}$  door

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1}(x_N) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \mathcal{G}.$$

### 3.2 Het Gibbs effect in het algemeen

Voor het algemene geval kan de partiële som ook worden herschreven, maar nu rechtstreeks naar de laatste integraal. Hiervoor wordt de notatie  $x_N^{(\lambda)}$  gebruikt voor het eerste positieve nulpunt van  $S'_{2N+1}(x)$ , nu de afgeleide van de algemene partiële Gegenbauerreeks van de blokgolf.

**Stelling 3.4** *Voor elke  $\lambda > -\frac{1}{2}$  geldt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1}(x_N^{(\lambda)}) = \mathcal{G}.$$

BEWIJS. Zoals bij het geval dat  $\lambda = 0$  drukken wij het kleinste positieve nulpunt  $x_N^{(\lambda)}$  van  $S'_{2N+1}(x)$  weer uit in een hoek door  $x_N^{(\lambda)} = \cos \theta_{N,2N+1}^{(\lambda)}$ . Dan geldt doordat  $S_{2N+1}(0) = 0$  dat

$$\begin{aligned} S_{2N+1}(x_N^{(\lambda)}) &= \frac{2N+1}{(2N+1+\lambda)\|C_{2N}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} C_{2N}^{(\lambda+1)}(0) \int_0^{x_N^{(\lambda)}} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(x)}{x} dx \\ &= \frac{2N+1}{(2N+1+\lambda)\|C_{2N}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} C_{2N}^{(\lambda+1)}(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{N,2N+1}^{(\lambda)}} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(\sin \theta)}{\sin \theta} \cos \theta d\theta \\ &= d_{N,\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta_{N,2N+1}^{(\lambda)}} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(\sin \theta)}{\sin \theta} \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Met de substitutie  $y = 2(N+1)\theta$  en door de nieuwe bovengrens te schrijven als  $\varphi_N^{(\lambda)} = 2(N+1)(\frac{\pi}{2} - \theta_{N,2N+1}^{(\lambda)})$  krijgen wij

$$S_{2N+1}(x_N^{(\lambda)}) = d_{N,\lambda} \int_0^{\varphi_N^{(\lambda)}} \frac{C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(\sin \frac{y}{2(N+1)})}{2(N+1) \sin \frac{y}{2(N+1)}} \cos \frac{y}{2(N+1)} dy.$$

Voor de bovengrens van de integraal wordt in Lemma 3.5 laten zien dat  $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N^{(\lambda)} = \pi$ . Uit Lemma 3.6 zal volgen dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_{N,\lambda} C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(\sin \frac{y}{2(N+1)}) = \frac{2}{\pi} \sin y.$$

Om deze limieten te gebruiken moet er eerst vereenvoudigd worden tot

$$S_{2N+1}(x_N^{(\lambda)}) = \int_0^{\varphi_N^{(\lambda)}} \frac{d_{N,\lambda} C_{2N+1}^{(\lambda+1)}(\sin \frac{y}{2(N+1)})}{y} \left[ \frac{\frac{y}{2(N+1)}}{\sin \frac{y}{2(N+1)}} \cos \frac{y}{2(N+1)} \right] dy.$$

De term tussen de rechte haken convergeert naar 1 als  $N \rightarrow \infty$  door de standaardlimiet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  en door  $\cos 0 = 1$ . In combinatie met de limieten uit de lemma's volgt nu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1}(x_N^{(\lambda)}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \mathcal{G}.$$

□

**Lemma 3.5** Voor  $\lambda > -\frac{1}{2}$  geldt voor de bovengrens  $\varphi_N^\lambda \rightarrow \pi$  als  $N \rightarrow \infty$ .

BEWIJS. Voor de bovengrens is het punt  $x_N^{(\lambda)} = \cos \theta_{N,2N+1}^{(\lambda+1)}$  nodig. Dit is het eerste positieve nulpunt van  $C_{2N+1}^{(\lambda+1)}$ . Uit Corollary 3.2 van [7] kan een benadering gehaald worden voor het nulpunt  $x_{[n/2],n}^{(\lambda)} = \cos \theta_{[n/2],n}^{(\lambda+1)}$  van Gegenbauerpolynoom  $C_n^{(\lambda)}$ . Hier wordt de entierfunctie  $[x]$  gebruikt die het grootste gehele getal kleiner dan  $x$  geeft. De benadering is

$$x_{[n/2],n}^{(\lambda)} \simeq \frac{n+1-2[n/2]}{n} \frac{\pi}{2} \simeq \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{n+1-2[n/2]}{n} \frac{\pi}{2} \right),$$

waardoor

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{[n/2],n}^{(\lambda)} \simeq \frac{n+1-2[n/2]}{n} \frac{\pi}{2}.$$

Dit betekent voor  $\varphi_N^{(\lambda)}$  dat

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N^{(\lambda)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2(N+1) \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{N,2N+1}^{(\lambda+1)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2(N+1) \frac{2}{2N+1} \frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \pi + \frac{\pi}{2N+1} \right] \\ &= \pi. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Gegenbauerpolynomen als speciaal geval van hypergeometrische functies

Om Lemma 3.6 te bewijzen maken wij een uitstapje naar de geometrische functies. Deze polynomen representeren weer een grotere klasse, waarbij de Gegenbauerpolynomen een speciaal geval zijn. De geometrische functies zijn oplossingen van de differentiaal vergelijking

$$z(1-z)y'' + [c - (1+a+b)z]y' - aby = 0.$$

Hier kan  $z$  een complex getal zijn en is de oplossing weer van de vorm  $y = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$ . De coëfficiënten van de reeks voldoen aan de recursievergelijking

$$k_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} k_n.$$

Door  $a_0 = 0$  te kiezen kan de betrekking worden omgeschreven tot de directe formule

$$k_n = \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}.$$

De reeks wordt dan vaak genoteerd als

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n.$$

De Gegenbauerpolynomen zijn een speciaal geval van de geometrische functies. Door  $a, b, c$  en  $z$  handig te kiezen kan de differentiaal vergelijking worden omgeschreven tot de differentiaal vergelijking van de Gegenbauerpolynomen. Voor de Gegenbauerpolynomen geldt

$$C_n^{(\lambda)}(x) = F(-n, n + 2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x).$$

In het lemma willen wij de polynomen omschrijven naar de sinusfunctie. Die kan zelf weer in een geometrische functie worden omgeschreven door de Taylorreeks van de sinus te gebruiken

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = xF(\cdot, \cdot; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}).$$

Hier wordt de geometrische functie zonder  $a$  en  $b$  gebruikt, waarbij het laatste volgt uit

$$\begin{aligned} xF(\cdot, \cdot; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}) &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3/2)_k k!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3/2)_k k! 4^k} (-1)^k x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \frac{1}{3/2(3/2+1)\dots(3/2+k-1)k!4^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \frac{1}{3(3+2)\dots(3+2(k-1))(k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Met deze gereedschappen kan nu het benodigde lemma worden bewezen.

**Lemma 3.6** Voor  $\lambda > -\frac{1}{2}$  geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^{1-\lambda} C_{2n+1}^{(\lambda)}\left(\sin \frac{y}{2n}\right) = \sin y \quad (17)$$

en dan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_{N,\lambda} C_{2N+1}^{(\lambda+1)}\left(\sin \frac{y}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \sin y. \quad (18)$$

BEWIJS. Voor de Gegenbauerpolynomen zijn wij al eerder een representatie in geometrische functies tegengekomen. Voor de oneven termen gelden ook de volgende vergelijkingen, zie [6],

$$\begin{aligned} C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) &= (-1)^n \frac{2\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda)} x F\left(-n, n+\lambda+1; \frac{3}{2}; x^2\right) \\ &= (-1)^n \frac{2\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\Gamma(\lambda)} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+\lambda+1)_k}{(3/2)_k k!} x^{2k}. \end{aligned}$$

Door te gebruiken dat  $(-1)^k (-n)_k = n!/(n-k)!$ , waardoor  $(-n)_k/n! = (-1)^k/(n-k)!$ , geldt er

$$C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \frac{2\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+\lambda+1)_k}{(3/2)_k (n-k)! k!} x^{2k}$$

en door  $\Gamma(n+\lambda+1)(n+\lambda+1)_k = \Gamma(n+\lambda+k+1)$  kan er vereenvoudigd worden tot

$$C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \frac{2}{\Gamma(\lambda)} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(n+\lambda+k+1)}{(3/2)_k (n-k)! k!} x^{2k}$$

Door nu  $x = \sin \frac{y}{2n}$  in te vullen en de vergelijking te herschrijven, ontstaat in het linkerlid de rij waar de limiet van berekend moet worden:

$$(-1)^n \Gamma(\lambda) n^{1-\lambda} C_{2n+1}^{(\lambda)}\left(\sin \frac{y}{2n}\right) = 2n \sin \frac{y}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3/2)_k k!} \frac{\Gamma(n+\lambda+k+1)}{(n-k)!} \left(\sin \frac{y}{2n}\right)^{2k}. \quad (19)$$

Wat rest is te laten zien dat de limiet van het rechterlid gelijk is aan

$$\sin y = y F\left(\cdot, \cdot; \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{4}\right) = y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3/2)_k k!} \left(-\frac{y^2}{4}\right)^k. \quad (20)$$

Voor de term voor de reeks in (19) geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{y}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{y}{2n}}{\frac{y}{2n}} y = y$$

en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{y}{2n}\right)^{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{y}{2n}\right)^{2k}. \quad (21)$$

Voor het asymptotisch gedrag van de gammafunctie gebruiken wij Stelling 3.4-1 van [8]. Deze stelling zegt dat voor reële  $a$ ,  $b$  en  $x$  geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(b+x)} x^{b-a} = 1. \quad (22)$$

Dit betekent dat

$$\frac{\Gamma(n+k+\lambda+1)}{(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+k+\lambda+1)}{\Gamma(n-k+1)} = \frac{\Gamma(n+k+1+\lambda)}{\Gamma(n+k+1-2k)} \simeq n^{2k+\lambda}. \quad (23)$$

Uit (21) en (23) volgt nu dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^{1-\lambda} C_{2n+1}^{(\lambda)}(\sin \frac{y}{2n}) = \sin y$  waardoor het eerste deel van het lemma is bewezen.

Voor het tweede deel van het lemma moet er laten zien worden dat

$$\frac{\pi}{2} d_{N,\lambda} \simeq (-1)^N N^{1-\lambda}.$$

Het asymptotische gedrag is ook uit (22) te halen. De coëfficiënt  $d_{N,\lambda}$  is in (16) gedefinieerd als

$$\frac{2N+1}{(2N+1+\lambda) \|C_{2N}^{(\lambda+1)}\|_{\lambda+1}^2} C_{2N}^{(\lambda+1)}(0).$$

De norm en  $C_{2N}^{(\lambda)}(0)$  kunnen in Gammafuncties worden uitgedrukt, zoals al eerder is laten zien. Door twee keer  $\sqrt{\pi}\Gamma(z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1)$ , de verdubbelingsformule van Legendre, toe te passen kan vervolgens met (22) het gewenste gedrag worden bewezen. Hiermee is het lemma bewezen, dus ook Stelling 3.4.  $\square$



## 4 Conclusie

In deze scriptie is laten zien dat voor de Fourier- en Gegenbauerreeksen dezelfde Gibbsconstante geldt. De Gegenbauerpolynomen omvatten ook de Legendre- en Chebyshevpolynomen, waardoor het Gibbs-effect ook voor de bijbehorende reeksen is bewezen. Bij de Chebyshevpolynomen is de partiële reeks van de blokgolf in de extreme waarden zelfs gelijk aan de partiële Fourierreeks. De vraag is nu of het effect en de constante voor een veel grotere klasse van orthogonale polynomen hetzelfde is. Een goede kandidaat zijn de hypergeometrische functies, want die waren ook nodig voor de Gegenbauerreeks, die omvat worden door de hypergeometrische functies. Een vervolgonderzoek zou kunnen bestaan uit het zoeken naar voorwaarden voor de hypergeometrischereeks voor de aanwezigheid en de grootte van het Gibbs-effect.

Onderzoek naar het Gibbs-effect in orthogonale polynomen is onder andere door Abdul J. Jerri<sup>1</sup> en David Gottlieb en Steven A. Orszag<sup>2</sup> gedaan. Uit onderzoek blijkt dat het Gibbs-effect niet bij alle orthogonale polynomen voorkomt, maar wel bij de klasse van Fourier- $J_0$ -Besselreeksen en  $J_0$ -Hankeltransformaties. Er wordt nog steeds onderzoek naar gedaan en vooral naar manieren om het Gibbs-effect te verminderen. Een veelgebruikte methode is de Lanczos- $\sigma$ -averaging, die vanuit de Fourieranalyse is ontstaan.

---

<sup>1</sup>A.J. Jerri, "The Gibbs phenomenon in Fourier analysis, splines and wavelet approximations", 1998

<sup>2</sup>David Gottlieb and Steven A. Orszag, "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications", 1977

## Referenties

- [1] Vretblad, A., “Fourier Analysis and Its Applications”, Springer, januari 2003.
- [2] Lanczos, C., “Discourse on Fourier series”, Oliver & Boyd, 1966.
- [3] Khamsi, M.A., “Gibbs phenomenon”, <http://www.sosmath.com/fourier/fourier3/gibbs.html>.
- [4] Hochstadt, H., “The Functions of Mathematical Physics”, Dover Publications, 1986.
- [5] Kaber, S.M., “The Gibbs phenomenon for Jacobi expansions”, Université Paris, 2005.
- [6] Szegő, G., “Orthogonal Polynomials”, American Mathematical Society, Volume XXIII, 1939.
- [7] Elbert, Á en Laforgia, A., “Upper Bounds for the Zeros of Ultraspherical Polynomials”, Journal of Approximation Theory, 61(1), 1990.
- [8] Carlson, B.C., “Special Functions of Applied Mathematics”, Academic Press, 1977.
- [9] Ismail, M. “Mathematical Analysis, wavelets, and Signal Processing”, Contemporary Mathematics, 1995.