

# テトラちゃんと相加相乗平均\*

結城浩†

2005年11月

## 1

高校二年の秋。

放課後、僕はキャンパス内の並木道を急いでいた。早足で歩きながら、ポケットからメモを取り出し、もう一度読み返す。そこには、たった一行だけ書かれている。

今日の放課後「がくら」で待っています。テトラ

並木道を抜け、別館にあるラウンジ 通称「がくら」 に着いたとき、テトラちゃんは入り口に立って僕を待っていた。吐く息が白い。

僕の顔を見るなり「すみませんでしたっ」とテトラちゃんは頭を下げた。

「すみませんでしたっ。昨日は、あの 」

「いや、謝るのは僕のほうだよ。でも、ともかく、中に入ろうよ。ここは寒すぎる」

「がくら」はアメニティ・スペースだ。購買部があり、あちこちに椅子とテーブルが置かれ、気ままなおしゃべりができるようになっている。今日はまだ人は少ない。上の階には文化系の同好会室が並んでいる。誰かが練習しているフルートの音が聞こえてくる。

自販機でホットコーヒーを買う。僕が適当な席に着くと、テトラちゃんは向かいに座った。

テトラちゃんは高校一年生。同じ中学校出身で、僕の後輩にあたる。といっても中学時代は面識はなかったし、この高校に入ってから、昨日まで話したことはなかった。

「あたし ..... 昨日はもう、びっくりしてしまって、何も言えなくて、あのまま帰ってしまって、すみませんでしたっ」テトラちゃんは深々と頭を下げる。

「いや、僕こそごめんね。えー、いろいろと」

テトラちゃんは緊張した顔で僕を見る。大きな丸い目。小柄。クルミをかじるリスのイメージだ。ふさふさした大きな尻尾が似合いそう。僕は微笑む。

「あ、あのう、先輩。せせ先輩は、あの方と、つつつ、付き合ってるっしゃるんですか」

「突っつき合っている？」

「いえ、あの方と 付き合ってるっしゃるんですか？」

---

\* <http://www.hyuki.com/story/tetora.html>

† <http://www.hyuki.com/> Hiroshi Yuki © 2005, All rights reserved.

「ああ、ミルカさんね。いや、別に、付き合っているとかそういうんじゃないよ……」  
あの方。  
僕はミルカさんのことを思い浮かべ、心の中で何かを確かめる。うん、付き合っているわけじゃない。  
「あのう……、もし、ご迷惑でなければ　　ご迷惑でなければ、ですけど、ときどき勉強を　　数学を教  
えていただけませんか」  
テトラちゃんは、言葉を選びつつ言った。  
「え、うん。別にいいよ。聞きたいことがあったら、いつでも」  
テトラちゃんは、僕の返事にほっとする。  
「この手紙の用事はそのこと？ 勉強を教えてほしいってということ？」  
僕がメモを見せると、テトラちゃんはこくんと頷く。  
「すみませんでした。お呼び立てして。図書室に行けばよかったですけれど、また昨日みたいに……」  
昨日みたいに。  
昨日みたいに、またミルカさんから蹴られたら、確かにたまらないだろう。  
「でも、あのう……。先輩に勉強を教えていただいたら、あの方は、また椅子を蹴りにいらっしやるでしょ  
うか」  
僕は、テトラちゃんの不思議な敬語に苦笑する。  
「ミルカさんね。どうだろうか……。うーん、蹴りにいらっしやるかも。でも、ミルカさんには僕から話し  
ておくよ。一応。うん」  
テトラちゃんはその言葉に、はじめて微笑んだ。

## 2

「ずいぶん前から疑問に思っていて、でも誰にも聞けなかったんですけど　　昨日、解説してくださった、  
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  という公式がありますよね。参考書を見ていると、ときどき  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$   
と書いてあるものもあります。a と b の代わりに x と y になっているんです」  
「うん、そうだね。それが何か？」  
「どちらでも同じだっていうのは分かるんですけど、どうしているんな書き方があるのかな、と疑問に思っ  
ちゃう……思ってしまうんです。a と b を使ったり x と y を使ったり。他にも書き方があるのかな、どちら  
の書き方がいいんだろう　　なんて、つい考えてしまいます」  
「なるほど」  
「それで、気がつくとも勉強の時間をずいぶん使ってしまう。数学の勉強をしていて、式が出てくるたびに《ど  
うしてこうなっているのかな、どうしてこうじゃないのかな》って思っていたら、なかなか進まないですよ  
ね。時間ばかり経ってしまって。先生に聞けばよいのかもしれませんが、何をどう聞いてよいかわから  
ないし、そもそも、そんなこと考えないで、どんどん覚えればよいだけなのかな、とあって、それですごく嫌  
になってしまうんです」  
「嫌になってしまう？」  
「あたし、いつも要領が悪いんです。だから何でもやるのに人一倍時間がかかってしまう。それなのに、特  
に数学は、ひっきりなしに疑問点が出てきてしまうんです。その疑問も、人に聞くことが難しいことばかり。  
それでうんざり、嫌になってしまうんです」

「なるほどね」

「数学を勉強していると、こういう疑問が山ほど出てきて、あたしって数学に向いていないのかなあ、って思います。クラスで数学が得意な友達に聞いても、あたしが何に悩んでいるのか、分かってもらえないし、たとえ分かてもらえたとしても《そういうもんなんだよ》とか《そういうこと気にしちゃいけないんだよ》って言われます。そうか、あまり細かいことは気にしちゃいけないんだって思っていると、別の時には《こういうことはちゃんと気にしなきゃいけない》なんて言われちゃうし。計算するときの条件を忘れてたり、証明する途中で、いまから証明する式を使ったり。何が重要で何が重要じゃないか、何を気にするべきで、何を気にしてはいけないのか、すごく、こう、もやもやとしてるんです」

「うん……」

「英語だったら 単語の意味が分からなければ辞書を引けばよい。分かりにくいイディオムは覚えればよい。文法はややこしいけれど、例文と合わせて覚えてしまえばよい。はじめはよく分からなくても、少しずつ分かってくる。勉強すればするほど」

いや、そんなに簡単なあ、と思ったけれど、話を止めるのも何だし、軽く頷く。

「でも、数学は何だか違う。分かるときには、ぱちっと分かる。どんっと気持ちがいい。でも、分からないときにはまったく分からない。途中がないんです。ややこしく絡んでいるけれど、それが《分かる》か《分からない》かは、はっきりしている。途中がない」

「でも、途中の式までは合っているけれど、計算を間違えるってことはあるよね」

「あのう、先輩、確かにそうですけれど、あたしの言いたいのは、ちょっと違っていて ああ、ごめんなさい。さっきからあたし、先輩あいてに愚痴をこぼしていますね。愚痴じゃない、愚痴じゃない、愚痴を言いたいんじゃないで あたしはいま、数学も含めていろんなことに興味があって、たくさん勉強したいっ！もっと勉強したいっ！ っていうことなんです。言いたいのは」

テトラちゃんは、勉強したいっ！と言いながら、右手で拳を作って、ぐっ、と力を込める。

「あたしは、この高校に入れてうれしかったし、よい高校だと思います。将来は、コンピュータ関連の仕事をしたいな、と思ってます。でも、どんな方向に進むとしても、数学が必要になるんじゃないかと思っています。だから何とか、がんばって勉強したいんです」

うん、とテトラちゃんは力強く一人で頷く。

「先輩のことは、友達から聞きました。先輩は普段は無口 授業中でもほとんどしゃべらないけれど、数学がとて得意で、教えるのがうまい人だって。あたしたちの学年、いまの一年生は普通なんですけれど、先輩の学年 いまの二年生は超優秀な人が集まってると。あ、これは先生から聞いたんですけれど」

「へえ、そうなんだ。まあ、ミルカさんやツノミヤなんかは確かに優秀だよな」

「先輩も、です」

「そう？」

「あの事件のことも聞きました。《教生追い出し事件》」

「ああ。あれは、ミルカさんがやったんだよ。僕じゃない」

「先輩は、ふだんどんな勉強をして なさっているんですか。図書室で」

「別に特別なことをしているわけじゃないよ」

僕は、ノートとシャープペンシルを取り出す。

「問題を解いているときもあるけれど、ただ何となく数式をいじっているときもある。たとえば …… うん、一緒にやってみようか」

### 3

テトラちゃんは「失礼します」と言いながら僕の隣に席を移動し、僕が書くノートをのぞきこむ。かすかな、甘い香り。

「たとえば、 $r$  を実数とする。そのとき、 $r$  を二乗した数  $r^2$  についてどんなことが言えるかな。考えてみよう」

$$r^2$$

僕の問いかけに、テトラちゃんは数秒考える。

「 $r^2$  は、二乗したんだから、0 より大きくなりますよね ..... そういうことですか？」

「いや、違うよ。《 $r^2$  は0 より大きい》じゃなく《 $r^2$  は0 以上》が正しい。 $r = 0$  かもしれないからね」

「あっ、そうですね。 $r$  がゼロだったら、 $r^2$  もゼロですね。はい、《 $r^2$  は0 以上》ですね」

テトラちゃんは、納得したように頷く。僕も頷き、先を続ける。

「つまり、次の不等式は  $r$  がどんな実数であったとしても成り立つ。そうだよな？」

$$r^2 \geq 0$$

「え？ えっと、そうですね。 $r$  が実数なら、 $r^2$  はゼロ以上ですね」

「実数  $r$  はプラスか、ゼロか、マイナス。そしてそのいずれの場合でも二乗すると0 以上になる。だから、 $r^2 \geq 0$  が成り立つ。これは《 $r$  が実数》といわれたときに注意しておくべき重要な性質だよ。等号が成り立つのは  $r = 0$  の場合だ」

「あのう.....、当たり前みたい、なんですけど」

「そう。当たり前だよな。当たり前のところから出発するのはいいことだよ。じゃあ、ここから少し進んでみよう。 $a$  と  $b$  が実数だとしよう。そのとき、次の不等式も成り立つ。いいかな？」

$$(a - b)^2 \geq 0$$

「ええと、え、ええ。そうですね。分かります。 $a - b$  は実数ですものね。実数だから、二乗したら0 以上になる。..... ちょ、ちょっと待ってほしいんですが、さっきは  $r^2 \geq 0$  で  $r$  って文字を使いましたよね。どうして今度は  $a$  と  $b$  を使ったんですか。いつも、こういうところであたし、考え込んで、あたしが考え込んでいると、先生の説明はその間にずっと先まで進んじゃうんです」

「ああ、いいよ。ええとね、さっき  $r$  と書いたのは実数 (real number) の頭文字だよ。でも別に《 $x$  は実数》のように  $x$  を使ってもいいし、《 $w$  は実数》のように  $w$  を使ってもいい。一般には、定数のときに  $a, b, c$  を使い、変数のときに  $x, y, z$  を使うことが多いね。ここではまあ、何でもいい。でも、何でもいいといっても、《 $n$  は実数》と書いてあったらびっくりするかな。だって、 $n$  は整数や自然数に使うことが多いからね。

ええと、ここまではOK？」

「はい、すっかりしました。話の途中ですみません。 $(a - b)^2 \geq 0$  については納得しました」

テトラちゃんは、にこっと笑ってから目を輝かせ、(それで、次は?) という顔をする。なかなか表情が豊かな女の子だ。それに、自分が納得するまで進まないっていうのもいいな。

「じゃ、次はどっちに進む？」

僕から水を向けると、テトラちゃんは大きな目をきょろきょろさせる。

「どっちって、…… どっちですか？」

「何でもいいよ。」

$$(a - b)^2 \geq 0$$

はわかったから、次にどんな数式について考えたいかっていうこと。何でもいいから言ってごらんよ。それとも、自分で書く？」

シャープペンを彼女に渡す。

「はい…… じゃあ、ええと、展開してみます」

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a(a - b) - b(a - b) \\ &= aa - ab - ba + bb \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

「これでいいですか？」

「うん、いいね。じゃ今度は、二つの式から何が言えるかを考えよう」

$$(a - b)^2 \geq 0, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

「特にすごいことじゃなくてもいいんだよ。たとえば すべての実数  $a$  と  $b$  について、こんなことがいえる」

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

「 $(a - b)^2$  は 0 以上だから、展開した結果も 0 以上ってことだね、テトラちゃん」

テトラちゃんは、数式を見ていた顔を急に上げて、二・三回まばたきしてから、にっこりする。何だか嬉しそうだ。

「はい、そうですねっ。……でも、ここからどうなるんですか？」

「うん。これから式を少しいじってみよう。どうしようかな うん、 $2ab$  を右辺に移項してみようか」

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

「テトラちゃんは、この式は見たことない？」

「…… いいえ、ありません。何かの公式ですか」

「まあ、公式といえば公式だね。公式っていう言い方は、ちょっと変だけどね…… まあいいや。次に両辺を 2 で割る。すると、こうなる」

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

「これは何だろう」

「何でしょう」

「左辺をよく見ると、 $a^2$  と  $b^2$  の平均を取っているように見えるね」

「そういえば、そうですね。 $a^2$  と  $b^2$  を足して、2 で割っているから はい」

「さて。左辺の  $\frac{a^2+b^2}{2}$  は  $a^2$  と  $b^2$  を使った式になっている。これから、右辺の  $ab$  も同じように  $a^2$  と  $b^2$  の式にしてみようかな、と思う」

「は、はあ……」

「いや、そう思わなくてはならないってわけじゃないんだけど、僕はそう思った、ということ」

「ええ」

「次の一歩はちょっとギャップがあるから注意だよ。右辺の  $ab$  を  $a^2$  と  $b^2$  で表現するため、次のように変形してみよう。この等式は成り立つかな？」

$$ab = \sqrt{a^2b^2}$$

「ええっと。二乗してからルートを取ったんですよね。二乗してルートをとる 元に戻る。ええ、正しいと思います」

「残念ながらそうはいかない。 $ab$  は負の数かもしれない。条件をつけないと上の等式は成り立たない」

「あちゃ。条件にひっかかったってことですか」

「そうだね。たとえば、 $a = 2$  と  $b = -2$  を考えてみればわかる。左辺は  $ab = 2 \cdot (-2) = -4$  だけど、右辺は  $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{2^2 \cdot (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$  だよな」

「そうですね …… 確かに」テトラちゃんは僕が書いた計算式をひとつひとつ確かめてから頷いた。

「じゃあ、ここからは条件をつけることにしよう。 $ab \geq 0$  という条件だ。この条件をつければ、次の等式が成り立つ」

$$ab = \sqrt{a^2b^2} \quad \text{ただし } ab \geq 0 \text{ の場合}$$

「すると、さっきの不等式  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$  は、こう書き換えられる」

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} \quad \text{ただし } ab \geq 0 \text{ の場合}$$

「はい いえ、何だか変です。この  $ab \geq 0$  という条件は、どうして必要なんでしょうか。納得できないんですけど。だって、 $ab$  が負のとき、つまり、 $ab < 0$  のときでも不等式は成り立つんじゃないでしょうか。ええと、さっきも使った  $a = 2$  と  $b = -2$  を考えてみます。まず左辺」

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{a^2+b^2}{2} \\ &= \frac{2^2+(-2)^2}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

「それから、右辺」

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sqrt{a^2 b^2} \\
&= \sqrt{2^2 \cdot (-2)^2} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4
\end{aligned}$$

「ほら、左辺  $\geq$  右辺 が成り立ちますよ、先輩」

「よく気がついたね。確かに  $ab \geq 0$  の条件はなくせそうだ。どうしたらいいだろう」

テトラちゃんは、じっと考えるけれど、最後には首を振る。

「..... わかりません」

「 $ab < 0$  のとき、 $a$  と  $b$  の片方は正で、他方は負だ。だから仮に  $a > 0$  で  $b < 0$  としよう。いま、 $c = -b$  を満たす数  $c$  を考えると、 $c > 0$  になる。 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$  は任意の実数について成り立つんだから、 $a$  と  $c$  についても成り立つ。だから、

$$\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$$

が成り立つ。この式の左辺と右辺を調べてみよう。まず左辺」

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{a^2 + c^2}{2} \\
&= \frac{a^2 + (-b)^2}{2} && c = -b \text{ だから} \\
&= \frac{a^2 + b^2}{2}
\end{aligned}$$

「そして右辺」

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= ac \\
&= \sqrt{a^2 c^2} && ac > 0 \text{ だから} \\
&= \sqrt{a^2 (-b)^2} && c = -b \text{ だから} \\
&= \sqrt{a^2 b^2}
\end{aligned}$$

「そこで、以下の式が成り立つ」

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \quad \text{ただし } a > 0 \text{ で } b < 0 \text{ の場合}$$

「ここまでの議論は《 $a$  が正、 $b$  が負》だったけれど、《 $a$  が負、 $b$  が正》でも同じようにできる。だから結局のところ、任意の実数  $a$  と  $b$  に関して、次の不等式が成り立つことになる」

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \quad \text{ただし } a \text{ と } b \text{ は任意の実数}$$

テトラちゃんはノートに書かれている数式をじっと見て、しばらく考える。とても時間が掛かったけれど、やっと彼女は頷いて顔を上げる。

「わかりました。納得です」

僕は話を続ける。

「さてこれで、両辺が  $a^2$  と  $b^2$  の式で表せた。そこで  $a^2$  と  $b^2$  に、それぞれ別の名前を付けてみよう。 $a^2$  には  $x$  という名前を付け、 $b^2$  には  $y$  という名前を付ける。 $x$  と  $y$  は実数を二乗した数だから、どちらも 0 以上になる。つまり、 $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  になる。すると、さっきの不等式はこう表せるよ。だいぶすっきりするね。この式は見たことがあるんじゃないかな」

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{ただし } x \geq 0 \text{ および } y \geq 0$$

「……これは知ってます。ええと、そうかそうじょうへいきん相加相乗平均の関係ですね！」

「うん、そう。その通り。左辺が「2 数を加えて 2 で割る」という相加平均  $\frac{x+y}{2}$  で、右辺が「2 数を乗じて平方根をとる」という相乗平均  $\sqrt{xy}$  だ。相加相乗平均の関係というのは、0 以上の 2 数を考えたとき、相加平均は相乗平均以上になるという関係式だね」

「はい。 $r^2 \geq 0$  からスタートして、公式が出てきましたね」

「《公式》という名前だと、そっくりそのまま暗記しなければいけないものって思いがちだ。自分が変にいじってはいけないもの、みたいな、ね。でも、自分の手で式を変形させる練習をやっている、公式に対する構えた態度はだんだん薄れてくると思う。粘土をこねるみたいなものだね。こねているうちに、だんだん柔らかくなる」

「粘土をこねる……」

#### 4

「いまは数式をこねて遊んだから、回りくどくなっちゃったけれど、相加相乗平均の関係を証明するだけなら、実は  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  の左辺を展開するだけでいい」

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \\ &= x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \\ &= x - 2\sqrt{xy} + y \\ &\geq 0\end{aligned}$$

「つまり、こうなる」

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

「あとは  $2\sqrt{xy}$  を移項して両辺を 2 で割れば、次の式がすぐに出る」

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{ただし } x \geq 0 \text{ および } y \geq 0$$

「あれ？ でも今回、 $x \geq 0$  および  $y \geq 0$  という条件はどこから出てきたんですか？」



「いまは実数で考えているからね。根号  $\sqrt{\quad}$  の中の  $x$  や  $y$  は  $0$  以上でなくちゃならないんだ」

「根号の中が  $0$  以下だったら？」

「《 $0$  以下》じゃなく《 $0$  未満》だよ。根号の中が  $0$  未満だったら、虚数になっちゃう」

「ははあ...」

「ところで、相加相乗平均の関係で、等号が成り立つときはどういうとき？ つまり、

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$$

という式が成り立つのは、 $x$  と  $y$  にどういう関係があるときかな？」

「え？ 《 $x$  も  $y$  も  $0$  のとき》ですか？」

「それは間違い。.....というか、不十分」

「え、だって、 $x=0$  で  $y=0$  なら、左辺も右辺も  $0$  になりますよ！」

「うーん、だけど、 $0$  に等しい必要はなくて、 $x=y$  ならいいんだよ」

「そうですか？ じゃあ、 $x=3$  で  $y=3$  のとき、確かめてみますね。左辺は  $\frac{x+y}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$  で、右辺は  $\sqrt{xy} = \sqrt{3 \times 3} = 3$ 。あ、本当ですね」

「うん。そういう風に具体的な値で確かめるのは、とても大切なことだね」

「では、 $x=-2$  と  $y=-2$  のときは？ 左辺は  $\frac{x+y}{2} = \frac{(-2)+(-2)}{2} = -2$  で、右辺は  $\sqrt{xy} = \sqrt{(-2) \times (-2)} = 2$ 。あれ、違うじゃないですか」

「テトラちゃんは  $x \geq 0$  および  $y \geq 0$  という条件を忘れてるよ」

「あちゃちゃ。そうでした。そういうことですか。こういうところを間違えるんですよ。あちこち考えているうちに、はじめのことを忘れちゃうんですね。あたし」

テトラちゃんは、舌を小さく出してから頭を掻いた。

「考えてみると、前にやった式の導出を

$$(a-b)^2 \geq 0$$

という不等式からスタートしたことを思い出せば、等号が成り立つのが  $a=b$  のとき（つまりは  $x=y$  のとき）であることは分かるよ」

「はあ.....。公式って自分で作れるんですねえ」

「自分で作るというよりも、自分で導出する、自分で導くってことだよ。実は数学の授業をよく聞いていると、こういう導出をやっているんだよね。証明という形になっている場合もあるし、例題という形になっていることもある。ただ、普通は式変形ばかりに目がいってしまって、《すでに分かっていることから、何か面白いことが導けないかな》という視点には立たないんだ」

「公式が出てくると《あ、暗記しなくちゃ》って思っちゃって、《何か面白いこと》なんて考えられません」

「でもね、そうやって自分の手を動かして《何か面白いこと》を導くほうが、ずっと良く理解できるし、ずっと深く覚えられる」

「ふうん.....」

「さて、相加相乗平均の関係を、もう少しいじってみようか。さっきの書き方だと《相加平均》と《相乗平均》という言葉のリズムが式の上に出てこないよね」

「はあ？ 言葉のリズム、ですか？」

「そう。いま、和と積、それに平方根の表記を変形してみる。和は  $x+y$  でよい。積は  $x \times y$  のように、明

示的に  $\times$  を書いてみよう。2 で割る部分は、 $\frac{1}{2}$  を掛けることにして、平方根は  $\frac{1}{2}$  乗で表すことにしよう。そうすると、こうなる」

$$(x+y) \cdot \frac{1}{2} \geq (x \times y)^{\frac{1}{2}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

「うん、これだと両辺の類似性が際立つね。ちょっと気分がいい。あ、そうだ。相加相乗平均の関係は一般化することもできるんじゃないかな。次の式を証明してみると面白いかも」

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \frac{1}{n} \geq (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (x_k \geq 0)$$

「この式を、 $\sum$  と  $\prod$  を使って書くと、次のようになる」

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \frac{1}{n} \geq \left( \prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \quad (x_k \geq 0)$$

「ふうむ。今度は図形的に考えてみようかな。相加平均と相乗平均のグラフを三次元空間に描くと、相加平均の平面は、相乗平均の平面 いや、曲面かな よりも必ず上に来るってことだから……そうか  $x = y$  で両者は接して……」

「先輩、せんぱーい。面白そうな話なんですけど あたし、置いてけぼりになってますよう」

## 5

一休みしてから、テトラちゃんは僕の向かいの席に戻り、数学を勉強することについての疑問を話し始めた。

「数学を勉強していて、うんざりするの、目的がわからないからかもしれません。式の因数分解ってやりますよね。たすきがけとか、方程式の解を使って……とか、問題が出れば何とか解けますけれど。あ、難しくなければということですけど。でも、つまらないんです。家で勉強していても面白くないんです。何のためにやっているのが全然わからないから。 といっても別に《数学が何の役に立つか》っていうありがたいことを聞いているわけではないんです。今やっている式変形や因数分解が、昨日習ったこと・明日習うことと、どんなふうに関係しているか、それを知りたいと思っているだけなんです。でも、誰も、それには答えてくれません」

テトラちゃんは手にした携帯のストラップをいじりながら、真面目な口調で続ける。パールホワイトの携帯。

「何だか 何だか、小さな懐中電灯を1つ渡されて真っ暗な部屋に投げ込まれたみたいな気分になるんです。懐中電灯で照らせるから、前には進めるんだけど、そのライトはあまりにも弱くて、照らす範囲が狭い。自分がどこをどう歩いているのかわからない。後ろを見ても真っ暗、前を見ても真っ暗。明るいのは、いま照らしている小さな輪の中だけ。本当に難しいことならしょうがないんですけど、式の変形そのものはそんなに難しくない。教えられたとおりによればできます。だから、考え込んでうんです。数学って簡単なのか、難しいのかわからないって。一つ一つが簡単なのに、全体がつかめないって、いやな気分です」

「なるほど」

ふうん、なるほど。テトラちゃんの説明はよくわかる。

「先輩はとても丁寧に話を聞いてくださいますけれど、クラスメートはだめです。数学が得意な友達もいるんですけど、その友達の前ではこんなにうまく話せません。途中でからかわれたり、ちゃちゃを入れられたりするからです。《おまえ、そんなこと言っていないで、覚えるよな》といわれたときには、こいつ……いえ、あの人はもう話したくない、って思いました」

テトラちゃんの話に引きずられるようにして、僕も話し出す。

「僕は、数学が好きだ。図書室で、数式をずっと眺めていたりする。それから、授業で出てきた式を自分で再構成したりする。自分で納得しながら一步一步進む。自分でゼロから作り上げてみる それはちょっと大げさだけれど、学んだことをもう一度、何も無いところから再現できるかどうか確かめてみたいと思っている」

テトラちゃんは黙って僕の話の話を聞いている。

「学校は、学ぶ素材しか与えてくれない。教師は進路のことや、受験のことばかり考えている。それはしょうがない。それはそれでいい。でも、僕は、僕自身は自分の好きなことをずっと考えていたい。誰から強制されたわけでもない。親から強制されて式変形しているわけじゃない。親は、机に向かってる姿しか見てない。僕がどんな数式をいじっているかなんて、親は関心ない。だから、僕は好きなようにやってる。といっても、親はもともと勉強しろなんてあまり言わないけれどね」

「先輩は成績がいいからですよ。あたしはだめです。しょっちゅう《勉強しろ》って言われています。うるさいんです。うち」

「僕はよく図書室で考え事をしている。ノートを開いて、式を思い出す。どうしてその定義でなければならぬかを考える。定義を書き変えて何が起るかを調べる。グラフを描く。表を作る。学校や教師は教えてくれない。かんじんのところは自分で考えなければならない。教師が悪いとか、友達が悪いとかいってもしょうがない。テトラちゃんは言ったよね、さっき 式が出てくるたびに《どうしてこうなっているのかな、どうしてこうじゃないのかな》と考える って。それは、正しい態度だ。時間はかかるかもしれないけれど、そういう疑問を抱いて、ずっと考え抜くのは大事だ。それこそが勉強だと思う。親も友達も 教師だって、テトラちゃんの疑問には答えられないよ。少なくとも全部には答えられない。もしかしたら怒り出すかもね。人間って、自分が答えられない問題を与えられると、怒り出したり、問題を出した人を恨んだり、逆に馬鹿にしたりするものだから」

「先輩って、何だかとても大人なんですね。昨日、図書室で教えていただきましたよね。あのときも、すごく面白かった。簡単な式変形のはずなのに、何だかどきどきしました。一步一步、分かることを確かめながら進むから……なの、かな？ 今日のお話も、とても参考になります。……あのう、こういう話って、あの方とも話したりするんですか？」

「あの方？」

「ミルカさん」

「ああ。うーん、どうだろう。もっと具体的な話が多いかも。図書室で僕が計算していると、ときどきミルカさんがやってきて、ちょっかいを出してくる。そのときの計算が話題になることが多いと思うな。でも、しゃべっているのはミルカさんがほとんどなんだけどね。ミルカさんは賢い人だね。僕はかなわない。あの人は僕よりも広く、深く、いろんなことが分かっている」

「先輩は、あの方と、あの 付き合っているんだと思っていました。いつも一緒にいらっしやるみたいだし」

「同じクラスだからね」

「図書室でも、いつも……」

「……」

「……あのお、先輩は説明がとても上手だと思います。先輩と話していると、あたしまでも、説明がうまくなくなってしまふみたいなんです。自分で考えていることを、順序だてて話せる」

「……」

「先輩のこと友達から聞いたんですけど、先輩は、教室では、まったくしゃべらないってほんとうですか」

「まったくしゃべらないなんてデマだよ。聞かれれば普通に話す。自分からはあまり話し始めないだけで。ミルカさんは一日中ずっとしゃべっているね。他の人が聞いていてもいなくても」

「先輩は学年トップなんですよね」

「いや、それも違う。数学だとミルカさんがトップだと思う。それからツノミヤがいるからね。総合だとツノミヤが一番だと思うよ」

「どうして、みなさんそんなに頭がいいんですか」

「頭がいいっていうより、好きなことをやっているだけなんだよ。スポーツもできるツノミヤは別格として、僕もミルカさんも運動はひどいもんだ。ミルカさんはさておき、僕は大勢の前で話すのは得意じゃない。でも、数学は好きだ。好きだからやっている。そういうことだよ。君も……テトラちゃんも何か好きなこと、あるんじゃない？」

「……英語、が好きですね。とても好きです」

「いま、君のカバンの中に、英語の本が入っているでしょう。それから、本屋に行ったら、真っ先に洋書コーナーに向かうでしょう。違う？」

「はい、先輩。その通りです……よくわかりますね」

「僕もそうだからね。僕の場合は、理数系の本棚に向かう。どこの本屋に行ってもそうだ。いつも行く本屋なら、どこに理数系の本が並んでいるか覚えている。棚を見ただけで新刊を見つける。そういうこと。僕は、自分の好きなことをしているだけなんだよ。好きなことに時間を使う。好きなことに手間暇かける。誰でもそうだよ。深く、深く、考えていたい。ずっと、ずっと、思っていたい。好きってそういう気持ちでしょう？」

## 6

心のどこかにあるスイッチがかちりと入り、僕はあらぬことまで話し出す。

「学校の世界はとても小さくて狭い。偽物がたくさんある。でも、学校の外には生の、本物がごろっと転がっている。学校の外にも、学校の中と同じように偽物がたくさんあるかもしれないけれど、学校の外には、子供向けの偽物だけじゃなく、切ったら血が吹き出てくるような本物があるよ。僕はそういうのが好きなんだよ」

「学校の中の偽物ってどういうことですか」

「たとえば教師。ムラキ先生は知っているよね。彼は本物だね。でも、トーガは偽物」

「トーガ先生はやさしいって評判ですけど」

「ムラキ先生は変わり者だと思われているけれど、いろんなことをよく分かっている。僕も、ツノミヤも、それからたぶんミルカさんも、同じ意見だと思うよ。僕たちはときどき、ムラキ先生から問題を出してもらったり、面白い本を紹介してもらってる。でもトーガは違う。あまり近づかないほうが良いよ。一応あれでも教師だけれど、薄っぺらな偽物……いや、ひょっとしたら<sup>クセモノ</sup>曲者かもね」

テトラちゃんは、首をかしげる。僕はかまわず続ける。入ってしまった饒舌スイッチはなかなか切れない。  
「生徒の中にも、本物と偽物がいる。いつも大声を出して偉そうにしている奴がいる。自分は大物だ、といわんばかりの態度をしている奴。それから、その虚勢にだまされてしまう奴もいる。でも、自分の頭を使って考える習慣があって、いつも本物に触れていて、本物の味わいを知っているなら、大声を出す必要なんかないことがわかる。大声を出して自己主張する必要なんかないんだ。そんなに自己主張してもしようがないんだ。大声を出しても漸化式は解けない。頭がいい振りをしたからといって、解が見つかるわけじゃない。誰に命じられたわけでもないけれど、こつこつとノートに式を書いていく。自分で納得するまで考える。そういうのが大事だと思っていて、そういうのが好きなんだよ。僕ら……僕はね」

そう言って僕は口を閉じる。しゃべりすぎた。自己主張してもしようがないんだ、なんて大声で主張している僕は愚か者だな。スイッチオフだ。テトラちゃんを見ると、ゆっくりうなずきながら、何か考えている。

いつの間にかフルートのロングトーンは終わっていて、トリルの練習が始まっている。人が増えてきて「がくら」もだいぶざわつきはじめている。

「先輩。……そういうふうに……好きな勉強をしているとき、馬鹿な後輩って……あのう、邪魔ですか？」テトラちゃんは消え入りそうな小さい声で言う。

「え？」

「馬鹿な後輩がそばでうろろうっていうのは、迷惑……じゃありませんか？」

「いや 邪魔とか迷惑なんてことはない。聞く。答える。自分が考えたことを話す。聞いてもらう。ちゃんとした相手だったら、そんな会話は楽しい。僕らは 僕は、別に孤独を気取っているわけじゃない。同じセリフばかり繰り返してるけれど、僕は単に、好きなことを好きなようにしているだけなんだ」

「何だか、先輩がうらやましいです。あたしも、英語が好きだし、それから数学もがんばって勉強したいと思っているけれど、ぜんぜんレベルが違って……」

テトラちゃんは携帯のストラップを指に巻いては解き、巻いては解く。

沈黙。

ややあって、テトラちゃんが、さっと顔を上げる。

「ううん！ そうじゃないんですね。他の人がどうこうじゃないんですね。自分の大切なことをちゃんと追いかければいいんですね！ 先輩、何だか、元気が出てきました！ あのう、お願いがあります。これからも……ときどきでいいですからお話をさせてください。お願いします！」

真面目な顔でテトラちゃんは言う。

「うん、別にいいよ」

別に何も問題はない。たぶん。何だか今日はテトラちゃんに何回も《お願い》されて、何回も《いいよ》と言ってるような気がする。特に問題はない。きっと。僕はラウンジの時計に目をやる。

「先輩は、今日もこれから図書室、ですか？」

「ん？ うん。そうだね」

「あたしも図書室に……。あっ、ええっと、うーんと、やっぱりいいです。今日は帰ります。またいつか、質問があったら、聞きにいつでもいいですか？ 図書室や 教室に」

「いいよ、もちろん」

ほら、もう1個《いいよ》が増えた。

そのとき「よーっす、テトラぁ」と言いながら、女の子が3人、テトラちゃんの背後を通り過ぎた。

「おうっ」テトラちゃんは彼女たちの方を振り向き、大声で返事をした。

その直後。

テトラちゃんは、両手で口を押さえてこちらを向く。しまった、という顔。耳まで真っ赤になっている。僕の前で普段の口調を出してしまったのが、よっぽど恥ずかしいらしい。

そんなテトラちゃんを、なかなか可愛いとってしまった、高校二年の秋。

## 読者のみなさんへ

この物語の PDF ファイルは、以下の URL から入手できます。結城へのフィードバックも下記ページから送ることができますので、ぜひみなさんのご感想をお聞かせください。

テトラちゃんと相加相乗平均

<http://www.hyuki.com/story/tetora.html>

Copyright (C) 2005 Hiroshi Yuki (結城浩)

All rights reserved.

### 更新履歴

- 2005 年 11 月 16 日、公開。
- 2005 年 11 月 17 日、細かい修正。
- 2005 年 11 月 20 日、「平方する」を「平方根をとる」に修正。