Substructural Logics

証明論的視点から

小野　寛晰

北陸先端科学技術大学院大学

部分構造論理の研究

最近の大きな進展

- **論理と代数** (ordered algebraic structures, universal algebra, algebraic logic **等**) **の間の密接な関係**
  - provability **と** deducibility — **（局所）演繹定理**
  - **等式理論と論理の関係 — 代数化定理**
  - **論理的性質の代数的特徴づけ**
- **証明論の概念や方法の代数的理解**
  - cut **除去可能性と** Dedekind-MacNeille **の完備化**

いろいろな概念や結果を数学的に明確な形で述べることができるようになったのはここ数年

この講演の内容

主として、証明論的な観点から

- 部分構造論理とはなにか
- 部分構造論理という枠組の広さ（多くの非古典論理をカバー）
- 部分構造論理という枠組の深さ (abstract algebraic logic への本質的貢献)
- 部分構造論理の定式化におけるシーケント計算の役割

などについて述べ、その**面白さ**を伝えたい.

N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, HO, Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.151, Elsevier, April, 2007

関連したテーマについての最近の講演

- Ordered Structures in Many-valued Logic: Sorrento (2006) の tutorial. C. Holland, D. Mundici, C. Tsinakis, HO
- Order, Algebra, and Logics: Nashville (2007) の tutorial
- **日本数学会年会、数学基礎論分科会**: **埼玉** (2007) **の特別講演**

Gentzen の sequent 計算 LJ

LJ で扱われるる sequent はつぎの形. ただし $m \geq 0$.

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$$

直観的には "β follows from assumptions $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$" を意味している. 実際、上記の sequent と、つぎの sequent は **LJ** で provably equivalent.

$$\Rightarrow (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m) \to \beta$$

LJ での推論は、 始式とよばれる $\alpha \Rightarrow \alpha$ の形の sequent につぎの三つのタイプの推論規則を繰り返し適用することによりおこなわれる。

- Cut
- 論理演算子に関する規則
- 構造規則 (structural rules)

Cut と rules for implication

- Cut

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Sigma, \alpha, \Xi \Rightarrow \varphi}{\Sigma, \Gamma, \Xi \Rightarrow \varphi}\ (\mathsf{cut})$$

- Rules for implication

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\alpha \to \beta, \Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\to\Rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta}\ (\Rightarrow\to)$$

Rules for lattice operations

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi \quad \Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\wedge 1 \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\wedge 2 \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\ (\Rightarrow \wedge)$$

Structural rules

Structural rules は sequent のコンマの意味を規定する. ((i) と (o) を合わせて (w) (weakening rules) という.)

(e) exchange rule (commutativity): $\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}$

(c) contraction rule (square-increasing): $\dfrac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}$

(i) left weakening rule (integrality): $\dfrac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}$

(o) right weakening rule (minimality of 0): $\dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \alpha}$

Sequent 計算 FL

部分構造論理の基本的体系である sequent 計算 **FL** (Full Lambek Calculus) は、**LJ** から structural rules を除いた体系である. 正確にのべると、まず通常の始式のほかに、つぎの定数 0,1 に関する始式と規則を持つ.

- Initial sequents:

$$\Rightarrow 1 \qquad 0 \Rightarrow$$

- 1- and 0-weakening:

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (1\ \mathrm{w}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0\ \mathrm{w})$$

FL の推論規則

- Cut rule
- Rules for lattice operations

LJ では、コンマは普通の conjunction を意味した. しかし、その同値性の証明には contraction と weakening の両方が必要.

したがって一般にはコンマを conjunction で置き換えることはできない.

コンマと fusion

そこでコンマを表現するような論理演算子 fusion （記号 $\cdot$ を用いる）を導入する. fusion に関する推論規則はつぎのようにあたえる.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \alpha \cdot \beta}\ (\Rightarrow \cdot) \qquad \frac{\Sigma, \alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Sigma, \alpha \cdot \beta, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\cdot \Rightarrow)$$

このとき、**FL** でつぎの関係が成立.

$\alpha \cdot \beta \Rightarrow \varphi$ is provable iff $\alpha, \beta \Rightarrow \varphi$ is provable.

剰余 (residuals)

exchange rule を仮定しない場合には、二種類の implication (左および右剰余) を導入する. 左右の剰余（$\alpha\backslash\beta$ と β/α）が一致するときは、$\alpha \to \beta$ と表す.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Xi, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Xi, \Gamma, \alpha\backslash\beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\backslash \Rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta}\ (\Rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Xi, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Xi, \beta/\alpha, \Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (/ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha}\ (\Rightarrow /)$$

すると **FL** でつぎの関係が成立.

$\alpha \cdot \beta \Rightarrow \varphi$ is provable iff $\beta \Rightarrow \alpha\backslash\varphi$ is provable iff $\alpha \Rightarrow \varphi/\beta$ is provable

否定

否定 は、定数 0 を用いて以下のように定義される.

$$\sim\alpha = \alpha\backslash 0 \text{ および } -\alpha = 0/\alpha.$$

FL における証明図の例

$$\begin{array}{c}
\alpha \Rightarrow \alpha \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \beta \quad \gamma \Rightarrow \gamma}{\beta/\gamma, \gamma \Rightarrow \beta} \\ \hline
\alpha, \alpha\backslash(\beta/\gamma), \gamma \Rightarrow \beta \\ \hline
\alpha\backslash(\beta/\gamma), \gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta \\ \hline
\alpha\backslash(\beta/\gamma) \Rightarrow (\alpha\backslash\beta)/\gamma
\end{array}$$

部分構造論理の定義

Sequent 計算 $\mathbf{FL}$ の公理的拡大を部分構造論理という.

しばしば、論理とその論理で証明可能な論理式の集合とを同一視.

部分構造論理の基本体系

- $\mathbf{FL}$: $\mathbf{LJ}$ からすべての構造規則を除いた体系
- $\mathbf{FL_e}$: $\mathbf{FL}+$ exchange
- $\mathbf{FL_{ew}}$: $\mathbf{FL}+$ exchange $+$ weakening

部分構造論理の代表例

- Lambek 計算

  categorial grammer に対する計算 (J. Lambek, 1958)
- Relevant logics : weakening rules を欠く
- contraction rule を欠いた論理

  Łukasiewicz の多値論理, ファジー論理
- Linear logic : weakening と contraction を欠く
- Johansson の minimal logic : 右 weakening を欠く

ノート 1

- Logics without contraction rules (with Komori), 1985: 証明論、Kripke 意味論、代数的意味論
- Heyting '88 conference, 1988: FL-series の部分構造論理の導入
- Tübingen conference, 1990: 述語論理の代数的意味論、MacNeille completions を用いた完全性
- 証明論的方法を用いた部分構造論理の研究

証明論的方法による結果

Cut elimination とその帰結: $\mathbf{FL_c}$ の場合？

- 決定可能性: weakening がなく contraction がある場合の問題
- interpolation property: 前原の方法

部分構造論理 $\mathbf{L}$ が Craig interpolation property (CIP) を持つとは、任意の論理式 ϕ, ψ に対し、もし $\phi\backslash\psi$ が $\mathbf{L}$ で証明可能ならば、ある論理式 δ が存在し、

- $\phi\backslash\delta$ および $\delta\backslash\psi$ がともに $\mathbf{L}$ で証明可能,
- $Var(\delta) \subseteq Var(\phi) \cap Var(\psi)$.

ここで $Var(\gamma)$ は論理式 γ に含まれる変数の集合.

証明論的方法による結果

- disjunction property: 右 contraction の役割
- variable sharing property: weakening の役割
- Maksimova's variable separation property
- positive fragments

Non-classical logics の枠組として

- なぜ部分構造論理という枠組により、このように多くの non-classical logics を扱うことができるのだろうか？
- なぜシーケント計算が使われているのか？ なぜ natural deduction や Hilbert 流の体系ではないのか？

線形論理の Fusion についての Girard の解釈

resource-sensitive？　多値論理やファジー論理を resource で説明できるか？

演繹可能性

部分構造論理では通常のように証明可能性 (provability) が定義されるが、consequence relation としての演繹可能性 (deducibility) を導入することができる. (代数的にもきわめて重要な概念.)

論理式の集合 Σ および論理式 α に対し、α が Σ から $\mathbf{FL}$ で**演繹される** ($\Sigma \vdash_{\mathbf{FL}} \alpha$) とは、

> $\mathbf{FL}$ にさらに sequents $\Rightarrow \gamma$ (ただし、$\gamma \in \Sigma$) を、新しい始式としてつけ加えて得られる体系において、sequent $\Rightarrow \alpha$ が証明可能であることとする.

演繹可能性

さらに、任意の部分構造論理 $\mathbf{L}$ に対しては、$\Sigma \cup \mathbf{L} \vdash_{\mathbf{FL}} \alpha$ となるとき $\Sigma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ と定めることにより、consequence relation $\vdash_{\mathbf{L}}$ が導入される.

provability と deducibility の間には一般的にはどのような関係があるか？

演繹定理

古典論理や直観主義論理の場合には、つぎの演繹定理 (deduction theorem) が容易に証明できる. (注意: ここでのコンマは union)

$$\Sigma, \alpha \vdash \beta \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \beta$$

しかし、一般の部分構造論理では演繹定理はなりたたない. たとえば、$\alpha \Rightarrow \alpha^2$ は $\mathbf{FL}$ で provable でないが、つぎの証明図が示すように $\alpha \vdash_{\mathbf{FL}} \alpha^2$ はなりたつ.

$$\frac{\Rightarrow \alpha \qquad \Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \alpha \cdot \alpha} \ (\Rightarrow \cdot)$$

パラメタつき局所演繹定理

つぎの形のパラメタつき局所演繹定理 (PLDT) が $\mathbf{FL}$ に対してなりたつ (GO 2006).

$\Sigma, \alpha \vdash_{\mathbf{FL}} \beta$ iff there exist iterated conjugates δ_i of α ($i \leq m$ for some m) such that $\Sigma \vdash_{\mathbf{FL}} (\prod \delta_i) \backslash \beta$.

ただし、論理式 α の累次共役 (iterated conjugate) とは、α に左共役 $\lambda_\varphi(x) = (\varphi \backslash x\varphi) \wedge 1$ と右共役 $\rho_\psi(x) = (\psi x / \psi) \wedge 1$ を繰り返し適用して得られる論理式のこととする.

この共役の概念は、群論における「共役」からヒントを得ている. PLDT の定義は Czelakowski-Dziobiak による.

証明のアウトライン

基本的には $\mathbf{LJ}$ の演繹定理の場合と同様. $\mathbf{FL}$ は構造規則がないが、つぎの結果が示すように weakening と exchange についでは共役が代理の役割を果たす.

- if $\Gamma, \Delta \Rightarrow \theta$ is provable then $\Gamma, \psi \wedge 1, \Delta \Rightarrow \theta$ is provable,
- if $\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \theta$ is provable then both $\Gamma, \beta, \lambda_\beta(\alpha), \Delta \Rightarrow \theta$ and $\Gamma, \rho_\alpha(\beta), \alpha, \Delta \Rightarrow \theta$ are provable.

局所演繹定理

exchange のなりたつ部分構造論理では共役をとる必要がなくなる. すなわち、

$$\lambda_\varphi(x) = \lambda_\varphi(x) = x \wedge 1$$

したがって PLDT はつぎの局所演繹定理 (LDT) の形に簡約化される.

$$\Sigma, \alpha \vdash_{\mathbf{FL_e}} \beta \ \text{ iff } \Sigma \vdash_{\mathbf{FL_e}} (\alpha \wedge 1)^m \to \beta \ \text{ for some } m.$$

この m を具体的に求めることは一般にはできないという意味で局所 (local) とよばれる.

決定問題

基本的な部分構造論理においては cut 除去定理がなりたち、したがってその **証明可能性は決定可能**である. (cf. $\mathbf{FL_{ec}}$ の場合. $\mathbf{FL_{c}}$ の場合.)

他方、$\mathbf{FL_{e}}$ の**演繹可能性は決定不可能**. (実質的には Lincoln, Mitchell, Scedrov & Shankar (1992) による. cf. HO 1997, Buszkowski 2007)

部分構造論理の Hilbert 流定義

部分構造論理は deduciblity と代入に関して閉じた論理式の集合として定義することができる. したがって、PLDT より部分構造論理をつぎのような形で定義することができる.

論理式の集合 $\mathbf{L}$ が部分構造論理であるとは、つぎのことがなりたつことである.

- $\mathbf{FL}$ で証明可能な論理式は $\mathbf{L}$ に属す,
- φ と $\varphi\backslash\psi$ が共に $\mathbf{L}$ に属すなら ψ も $\mathbf{L}$ に属す,
- φ が $\mathbf{L}$ に属すなら $\varphi \wedge 1$ も $\mathbf{L}$ に属す,
- φ が $\mathbf{L}$ に属すとき、任意の γ に対し、$\gamma\backslash\varphi\gamma$ と $\gamma\varphi/\gamma$ が $\mathbf{L}$ に属す,
- $\mathbf{L}$ は代入に関して閉じている.

論理への代数的視点

- ここまでの議論では、部分構造論理について、その半面しか語っていない.
- 部分構造論理の代数的側面を理解することにより、全体像をとらえることができる.

ノート 2

- Residuated lattices — **多値論理と** Hájek **のファジー論理**
- HO, "Logics without contraction rule and residuated lattices I"
- AsubL workshop — universal algebra, ordered algebraic structures, abstract algebraic logic **との出会い**
- BJO — algebraic cut elimination
- GO — 2006a in Studia Logica, 2006b in JSL
- Kihara-O — algebraic characterization of logical properties

Residuated lattices

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \cdot, \backslash, /, 1 \rangle$ が residuated lattice (RL) とは、$\mathbf{A}$ がつぎの条件をみたすことである.

- $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ は束,
- $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ はモノイド,
- for all $x, y, z \in A$, $x \cdot y \leq z$ iff $y \leq x \backslash z$ iff $x \leq z / y$.

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \cdot, \backslash, /, 1, 0 \rangle$ が **FL-代数** であるとは、$\langle A, \vee, \wedge, \cdot, \backslash, /, 1 \rangle$ が RL であることをいう. ここで 0 についてはとくに何も仮定しない. 0 を用いて二種類の**否定** を、$\sim x = x \backslash 0$ および $-x = 0 / x$ により定義する.

RL と FL-algebra の例

- Dilworth, Ward (1930 年代) による環のイデアル論.
- lattice ordered group は RL. $a\backslash b = a^{-1}b$, $b/a = ba^{-1}$.
- Mulvey, Rosenthal 等による quantale は RL.
- ハイティング代数、Łukasiewicz の多値論理のモデル（一般に MV 代数）は FL-代数.

FL-代数と部分構造論理

FL-代数 $\mathbf{A}$ でシーケント $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ が valid とは、$\mathbf{A}$ 上の任意の付値に対し、不等式 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \leq \beta$ がつねになりたつことである.

- exchange — $x \cdot y \leq y \cdot x$ (commutativity),
- contraction — $x \leq x^2$,
- left weakening — $x \cdot y \leq x$ and $x \cdot y \leq y$ (integrality),
- right weakening — $0 \leq x$.

演繹可能性の代数的意味

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \vdash \beta$ の代数的な意味は、 任意の FL-代数 $\mathbf{A}$ およびその上の任意の付値のもとで、集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ が生成する (deductive) filter が要素 β を含むこと.
- deductive filter と**合同関係**とは一対一に対応. (正確には、束同型)

lattice ordered group $\mathbf{G}$ において

- その部分代数 H が**共役に関して閉じている**こと、すなわち任意の $a \in H$ と $c \in G$ に対し $cac^{-1} \in H$ となるのは、H が**正規部分群**となることに対応.

Varieties と equational classes

代数のクラス $\mathcal{K}$ が variety であるとは、それが H, S, P に関して閉じていることをいう.

> $\mathcal{K}$ が variety となる必要十分条件は、それが演算 HSP に関して閉じていることである (Tarski).

等式の集合 Σ に対し、$\mathrm{Mod}(\Sigma)$ は Σ に属するすべての等式 $s \approx t$ に対し $\mathbf{A} \models s \approx t$ となる代数全体のクラスを表す. 代数のクラス $\mathcal{K}$ が equational class であるとは、$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ となるような Σ が存在することである.

varieties = equational classes (Birkhoff)

RL 全体のクラス $\mathcal{RL}$、FL-代数全体のクラス $\mathcal{FL}$ はともに variety.

代数と論理

terms: $s, t, u, \ldots$ $\quad\longmapsto\quad$ formulas: $\alpha, \beta, \ldots$

- $s = t$ $\quad\longrightarrow\quad$ $s \leftrightarrow t$, i.e. $(s\backslash t) \wedge (t\backslash s)$
- $1 \leq \alpha$, i.e. $\alpha \wedge 1 = 1$ $\quad\longleftarrow\quad$ α

- the variety of Boolean algebras $\longrightarrow$ classical logic
- the variety of Heyting algebras $\longrightarrow$ intuitionistic logic
- subvarieties of $\mathcal{RL}$ ($\mathcal{FL}$) $\longrightarrow$?

Algebraization a la Lindenbaum

1. $\mathcal{FL}$ の任意の subvariety $\mathcal{V}$ に対し, 集合 $\mathbf{L}(\mathcal{V}) = \{\alpha; \mathcal{V} \models 1 \leq \alpha\}$ は部分構造論理をなす.
2. 逆に、任意の部分構造論理 $\mathbf{L}$ に対し, 等式の集合 $\{s \approx t; (s \leftrightarrow t) \in \mathbf{L}\}$ は $\mathcal{FL}$ のある subvariety $\mathcal{V}(\mathbf{L})$ を定める。
3. しかもこれら二つの写像 $\mathbf{L}$, $\mathcal{V}$ は互いに逆束同型写像.

これをつぎのように述べることができる.

substructural logics are logics of residuated lattices.

田村による RL に対する sequent 計算 (1974)

部分構造論理とシーケント計算

それでは、なぜシーケント計算と構造規則なのか？

- 論理を規定するのは、その implication の振る舞いである.
- シーケント計算では、コンマの形で monoid 演算が explicit に導入されている.
- コンマの振る舞い（構造規則）の相違が、residual である implication の振る舞いに反映される.

割り算の体系からかけ算の体系へ.

HO, Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica, 2003

Equational consequence

$\mathcal{FL}$ の subvariety $\mathcal{V}$ に対し equational consequence $\models_V$ をつぎのように定義. 等式の集合 $\{u_i \approx v_i; i \in I\} \cup \{s \approx t\}$ に対し、$\{u_i \approx v_i; i \in I\} \models_V s \approx t$ とは

- the first-order formula "$\bigwedge\{u_i \approx v_i; i \in I\}$ implies $s \approx t$" holds always in every algebra in $\mathcal{V}$,
- or equivalently, $s \approx t$ follows from equations $\bigwedge\{u_i \approx v_i; i \in I\}$ with "axioms" of $\mathcal{V}$ in equational calculus.

Algebraization a la Blok-Pigozzi

より強い形の algebraization theorem が成立 (GO 2006)

1. $\mathcal{FL}$ の任意の subvariety $\mathcal{V}$ に対し,
   $\{u_i \approx v_i; i \in I\} \models_V s \approx t$ iff $\{u_i \leftrightarrow v_i; i \in I\} \vdash_{L(V)} s \leftrightarrow t$,
2. 逆に、任意の部分構造論理 $\mathbf{L}$ に対し, $\{\beta_j; j \in J\} \vdash_L \alpha$ iff $\{1 \leq \beta_j; j \in J\} \models_{V(L)} 1 \leq \alpha$,
3. しかもこれら二つの写像 $\mathbf{L}$, $\mathcal{V}$ は互いに逆写像となっている.

つまり、論理における deducibility **と、対応する** variety **における** equational consequence **の間に完全な翻訳関係が成立する**.

Algebraization theorem **の応用**

- Commutative RLs **の** quasi-equational theory **は決定不能**
- Glivenko **の定理の一般化** (GO 2006)
- **部分構造論理における** interpolation **と** amalgamation **の関係** (**木原・**O)

Cut elimination

証明論的方法の基本は inductive argument. それに対し代数構造や、代数的方法は inductive な因子を欠いている. したがって、証明論的方法による証明の分析から多くの情報が得られる. たとえば、前原による interpolation theorem の証明.

cut elimination の代数的証明への試み.

前原 (1991), 岡田 (1996), 岡田・照井 (1999), Jipsen-Tsinakis (2002), BJO (2004)

F. Belardinelli, P. Jipsen & HO, Algebraic aspects of cut elimination, Studia Logica, 2004

- **代数の研究者に理解できるような証明**
- **実際に利用可能. 証明図を変換する議論がないので簡単になることもある** (GO, Galatos-Jipsen, Buszkowski)

代数的証明のアウトライン

- 論理 $\mathbf{L}$ の sequent 計算 $\mathcal{S}_L$ に対し Gentzen matrix とよばれる partial structures を導入. (cf. Font, Jansana, Pigozzi)
- $\mathcal{S}_L$ に対する任意の Gentzen matrix $\mathbf{Q}$ が $\mathcal{V}(\mathbf{L})$ に属すある完備代数 $\mathbf{B}$ に **準埋め込み可能** (quasi-embeddable) であることを示す.

この $\mathbf{B}$ を $\mathbf{Q}$ の **準完備化** (quasi completion) という.

- $\mathcal{V}(\mathbf{L})$ に属す任意の代数 $\mathbf{A}$ は $\mathcal{S}_L$ の特別な Gentzen matrix と見なされる. このとき、その準完備化は $\mathbf{A}$ の MacNeille 完備化 と同型になる.
- したがって、我々の方法が論理 $\mathbf{L}$ のある sequent 計算 $\mathcal{S}_L$ に対して有効であるときには、variety $\mathcal{V}(\mathbf{L})$ は、MacNeille 完備化に関して閉じていなければならない.

- ハイティング代数の variety のうち、MacNeille 完備化に関して閉じているものは三つのみである. (Bezhanishvili-Harding)

証明論的方法と代数的方法

このように、証明論的方法と代数的方法の間には予想を超える深い (相補的) 関係があるように思われる. (たとえば、Ciabattoni・Galatos・照井等による研究).

代数的方法が論理の研究にインパクトをあたえ、また論理の手法が代数の研究にあらたな視点をあたえ、このような研究 (代数的論理学) が今後さらに発展していくと考えている.

Topological and Algebraic Methods in Logics (TAL), 2009 at Amsterdam