代数的視点からの論理へのアプローチ

小野寛晰 （北陸先端科学技術大学院大学）

1　代数的論理学の新たな展開

非古典論理の研究において、この１０年ほどの間に代数的方法を用いた優れた成果が得られている。とくに、様相論理や部分構造論理に関する代数的な研究の発展がめざましい。これらの研究は非古典論理のみならず、algebraic logic、universal algebra やさらに ordered algebraic structures の研究と深く関わっており、従来の研究分野をこえた研究交流や共同研究が活発に行われるようになってきた。とくにこの数年間、国際的な研究集会がつぎつぎに開催されている。2007 年にも 6 月にはナッシュビルで、また 8 月にはオクスフォードで関連分野の国際会議が予定されている。私自身は 1999 年より Algebra & Substructural Logics というタイトルの小規模なワークショップを開始し、昨年秋のポーランドの会合で 3 回目をむかえた。また、部分構造論理に対する代数的研究におけるこれまでの成果を共著としてまとめ、この春に”Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics”として出版する [3]。

ここではこのような研究のことを、従来の abstract algebraic logic よりは広い意味に解釈して**代数的論理学**とよぶことにする。そして、私が関わってきた部分構造論理に対する代数的研究を中心に、最近の成果に言及しつつ論理と代数の関わりについて論じてみたい。

2　歴史的背景に関するノート

論理における代数的なアプローチの先駆けとなったのは、19 世紀半ばの Boole や de Morgan の研究である。彼等は代数的な表現形式に倣って（古典）論理の振る舞いを等式の形で表し、論理的推論を等式計算としてとらえようとした。

論理と代数構造の関係についてのより踏み込んだ議論の展開は 20 世紀初頭のポーランドの論理研究者に負うところが多い。E. Post や J. Łukasiewicz は 2 値のブール代数の代わりに（有限の）全順序集合上に代数演算を定めることにより多値論理を導入した（代数構造をもちいた論理の導入）。また、A. Lindenbaum や A. Tarski はあたえられた論理に対し Lindenbaum-Tarski 代数を導入することにより、論理における証明可能性と代数構造における恒真性の関係（完全性）を明らかにした（論理が定める代数構造とその完全性）。この結果は論理にたいする代数的な扱いを一

般的に保証するが、論理が代数構造のあるクラスに関して完全であるという結果そのものは自明である。たとえば古典論理の Lindenbaum-Tarski 代数とは（可算集合から）自由生成されるブール代数に他ならないから、自由代数の universal mapping property から、古典論理がブール代数全体のクラスに関して健全かつ完全であることがただちに導かれる。[1]

1930 年代に G. Birkhoff および M. H. Stone があげた成果は、その後の universal algebra、algebraic logic および論理の topological model の研究に大きな影響をもたらした。これらの数学的方法を用いた論理研究を強力に押し進める原動力となったのは A. Tarski である。（このあたりの状況について関心のある人には Tarski の伝記 [2] を一読することを薦める。）彼は J.C.C. McKinsey や B. Jónsson との共同研究を通してその成果を発表した。とくに後者との Boolean algebras with operators の研究は、数学的にはそのほぼ 10 年後に Kripke が発表した関係意味論の内容を実質的に含んでおり、50 年たった今も改めてその意義が見直されている。1963 年にはポーランド学派の代数的論理学の成果の集大成というべき H. Rasiowa と R. Sikorski による"The Mathematics of Metamathematics"が出版された。

しかし 60 年代始めからは Kripke 意味論を用いた研究がとくに様相論理を中心に盛んになった。代数的な意味論のように完全性は保証されないものの、Kripke 意味論はその直観的な理解のし易さと、技術的な扱い易さから非古典論理の意味論の中心となる。その後 L. Maksimova や W. Blok などによりいくつかの優れた成果が得られたものの、代数的なアプローチによる研究はやや後退した感があった。従来の代数的方法による非古典論理の研究は、抽象化された形で universal algebra や algebraic logic に引き継がれていったように思われる。

最近の 10 年ほどの代数的方法による研究への関心の高まりは、1970 年頃にいったん枝分かれし独立に発展していったこれらの分野が、成熟したのちに reunion した結果と見ることができよう。Blok と D. Pigozzi などによる論理の代数化可能性 (algebraizability) の研究、様相論理における R. Goldblatt、I. Hodkinson および Y. Venema による Fine 予想の解決、部分構造論理と residuated lattice の研究などに代表されるように、代数的論理学の研究は新たな段階をむかえ今後さらに大きく発展していくに違いない。

3　代数的アプローチへの序論

以下では「論理」とは命題論理を指す。また、代数との関連を議論していくので混乱のおきない限り「論理式と代数的な項 (term) の同一視」をおこなう。さらに我々が扱うのは推論体系としての論理ではなく、論理式の集合としての論理である。つまり、古典論理の場合であれば、古典論理がどのような体系で形式化されるのかは問わず、古典論理で証明可能な論理式全体の集合に注目するのである。この集合は、

[1]だからといって代数的意味論がつまらないことにはならない。完全性は、議論の出発点であってゴールではないのだから。

意味論的にはトートロジーである論理式全体の集合、ないしは任意のブール代数で恒真であるような論理式全体の集合とみることができる。言葉の濫用により、この集合そのものを論理とよぶことにする。このような言い方をすると、たとえば直観主義論理は任意のハイティング代数で恒真となる論理式全体の集合に一致する、ということになる。

論理、等式クラスそして variety

論理と代数のあるクラスの間のこのような関係は Lindenbaum-Tarski 代数を仲立ちとして一般的に論じることができる。とくにハイティング代数の場合のようにその代数全体のクラス $\mathcal{H}$ が等式だけで定義可能な場合、すなわち**等式クラス** (equational class) の場合には、両者の間に密接な関係がある。

これを超直観主義論理、すなわち直観主義論理の公理的拡大、の場合について考えてみよう。直観主義論理に論理式の集合 $\varphi_i (i \in I)$ を公理としてつけ加えて得られる超直観主義論理は、等式 $\varphi_i = 1 (i \in I)$ をみたす任意のハイティング代数で恒真となる論理式全体の集合に等しい。逆にあたえられた等式の集合 $s_j = t_j (j \in J)$ をみたすハイティング代数の等式クラス V に対し、V でつねに恒真な論理式全体の集合は、論理式 $s_j \leftrightarrow t_j (j \in J)$ を公理としてつけ加えた超直観主義論理に一致する。

このように超直観主義論理とハイティング代数の等式クラスの間には密接な関係がある。他方、あたえられた代数のクラス $\mathcal{K}$ が等式クラスをなすための必要十分条件は $\mathcal{K}$ が **variety** であること、すなわち $\mathcal{K}$ が準同型 (H)、部分代数 (S)、直積 (P) に関して閉じていることを Birkhoff が示している。上で述べた「密接な関係」というのは、正確にはつぎのように表される。

定理 1 超直観主義論理全体がなす束と $\mathcal{H}$ の部分 *variety* 全体のなす束との間には逆束同型が存在する。

超直観主義論理 $\mathbf{L}$ に対応する $\mathcal{H}$ の部分 variety を $\mathsf{V}(\mathbf{L})$、逆に $\mathcal{H}$ の部分 variety $\mathcal{V}$ に対応する論理を $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ と表すことにする。これらの結果から、超直観主義論理についての論理学的研究は、$\mathcal{H}$ の部分 variety についての代数的研究でおきかえられることがわかる。では代数的研究はどのようにおこなわれるのか。そのことを超直観主義論理の場合についていくつかの例をあげて説明しよう。

有限モデル性

超直観主義論理 $\mathbf{L}$ が**有限的** (tabular) であるとは、 $\mathbf{L}$ が一つの有限ハイティング代数により特徴づけられること、すなわち variety $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ が一つの有限ハイティング代数により生成されることである。よく知られているように、Gödel は直観主義論理が有限的でないことを示した。また、論理 $\mathbf{L}$ が**有限モデル性** (FMP) を持つとは、$\mathsf{V}(\mathbf{L})$ がそれが含む有限代数により生成されることである。論理 $\mathbf{L}$ が有限モデル性を持ちさらに有限公理化可能であれば、$\mathbf{L}$ は決定可能である (Harrop)。

variety $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ が**局所有限** (locally finite) であるとき、すなわちこの variety に属す任意の代数 $\mathbf{A}$ においてその有限部分集合が生成する部分代数が有限であるときには、この variety は明らかに FMP を持つ。Rieger および 西村巌は、一つの生成元から

生成される自由ハイティング代数が無限になることを示した。したがって $\mathcal{H}$ は局所有限ではない。これに対し、論理式 $\gamma_n (n \geq 0)$ を、

$$\gamma_0 = p_0, \qquad \gamma_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \gamma_n)$$

と定めるとき、ある n に対し $\mathbf{L}$ が γ_n を含むならば $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ は局所有限になる（古森）。

直観主義論理が FMP を持つことは、Kripke 意味論を用いる場合には filtration method により証明することができるが、代数的な証明はつぎのようにあたえられる (McKinsey-Tarski)。$\mathbf{A}$ を任意のハイティング代数とし、S を A の任意の有限部分集合とする。集合 S が生成する $\mathbf{A}$ の部分ハイティング代数は無限になるかもしれない。ところで $\mathbf{A}$ の束演算のみに注目すると、それは分配束をなしている。また、分配束全体からなるクラスは局所有限である。したがって S が生成する $\mathbf{A}$ の部分分配束 $\mathbf{D}$ は有限になる。ところで、任意の有限分配束は自然にハイティング代数をなすから、$\mathbf{D}$ は有限ハイティング代数になる。さらに（$\mathbf{A}$ の partial algebra である）S から $\mathbf{D}$ への inclusion map は、S の中で定義されているハイティング代数の演算に限ればその値を保存する (partial isomorphism)。このことより、$\mathbf{A}$ において成り立たないそれぞれの等式に対して、ある有限な $\mathbf{D}$ が存在し、その等式は $\mathbf{D}$ においても成り立たないことになる。

一般に、代数のクラス $\mathcal{K}$ において、$\mathcal{K}$ に属す任意の代数 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{A}$ の任意の有限な partial algebra $\mathbf{S}$ が $\mathcal{K}$ に属すある有限な代数 $\mathbf{D}$ に埋め込まれるとき、$\mathcal{K}$ は**有限埋め込み可能性**（FEP）を持つという。$\mathcal{K}$ が FEP を持つとき $\mathbf{L}(\mathcal{K})$ は FMP を持つが、後述するように逆は一般には成立しない。また、$\mathcal{K}$ が FEP を持ちさらに有限公理化可能なときには、Harrop の結果は強められ $\mathcal{K}$ の universal theory が決定可能になることが証明される。

定理 2 $\mathcal{H}$ は *FEP* を持ち、したがってその *universal theory* は決定可能である。

部分構造論理では FEP を用いた FMP の証明が有効に用いられている。

超直観主義論理全体が作る束の構造

容易にわかるように、超直観主義論理全体のなす束は完備ハイティング代数をなす。その構造については、細井による slice による分割が知られている。universal algebra においては、束の構造を解析する一つの方法として R. McKenzie に始まる splitting が基本的である。

さて、この束の上部構造について考えてみよう。無矛盾な超直観主義論理には最大なものがあり、それが古典論理であることは容易に証明できる。つぎに、古典論理より真に弱い超直観主義論理について考えてみる。Birkhoff の **subdirect representation theorem** から、任意の variety はそれに属す subdirect irreducible な (SI) 代数全体から生成されることがわかる。したがって古典論理より真に弱い超直観主義論理のうちで極大な論理 $\mathbf{L}$ があるとすれば、variety $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ は Boolean ではない一つの SI ハイティング代数 $\mathbf{A}$ から生成されなければならない。

ところで、どの SI ハイティング代数も二番目に大きい元を持つことが証明される。代数 $\mathbf{A}$ の二番目に大きい元を a とすると、$\mathbf{A}$ は Boolean でないから、a は最小元 0

と異なるはずである。したがって、このような $\mathbf{A}$ はかならず、三つの要素 $0, a, 1$ からなるハイティング代数 $\mathbf{H}_3$ と同型な部分代数を持つことになる。したがって、古典論理より真に弱い超直観主義論理の中には最大なものが存在し、それは $\mathbf{H}_3$ で決定されることがわかる。

Łukasiewicz の無限多値論理の拡大である論理全体が作る束の構造については、順序アーベル群を用いた古森の優れた結果がある [7]。古森はこの論文で、これらすべての論理が決定可能であることや、FMP を持つための必要十分条件をあたえている。

Interpolation と amalgamation property

論理 $\mathbf{L}$ が **Craig's interpolation property** (CIP) を持つとは、任意の論理式 ϕ, ψ に対し、$\mathbf{L}$ で $\phi \to \psi$ が証明可能なら、ある論理式 δ が存在し、$V(\delta) \subseteq V(\phi) \cap V(\psi)$、かつ $\mathbf{L}$ で $\phi \to \delta$ および $\delta \to \psi$ が証明可能となることである。超直観主義論理 $\mathbf{L}$ が CIP を持つための必要十分条件は $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ が **amalgamation property** (AP) を持つ、すなわち

> $\mathsf{V}(\mathbf{L})$ に属す任意の $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ および任意の埋め込み写像 $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$、$g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ に対し、$\mathsf{V}(\mathbf{L})$ の中のある $\mathbf{D}$ と埋め込み写像 $h : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$、$k : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が存在し、$h \circ f = k \circ g$ がなりたつ、

ことを用いて、Maksimova はつぎの興味深い結果を得た。

定理 3 無矛盾な超直観主義論理のうち *CIP* を持つ論理はちょうど *7* つである。

4 部分構造論理

これまでに述べた結果はすべて 20 年以上前に得られたものである。超直観主義論理のクラスは部分構造論理の特別なサブクラスになっているが、一般の部分構造論理の場合にはどのような結果が得られ、そしてどのように研究が進展しているのかを述べていきたい。そこでまず部分構造論理について簡単に述べることにする。

部分構造論理 FL

我々の議論の出発点となる部分構造論理の体系 **FL** (Full Lambek calculus) は、大雑把にいえば直観主義論理の sequent 計算の体系 **LJ** から、exchange (e)、contraction (c) および左右の weakening (w) を除いて得られる体系である。contraction と weakening の両方を欠く場合には、sequent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \gamma$ の provability と $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \Rightarrow \gamma$ の provability が異なってくる。つまり、コンマは通常の conjunction にならない。そこで、コンマの役割を明確にするために新たな論理結合子 fusion（$\cdot$ で表す）を導入し、つぎの関係がなりたつようにその推論規則を導入する。

- $\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \gamma$ が provable $\Longleftrightarrow$ $\Gamma, \alpha \cdot \beta, \Delta \Rightarrow \gamma$ が provable.

また exchange を持たないので、二種類の implication を導入するのが自然である。それらを $\backslash$ と $/$ と表し、つぎの関係がなりたつように推論規則を導入する。

- $\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta$ が provable $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta$ が provable,

- $\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta$ が provable $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha$ が provable.

さらに、便宜上つぎの関係がなりたつように二つの定数 1 と 0 を導入する。定数 0 は、implication を使って negation を定義するために使われる。

- $\Gamma \Rightarrow$ が provable $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \Rightarrow 0$ が provable,

- $\Gamma, \Delta \Rightarrow \alpha$ が provable $\Longleftrightarrow$ $\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \alpha$ が provable.

古典論理や直観主義論理の場合には 1 と 0 はそれぞれ恒真、恒偽命題に相当するが、weakening を持たないときにはそうなるとは限らない。体系 **FL** に構造規則をつけ加えることにより、部分構造論理の基本的な体系が得られる。それらは **FL** に対応する構造規則の名前を添字として使い、たとえば (e) をつけ加えた体系は $\mathbf{FL_e}$、(e) と (w) をつけ加えた体系は $\mathbf{FL_{ew}}$ などのように表す。私は 1988 年の Heyting '88 Conference で、初めて統一的にこれらの体系を導入するとともにとそれらの間の基本的な関係を論じた。1990 年秋の Tübingen での会合で、これらの論理を総称して**部分構造論理**とよぶことが決まった。ここでは、さらに明確に、「**FL** の公理的拡大」のことを (**FL** 上の) 部分構造論理とよぶことにする。

体系 **FL** は、J. Lambek がカテゴリ文法を記述するために導入した体系に基づく。$\mathbf{FL_e}$ は (exponentials を持たない）直観主義的線形論理に等しい。Girard の MALL は $\mathbf{FL_e}$ に二重否定の法則を公理として加えることにより得られる。relevant logic も、その代表的な体系 **R** など多くが部分構造論理になる。contraction を持たない $\mathbf{FL_{ew}}$(BCK 論理）や Grishin の論理、Johansson の最小論理とその拡大である paraconsistent logics、さらに前述の超直観主義論理などの代表的な非古典論理の多くを部分構造論理として扱うことができる [13], [11]。

ここにあげた非古典論理はそれぞれ固有の数学的、言語学的ないし哲学的な動機から導入され議論されてきた。そのために、これらの論理を共通な土台の上で論ずることはこれまで行われてこなかった。したがって、部分構造論理の考え方の第一の意義は、非古典論理研究の中に統一的視点を導入したという方法論的な点にある。

しかし統一的視点の提供のために、sequent 計算とその構造規則についての考察がなぜ必要なのか。そもそも上にあげた非古典論理は必ずしも sequent 計算を用いて導入されたわけではない。私自身この問いに対する明確な答えを出せずにいた。「資源の論理 (resource-sensitive logics)」という考え方は線形論理の基本的なアイデアをうまく説明するが、これを部分構造論理全体にあてはめることはできそうにない。

Deducibility

部分構造論理とは **FL** の公理的拡大のことであると定義した。論理を論理式の集合と同一視する立場からは、部分構造論理をつぎのように見ることができる。

定理 4 論理式の集合 **L** が **FL** 上の部分構造論理となるための必要十分条件は、**L** がつぎの条件をみたすことである。

1) $\mathbf{L}$ は $\mathbf{FL}$ で *provable* な論理式をすべて含む、
2) $\varphi, \varphi\backslash\psi \in \mathbf{L}$ ならば $\psi \in \mathbf{L}$、
3) $\varphi \in \mathbf{L}$ ならば $\varphi \wedge 1 \in \mathbf{L}$、
4) $\varphi \in \mathbf{L}$ で ψ が任意の論理式ならば $\psi\backslash(\varphi\psi), (\psi\varphi)/\psi \in \mathbf{L}$、
5) $\mathbf{L}$ は代入に関して閉じている。

部分構造論理における **deducibility** はつぎのように定義される [4]。まず、$\Gamma \vdash_{\mathbf{FL}} \psi$ (論理式 ψ は $\mathbf{FL}$ で論理式の集合 Γ から **deducible**）とは、sequent 計算 $\mathbf{FL}$ に initial sequent としてさらに sequent $\Rightarrow \gamma$ (ただし $\gamma \in \Gamma$) をつけ加えた体系で、sequent $\Rightarrow \psi$ が導かれることとする。

また一般の部分構造論理 $\mathbf{L}$ における deducibility $\vdash_{\mathbf{L}}$ は、$\mathbf{L}$ を論理式の集合とみなし $\vdash_{\mathbf{FL}}$ を用い、$\mathbf{L} \cup \Gamma \vdash_{\mathbf{FL}} \varphi$ がなりたつときに、$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ と定義する。

パラメタつき局所演繹定理

古典論理や直観主義論理の deducibility relation については、演繹定理 (deduction theorem) がなりたつ。これに対し、一般の部分構造論理については演繹定理は成り立たないが、以下で述べる**パラメタつき局所演繹定理** (parameterized local deduction theorem) が成立する [4]。パラメタつき局所演繹定理については、abstract algebraic logic の観点からは Czelakowski や Dziobiak により議論されているが、具体的な論理について議論されたのはこの結果がはじめてである。

論理式 φ, α に対し、φ の α に関する**左共役** $\lambda_\alpha(\varphi)$ (**右共役** $\rho_\alpha(\varphi)$）とは、論理式 $(\alpha\backslash(\varphi\alpha)) \wedge 1$ (および $((\alpha\varphi)/\alpha) \wedge 1$) のことである。[2]　論理式 φ に共役をとる操作を繰り返し適用して得られる論理式を**累次共役**という。

定理 5 $\mathbf{L}$ を任意の部分構造論理とする。$\Gamma, \Delta \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ がなりたつための必要十分条件は、ある $\psi_i \in \Delta$ およびその累次共役 $\gamma_i(\psi_i)$ が存在して、$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} (\prod_{i=1}^{n} \gamma_i(\psi_i))\backslash\varphi$ が成り立つことである。

この定理はさまざまな場面できわめて有効に用いられる。exchange を含む部分構造論理においては共役は恒等的な演算になるので、それらの論理についてはパラメタを含まない形の局所演繹定理が得られる。詳細は略すが、定理 5 を代数的な言葉に「翻訳」すると、あたえられた集合から生成される deductive filter (代数上の合同関係に対応する filter) の表現についての結果が得られる。

5　剰余束と代数化定理

一般の部分構造論理に対して定まる代数はつぎに述べる剰余束 (residuated lattice) である。剰余束はもともとは 1930 年代に Ward や Dilworth が環のイデアル論に関連して導入した概念である。

[2] 群論では $\alpha^{-1}\varphi\alpha$ の形の元を φ の共役という。これら二つの共役の間の関係は次節の束順序群のところで明らかになる。

剰余束と FL 代数

代数 $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1\rangle$ が**剰余束**であるとは、
(1) $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ は束であり、
(2) $\langle A, \cdot, 1\rangle$ は単位元 1 を持つモノイドであり、
(3) 任意の $x, y, z \in A$ に対し、$x \cdot y \leq z \iff y \leq x\backslash z \iff x \leq z/y$ がなりたつこととする。

条件 (3) は、**剰余の法則** (the law of residuation) とよばれる。剰余束の典型的な例は束順序群である。この場合、$x\backslash z$ および z/y は、$x^{-1}z$、zy^{-1} に一致する。

剰余束の定義にさらに定数0を加え、0 は A の任意の要素としたものを**FL 代数**という。条件 (3) は等式で表すことができる。したがって剰余束全体と FL 代数全体のクラスはともに variety となる。定理 1 と同様につぎの結果が得られる。ただし $\mathcal{FL}$ は FL 代数全体のなす variety である。

定理 6 部分構造論理全体がなす束と $\mathcal{FL}$ の部分 *variety* 全体のなす束との間には逆束同型が存在する。

構造規則 exchange, contraction, left weakening, right weakening はそれぞれ $xy = yx$, $x \leq xx$, $x \leq 1$ および $0 \leq x$ という代数的条件として（等式により）表現される。Łukasiewicz の n 値論理や無限値論理のモデル、そして [0,1] 区間上の左連続な triangular ノルムが定める代数はいずれも FL 代数である。したがって、これらの代数に対応する多値論理やファジー論理も部分構造論理になる。

束順序群や剰余束などの順序代数構造に関する universal algebra からの研究は最近盛んにおこなわれており、ここに部分構造論理の研究との一つの接点が見いだされるのである。

部分構造論理における sequent 計算の役割

上に述べた定理は「部分構造論理とは、剰余構造の論理である」と標語的に言い表される。また、剰余の法則は論理の立場からは (exchange を仮定すれば)

$$\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma \text{ が provable} \iff \beta \Rightarrow \alpha \to \gamma \text{ が provable}$$

ということだから、「implication とは fusion という演算に対する剰余演算である」と理解されることになる。これらのことから、部分構造論理における sequent 計算の役割をつぎのように考えることができる。

直観主義論理、relevant logics そして線形論理などの例から明らかなように、どのように implication を考えるかが（様相演算を持たない）非古典論理の主要な論点であろう。この点を巡ってさまざまな哲学的または数学的議論がおこなわれてきた。しかしもし剰余の法則が成り立つならば、implication は fusion を通して分析することが可能になのである。わり算よりはかけ算の方が理解し易いように、implication よりモノイド演算である fusion の方がはるかに扱い易い。

ところが問題なのは、直観主義論理の場合のように fusion が通常の conjunction であるときを除けば、非古典論理は殆どの場合、fusion という演算なしで定義されている。そもそも fusion をどのように理解したらいいかもわからない。

しかしあたえられた非古典論理がいったん sequent 計算で形式化されると、我々は fusion が何であるかを知る。なぜなら、sequent の中に使われているコンマこそ我々が求めている fusion の潜在的な姿なのだから。つまり、sequent 計算による形式化は論理の中に潜んでいる剰余構造を顕在化させる。こう考えると、部分構造論理の研究において sequent 計算が果してきた役割を理解できるように思う。顕在化により明るみに出た fusion というモノイド演算の振る舞いを記述しているのが構造規則なのである [12]。

代数化定理

代数のクラス $\mathcal{K}$ があたえられたとき、$\mathcal{K}$ が定める導出関係 (equational consequence relation) $\models_{\mathcal{K}}$ をつぎのように定義する。等式の集合 $E \cup \{u = w\}$ に対し

> $E \models_{\mathcal{K}} u = w$ とは、任意の $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ および A 上の任意の付値 g に対し、もしすべての等式 $(s = t) \in E$ について $g(s) = g(t)$ ならば $g(u) = g(w)$ がなりたつこととする。

この equational consequence と derivability の間を結ぶのが Blok と Pigozzi による代数化定理 (algebraization theorem) である。ここでは、それを部分構造論理の場合について述べる。そのために等式の論理式への変換 ρ と、論理式の等式への変換 τ をつぎのように定める。

$$\rho(s = t) \equiv (s\backslash t \wedge t\backslash s) \qquad \tau(\varphi) \equiv (1 = 1 \wedge \varphi)$$

明らかに ρ と τ はつぎのような意味において逆変換になっている。つまり、任意の等式 $s = t$ に対し、

$$s = t \models_{\mathsf{V}(\mathbf{FL})} 1 = 1 \wedge (s\backslash t \wedge t\backslash s) \qquad 1 = 1 \wedge (s\backslash t \wedge t\backslash s) \models_{\mathsf{V}(\mathbf{FL})} s = t$$

定理 7 任意の部分構造論理 $\mathbf{L}$ について、その *deducibility* 関係 $\vdash_{\mathbf{L}}$ は代数化可能である。すなわち、

1. 任意の論理式の集合 $\Phi \cup \{\psi\}$ についてつぎのことがなりたつ。

$$\Phi \vdash_{\mathbf{L}} \psi \iff \rho[\Phi] \models_{\mathsf{V}(\mathbf{L})} 1 \leq \psi$$

2. 任意の等式の集合 $E \cup \{s = t\}$、および $\mathcal{FL}$ の任意の部分 *variety* $\mathcal{V}$ についてつぎのことがなりたつ。

$$E \models_{\mathcal{V}} s = t \iff \tau[E] \vdash_{\mathbf{L}(\mathcal{V})} s\backslash t \wedge t\backslash s.$$

この定理の証明自体は難しくない。しかし、この定理により論理と代数の間の行き来が自由にできることが保証される。たとえば、[10] で示された等式についての Robinson property と amalgamation property との同値性の結果から、ただちに論理式についての Robinson property と amalgamation property の同値性が得られ

る。部分構造論理の Craig の interpolation property、deductive な形の interpolation property、そして対応する variety の持つさまざまな形の amalgamation property の関係については木原均との共著論文として近く発表予定である。

また、最近発表した [5] では、古典的な結果である Glivenko の定理を一般化し、それがどのような状況で成り立つかを詳細に論じた。この代数化定理を仲立ちにすることにより証明論的手法と代数的方法を相補的に用いることが可能になり、それにより非常に一般的な結果を得ることができたのである。

6　cut 除去定理の代数的証明

部分構造論理の代数的研究は大きく発展しており、完備化 (MacNeille 完備化とカノニカル拡大) や nucleus に関する問題などここで議論できなかった重要な話題も多い。最後に cut 除去定理の代数的証明について簡単にふれておこう。

cut 除去定理の意味論的証明についてはすでにいろいろな形でおこなわれてきた。ここではとくに代数的方法による証明について考えてみる。証明すべきことは、cut を持たない sequent 計算の完全性を示すことである。少し計算してみればわかることだが、Lindenbaum-Tarski 流に考え論理式の集合の間に合同関係を定義するというアイデアは推移律がなりたたないために頓挫する。というのも推移律を示すには cut が必要になるからである。

代数的な考えに基づく cut 除去定理の証明は 1991 年の前原昭二先生の最後の論文であたえられている。それに引き続き 1996 年には岡田光弘がやや違った視点から代数的な証明を独立にあたえさらに同様な考え方を用いて線形論理 MALL などに対する FMP の証明をあたえた。このアイデアを発展させたのが岡田・照井による 1999 年の論文 [9] である。

これらの証明ではシンタクティカルな（いいかえれば inductive な）議論がその証明の背景で使われている。それに対し私が Belardinelli と Jipsen との共著論文 [1] であたえた証明は、前原や岡田の考え方に基づきそれを純粋に代数的な形で述べたものである。そのアウトラインを **FL** について述べるとつぎのようになる。まず **FL** から cut を除いた sequent 計算に対し、FL の Gentzen matrix (または Gentzen structure) という代数構造のクラスを定義する。そして、任意の FL の Gentzen matrix $\mathbf{G}$ はある FL 代数 $\mathbf{G}^*$ へ弱い形で埋め込み (quasi-embedding) 可能であることを示すのである。このことにより cut を持たない sequent 計算の完全性を得る。得られた代数 $\mathbf{G}^*$ のことを Gentzen matrix$\mathbf{G}$ の擬完備化 (quasi-completion) という。ここで興味深いのは、$\mathbf{G}$ がすでに FL 代数になっている場合には、擬完備化により得られる $\mathbf{G}^*$ は $\mathbf{G}$ の MacNeille 完備化に一致するという点である。

第 3 節で述べたように FMP は決定可能性を示すための一つの条件であるが、部分構造論理の場合には逆転した状況にある。基本的な部分構造論理については cut 除去定理を証明論的に示すことにより容易に決定可能性が得られる。それにもかかわらずそれらの論理の FMP は岡田・照井が解決するまで未解決問題として残され

ていた。しかも、岡田のアイデアによる FMP の証明は、あたえられた論理の証明探索が有限ステップで停止することを利用しているのである。いわば決定可能性から FMP を導くことになる。準備中の論文 [6] では、このような研究方向をさらに一般的な形でおし進めている。

ここで述べた cut 除去定理への代数的アプローチはいくつかの点で大きな将来性があると思われる。第一に、証明論的アプローチと代数的アプローチの間には従来考えられていたよりはるかに深い関係があることをこれらの研究は示唆している。最近の照井等による cut 除去定理がなりたつための必要十分条件の研究は、この方向での注目すべき結果である。第二の点は、私自身も予期しなかったことであるが、証明論にあまりなじみのなかった代数サイドの人達が、我々の代数的な証明方法を使って、実際にいくつかの体系に対する cut 除去定理の証明にあたえたことである。

このように代数的視点からのアプローチは、論理研究の新たな展開を促すように思われる。

参考文献

[1] F. Belardinelli, P. Jipsen and H. Ono, *Algebraic aspects of cut elimination*, Studia Logica 77, (2004), 209-240.

[2] A.B. Feferman and S. Feferman, *Alfred Tarski, Life and Logic*, Cambridge University Press, 2004.

[3] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 151, Elsevier, April, 2007.

[4] N. Galatos and H. Ono, *Algebraization, parametrized local deduction theorem and interpolation for substructural logics over FL*, Studia Logica 83, (2006), 279-308.

[5] N. Galatos and H. Ono, *Glivenko theorems for substructural logics over FL*, Journal of Symbolic Logic 71, (2006), 1353-1384.

[6] N. Galatos and H. Ono, *Cut elimination and strong separation for substructural logics: an algebraic approach*, in preparation.

[7] Y. Komori, *Super-Lukasiewicz propositional logics*, Nagoya Mathematical Journal 84, (1981), 119–133.

[8] S. Maehara, *Lattice-valued representation of the cut-elimination theorem*, Tsukuba Journal of Mathematics 15, (1991), 509–521.

[9] M. Okada and K. Terui, *The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic*, Journal of Symbolic Logic 64, (1999), 790–802.

[10] H. Ono, *Interpolation and the Robinson property for logics not closed under the Boolean operations*, Algebra Universalis 23, (1986), 111-122.

[11] H. Ono, *Semantics for substructural logics*, Substructural Logics, eds. by K. Došen and P. Schroeder-Heister, Oxford University Press, (1993), 259–291.

[12] H. Ono, *Substructural logics and residuated lattices — an introduction*, 50 Years of Studia Logica, Trends in Logic 21, V.F. Hendricks and J. Malinowski eds., Kluwer Academic Publishers, 2003,193-228.

[13] H. Ono and Y. Komori, *Logics without the contraction rule*, Journal of Symbolic Logic 50, (1985), 169–201.