Mathematica Moravica
Vol. 3 (1999), 53–62

ÜBER EINE ZAHLENTHEORETISCHE FUNKTION

J. Sándor und A.-V. Kramer

Abstract. We prove elementary and asymptotic properties of an arithmetical function.

1. Einleitung. Sei g ein Generator einer zyklischen Gruppe der Ordnung n. Dann ist es bekannt (sihe [5], S.196. Übung 4) dass die Ordnung des g^i, nämlich $ord\, g^i = \frac{n}{(i,n)}$ ist. Demnach die Funktion $\psi_1 : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ definiert als

$$\psi_1(n) = \sum_{i=1}^{n} ord\, g^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(i,n)},$$

hat eine bedeutende Rolle in Zahlentheorie (sihe [6]).

Wir definieren $\psi_\alpha : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $\psi_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{\alpha} \left(\frac{n}{(i,n)}\right)^n$ mit $\alpha \in \mathbf{R}$ eine andere Funktion, die eine Verallgemeinerung des ψ_1 ist. Wir werden einige Eigenschaften von ψ_α beweisen. In Wortsetzung betrachten wir immer folgende spezielle Fälle; für $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi_{-1}(n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{(i,n)}\right)^{-1}, \\
\psi_0(n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{(i,n)}\right)^{0} = n, \\
\psi_1(n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{(i,n)}\right)^{1}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. ψ_{-1} werden wir als ψ^1 notieren.

2. Als erstens beweisen wir folgende Gleichheit:

$$\psi_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \varphi(d) \tag{1}$$

für beliebig $\alpha \in \mathbf{R}$, wobei φ die Eulersche Funktion ist.

AMS (MOS) Subject Classification 1991. Primary: 11A25. Seconadry: 11N37.

Key words and phrases: Arithmetical functions, multiplicative theory, asymptotic theory of arithemtical functions.

Beweis. Sei $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_d = \{i \in A;\ (i,n) = d\}$. Weil $(i,n) = d \iff \left(\frac{i}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ und $1 \le \frac{i}{d} \le \frac{n}{d}$, besteht also die Menge A_d aus $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ Elementen.

Andererseits

$$\psi_\alpha(n) = \sum_{i \in A} \left(\frac{n}{d}\right)^\alpha = \sum_{d|n} |A_d| \left(\frac{n}{d}\right)^\alpha,$$

weil $A = \bigcup_{d|n} A_d$, wobei

$$|A_d| = card A_d = \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Also

$$\psi_\alpha(n) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{n}{d}\right)^\alpha = \sum_{d|n} d^\alpha \varphi(d),$$

weil zusammen mit $\frac{n}{d}$, auch d durch alle Teiler von n läuft.

Bemerkung.

a) Für $\alpha = -1$, erhalten wir

$$\psi_{-1}(n) = \psi^1(n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d} \tag{2}$$

b) Für $\alpha = 0$, aus (1) folgt

$$\psi_0(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n, \tag{3}$$

also für $\alpha = 0$ erhalten wir die bekannte Gaussche Formel.

c) Für $\alpha = 1$, bekommen wir:

$$\psi_1(n) = \sum_{d|n} d\varphi(d). \tag{4}$$

3. Wir werden beweisen, dass ψ_α eine multiplikative Funktion ist, und wenn $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$ die kanonische Zerlegung von n ist, dann gilt:

$$\psi_\alpha(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r \dfrac{(p_i^{\alpha+1} - 1) + p_i^\alpha (p_i - 1)(p_i^{a_i(\alpha+1)} - 1)}{p_i^{\alpha+1} - 1}, & \alpha \ne -1 \\ \prod_{i=1}^r \left(1 + \dfrac{(p_i - 1)a_i}{p_i}\right), & \alpha = -1 \end{cases} \tag{5}$$

Beweis. Da n^α und $\varphi(n)$ multiplikative Funktionen sind, so ist auch $n^\alpha \varphi(n)$ multiplikativ, und dessen Teilerfunktion, wie schon bekannt (sihe [1]), ist auch multiplikativ.

Also $\psi_\alpha(n) = \prod_{i=1}^r \psi_\alpha(p_i^{a_i})$. Somit genügt es, die Werte von ψ_α auf Primpotenzen zu wissen. Aus (1) folgt das

$$\psi_\alpha(p^a) = 1 \cdot \varphi(1) + p^\alpha \cdot \varphi(p) + p^{2\alpha} \cdot \varphi(p^2) + \cdots + p^{a\alpha} \cdot \varphi(p^a) =$$
$$= 1 + p^{\alpha+1}\left(\frac{p-1}{p}\right) + p^{2(\alpha+1)}\left(\frac{p-1}{p}\right) + \cdots + p^{a(\alpha+1)}\left(\frac{p-1}{p}\right) =$$
$$= 1 + \frac{p-1}{p}(p^{\alpha+1} + p^{2(\alpha+1)} + \cdots + p^{a(\alpha+1)}) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(p^{\alpha+1}-1) + p^\alpha(p-1)(p^{a(\alpha+1)}-1)}{p^{\alpha+1}-1}, & \alpha \neq -1 \\ \dfrac{p+a(p-1)}{p}, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Somit ist (5) bewiesen worden.

Bemerkungen.

a) Ist $\alpha = 0$, dann

$$\psi_0(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i} = n, \tag{5'}$$

b) Ist $\alpha = 1$, erhalten wir

$$\psi_1(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{2a_i+1}+1}{p_i+1}, \tag{5''}$$

c) Ist $n \geq 2$, berechnen wir $\psi_\alpha(n)$ mit Hilfe von (5), ist $n = 1$, dann $\psi_\alpha(1) = 1$, weil ψ_α eine multiplikative zahlentheoretische Funktion ist.

4. Jetzt geben wir einige Ungleichheiten für ψ_α.

A) Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\psi_\alpha(n) \leq 1 + \varphi(n)[\sigma_\alpha(n) - 1], \tag{6}$$

wobei $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$.

Beweis. Wir benützen folgende Eigenschaft der Eulerschen Funktion. Wenn $d|n$, dann $\varphi(d)|\varphi(n)$, speziell $\varphi(d) \leq \varphi(n)$ (sihe [1]). Aus (1) erhalten wir, dass

$$\psi_\alpha(n) = 1 + n^\alpha \cdot \varphi(n) + \sum_{\substack{1<d<n \\ d|n}} d^\alpha \cdot \varphi(d) \leq 1 + n^\alpha \cdot \varphi(n) + \sum_{\substack{1<d<n \\ d|n}} d^\alpha \cdot \varphi(n) =$$
$$= 1 + n^\alpha \cdot \varphi(n) + \varphi(n)(\sigma_\alpha(n) - 1 - n^\alpha) = 1 + \varphi(n)(\sigma_\alpha(n) - 1).$$

Die Gleichheit gilt für $n = 1$ und Primzahlen.

Bemerkungen.

a) Ist $\alpha = -1$, dann $\left(\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma(n)}{n}\right)$,

$$\psi^1(n) \leq 1 + \frac{\varphi(n)}{n}[\sigma(n) - n]. \tag{7}$$

Konsequenzen von a).

I) Ist n Defizient, nämlich $\sigma(n) < 2n$, so

$$\psi^1(n) < 1 + \varphi(n) \tag{7'}$$

– wahrlich, wenn n Definizient ist, dann $\sigma(n) - n < n$ und aus (7) folgt (7′).

II) Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\psi^1(n) \leq n - \varphi(n) + 1 \tag{8}$$

– wenden wir $\varphi(n) \cdot \sigma(n) \leq n^2$ (sihe [1]) und (7) an, folgt (8).

b) Ist $\alpha = 1$, dann

$$\psi_1(n) \leq 1 + \varphi(n)[\sigma(n) - 1]. \tag{9}$$

Konsequenz. Für jede natürliche Zahl gilt:

$$\psi_1(n) \leq n^2 - \varphi(n) + 1 \tag{9'}$$

– wenden wir (9) und $\varphi(n) \cdot \sigma(n) \leq n^2$ an, folgt sofort (9′).

c) Ist $\alpha = 0$, dann erhalten wir eine bekannte Ungleichheit (sihe [4], Seite 5), nämlich

$$\varphi(n)d(n) \geq \varphi(n) + n - 1 \tag{9''}$$

B) Sei α eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, es gilt:

$$\psi_\alpha(n) \cdot \psi_{-\alpha}(n) \geq n^2 \tag{10}$$

Beweis. Erstens, behaupten wir folgendes:

$$\frac{\psi_\alpha(n)}{n^\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^\alpha}, \text{ wobei } (i, n) = x_i.$$

Offensichtlich ist

$$\frac{\psi_{-\alpha}(n)}{n^{-\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha.$$

Dann

$$\frac{\psi_\alpha(n)}{n^\alpha} \cdot \frac{\psi_{-\alpha}(n)}{n^{-\alpha}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^\alpha}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right).$$

Dann x_i positiv ist $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, aus der bekannten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\alpha}}\right) \geq n^2.$$

Ungleichheit folgt

$$\psi_{\alpha}(n) \cdot \psi_{-\alpha}(n) \geq n^2. \tag{11}$$

Bemerkungen.

a) Ist $\alpha = 0$, dann bekommen wir

$$\psi_0(n) \cdot \psi_0(n) \geq n^2 \tag{11'}$$

oder $n^2 \geq n^2$, also Gleichheit gilt für $\alpha = 0$.

b) Ist $\alpha = 1$, dann

$$\psi_1(n) \cdot \psi^1(n) \geq n^2 \tag{11''}$$

mit Gleichheit für $n = 1$.

5. Eine andere Ungleichheit erhatlen wir direkt aus (8) und (11′), nämlich

$$\psi_1(n) \geq \frac{n^2}{1 + n - \varphi(n)} \tag{11'''}$$

c) Für jede natürliche Zahl a_i und Primzahl p_i haben wir

$$\psi_1(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{2a_i+1} + 1}{p_i + 1} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{2a_i+1}\left(1 + \dfrac{1}{p_i^{2a_i+1}}\right)}{p_i\left(1 + \dfrac{1}{p_i}\right)} >$$

$$> \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{2a_i+1}}{p_i\left(1 + \dfrac{1}{p_i}\right)} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{3a_i}}{p^{a_i}\left(1 + \dfrac{1}{p_i}\right)},$$

wobei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$.

Lassen wir diese Ungleichheit mit Dedekinds Funktion

$$\psi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}\left(1 + \frac{1}{p_i}\right)$$

(sihe [3]) kombinieren, bekommen wir:

$$\psi_1(n) \cdot \psi(n) \geq n^3 \tag{12}$$

mit Gleichheit für $n = 1$.

6. Jetzt beweisen wir folgende Identität:
Für jede natürliche Zahl x gilt:

$$\sum_{n\leq x}\psi_\alpha(n)=\sum_{d\leq x}d^\alpha\cdot\varphi(d)\cdot\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{13}$$

Beweis.

$$\sum_{n\leq x}\psi_\alpha(n)=\sum_{n\leq x}1\cdot\sum_{d|n}d^\alpha\cdot\varphi(d)=$$
$$=\sum_{d\leq x}d^\alpha\cdot\varphi(d)\cdot\sum_{\substack{n\leq x\\ d|n}}=\sum_{d\leq x}d^\alpha\cdot\varphi(d)\cdot\left[\frac{x}{d}\right].$$

Folgende Methode haben wir dabei angewendet:
$\sum_{n\leq x}\psi_\alpha(n)$ ist eine Summe, die aus Vielfachen von $d^\alpha\cdot\varphi(d)$ besteht, wobei $d\leq x$, $d^\alpha\cdot\varphi(d)$ erscheint genau $\left[\frac{x}{d}\right]$ - mal, weil die Anzahl des Vielfachen von d, die sich unter x befinden, ist $\left[\frac{x}{d}\right]$.

Bemerkungen
a) Ist $\alpha=-1$, dann

$$\sum_{n\leq x}\psi^1(n)=\sum_{d\leq x}\frac{\varphi(d)}{d}\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{13'}$$

b) Ist $\alpha=0$, dann

$$\sum_{n\leq x}n=\sum_{d\leq x}\varphi(d)\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{13''}$$

c) Ist $\alpha=1$, dann

$$\sum_{n\leq x}\psi_1(n)=\sum_{d\leq x}\frac{\varphi(d)}{d}\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{13'''}$$

Eine bekannte Eigenschaft der φ Funktion ist die Gaussche Formel:

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n.$$

Andererseits wenden wir die Möbiussche Funktion (sihe [1], [5]) und (1) an, so folgt dann:

$$n^\alpha\cdot\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\psi_\alpha(d). \tag{14}$$

Speziell, für $\alpha=-1$

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\psi^1(d), \tag{14'}$$

für $\alpha = 0$

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d, \tag{14''}$$

und für $\alpha = 1$

$$n\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_1(d). \tag{14'''}$$

Mit Hilfe der Gausschen Formel und (14) erhalten wir:

$$m = \sum_{n|m} \sum_{d|n} \frac{1}{n^\alpha} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d). \tag{15}$$

Ist n ein Teiler von m, so ist $\varphi(n)$ auch ein Teiler von $\varphi(m)$. Aus dieser Eigenschaft und aus (14) erhalten wir eine Teilerische Eigenschaft von ψ_α, wenn $\alpha \in \mathbf{Z}_+$

$$n|m \Rightarrow \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d) \Big| \sum_{d|n} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \psi_\alpha(d). \tag{16}$$

Speziell,

$$n|m \Rightarrow \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d) \leq \sum_{d|n} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \psi_\alpha(d). \tag{16'}$$

In (16) und (16′) die Summen, die auf der rechten Seite stehen, sind immer ganze Zahlen für $\alpha \in \mathbf{Z}_+$. Weil im allgemeinen $\psi_\alpha(n) \notin \mathbf{N}$, mit $\alpha \in \mathbf{Z}_-$ (z.B. $\psi^1(6) = \frac{5}{2}$), bilden wir doch folgende Teilerische Eigenschaft für ψ_α mit $\alpha \in \mathbf{Z}_-$.

Wenn $n|m$, aus (14) folgt

$$n \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d) \Big| m \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d). \tag{17}$$

Speziell,

$$n|m \Rightarrow n \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d) \leq m \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi_\alpha(d). \tag{17'}$$

7. Wir sahen, dass $\psi_{-\alpha}(n)$ nicht immer ganze Zahl ist, wenn $\alpha \in \mathbf{N}$: z.B. ist n eine Primzahl, so

$$\psi^1(n) = \frac{\varphi(1)}{1} + \frac{\varphi(n)}{n} = 1 + \frac{n-1}{n} \notin \mathbf{N}.$$

Aber wenn $n = 2^4 \cdot 3^b$, $\forall\, b \in \mathbf{N}$, dann ist $\psi^1(n)$ eine ganze Zahl. Wahrlich

$$\psi^1(n) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 4\right)\left(1 + \frac{2}{3} b\right) = 3 + 2b.$$

Aus (5) schliessen wir gleich aus, dass - wenn $p_i | a_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$, dann ist $\psi^1(n)$ eine ganze Zahl, wobei

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}.$$

Definition. Sei α eine natürliche Zahl. Nennen wir eine natürliche Zahl n, $\alpha - \varphi$-gut, wenn $\psi_{-\alpha}(n)$ auch natürliche Zahl ist.

Aus (5) folgt, dass eine Zahl $n \geq 2$ ist $\alpha - \varphi$-gut, wenn

$$\prod_{i=1}^{r} (p_i^{\alpha+1} - 1) \Big| \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha}(p_i - 1)(p_i^{a_i(\alpha+1)} - 1), \text{ mit } \alpha \neq -1. \tag{18}$$

Ist $\alpha = -1$, dann ist n $1 - \varphi$-gut, wenn

$$\prod_{i=1}^{r} p_i \Big| \prod_{i=1}^{r} a_i(p_i - 1) \tag{18'}$$

Aus (18') folgt, dass es unendlich viele Zahlen geben, die nicht $1 - \varphi$-gut sind:

z.B. $n = 2^{3u} \cdot 3^{3v+1}$ ist für kein u und v mit $u, v \geq 0$ $1 - \varphi$-gut.

Auch $n = 2^{2k+1}$ ist für kein $k \geq 0$ $1 - \varphi$-gut.

Sei $F_\alpha(x) = card\{n \leq x;\ n \text{ ist } \alpha - \varphi - \text{gut}\}$, mit α eine beliebige natürliche Zahl. Also für positiv reelle Zahl x, bezeichnet $F_\alpha(x)$ die Anzahl der $\alpha - \varphi$-gute Zahlen, die kleiner oder gleich x sind.

Wie kann man $F_\alpha(x)$ berechnen?

Diese Frage werden wir anderswo diskutieren.

8. Endlich geben wir eine asymptotische Abschätzung für die $G(x) = \sum_{n \leq x} \psi_\alpha(n)$ Funktion, wenn $\alpha \geq -1$.

Wir werden beweisen, dass

$$\sum_{n \leq x} \psi_\alpha(n) \sim \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2} \cdot \dfrac{\zeta(\alpha + 2)}{\alpha + 2} \cdot x^{\alpha+2}, & \alpha > -1 \\ \dfrac{6}{\pi^2} x \cdot \log x, & \alpha = -1 \end{cases} \quad (x \to \infty), \tag{19}$$

wobei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die Riemannsche Zetafunktion ist [7].

Beweis. Wenden wir folgenden Satz an, sihe [2]:

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi(k) \sim \left(\frac{6}{\pi^2} \int_0^1 x f(x) dx\right) n^2, \text{ wenn } n \to \infty,$$

wobei f eine beliebige, auf $[0, 1]$ definierte Funktion ist, so dass $x f(x)$ stetig ist.

Sei $f(x) = x^\alpha$, mit $\alpha \geq -1$. Dann ist $xf(x) = x^{\alpha+1}$ stetig auf $[0,1]$ und wenden wir den Satz an, erhalten wir dann:

$$\sum_{k \leq n} k^\alpha \varphi(k) \sim \frac{6}{\pi^2(\alpha+2)} n^{\alpha+2} \quad (n \to \infty)$$

oder

$$\sum_{n \leq x} n^\alpha \varphi(n) \sim \frac{6}{\pi^2(\alpha+2)} x^{\alpha+2}, \text{ wenn } (x \to \infty). \tag{20}$$

Weiter

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d^\alpha \varphi(d) = \sum_{d \leq x} \sum_{t \leq \frac{x}{d}} t^\alpha \varphi(t) \overset{(20)}{=}$$

$$= \sum_{d \leq x} \left[\frac{6}{\pi^2} \left(\frac{x}{d}\right)^{\alpha+2} \cdot \frac{1}{\alpha+2} + o\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{\alpha+2}\right) \right] \sim \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\zeta(\alpha+2)}{\alpha+2} \cdot x^{\alpha+2},$$

weil

$$\sum_{d \leq x} \frac{1}{d^{\alpha+2}} = \begin{cases} \zeta(\alpha+2) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right), & \alpha > -1 \\ \log x + O\left(\frac{1}{x}\right), & \alpha = -1 \end{cases} \quad \text{sihe [1].}$$

Aus dieser Gleichheit folgt unsere Formel.

Bemerkung.

Ist $\alpha = -1$, dann

$$\sum_{n \leq x} \psi^1(n) \sim \frac{6}{\pi^2} x \log x. \tag{21}$$

Ist $\alpha = 0$, dann

$$\sum_{n \leq x} \psi_0(n) = \sum_{n \leq x} n \sim \frac{x^2}{2}. \tag{22}$$

Ist $\alpha = 1$, dann

$$\sum_{n \leq x} \psi_1(n) = \sum_{n \leq x} \psi_1(n) \sim \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) x^3. \tag{23}$$

1. Literatur

[1] E. Krätzel: *Zahlentheorie*, Berlin, 1981.

[2] Ch. Radoux: *Note sur le comportement asymptotique de l'indicateur d'Euler*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, **91**(1977), 13-18.

[3] J. Sándor: *On Dedekind's arithmetical function*, Seminarul de teoria structurilor, 10.51, Univ. Timişoara 1989, 1-15.

[4] J. Sándor: *Câteva ecuaţii diofantice pentru funcţii aritmetice particulare*, Sem. de teoria structurilor, Univ. Timişoara, 1989.

[5] H. N. Shapiro: *Introduction to the theory of numbers*, John Wiley and Sons, 1983.

[6] S. Tabîrcă, T. Tabîrcă: *Two new function in number theory*, Octogon Math. Mag., **6** (1998), 44-46.

[7] E. C. Titchmarsh: *The theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1986.

Babeş-Bolyai Universität,
M. Kogălniceanu str. 1
3400 Cluj-Napoca, Romania

Received January 20, 1999.