A. ANGELESCO

Sur des polynômes généralisant les polynômes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1916

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1916__11__1_0>

Nº D'ORDRE :
1579.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. A. ANGELESCO.

1re THÈSE. — SUR DES POLYNOMES GÉNÉRALISANT LES POLYNOMES DE LEGENDRE ET D'HERMITE ET SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES MULTIPLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 avril 1916, devant la Commission d'examen.

MM. APPELL, *Président.*
CARTAN, VESSIOT, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

56587 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

MONSIEUR PAUL APPELL,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Respectueux hommage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR DES POLYNOMES

GÉNÉRALISANT LES

POLYNOMES DE LEGENDRE ET D'HERMITE

ET SUR LE

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES MULTIPLES.

INTRODUCTION.

Le présent travail est divisé en trois Parties.

Dans la première Partie, nous étudions les polynomes $P_n(x, \lambda)$, définis par le développement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda = \Sigma \alpha^n P_n(x, \lambda),$$

en prenant comme point de départ la recherche des polynomes de Jacobi ayant une fonction génératrice de la forme

$$[x\psi(\alpha) + \varphi(\alpha)]^\lambda.$$

Nous avons introduit, pour faciliter l'étude des polynomes $P_n(x, \lambda)$, les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$, définis par le développement

$$[(1 - \alpha x)^2 - \alpha^2] = \Sigma \alpha^n \Pi_n(x, \lambda).$$

Ces polynomes jouissent de propriétés intéressantes et se relient aux polynomes $P_n(x, \lambda)$ de deux manières différentes très simples.

Une grande partie des résultats que nous trouvons pour les polynomes $P_n(x, \lambda)$ a déjà été obtenue par des méthodes différentes;

Gegenbauer [1] s'est notamment beaucoup occupé de ces polynomes : nous les reproduisons à titre de préparation pour la suite.

Dans la deuxième Partie, nous généralisons premièrement les polynomes $P_n(x, \lambda)$, de même qu'Hermite [2] et Didon [3] généralisent les polynomes de Legendre, par des polynomes à s variables

$$U_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, \lambda) \quad \text{et} \quad V_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, \lambda).$$

Nous commençons par les polynomes à deux variables, que nous étudions avec un peu plus de détails, pour mieux nous guider dans l'étude du cas général. Les polynomes à s variables, qui généralisent les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$, nous ont beaucoup servi dans cette étude. Nous indiquons aussi des polynomes plus généraux auxquels certaines propriétés des polynomes $U_{m_1, \ldots, m_s}$ et $V_{m_1, \ldots, m_s}$ peuvent être étendues. Finalement, dans cette Partie, nous étendons, à des polynomes qui peuvent être rattachés à une forme quadratique de s variables décomposable en s carrés positifs, de même que les polynomes $U_{m_1, \ldots, m_s}$ et $V_{m_1, \ldots, m_s}$ se rattachent à la forme $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2$, les propriétés fondamentales des polynomes $U_{m_1, \ldots, m_s}$ et $V_{m_1, \ldots, m_s}$. Ces nouveaux polynomes se réduisent, dans un cas limite, aux polynomes qu'Hermite définit [4] à l'aide des fonctions exponentielles. On établit ainsi un lien entre ces polynomes d'Hermite et ceux qu'il donne comme généralisation des polynomes de Legendre.

Dans la troisième Partie, nous nous occupons d'une classe de polynomes à plusieurs variables, dont les polynomes précédents ne sont que des cas particuliers. Nous étudions cette classe de polynomes en étendant au cas de plusieurs variables les résultats donnés par M. Appell dans son Mémoire [5] *Sur une classe de polynomes à deux*

---

[1] *Voir*, pour la bibliographie complète des travaux concernant tout notre travail, l'article *Généralisations diverses des fonctions sphériques* par MM. P. Appell et A. Lambert, de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. V, fasc. 2. *Voir* aussi la Thèse de M. Kampe de Feriet parue (1915) après cet article.

[2] *OEuvres de Charles Hermite*, t. II, p. 319.

[3] Thèse. *Annales de l'École Normale*, 1868.

[4] *OEuvres de Charles Hermite*, t. II, p. 301.

[5] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1890.

variables et sur le calcul approché des intégrales doubles et en ajoutant aussi d'autres résultats. Nous montrons ensuite, suivant toujours M. Appell et aussi M. Bourget (¹), comment ces polynomes interviennent dans la recherche, suivant la méthode de Gauss, de la valeur approchée des intégrales multiples.

(³) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVI, p. 634.

PREMIÈRE PARTIE.

Polynomes de Jacobi à fonction génératrice simple.

1. Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad (1-x^2)\frac{du}{dx}+[\lambda(x-1)+\mu(x+1)]u=0$$

qui a pour solution l'expression

$$(x+1)^\lambda(x-1)^\mu.$$

En différentiant l'équation (1) $n+1$ fois par rapport à x, nous aurons, après les changements de λ en $n+\lambda$, μ en $n+\mu$ et $\frac{d^n u}{dx^n}=z$,

$$(2)\quad (1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + [(\lambda-1)(x-1)+(\mu-1)(x+1)]\frac{dz}{dx}+(n+1)(n+\lambda+\mu)z=0,$$

équation qui aura pour solution l'expression

$$\frac{d^n(x+1)^{n+\lambda}(x-1)^{n+\mu}}{dx^n}.$$

De l'équation (2) on déduit, par le changement de fonction

$$z=y(x+1)^\lambda(x-1)^\mu,$$

l'équation différentielle

$$(3)\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-[(\mu-\lambda)+(2+\lambda+\mu)x]\frac{dy}{dx}+n(n+\lambda+\mu+1)y=0$$

à laquelle satisfait le polynome de Jacobi

$$(4)\qquad \mathrm{J}_n(x,\lambda,\mu)=(x+1)^{-\lambda}(x-1)^{-\mu}\frac{d^n(x+1)^{n+\lambda}(x-1)^{n+\mu}}{dx^n}.$$

2. Une fonction génératrice des polynomes $J_n(x, \lambda, \mu)$ serait la somme d'une série de la forme

$$\sum_0^\infty \alpha^n C_n J_n(x, \lambda, \mu) = z(\alpha, x), \tag{5}$$

C_n ne dépendant pas de x et α. En multipliant l'équation (3) par $C_n\alpha^n$ et puis en faisant la somme des équations obtenues en donnant à n les valeurs 0, 1, 2, ..., *ad inf.*, on déduit que toute fonction $z(\alpha, x)$ de la forme (5) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}(6)\quad &(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}\\ &-[(\mu-\lambda)+(2+\lambda+\mu)x]\frac{dz}{dx}+\alpha^2\frac{d^2z}{d\alpha^2}+(\lambda+\mu+2)\alpha\frac{dz}{d\alpha}=0.\end{aligned}$$

3. Cherchons les conditions pour que l'équation (6) ait une solution de la forme

$$z = [x\psi(\alpha)+\varphi(\alpha)]^{\theta+1}.$$

En substituant dans l'équation (6) z par cette expression, on est conduit au système d'équations différentielles

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}&-\theta\psi^2-(\lambda+\mu+2)\psi^2+\alpha^2\psi\psi''+\theta\alpha^2\psi'^2+(\lambda+\mu+2)\psi\psi'=0,\\ &(\lambda-\mu)\psi^2-(\lambda+\mu+2)\psi\varphi\\ &\quad+\alpha^2(\psi\varphi''+\varphi\psi'')+2\theta\alpha^2\psi'\varphi'+\alpha(\lambda+\mu+2)(\psi\varphi'+\varphi\psi')=0,\\ &\quad\theta\psi^2+(\lambda-\mu)\varphi\psi+\alpha^2(\varphi\varphi''+\theta\varphi'^2)+(\lambda+\mu+2)\alpha\varphi\varphi'=0,\end{aligned}\right.$$

qui nous déterminera φ, ψ et la constante θ.

Des deux premières équations de (I), nous déduisons

$$\varphi(\theta\alpha^2\psi'^2-\theta\psi^2)=\psi[(\lambda-\mu)\psi^2+\alpha^2\psi\varphi''+2\theta\alpha^2\psi'\varphi'+(\lambda+\mu+2)\alpha\psi\varphi'].$$

D'où, en tenant compte de la dernière équation de (I), on déduit l'équation indépendante de θ, λ et μ

$$\psi^4+\alpha^2\psi^2\varphi'^2-\varphi^2\psi^2+\alpha^2\varphi^2\psi'^2-2\alpha^2\varphi\psi\varphi'\psi'=0,$$

qui devient, en posant $\varphi = u\psi$,

$$\psi^2(1+\alpha^2u'^2-u^2)=0.$$

Par conséquent

$$\varphi = \frac{C_1^2\alpha^2+1}{2C_1\alpha}\psi.$$

La première équation de (I) nous donne facilement ψ.

En effet, en posant d'abord $\psi = \alpha v$, elle deviendra

$$(7)\qquad \alpha v v'' + \theta\alpha v'^2 + (2\theta+\lambda+\mu+4)vv' = 0,$$

et puis, en posant

$$y = \frac{\alpha v'}{v},$$

nous aurons

$$\alpha y' + (\theta+1)y^2 + Ay = 0,$$

où

$$A = 2\theta+\lambda+\mu+3.$$

On en déduit

$$(8)\qquad y = \frac{\alpha v'}{v} = \frac{A}{C_2\alpha^A - \theta - 1}.$$

Pour déterminer θ, faisons dans la dernière équation de (I)

$$\varphi = \frac{C_1^2\alpha^2+1}{2C_1}v \quad \text{et} \quad \psi = \alpha v.$$

On est conduit, en tenant compte de l'équation (7), à l'égalité

$$(9)\qquad \alpha\frac{C_1^2\alpha^2+1}{2C_1}\left[v^2(\alpha C_1 A+\mu-\lambda) + vv'(\theta+1)\frac{C_1^2\alpha^2-1}{C_1}\right] = 0$$

qui n'est possible, comme on le voit immédiatement en utilisant la relation (8), que si $A = 0$, $A = -1$ ou $A = -2$.

Examinons séparément ces trois cas :

1° $A = 0$. — La relation (8) change dans ce cas, elle devient

$$\frac{\alpha v'}{v} = \frac{1}{(\theta+1)\operatorname{Log} C_3\alpha},$$

et pour que l'égalité (9) subsiste, il faut que $C_3 = 0$, donc v égale une constante C, et, de plus, que $\lambda = \mu$. Nous aurons donc

$$\psi = C\alpha, \qquad \varphi = \frac{C(C_1^2\alpha^2+1)}{2C_1}, \qquad 2\theta+\lambda+\mu+3 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \mu;$$

ce qui nous conduit, en remplaçant $C_1\alpha$ par $-\alpha$, λ par $-\lambda-\frac{1}{2}$ et en divisant par une constante, à la solution

$$(10)\qquad z=(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda$$

de l'équation aux dérivées partielles

$$(11)\qquad (1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+(2\lambda-1)x\frac{dz}{dx}+\alpha^2\frac{d^2z}{d\alpha^2}+(1-2\lambda)\alpha\frac{dz}{d\alpha}=0.$$

Remplaçons dans cette équation z par sa valeur (10) et puis différentions cette équation n fois par rapport à α, en faisant ensuite $\alpha=0$, nous arrivons à l'équation

$$(12)\qquad (1-x^2)y''+(2\lambda-1)xy'+n(n-2\lambda)y=0$$

qui aura pour solution le polynome

$$P_n(x,\lambda)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda}{d\alpha^n}\right]_{\alpha=0}.$$

Ce polynome est précisément le coefficient de α^n dans le développement taylorien de $(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda$ suivant les puissances de α. Nous aurons donc

$$(13)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda=\Sigma\alpha^n P_n(x,\lambda).$$

Le polynome $P_n(x,\lambda)$ satisfaisant à l'équation (12), et comme cette équation ne peut admettre d'autre polynome comme solution, il résulte, d'après ce que nous avons vu pour l'équation (3), que l'on aura

$$(14)\qquad P_n(x,\lambda)=A_n(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

A_n étant une constante qui se détermine facilement. Faisons, en effet, $x=-1$ dans les deux membres de (14). La formule de Leibnitz, donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux facteurs, montre que l'on a

$$\left[(1-x^2)^{-\mu}\frac{d^n(1+x)^{n+\mu}(1-x)^{n+\mu}}{dx^n}\right]_{x=-1}=2^n(n+\mu)(n+\mu-1)\ldots(\mu+1);$$

tandis que le développement (13) nous donne immédiatement la valeur de $P_n(-1, \lambda)$. Nous trouvons ainsi

$$(15)\quad P_n(x, \lambda) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^n(1-x^2)^{n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^n}$$

ou bien

$$(15')\quad P_n\left(x, -\mu-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2\mu+1)(2\mu+2)\ldots(2\mu+n)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)} (1-x^2)^{-\mu} \frac{d^n(1-x^2)^{n+\mu}}{dx^n}.$$

2° $A = -1$. — L'égalité (9) ne sera vérifiée que si

$$C_1 C_2 = (\theta+1)(\lambda-\mu) \qquad \text{et} \qquad (\lambda-\mu)^2 = 1;$$

v sera donné, d'après la relation (11), par l'équation

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\alpha}{(\theta+1)\alpha - C_2}.$$

Donc, à un facteur constant près, nous aurons

$$v = [(\theta+1)\alpha - C_2]^{\frac{1}{\theta+1}}$$

ou bien

$$v = [C_1\alpha + \mu - \lambda]^{\frac{1}{\theta+1}}.$$

En prenant $\mu - \lambda = 1$, nous déduirons, comme précédemment, des valeurs correspondantes de ψ et φ, que l'expression

$$(1+\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\xi-\frac{1}{2}}$$

est une fonction génératrice des polynomes $J_n(x, \xi-1, \xi)$.

En posant donc

$$(16)\qquad (1+\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda} = \Sigma\alpha^n R_n(x, \lambda),$$

$R_n(x, \lambda)$ satisfait à l'équation

$$(1-x^2)y'' + (-1+2\lambda x)y' + n(n-2\lambda-1)y = 0$$

et l'on a

$$R_n\left(x, -\xi - \frac{1}{2}\right) = B_n J_n(x, \xi - 1, \xi).$$

B_n se détermine comme A_n et l'on trouve

$$B_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{2\xi(2\xi+1)\dots(2\xi+n-1)}{\xi(\xi+1)\dots(\xi+n-1)},$$

Pour $\mu - \lambda = -1$ on sera conduit à un développement tel que

$$(1-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda = \Sigma \alpha^n S_n(x, \lambda)$$

qui ne diffère pas du développement (16), car

$$R_n(x, \lambda) = (-1)^n S_n(-x, \lambda).$$

3° $A = -2$. — L'égalité (9) est vérifiée si

$$\lambda = \mu \qquad \text{et} \qquad \theta + 1 = C_2 C_1^2.$$

La relation (8) donnera pour v

$$v = [(\theta+1)\alpha^2 - C_2]^{\frac{1}{\theta+1}}.$$

D'où l'on déduira la fonction génératrice

$$(17) \qquad (\alpha^2 - 1)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\lambda - 1}$$

des mêmes polynomes (14), la valeur de la constante A_n étant différente. Nous aurons l'occasion de retrouver l'expression (17) et son développement d'après les puissances de α.

4. Les polynomes $P_n(x, \lambda)$ et $R_n(x, \lambda)$ sont ce que nous appelions, en tête de ce Chapitre, polynomes de Jacobi à fonction génératrice simple. On pourrait, de même que nous le ferons pour les polynomes $P_n(x, \lambda)$, étudier directement les polynomes $R_n(x, \lambda)$. Ces polynomes se relient, comme il résulte des développements (13) et (16), aux polynomes $P_n(x, \lambda)$ par la relation

$$P_n(x, \lambda) + P_{n-1}(x, \lambda) = R_n(x, \lambda).$$

Nous aurons donc

$$(18)\qquad \begin{aligned} &P_n\left(x, -\xi - \frac{1}{2}\right) + P_{n-1}\left(x, -\xi - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{2\xi(2\xi+1)\ldots(2\xi+n-1)}{\xi(\xi+1)\ldots(\xi+n-1)} J_n(x, \xi-1, \xi). \end{aligned}$$

Donnons, comme vérification des résultats précédents, une démonstration directe de cette formule. En remplaçant dans (18) P_n, P_{n-1}, J_n par leurs valeurs de (15′) et de (4), nous sommes conduit à

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{2\xi+n+1}{\xi+n+1} \frac{d^{n+1}(1-x^2)^{n+1+\xi}}{dx^{n+1}} - (n+1) \frac{d^n(1-x^2)^{n-\xi}}{dx^n} \\ &= (1+x) \frac{d^{n+1}(1+x)^{n+\xi}(1-x)^{n+1+\xi}}{dx^{n+1}}, \end{aligned}$$

après avoir remplacé n par $n+1$. En posant

$$(20)\qquad y = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n+\xi}}{dx^{n-1}},$$

nous aurons

$$\frac{d^{n+1}(1-x^2)(1-x^2)^{n+\xi}}{dx^{n+1}} = (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(n+1)x\frac{dy}{dx} - (n+1)ny,$$

$$\frac{d^{n+1}(1-x)(1-x^2)^{n+\xi}}{dx^{n+1}} = (1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - (n+1)\frac{dy}{dx}.$$

De sorte que la relation (19) deviendra, après des réductions,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\xi x\frac{dy}{dx} + n(n+2\xi+1)y = 0,$$

équation différentielle qui admet bien la solution (20), comme il résulte de ce que nous avons établi pour l'équation (2).

5. La formule de Rodrigues

$$\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x] = (-1)^n \frac{n+1}{3.5\ldots(2n+1)} \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}$$

résulte immédiatement de (15) en faisant $\lambda = -1$, car

$$P_n(\cos\alpha, -1) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha},$$

comme le montre le développement connu

$$(21)\qquad \frac{1}{1-2\lambda\cos\alpha+\lambda^2} = 1+\lambda\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}+\ldots+\lambda^n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}+\ldots.$$

Nous aurons aussi, en faisant $\xi = \frac{1}{2}$ dans la relation (18),

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{1}{3.5\ldots(2n-1)}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^n(x+1)^{n-\frac{1}{2}}(x-1)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}\right]_{x=\cos\alpha},$$

formule qu'on peut écrire

$$\sin[(n+1)\arccos x]+\sin(n\arccos x)$$
$$= \frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n-1)}(1+x)\frac{d^n(1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

ou bien

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1+x}\,\frac{d^n(1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

formule analogue à la formule précédente de Rodrigues et que nous croyons nouvelle.

Étude d'une série.

6. Le développement

$$(13)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda = P_0+\alpha P_1(x\xi,\lambda)+\ldots+\alpha^n P_n(x,\lambda)+\ldots,$$

où α, x et λ sont des quantités réelles, est valable pour $|x|<1$, $|\alpha|<1$ et λ quelconque, car, en posant $x=\cos\gamma$, nous aurons

$$(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^\lambda = (1-\alpha e^{i\gamma})^\lambda(1-\alpha e^{-i\gamma})^\lambda,\qquad i=\sqrt{-1}.$$

Mais chacune des expressions

$$(1-\alpha e^{i\gamma})^\lambda \quad\text{et}\quad (1-\alpha e^{-i\gamma})^\lambda$$

peut être développée suivant les puissances de α, pour $|\alpha|<1$, et du produit de ces deux développements, nous déduisons le développement considéré. Nous trouvons ainsi pour $P_n(\cos\gamma, \lambda)$ la valeur

$$(-1)^n\left[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}e^{n\iota\gamma}+\lambda\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!}e^{(n-2)\gamma i}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\frac{\lambda\ldots(\lambda-n+3)}{(n-2)!}e^{(n-4)\gamma i}+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}e^{-n\gamma i}\right]$$

ou bien, sans le symbole i,

$$(22)\quad (-1)^n 2\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\cos n\gamma+(-1)^n 2\lambda\frac{\lambda\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!}$$
$$\times\cos(n-2)\gamma+(-1)^n 2\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\frac{\lambda\ldots(\lambda-n+3)}{(n-2)!}\cos(n-4)\gamma+\ldots,$$

le dernier terme de cette somme étant

$$-2\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\left(\lambda-\frac{n-1}{2}+1\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\left(\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}\cos\gamma$$

si n est impair, et

$$\left[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\left(\lambda-\frac{n}{2}+1\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\right]^2$$

si n est pair.

On voit, sur l'expression (22), que $P_n(\cos\gamma, \lambda)$, polynome de degré n en $\cos\gamma$, est aussi un polynome de même degré en λ.

7. L'expression (22) des polynomes $P_n(\cos\gamma, \lambda)$ nous permet de trouver l'ordre de grandeur de ces polynomes lorsque n augmente indéfiniment. Remarquons pour cela, que si $0>\lambda>-1$, les coefficients de $\cos n\gamma$, $\cos(n-2)\gamma$, ..., dans l'expression (22), vont en décroissant.

Donc, d'après un lemme d'Abel,

$$M(-1)^n 2\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}$$
$$>P_n(\cos\gamma, \lambda)>m(-1)^n 2\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}$$

en désignant par M et m la plus grande et la plus petite des sommes

$$S_k = \cos n\gamma + \cos(n-2)\gamma + \ldots + \cos(n-2k)\gamma,$$

où k prend les valeurs $0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$ (partie entière). Mais les sommes S_k sont toutes comprises entre $\frac{1}{\sin\gamma}$ et $\frac{-1}{\sin\gamma}$, nous aurons donc

$$P_n(x, \lambda) = 2\theta \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!\sqrt{1-x^2}} \tag{23}$$

pour $0 > \lambda > -1$, $|x| < 1$; θ varie avec x, mais $|\theta| < 1$. Lorsque n augmente indéfiniment, on sait que l'on a

$$\Gamma(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\alpha-\frac{1}{2}},$$

donc

$$P_n(x, \lambda) = (-1)^n 2\theta \frac{n^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{1-x^2}} \qquad (n = \infty). \tag{24}$$

Par conséquent $P_n(x, \lambda)$ est, pour les valeurs indéfiniment grandes de n, de l'ordre de $n^{-\lambda-1}$. Nous avons établi ce résultat dans l'hypothèse $0 > \lambda > -1$, mais nous verrons dans la suite qu'il est valable quel que soit λ.

8. Considérons la série du second membre de (13) comme une série en x, et démontrons que si $|x| < 1$ et $|\alpha| < 1$ cette série est absolument et uniformément convergente. Supposons d'abord $\lambda < 0$; nous voyons alors que nous aurons le maximum pour la valeur de l'expression (22) de $P_n(\cos\gamma, \lambda)$ si $\gamma = 0$, ce qui correspond à $x = 1$. Il s'ensuit que les termes de la série (13) sont inférieurs, en valeur absolue, aux termes de la série qui représente le développement de

$$(1 - 2\alpha + \alpha^2)^\lambda = (1-\alpha)^{2\lambda}$$

suivant les puissances de α, $0 < \alpha < 1$, série qui a tous ses termes positifs et qui est convergente. Si $\lambda > 0$, nous pourrons toujours le supposer de la forme $\lambda = m + \lambda_1$, où m est un entier positif et $0 > \lambda_1 > -1$; donc

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^m (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\lambda_1}.$$

Ceci nous permet de voir facilement que les termes de la série (13) seront, dans ce cas, plus petits, en valeur absolue, que les termes de la série qui représente le développement de

$$(1+2\alpha+\alpha^2)^m(1-2\alpha+\alpha^2)^{\lambda_1}=(1+\alpha)^{2m}(1-\alpha)^{2\lambda_1},$$

suivant les puissances de α, $0<\alpha<1$, série qui a tous ses termes positifs et qui est convergente. Donc, pour toute valeur de λ, la série (13) est absolument et uniformément convergente.

9. En intégrant les deux membres de (13) par rapport à x, nous aurons

$$(25)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda+1}=R_0+\alpha R_1+\ldots+\alpha^n R_n+\ldots;$$

R_{n+1} doit être tel que l'on ait

$$(26)\qquad [R_{n+1}]'_x=-2(\lambda+1)\,P_n(x,\lambda).$$

Mais le second membre de (25) doit être de la même forme que celui de (13), donc

$$R_{n+1}=P_{n+1}(x,\lambda+1)$$

et l'égalité (26) devient

$$(27)\qquad [P_{n+1}(x,\lambda+1)]'_x=-2(\lambda+1)\,P_n(x,\lambda).$$

On pourra, à l'aide de cette relation, calculer $P_{n+1}(x,\lambda)$ lorsque l'on connaît $P_n(x,\lambda)$ et la valeur $P_{n+1}(x,\lambda)$ qui se déduit immédiatement du développement (13).

En dérivant, par rapport à x, les deux membres de l'égalité (27), nous déduisons, de proche en proche, la relation plus générale

$$(28)\qquad \frac{d^q P_m(x,\lambda)}{dx^q}=(-2)^q\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-q+1)P_{m-q}(x,\lambda-q).$$

Si nous remplaçons dans cette égalité P_m et P_{m-q} par leurs valeurs tirées de (15'), nous aurons

$$\frac{d^q\left[(1-x^2)^{\mu}\dfrac{d^m(1-x^2)^{m-\mu}}{dx^m}\right]}{dx^q}=A(1-x^2)^{\mu-q}\frac{d^{m-q}(1-x^2)^{m-\mu}}{dx^{m-q}},$$

A étant une constante. En faisant $\mu = 0$, on retrouve une formule donnée par O. Rodrigues et puis par Jacobi.

Pour $q = m$, la formule (28) nous montre que le coefficient x^m dans le polynome $P_m(x, \lambda)$ est

$$(-2)^m \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1)}{m!}.$$

10. Si l'on fait $\lambda = 0$ dans le développement (13) on est conduit à l'identité $1 = 1$, car tous les polynomes $P_n(x, \lambda)$ sont nuls pour $\lambda = 0$. Mais si nous considérons l'expression

$$\frac{1-(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda}{\lambda},$$

sa valeur, lorsque λ tend vers zéro, est

$$\operatorname{Log}(1-2\alpha x+\alpha^2).$$

Nous aurons donc

$$\operatorname{Log}(1-2\alpha x+\alpha^2) = \left[\frac{\alpha P_1(x, \lambda)+\ldots+\alpha^n P_n(x, \lambda)+\ldots}{\lambda}\right]_{\lambda=0}.$$

On connaît le développement

$$(29) \qquad \operatorname{Log}(1-2\alpha x+\alpha^2) = -\frac{2\alpha\cos(\operatorname{arc}\cos x)}{1} - \ldots - \frac{2\alpha^n \cos n(\operatorname{arc}\cos x)}{n} - \ldots.$$

Il résulte que

$$\left[\frac{P_n(x, \lambda)}{\lambda}\right]_{\lambda=0} = -\frac{2}{n}\cos n(\operatorname{arc}\cos x).$$

On voit de plus que, par continuité, le développement (29) se rattache au développement (13).

Propriétés des polynomes $P_n(x, \lambda)$.

11. La propriété fondamentale des polynomes $P_n(x, \lambda)$ est celle d'orthogonalité représentée par l'égalité

$$(30) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_m(x, \lambda)\, P_n(x, \lambda)\, dx = 0,$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ et $m \neq n$. Cette égalité est une conséquence de la forme (15) des polynomes $P_n(x, \lambda)$. Elle résulte aussi de la valeur d'une intégrale indéfinie qu'on peut rattacher à l'équation différentielle (12) des polynomes $P_n(x, \lambda)$. Considérons plus généralement les équations

$$\psi_1(x)y'' + \psi_2(x)y' + k\,\psi_3(x)y = 0,$$
$$\psi_1(x)y'' + \psi_2(x)y' + k_1\,\psi_3(x)y = 0,$$

qui ne diffèrent que par les valeurs du paramètre k. Soient Y_k et Y_{k_1} des solutions respectives de ces équations et $\varphi(x)$ une fonction déterminée par l'équation

$$[\psi_1(x)\,\varphi(x)]'_x = \psi_2(x)\,\varphi(x).$$

On trouve sans difficulté la combinaison intégrable

$$(k - k_1)\,\varphi(x)\,\psi_3(x)\,Y_k Y_{k_1} = \frac{d}{dx}\left\{\psi_1(x)\,\varphi(x)\,[Y_k Y'_{k_1} - Y_{k_1} Y'_k]\right\};$$

d'où l'intégrale correspondante, qui, dans le cas des polynomes $P_n(x, \lambda)$, est

$$(31)\quad [m(m - 2\lambda) - n(n - 2\lambda)] \times \int (1 - x^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} P_m P_n\, dx = (1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \lambda} (P'_n P_m - P'_m P_n).$$

Si l'on intègre entre les limites -1 et $+1$, on retrouve (30).

Il se peut que l'égalité (30) subsiste même pour $\lambda \geqq \frac{1}{2}$; il faut pour cela que $P_n(x, \lambda)$ contienne $(1 - x^2)$ en facteur, ce qui arrive si λ est de la forme $p + \frac{1}{2}$, p un entier positif ou nul. Car, si nous considérons le développement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{p + \frac{1}{2}} = \Sigma \alpha^m P_m\left(x, p + \frac{1}{2}\right)$$

et ses p dérivées par rapport à x, on voit, en faisant dans ces développements $x = +1$ et $x = -1$, que tous les polynomes $P_n\left(x, p + \frac{1}{2}\right)$, où $n > 2p + 1$, et leurs p premières dérivées sont nulles pour ces valeurs de x. Donc $P_n\left(x, p + \frac{1}{2}\right)$, $n > 2p + 1$, a $(1 - x^2)^{p+1}$ en facteur et par suite, d'après (31),

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-p-1} \mathrm{P}_m\left(x,\, p+\frac{1}{2}\right) \mathrm{P}_n\left(x,\, p+\frac{1}{2}\right) dx = 0,$$

pour p entier $\geqq 0$, $m > 2p+1$, $n > 2p+1$ et $m \neq n$.

12. L'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} [\mathrm{P}_n(x, \lambda)]^2\, dx$$

se calcule facilement en nous servant de la forme (15) du polynome $\mathrm{P}_n(x, \lambda)$. On arrive, après des intégrations par parties, à

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_n^2(x, \lambda)\, dx \\ &\quad = (-1)^n \frac{\lambda}{\lambda-n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{n!} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx.\end{aligned}$$

Mais

$$(32)\quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\mu}\, dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^{\mu}\, dx = \int_0^1 \frac{(1-z)^{\mu}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)},$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_n^2(x, \lambda)\, dx \\ &\quad = (-1)^n \frac{\lambda}{\lambda-n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{n!} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)}.\end{aligned}$$

13. Reprenons le développement

$$(13)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda} = 1 + \alpha \mathrm{P}_1 + \ldots + \alpha^n \mathrm{P}_n + \ldots$$

et dérivons-le par rapport à α et par rapport à x, nous aurons

$$(13_\alpha)\qquad -2\lambda(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda-1} = \mathrm{P}_1 + 2\alpha \mathrm{P}_2 + \ldots + n\alpha^{n-1}\mathrm{P}_n + \ldots,$$

$$(13_x)\qquad -2\lambda\alpha(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda-1} = \alpha(\mathrm{P}_1)'_x + \ldots + \alpha^n (\mathrm{P}_n)'_x + \ldots.$$

De la comparaison de (13_α) et (13_x) nous déduisons

$$(33)\qquad x[\mathrm{P}_n(x, \lambda)]'_x - [\mathrm{P}_{n-1}(x, \lambda)]'_x = n\,\mathrm{P}_n(x, \lambda).$$

De même de (13) et de (13_x) nous déduirons

$$-2\lambda P_n(x,\lambda)=[P_{n+1}(x,\lambda)]'_x-2x[P_n(x,\lambda)]'_x+[P_{n-1}(x,\lambda)]'_x.$$

Et de ces deux dernières relations on a

$$2(n-\lambda)P_n(x,\lambda)=[P_{n+1}(x,\lambda)]'_x-[P_{n-1}(x,\lambda)]'_x. \tag{34}$$

En faisant dans cette égalité $n=0, 1, \ldots, n$ et en additionnant ces $n+1$ égalités, nous aurons

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2(k-\lambda)P_k(x,\lambda)=[P_{n+1}(x,\lambda)+P_n(x,\lambda)]'_x. \tag{35}$$

De (13) et de (13_α) on déduit la relation récurrente

$$(n+1)P_{n+1}(x,\lambda)+2(\lambda-n)x\,P_n(x,\lambda)+(n-2\lambda-1)P_{n-1}(x,\lambda)=0. \tag{36}$$

14. Le polynome $P_n(x,\lambda)$ peut se mettre sous la forme d'un déterminant. Posons, en effet,

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \gamma_n x & \alpha_n & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \beta_n & \gamma_{n-1}x & \alpha_{n-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_{n-1} & \gamma_{n-2}x & \alpha_{n-2} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \beta_3 & \gamma_2 x & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \beta_2 & \gamma_1 x \end{vmatrix},$$

On voit facilement que l'on a la relation récurrente

$$\Delta_n-\gamma_n x\Delta_{n-1}+\alpha_n\beta_n\Delta_{n-2}=0 \tag{37}$$

et que le déterminant Δ_n, qui est un polynome de degré n en x, ne dépend pas séparément des quantités $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2$ et $\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_2$, il ne dépend que des produits $\alpha_{n-i}\,\beta_{n-i}$. En prenant

$$\gamma_n=\frac{2(n-1-\lambda)}{n} \quad \text{et} \quad \beta_n\alpha_n=\frac{n-2\lambda-2}{n}, \tag{38}$$

les relations récurrentes (36) et (37) deviennent identiques, et comme

$$\Delta_1=P_1=-2\lambda x \quad \text{et} \quad \Delta_2=P_2=-2\lambda(1-\lambda)x^2+\lambda,$$

il s'ensuit que, avec les valeurs (38) de α, β et γ, on aura

$$P_n(x, \lambda) = \Delta_n.$$

15. Vérifions à l'aide des relations (33) et (34) que $P_n(x, \lambda)$ satisfait à l'équation différentielle (12). Cette équation peut s'écrire

$$P''_n - x\frac{d(xP'_n - nP_n)}{dx} + (2\lambda - n)(xP'_n - nP_n) = 0$$

ou bien, d'après (33),

$$P''_n - xP''_{n-1} + (2\lambda - n)P'_{n-1} = 0$$

ou encore

$$P''_n - [xP'_{n-1} - (n-1)P_{n-1}]'_x - 2(n - \lambda - 1)P'_{n-1} = 0.$$

Ce qui devient, en tenant compte de (33) et (34),

$$P''_n - P''_{n-2} - (P'_n - P'_{n-2})'_x = 0.$$

16. Des développements (13) et (13_α) on déduit les développements

$$(39)\qquad (1 - \alpha x)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\lambda-1} = \sum \left(1 - \frac{n}{2\lambda}\right) P_n(x, \lambda)\alpha^n,$$

$$(40)\qquad (1 - \alpha^2)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\lambda-1} = \sum \frac{\lambda - n}{\lambda} P_n(x, \lambda)\alpha^n.$$

Le premier membre de (40) est précisément l'expression (17); nous retrouvons donc le résultat établi, que cette expression est une fonction génératrice des polynomes $P_n(x, \lambda)$.

En dérivant (39) par rapport à α et puis en multipliant les deux membres par $(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, nous aurons

$$(1 - x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\frac{d}{d\alpha}(1 - \alpha x)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\lambda-1}$$
$$= \sum \frac{n(2\lambda - n)}{2\lambda}(1 - x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_n(x, \lambda)\alpha^{n-1}.$$

En tenant compte de l'équation différentielle (12), qui peut s'écrire

$$n(2\lambda - n)(1 - x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_n(x, \lambda) = \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} P'_n(x, \lambda)\right],$$

et de la relation (27)

$$P'_n(x, \lambda) = -2\lambda P_{n-1}(x, \lambda - 1),$$

l'égalité précédente nous conduira à l'identité

$$(41)\qquad (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \frac{d(1-\alpha x)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda-1}}{d\alpha}$$
$$= -\frac{d(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda-1}}{dx}.$$

Cette identité, qu'on peut facilement vérifier, est très intéressante. Elle nous permettrait de trouver directement la forme (15) des polynomes $P_n(x, \lambda)$ et l'équation différentielle (12). Elle se prête en outre à des généralisations étendues.

L'identité (41) nous conduit aussi à cette autre identité

$$(42)\qquad (1-x^2)\frac{du}{dx} + (1-\alpha x)\frac{du}{d\alpha} = -2\lambda u x,$$

où l'on a posé

$$u = (1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda};$$

en remplaçant u par son développement dans (42), on obtient la relation

$$(43)\qquad (1-x^2)P'_n + (n+1)P_{n+1} - (n-2\lambda)xP_n = 0.$$

L'identité

$$(1-x^2)\frac{du}{dx} + (x-\alpha)\alpha\frac{du}{d\alpha} = -2\lambda u\alpha$$

résulte de l'identité (42), comme on le voit en les retranchant membre à membre; elle nous conduit à la relation

$$(44)\qquad (1-x^2)P'_{n+1} + (n+1)xP_{n+1} - (n-2\lambda)P_n = 0.$$

En considérant les relations (43) et (44) comme un système d'équations différentielles définissant P_n et P_{n+1}, on pourrait retrouver l'équation (12).

En additionnant et en retranchant les égalités (43) et (44) on aura les relations

$$(1-x)(P'_{n+1}+P'_n\quad)+(n+1)P_{n+1}-(n-2\lambda)P_n=0,$$
$$(1+x)(P'_n\quad-P'_{n+1})+(n+1)P_{n+1}+(n-2\lambda)P_n=0,$$

à l'aide desquelles on pourrait retrouver les équations différentielles auxquelles satisfont $P_{n+1}+P_n$ et $P_{n+1}-P_n$, polynomes que nous avons désignés par R_{n+1} et S_{n+1}.

17. Si $\lambda<\frac{1}{2}$ l'équation en x

(45) $$P_n(x,\lambda)=0$$

a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre $+1$ et -1. C'est une propriété qui résulte de la relation (30) et qui appartient à tous les polynomes de Legendre généralisés. Car si U_m est un polynome de degré m en x tel que

$$\int_a^b \varphi(x)\,U_m U_n\,dx=0 \qquad (m\neq n),$$

la fonction $\varphi(x)$ restant positive dans l'intervalle d'intégration, l'équation $U_m=0$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre a et b. On le démontre par la belle méthode que donne Legendre pour ses polynomes X_n.

La relation récurrente

$$n\,P_n(x,\lambda)+2x(\lambda-n+1)P_{n-1}(x,\lambda)+(n-2-2\lambda)P_{n-2}(x,\lambda)=0$$

nous permet d'étudier l'équation (45) dans l'intervalle -1 à $+1$, même pour $\lambda\geqq\frac{1}{2}$, car elle nous montre que la suite des polynomes

(46) $$\varepsilon_0 P_0,\quad \varepsilon_1 P_1(x,\lambda),\quad \ldots,\quad \varepsilon_n P_n(x,\lambda)$$

jouit des propriétés d'une suite de Sturm, ε_0, ε_1, ..., ε_n étant l'une des deux quantités $+1$ ou -1 convenablement choisie. Les valeurs de $P_i(x,\lambda)$ pour $x=+1$ et $x=-1$ seront données par

$$P_0+\alpha P_1(\quad 1,\lambda)+\alpha^2 P_2(\quad 1,\lambda)+\ldots=1-2\lambda\alpha+\frac{2\lambda(2\lambda-1)}{2!}\alpha^2-\ldots,$$
$$P_0+\alpha P_1(-1,\lambda)+\alpha^2 P_2(-1,\lambda)+\ldots=1+2\lambda\alpha+\frac{2\lambda(2\lambda-1)}{2!}\alpha^2+\ldots.$$

Si, par exemple, $2\lambda > n - 1$, l'équation (45) ne peut avoir qu'une seule racine réelle ($x = 0$) comprise entre -1 et $+1$. Ceci résulte du fait que la suite (46) sera

$$+P_n, \quad +P_{n-1}, \quad -P_{n-2}, \quad -P_{n-3}, \quad +P_{n-4}, \quad +P_{n-5}, \quad \ldots,$$

$P_{n-\iota}$ et $P_{n-\iota-2}$ étant de signes contraires et le nombre des variations présentées par cette suite, pour $x = 1$, est égal à la partie entière de $\frac{n+1}{2}$ et, pour $x = -1$, elle en présente un nombre égal à la partie entière de $\frac{n}{2}$. Supposons aussi λ entier et plus petit que n; $P_n(x, \lambda)$ sera un polynome de degré $2\lambda - n$ et l'on devra prendre pour (46) la suite

$$+P_n, \quad +P_{n+1}, \quad -P_{n+2}, \quad -P_{n+3}, \quad \ldots, \quad \pm P_{2\lambda},$$

$P_{n+\iota}$ et $P_{n+\iota+2}$ étant de signes contraires. Dans ce cas aussi, l'équation (45) ne peut avoir qu'une seule racine réelle ($x = 0$) comprise entre -1 et $+1$.

Les racines de l'équation (45) sont séparées par les racines de l'équation

$$P_{n-1}(x, \lambda - 1) = 0,$$

comme il résulte de la relation (27).

Si $\lambda < -\frac{1}{2}$ l'équation

$$P_{n+1}(x, \lambda) + P_n(x, \lambda) = 0$$

a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre $+1$ et -1; ceci résulte de l'égalité (18).

18. Considérons le polynome $P_{2n}(x, \lambda)$; c'est un polynome de degré n en x^2 et si nous posons $x^2 = z$ l'équation différentielle à laquelle satisfait $P_{2n}(x, \lambda)$ deviendra

$$z(1 - z)\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} + (\lambda - 1)z\right]\frac{dy}{dz} + n(n - \lambda)y = 0.$$

Donc, en introduisant la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, nous voyons que l'on a

$$P_{2n}(x, \lambda) = P_{2n}(0, \lambda)\, F\left(-n, n - \lambda, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

ou bien en remplaçant $P_{2n}(o, \lambda)$ par sa valeur

$$(47)\qquad P_{2n}(x, \lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} F\left(-n, n-\lambda, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

En dérivant par rapport à x les deux membres et en tenant compte de (27), nous aurons, pour les indices impairs,

$$(48)\quad P_{2n+1}(x, \lambda) = -\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!} 2x F\left(-n, n-\lambda+1, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

De la relation (47) on déduit, en tenant compte de la formule connue

$$\int_0^\pi (\cos\varphi)^{2p} (\sin\varphi)^{2\mu} d\varphi = \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+p+1)},$$

que l'on a

$$\int_0^\pi P_{2n}(x\cos\varphi, \lambda)(\sin\varphi)^{2\mu} d\varphi$$
$$= \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)} F(-n, n-\lambda, \mu+1, x^2).$$

Mais les polynomes de Jacobi satisfont à l'égalité

$$x^{-\mu}(1-x)^{\mu+\lambda+1} \frac{d^n[x^{n+\mu}(1-x)^{n-1-\mu-\lambda}]}{dx^n}$$
$$= (\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n) F(-n, n-\lambda, \mu+1, x).$$

De la comparaison de ces deux dernières égalités on déduit

$$(49)\qquad x^{-\mu}(1+x)^{\mu+\lambda+1} \frac{d^n[x^{n+\mu}(1-x)^{n-1-\mu-\lambda}]}{dx^n}$$
$$= A\int_0^\pi P_{2n}(\sqrt{x}\cos\varphi, \lambda)(\sin\varphi)^{2\mu} d\varphi,$$

A la constante correspondante et $\mu > -\frac{1}{2}$.

Comme

$$\int_0^\pi P_{2n+1}(\sqrt{x}\cos\varphi, \lambda)(\sin\varphi)^{2\mu} d\varphi = 0,$$

nous concluons que

$$\int_0^\pi \left(1 - 2\sqrt{\alpha x}\cos\varphi + \alpha\right)^\lambda (\sin\varphi)^{2\mu}\, d\varphi$$

est une fonction génératrice des polynomes (49) de Jacobi pour $\mu > -\frac{1}{2}$.

19. La relation (33) peut s'écrire, en vertu de la relation (27),

$$\frac{2\lambda P_{n-1}(x, \lambda - 1) - 2\lambda x P_n(x, \lambda - 1)}{n} = P_n(x, \lambda).$$

Elle nous montre sous cette forme que si n augmente indéfiniment, $P_n(x, \lambda)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}P_n(x, \lambda - 1)$; donc, si $0 < \lambda < 1$, $P_n(x, \lambda)$ est de l'ordre $n^{-\lambda-1}$, comme il résulte de l'égalité (24) valable, comme nous l'avons vu pour $0 > \lambda > -1$. On démontre de proche en proche, à l'aide de l'égalité précédente, que, pour toute valeur de $\lambda > 0$, $P_n(x, \lambda)$ est de l'ordre de $n^{-\lambda-1}$.

De même, de la relation (43) que nous pouvons écrire

$$\frac{(n+1) P_{n+1}(x, \lambda) - (n - 2\lambda) x P_n(x, \lambda)}{2\lambda(1 - x^2)} = P_{n-1}(x, \lambda - 1),$$

on peut voir, de proche en proche, que, pour toute valeur de $\lambda < -1$, $P_n(x, \lambda)$ est de l'ordre de $n^{-\lambda-1}$ si $|x| < 1$.

$P_n(x, \lambda)$ est donc bien, quel que soit λ et pour $|x| < 1$, de l'ordre de $n^{-\lambda-1}$.

20. Remplaçons dans le développement (13) x par $x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}$ et α par $\alpha\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}$, nous aurons

$$\left(1 - a\frac{\alpha^2 - 2\alpha x}{2\lambda}\right)^\lambda = \Sigma\, \alpha^n \left(\frac{-a}{2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} P_n\left(x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}, \lambda\right).$$

Faisons croître λ indéfiniment par des valeurs négatives; le premier membre deviendra, à la limite, $e^{-\frac{a}{2}(\alpha^2 - 2\alpha x)}$, ce qui est précisément la fonction génératrice des polynomes U_n d'Hermite ([1])

$$U_n = (-1)^n e^{\frac{a}{2}x^2} \frac{d^n e^{-\frac{a}{2}x^2}}{dx^n}.$$

Nous aurons donc

$$(50) \qquad \lim_{\lambda=-\infty} \left(\frac{-a}{2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} P_n\left(x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}, \lambda\right) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{a}{2}x^2} \frac{d^n e^{-\frac{a}{2}x^2}}{dx^n}.$$

M. Appell ([2]) a démontré cette égalité limite en partant des polynomes de Jacobi qui coïncident avec nos polynomes $P_n(x, \lambda)$, exprimés par une fonction hypergéométrique, donc d'une égalité analogue à (15). Remplaçons, en effet, dans l'égalité (15) x par $x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}$, nous aurons

$$P\left(x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}, \lambda\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)}$$
$$\times\left(1+\frac{ax^2}{2\lambda}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^n\left(1+\frac{ax^2}{2\lambda}\right)^{-\lambda+n-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{-a}{2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} dx^n}.$$

En faisant croître λ, par des valeurs négatives si $a > 0$ pour ne pas introduire les imaginaires, vers l'infini, nous retrouvons l'égalité (50).

Il y a une infinité d'autres polynomes qui se réduisent comme cas limite aux polynomes U_n d'Hermite. En effet, si nous considérons le développement suivant les puissances de α de l'expression

$$(51) \qquad [1 - 2\alpha x \mp \alpha^2 + \varphi(\alpha, x)]^\lambda,$$

$\varphi(\alpha, x)$ étant un polynome en α et x tel que

$$\varphi(0, x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda\varphi\left(\alpha\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}, x\sqrt{\frac{-a}{2\lambda}}\right)$$

tend vers zéro pour λ infini, les coefficients des puissances de α dans le développement de (51) seront des polynomes qui se réduisent, comme cas limite, aux polynomes U_n, comme $P_n(x, \lambda)$.

([1]) *OEuvres*, t. II, p. 301.
([2]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1882, p. 164.

A.

Fonctions associées aux polynomes $P_n(x, \lambda)$.

21. Considérons la fonction

$$(52)\qquad Q_n(y, \lambda) = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda} \frac{P_n(x, \lambda)}{y-x}\, dx \qquad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right),$$

à laquelle on est conduit lorsqu'on cherche le développement de $\frac{1}{y-x}$ en série des polynomes $P_n(x, \lambda)$, y étant en dehors de l'intervalle de -1 à $+1$. Cherchons l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait cette fonction. Remplaçons, pour cela, $P_n(x, \lambda)$ par sa valeur tirée de

$$(1-x^2) P''_n(x, \lambda) + (2\lambda - 1) x P'_n(x, \lambda) + n(n-2\lambda) P_n(x, \lambda) = 0.$$

Nous aurons

$$n(n-2\lambda) Q_n(y, \lambda)$$
$$= -\int_{-1}^{+1} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} d P'_n(x, \lambda)}{y-x} - 2(\lambda - 1) \int_{-1}^{+1} \frac{x(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P'_n(x, \lambda)}{y-x} dx.$$

Après une intégration par parties de la première intégrale, il nous restera

$$n(n-2\lambda) Q_n(y, \lambda)$$
$$= -\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} P'_n(x, \lambda)}{y-x} \right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(y-x)^2} P'_n(x, \lambda)\, dx.$$

Le crochet s'annulant aux deux limites, nous aurons, après une nouvelle intégration par parties, la partie intégrée étant nulle,

$$(53)\qquad n(n-2\lambda) Q_n(y, \lambda)$$
$$= -\int_{-1}^{+1} \frac{(2\lambda - 1) x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda} (y-x) + 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(y-x)^3} P_n(x, \lambda)\, dx.$$

De (52) on déduit par dérivation

$$(54)\qquad Q'_n(y, \lambda) = -\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(y-x)^2} P_n(x, \lambda)\, dx,$$

$$(55)\qquad Q''_n(y, \lambda) = \int_{-1}^{+1} \frac{2(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(y-x)^3} P_n(x, \lambda)\, dx.$$

Considérons, à présent, l'expression

$$(56)\quad E=(1-y^2)\,Q''_n(y,\lambda)+(2\lambda-1)\,y\,Q'_n(y,\lambda)+n(n-2\lambda)\,Q_n(y,\lambda).$$

En remplaçant Q_n, Q'_n, Q''_n par leurs valeurs (53), (54), (55), nous aurons après des réductions

$$E=-\int_{-1}^{+1}\frac{(2\lambda+1)(x+y)}{(y-x)^2}(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}P_n(x,\lambda)\,dx.$$

Ce qu'on peut écrire aussi

$$E=(2\lambda+1)\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}P_n(x,\lambda)}{(y-x)}$$
$$-2(2\lambda+1)\,y\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(y-x)^2}P_n(x,\lambda)\,dx.$$

Donc

$$E=(2\lambda+1)\,[Q_n(y,\lambda)+2y\,Q'_n(y,\lambda),$$

et en égalant cette valeur de E à (56), nous trouvons l'équation

$$(1-y^2)\frac{d^2z}{dy^2}-(2\lambda+3)\,y\frac{dz}{dy}+(n+1)(n-2\lambda-1)\,z=0$$

à laquelle satisfait la fonction $Q_n(y,\lambda)$.

22. L'expression

$$(57)\qquad R_n(x,\lambda)=\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}(x-y)^{2\lambda}P_n(y,\lambda)\,dy$$

satisfait à la même équation différentielle (12) que $P_n(x,\lambda)$. Pour le démontrer, on établira, comme précédemment, les relations :

$$n(n-2\lambda)R_n(x,\lambda)=2\lambda(2\lambda-1)\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(x-y)^{2\lambda-2}(xy-1)P_n(y,\lambda)\,dy,$$
$$R'_n(x,\lambda)=\quad 2\lambda\quad\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}(x-y)^{2\lambda-1}\qquad P_n(y,\lambda)\,dy,$$
$$R''_n(x,\lambda)=2\lambda(2\lambda-1)\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(x-y)^{2\lambda-2}\qquad P_n(y,\lambda)\,dy,$$

à l'aide desquelles on vérifie immédiatement que l'on a

$$(1-x^2)\,R''_n(x,\lambda)+(2\lambda-1)\,x\,R'_n(x,\lambda)+n(n-2\lambda)\,R_n(x,\lambda)=0.$$

23. On aurait pu établir ces résultats en se servant de la relation (15) et ramener les intégrales (52) et (57) à des intégrales hypergéométriques. Mais par les considérations précédentes on peut étendre ces résultats, car nous ne nous sommes pas servi de la forme particulière $n(n-2\lambda)$ du coefficient de y dans l'équation différentielle (12). Prenons, en effet, à la place de $P_n(y, \lambda)$ dans les intégrales (52) et (57), une solution $Y_k(x)$ de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' + (2\lambda-1)xy' + ky = 0. \tag{58}$$

Si ces intégrales ont un sens et si les quantités $Y'_k(-1)$ et $Y'_k(+1)$ sont finies, on voit, en suivant la même marche que précédemment, que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(x-y)^{2\lambda}Y_k(y)\,dy$$

satisfait à la même équation (58) que $Y_k(x)$, et que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\frac{Y_k(y)}{x-y}dy$$

satisfait à l'équation

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+3)xy' + (k-2\lambda-1)y = 0.$$

Il se peut que, par la même méthode, on puisse trouver des équations différentielles ayant ces intégrales comme solutions, même si $Y'_k(-1)$ et $Y'_k(+1)$ sont infinis. Soit, par exemple, l'équation

$$(1-x^2)y'' + (2\lambda-1)xy' + (n+1)(n+2\lambda+1)y = 0$$

qui admet, comme il résulte de l'équation (2), la solution

$$Y_n(x, \lambda) = \frac{d^n(1-x^2)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

En considérant l'intégrale

$$I_n(x, \lambda) = \int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}}{x-y}Y_n(y, \lambda)\,dy \qquad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right),$$

et en reprenant la marche suivie, nous aurons

$$\begin{aligned}&(n+1)(n+2\lambda+1)I_n(x, \lambda)\\ &= -\left[\frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}Y'_n(y, \lambda)}{x-y}\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(x-y)^2}Y'_n(y, \lambda)\,dy.\end{aligned}$$

Mais

$$(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\,Y'_n(y,\lambda) = A\,P_{n+1}(y,-\lambda),$$

où l'on a posé

$$A = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(2\lambda)(2\lambda+1)\dots(2\lambda+n)}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\dots(2\lambda+2n+1)},$$

et comme

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(x-y)^2}\,Y'_n(y,\lambda)\,dy\\
&\quad=\left[\frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(x-y)^2}\,Y_n(y,\lambda)\right]_{-1}^{+1}\\
&\qquad-\int_{-1}^{+1}\frac{(2\lambda-1)\,y\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}(x-y)+2(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(x-y)^3}\,Y_n(y,\lambda)\,dy,
\end{aligned}$$

le crochet étant nul aux deux limites, il nous restera

$$\begin{aligned}
&(n+1)(n+2\lambda+1)\,I_n(x,\lambda)\\
&\quad=\left[\frac{-A\,P_{n+1}(y,-\lambda)}{x-y}\right]_{-1}^{+1}\\
&\qquad-\int_{-1}^{+1}\frac{(2\lambda-1)\,y\,(x-y)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}+2(1-y^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{(x-y)^3}\,Y_n(y,\lambda)\,dy.
\end{aligned}$$

Par suite, l'intégrale $I_n(x,\lambda)$ satisfait à l'équation

$$(1-x^2)y''-(2\lambda+3)xy'+n(n+2\lambda+2)y = -A\left[\frac{P_{n+1}(y,-\lambda)}{x-y}\right]_{y=-1}^{y=+1}.$$

L'intégrale $I_n(x,\lambda)$ a, par rapport aux polynomes P_n, une forme simple, car

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}\,Y_n(y,\lambda) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{(2\lambda+2)(2\lambda+3)\dots(2\lambda+n+1)}{(2\lambda+3)(2\lambda+5)\dots(2\lambda+2n+1)}\,P_n(y,-\lambda-1).$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(y,\lambda)}{x-y}\,dy$$

satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)y''+(2\lambda-1)xy'+n(n-2\lambda)y\\
&\quad=\frac{1}{n+1}\,\frac{2\lambda+2}{2\lambda+1-n}\left[\frac{P_{n+1}(+1,\lambda+1)}{x-1}-\frac{P_{n+1}(-1,\lambda+1)}{x+1}\right].
\end{aligned}$$

Sur d'autres polynomes remarquables.

24. Considérons le développement

$$(59)\qquad [(1-\alpha x)^2-\alpha^2]^\lambda = 1+\alpha\,\Pi_1(x,\lambda)+\ldots+\alpha^n\,\Pi_n(x,\lambda)+\ldots$$

qui définit les polynomes $\Pi_n(x,\lambda)$ que nous nous proposons d'étudier : Remarquons d'abord que ces polynomes se relient aux polynomes $P_n(x,\lambda)$ par une transformation simple. En effet, si dans le développement (59) nous faisons

$$\alpha=\beta\sqrt{z^2-1}\qquad \text{et}\qquad x=\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},$$

nous aurons

$$(1-2\beta z+\beta^2)^\lambda=\Sigma\,\beta^n(z^2-1)^{\frac{n}{2}}\Pi_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\lambda\right).$$

Donc

$$(60)\qquad P_n(z,\lambda)=(z^2-1)^{\frac{n}{2}}\Pi_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\lambda\right).$$

Et inversement

$$(61)\qquad \Pi_n(z,\lambda)=(z^2-1)^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\lambda\right).$$

25. Les racines de l'équation en x

$$(62)\qquad \Pi_n(x,\lambda)=0$$

seront

$$\frac{\rho_i}{\sqrt{\rho_i^2-1}}\qquad (i=1,\ldots,n),$$

ρ_i désignant une racine de l'équation (45). Donc si $\lambda<\frac{1}{2}$ l'équation (62) a toutes ses racines imaginaires et de la forme $r\sqrt{-1}$.

26. Le premier membre de (59) pouvant s'écrire

$$[1-\alpha(x-1)]^\lambda[1-\alpha(x+1)]^\lambda,$$

on voit que le développement (59) est valable si

$$|\alpha(x-1)|<1\qquad \text{et}\qquad |\alpha(x+1)|<1.$$

On voit encore que l'on a

$$\Pi_n(x, \lambda) = (-1)^n \Big[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}(x-1)^n$$
$$+\frac{\lambda}{1}\frac{\lambda\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}(x+1)$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\frac{\lambda\ldots(\lambda-n+3)}{(n-2)!}(x-1)^{n-2}(x+1)^2+\ldots\Big].$$

En divisant les deux membres de cette égalité par λ et en faisant ensuite $\lambda = 0$, nous aurons

$$\left[\frac{\Pi_n(x, \lambda)}{\lambda}\right]_{\lambda=0} = -\frac{(x-1)^n+(x+1)^n}{n}.$$

Ce qui résulte aussi de

$$\lim_{\lambda=0}\left\{\frac{1-[(1+\alpha x)^2-\alpha^2]^\lambda}{\lambda}\right\} = \log[1-\alpha(x-1)]+\log[1-\alpha(x+1)].$$

27. Dérivons le développement (59) par rapport à α et par rapport à x, nous aurons

$$(59_\alpha) \quad [-2\lambda x(1-\alpha x)-2\lambda\alpha][(1-\alpha x)^2-\alpha^2]^{\lambda-1} = \Sigma n\alpha^{n-1}\Pi_n(x, \lambda),$$
$$(59_x) \quad -2\lambda\alpha(1-\alpha x)[(1-\alpha x)^2-\alpha^2]^{\lambda-1} = \Sigma\ \alpha^n\ \Pi'_n(x, \lambda).$$

De la comparaison de (59), (59_α), (59_x) nous déduisons la relation

$$(63) \qquad (n-2\lambda)\Pi_n(x, \lambda) = \Pi'_{n+1}(x, \lambda)$$

qui nous montre que les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ rentrent dans la classe des polynomes étudiés par M. Appell (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, p. 119-144).

De la comparaison de (59) et (59_α) nous déduisons la relation récurrente

$$(64) \qquad (n+1)\Pi_{n+1}(x, \lambda)$$
$$+2(\lambda-n)x\Pi_n(x, \lambda)+(n-1-2\lambda)(x^2-1)\Pi_{n-1}(x, \lambda).$$

28. De (63) et (64) on déduit immédiatement l'équation différentielle

$$(65) \qquad (x^2-1)y''+2(\lambda-n+1)xy'+n(n-2\lambda-1)y = 0,$$

à laquelle satisfait le polynome $\Pi_n(x, \lambda)$. Cette équation admet, d'après la théorie générale (¹) des intégrales hypergéométriques, deux solutions de la forme

$$\int_{-1}^{+1} (u-1)^{b_1-1}(u+1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}\,du$$

qui sont dans notre cas

$$(66) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{-\lambda-1}(u-x)^n\,du \qquad (\lambda < 0)$$

et

$$(67) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\lambda}(u-x)^{n-1-2\lambda}\,du \qquad (\lambda > -1).$$

L'intégrale (66) est un polynome de degré n en x, il faut donc qu'on ait, A étant une constante,

$$\Pi_n(x, \lambda) = A\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{-\lambda-1}(x-u)^n\,du.$$

Pour déterminer A faisons dans cette égalité $x = 1$, nous aurons

$$2^n\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(-\lambda)}{n!} = 2^{n-2\lambda-1}\frac{\Gamma(n-\lambda)\,\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(n-2\lambda)}\,A.$$

D'où la valeur de A, et par suite

$$(68) \qquad \Pi_n(x, \lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}\,\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)\,n!}\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{-\lambda-1}(x-u)^n\,du.$$

Ou bien, en faisant $u = \cos\varphi$,

$$(68') \qquad \Pi_n(x, \lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}\,\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)\,n!}\int_0^{\pi} (x-\cos\varphi)^n(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi.$$

Sous ces formes, on voit immédiatement que les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ sont de la classe de polynomes de M. Appell (²).

(¹) *Voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 320.

(²) Plus généralement, les polynomes

$$(1) \qquad A_n = \int_{\alpha}^{\beta} (x-u)^n\varphi(u)\,du$$

29. Les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ ont une autre forme intéressante. En comparant les équations différentielles (3) et (65), on voit que (65) aura pour solution l'expression

$$(1-x^2)^{n-\lambda}\frac{d^n(1-x^2)^\lambda}{dx^n}$$

qui est un polynome de degré n. Il résulte que l'on a

$$\Pi_n(x, \lambda) = A(1-x^2)^{n-\lambda}\frac{d^n(1-x^2)^\lambda}{dx^n}.$$

---

sont de la même classe. Cherchons à mettre les polynomes de M. Appell sous la forme (1). Formons pour cela la fonction génératrice que donne M. Appell (*loc. cit.*, p. 121),

$$\sum \frac{A_n}{n!}h^n = a(h)e^{hx} = \int e^{h(x-u)}\varphi(u)\,du.$$

Nous sommes donc conduit à l'équation de Fredholm de première espèce

$$a(h) = \int_\alpha^\beta e^{-uh}\varphi(u)\,du. \tag{2}$$

Dans le cas particulier $a(h) = e^{\frac{h^2}{2}}$, cette équation intégrale se résout facilement. En partant, en effet, de l'équation différentielle

$$a'(h) - ha(h) = 0,$$

à laquelle satisfait $e^{\frac{h^2}{2}}$, et en remplaçant $a(h)$ par sa valeur (2), nous aurons

$$[e^{-uh}\varphi(u)]_\beta^\alpha - \int_\alpha^\beta [\varphi'(u) + u\varphi(u)]e^{-hu}\,du = 0,$$

égalité à laquelle on satisfait en prenant $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$, solution de

$$\varphi'(u) + u\varphi(u) = 0,$$

$\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$. Nous aurons donc

$$e^{\frac{h^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uh-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

et, par conséquent,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-u)^n e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

On a ainsi une représentation intégrale des polynomes d'Hermite. On pourrait résoudre l'équation intégrale (2) par la même méthode, lorsque $a(h)$ satisfait à une équation différentielle linéaire de Laplace.

Pour déterminer la constante A, faisons $x = -1$ dans les deux membres et nous aurons

$$2^n \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} = 2^n \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\mathrm{A}.$$

Donc

$$\Pi_n(x,\lambda) = \frac{1}{n!}(1-x^2)^{n-\lambda}\frac{d^n(1-x^2)^\lambda}{dx^n}. \tag{69}$$

30. De la comparaison des relations (15) et (69), nous déduisons

$$\mathrm{P}_n(x,\lambda) = (-1)^n \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)}\Pi_n\left(x,\, n-\lambda-\frac{1}{2}\right), \tag{70}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (60), l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}(x^2-1)^{\frac{n}{2}}\Pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\lambda\right)\\ = (-1)^n \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)}\Pi_n\left(x,\, n-\lambda-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

31. L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{\lambda-n}(x-y)^{2n-2\lambda-1}\Pi_n(y,\lambda)\,dy$$

est solution de l'équation (65) si $\lambda > n$, car cette intégrale se ramène à (67) en nous servant de (69).

32. L'égalité (68) pourra s'écrire, après avoir multiplié ses deux membres par α^n,

$$\begin{aligned}&\alpha^n\Pi_n(x,\lambda)\\ &= \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{n!}(\alpha u-\alpha x)^n(1-u^2)^{-\lambda-1}du.\end{aligned}$$

En faisant $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *ad. inf.*, et en additionnant toutes ces égalités, nous aurons, en supposant $|\alpha(u-x)| < 1$,

$$[(1-\alpha x)^2-\alpha^2]^\lambda = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}[1-\alpha(x-u)]^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}du, \tag{71}$$

formule qui nous sera utile dans les généralisations des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ et $P_n(x, \lambda)$.

33. En écrivant l'égalité (68') sous la forme

$$\frac{\alpha^n}{\Gamma(n-2\lambda)}\Pi_n(x, \lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_0^\pi \frac{(\alpha x - \alpha\cos\varphi)^n}{n!}(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi,$$

nous obtiendrons le développement valable quels que soient x et α

$$\sum \frac{\alpha^n}{\Gamma(n-2\lambda)}\Pi_n(x, \lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}}{\Gamma^2(-\lambda)}e^{\alpha x}\int_0^\pi e^{\alpha\cos\alpha}(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi.$$

Mais d'après une formule connue, qui se vérifie facilement,

$$(72)\qquad \int_0^\Pi e^{\alpha\cos\alpha}(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi = \sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(i\alpha),$$

$J^\mu(x)$ étant la fonction cylindrique

$$J^\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2n}.$$

Nous aurons donc

$$(73)\qquad e^{\alpha x}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(i\alpha) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum \alpha^n\frac{\Pi_n(x, \lambda)}{\Gamma(n-2\lambda)}$$

qui correspond au développement générateur que donne M. Appell pour ses polynomes. Le cas $\lambda = -\frac{1}{2}$ est particulièrement simple.

34. Les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ peuvent, comme cas limite, se réduire à des polynomes d'Hermite. Ceci résulte du fait que la fonction génératrice de ces polynomes

$$[(1-\alpha x)^2 - \alpha^2]^\lambda$$

est de la forme de l'expression (51). On pourrait le voir aussi en partant de (69). Nous aurons, de toute manière,

$$\frac{1}{n!}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = \lim_{\lambda=-\infty}\left(\frac{1}{-2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}\Pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{-2\lambda}}, \lambda\right)$$

En appliquant ce résultat à la formule (68) on est conduit à

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = \lim_{\lambda=-\infty} \left(\frac{1}{-2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x}{\sqrt{-2\lambda}} - u\right)^n (1-u^2)^{-\lambda-1} du.$$

Cherchons la limite du second membre. Posons pour cela $u = \frac{v}{\sqrt{-2\lambda}}$. Nous aurons, en faisons croître λ indéfiniment,

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} (x-v)^n e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

où

$$A = \lim_{\lambda=-\infty} \left(\frac{1}{-2\lambda}\right)^{n-\frac{1}{2}} 2^{2\lambda+1} (n-2\lambda-1)(n-2\lambda-2)\dots(-2\lambda) \frac{\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}$$

ou bien, plus simplement,

$$A = \lim_{\lambda=-\infty} \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} 2^{2\lambda+1} \frac{\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}.$$

Et comme

$$\frac{2^{-2\lambda-1}\Gamma^2(-\lambda)}{\Gamma(-2\lambda)} = \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{-\lambda-1} dy = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} \int_{-\sqrt{-2\lambda}}^{+\sqrt{-2\lambda}} \left(1 + \frac{t^2}{2\lambda}\right)^{-\lambda-1} dt,$$

il résulte que

$$\frac{1}{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Donc

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} (x-v)^n e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

résultat trouvé précédemment en note.

35. Si nous considérons les polynomes

$$O_n(x, \lambda) = x^n \Pi_n\left(\frac{1}{x}, \lambda\right)$$

qui ont pour fonction génératrice la fonction

$$[(1-\alpha)^2 - \alpha^2 x^2]^\lambda$$

· et pour représentation intégrale, comme on le déduit de (68'),

$$O_n(x,\lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)n!}\int_0^\pi (1-x\cos\varphi)^n(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi,$$

on déduit

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma^2(-\lambda)n!}{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)} O_n\left(\frac{x}{n},\lambda\right) = \int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}\,d\varphi,$$

ou bien, en tenant compte de (72),

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(-\lambda)n!}{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)} O_n\left(\frac{x}{n},\lambda\right) = \sqrt{\pi}\left(\frac{ix}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix).$$

En partant de l'équation différentielle (65) on trouve que le polynome $O_n(x, \lambda)$ satisfait à l'équation

$$x(1-x^2)y'' + 2[(n-1)x^2-\lambda]y' + n(1-n)xy = 0.$$

En remplaçant dans cette équation x par $\frac{x}{n}$, en divisant par n et en faisant, ensuite, croître indéfiniment n, on trouve un résultat connu, à savoir l'équation

$$xy'' - 2\lambda y' - xy = 0$$

a

$$\left(\frac{ix}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix)$$

pour solution.

Autres propriétés des polynomes $P_n(x, \lambda)$.

36. La relation (60)

$$P_n(x,\lambda) = (x^2-1)^{\frac{n}{2}}\Pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\lambda\right)$$

nous permet d'étendre les propriétés précédentes des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ aux polynomes $P_n(x, \lambda)$.

De (68), on déduit ainsi

$$(74)\quad P_n(x,\lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)n!}\int_{-1}^{+1}(x-u\sqrt{x^2-1})^n(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du \quad (\lambda>0).$$

Transformons cette formule de manière à avoir les coefficients de x^p dans le polynome $P_n(x, \lambda)$. Considérons, pour cela, l'intégrale

$$\iint (au + bv + c)^n (1 - u^2 - v^2)^{\theta - 1}\, du\, dv \qquad (\theta > 0),$$

étendue au domaine $u^2 + v^2 \leqq 1$. Faisons la transformation

$$u = \frac{a\xi + b\eta}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad v = \frac{b\xi - a\eta}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

L'intégrale précédente deviendra

$$\iint (\xi\sqrt{a^2+b^2} + c)^n (1 - \xi^2 - \eta^2)^{\theta-1}\, d\xi\, d\eta,$$

$\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$. En intégrant, par rapport à η, nous aurons

$$2^{2\theta-1} \frac{\Gamma^2(\theta)}{\Gamma(2\theta)} \int_{-1}^{+1} (\xi\sqrt{a^2+b^2} + c)^n (1-\xi^2)^{\theta - \frac{1}{2}}\, d\xi.$$

En identifiant cette intégrale à l'intégrale (74), nous concluons que l'on a

$$(75) \qquad P_n(x, \lambda) = \frac{-\lambda - \frac{1}{2}}{\pi} \frac{\Gamma(n - 2\lambda)}{n!\,\Gamma(-2\lambda)} \times \iint_{u^2+v^2 \leqq 1} [x(1+u) + iv]^n (1 - u^2 - v^2)^{-\lambda - \frac{3}{2}}\, du\, dv.$$

Donc le coefficient de x^p dans $P_n(x, \lambda)$ sera

$$(i)^{n-p} \frac{-\lambda - \frac{1}{2}}{\pi} \frac{\Gamma(n-2\lambda)}{n!\,\Gamma(-2\lambda)} C_n^p \iint_{u^2+v^2 \leqq 1} (1+u)^p (v)^{n-p} (1 - u^2 - v^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}\, du\, dv,$$

expression qui est nulle si p n'est pas de même parité que n.

37. La formule (71) nous conduira de même à

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda = \frac{2^{2\lambda+1}\,\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)} \int_{-1}^{+1} \left[1 - \alpha(x - u\sqrt{x^2-1})\right]^{2\lambda} (1-u^2)^{-\lambda-1}\, du.$$

Ce qui devient, en changeant α en $\frac{1}{\alpha}$,

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}[\alpha-(x-u\sqrt{x^2-1})]^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du$$

si $\alpha > 0$; mais si $\alpha < 0$, nous aurons

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}[(x-u\sqrt{x^2-1})-\alpha]^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du.$$

Le crochet sous signe d'intégration de cette dernière égalité pouvant s'écrire

$$(x-u\sqrt{x^2-1})^{2\lambda}\left(1-\frac{\alpha}{x-u\sqrt{x^2-1}}\right)^{2\lambda}$$

et en développent en série suivant les puissances de α le second facteur, ce qui est possible dans des conditions qui peuvent être remplies, nous arrivons à une autre forme intégrale des polynomes $P_n(x, \lambda)$

$$(76) \qquad P_n(x,\lambda) = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(n-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)\,n!}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du}{(x-u\sqrt{x^2-1})^{n-2\lambda}}.$$

En comparant (74) et (76) nous déduisons l'égalité

$$\int_{-1}^{+1}(x-u\sqrt{x^2-1})^n(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du = \int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du}{(x-u\sqrt{x^2-1})^{n-2\lambda}}.$$

Les formules (74) et (76) sont connues (Nielsen, *Fonction métasphérique*).

38. Le développement (73) deviendra, après la même transformation,

$$(77) \quad e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha\sqrt{1-x^2}}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{1-x^2}) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{\alpha^n}{\Gamma(n-2\lambda)}P_n(x,\lambda)$$

qui est valable quels que soient α et x. En faisant $\alpha = 0$, il nous restera

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-2\lambda)},$$

ce qui est bien une identité. Nous donnons cette vérification du coefficient numérique, parce que la formule analogue que donne M. Nielsen (*loc. cit.*, p. 202), en outre d'une faute de signe (qui se conserve dans les deux égalités suivantes), a un coefficient numérique différent du nôtre.

39. De la relation (70) nous déduisons

$$(x^2-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \lambda\right)$$
$$=(-1)^n \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)} \mathrm{P}_n\left(x, n-\lambda-\frac{1}{2}\right).$$

Donc les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ et $\mathrm{P}_n(x, \lambda)$ satisfont à une même équation fonctionnelle.

40. De la relation (70) il résulte encore que l'équation

$$\mathrm{P}_n(x, \lambda) = 0,$$

en x, a toutes ses racines imaginaires et de la forme $r\sqrt{-1}$ si $\lambda > n-1$.

41. Comme une série de la forme

$$\Sigma \mathrm{C}_n \mathrm{P}_n(x, \lambda) \alpha^n,$$

les C_n étant des constantes quelconques, satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + (2\lambda-1)x\frac{dz}{dx} + \alpha^2\frac{d^2 z}{d\alpha^2} + (1-2\lambda)\alpha\frac{dz}{d\alpha} = 0,$$

équation qui a donc pour solution aussi le premier membre de (77), il résulte, d'après (74), que l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} f\left(\alpha x - \alpha u\sqrt{x^2-1}\right)(1-u^2)^{\lambda-1} du \qquad (\lambda > 0)$$

y satisfait aussi, f étant une fonction arbitraire admettant un développement taylorien. La série

$$\Sigma \mathrm{C}_n \mathrm{R}_n(x, \lambda) \alpha^n,$$

$R_n(x, \lambda)$ étant la fonction associée (57), satisfait à la même équation aux dérivées partielles. Donc l'intégrale double

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(x-y)^{2\lambda}}{(1-y^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}} dy \int_{-1}^{+1} \varphi(\alpha y - \alpha u \sqrt{y^2-1})(1-u^2)^{-\lambda-1} du,$$

la fonction φ admettant un développement taylorien, sera une solution de la même équation.

On pourrait, d'après (49), représenter par des intégrales doubles les polynomes de Jacobi et donner, de même, des solutions de l'équation aux dérivées partielles (6).

Sur des intégrales définies et des intégrales singulières.

42. Du développement (13) nous déduisons, en multipliant les deux membres par

$$(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx,$$

et en intégrant de -1 à $+1$,

$$(78) \quad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} (1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda} dx = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx \quad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right),$$

égalité qui nous montre que l'intégrale du premier membre ne dépend pas de α si $|\alpha| < 1$. Si $|\alpha| > 1$, nous posons $\alpha = \frac{1}{\alpha_1}$ et l'on déduit la valeur de l'intégrale. Pour $|\alpha| = 1$, cette égalité subsiste; pour $\alpha = +1$, par exemple, son premier membre devient

$$2^{\lambda} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx = \int_{0}^{1} (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\lambda-\frac{1}{2}} dz = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)},$$

et nous avons trouvé aussi (32)

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)}.$$

43. De même, en partant du développement (16), on déduit

$$(79)\quad (1+\alpha)\int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{\theta-1}(1-x)^{\theta}}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\theta+\frac{1}{2}}}\,dx = \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\theta-1}(1-x)^{\theta}\,dx \quad (\theta>0),$$

égalité valable pour $|\alpha|<1$.

44. En dérivant (78) par rapport à α, nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} (\alpha-x)(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\lambda-1}\,dx = 0,$$

égalité valable pour $|\alpha|<1$, mais α peut être pris aussi près que l'on veut de $+1$ ou de -1. En comparant cette égalité à (78), nous déduisons

$$(80)\quad (1-\alpha^2)\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{1-\lambda}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)} \qquad \left(\lambda<\frac{1}{2}\right).$$

Lorsque α tend vers $+1$ ou -1, soit vers $+1$, l'intégrale du premier membre devient une intégrale singulière, car, dans l'intégration, seul l'élément voisin de $+1$ comptera.

On peut employer cette intégrale à la représentation des fonctions intégrales et bornées. En effet, $f(z)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle $(y, y-2)$, choisissons ε assez petit pour que la variation de $f(z)$ dans l'intervalle $(y, y-\varepsilon)$ soit aussi petite que possible. Comme

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{1-\lambda}}\,dx < \frac{1}{(2\alpha\varepsilon)^{1-\lambda}}\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,dx$$

et si l'on prend α suffisamment près de 1 pour que

$$(1-\alpha^2)(2\alpha\varepsilon)^{\lambda-1}$$

tende vers zéro, on voit que l'on pourra écrire

$$f(y-0) = \lim_{\alpha\to 1}(1-\alpha^2)\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\int_{-1}^{+1} f(y+x-1)\frac{(1-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{1-\lambda}}\,dx.$$

45. On peut donner une autre forme à ce résultat. Posons dans (80) $x = \cos\psi$; nous aurons

$$(1-\alpha^2)\int_0^{\pi} \frac{(\sin^2\psi)^{-\lambda}\,d\psi}{(1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2)^{1-\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)}.$$

En changeant α en $-\alpha$ et ψ en $\psi+\pi$, on voit que l'on a

$$(1-\alpha^2)\int_0^{2\pi} \frac{(\sin^2\psi)^{-\lambda}\,d\psi}{(1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2)^{1-\lambda}} = 2\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)},$$

ou bien, comme la fonction sous signe d'intégration admet la période 2π,

$$(1-\alpha^2)\int_0^{2\pi} \frac{[\sin^2(\psi-\varphi)]^{-\lambda}\,d\psi}{[1-2\alpha\cos(\psi-\varphi)+\alpha^2]^{1-\lambda}} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)}.$$

Considérons alors l'intégrale

$$(81)\quad I = (1-\alpha^2)\frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{[\sin^2(\psi-\varphi)]^{-\lambda}\,d\psi}{[1-2\alpha\cos(\psi-\varphi)+\alpha^2]^{1-\lambda}}$$

et cherchons sa limite lorsque α tend vers 1. Posons $\psi-\varphi=\psi_1$, nous aurons

$$I = (1-\alpha^2)\frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} f(\psi_1+\varphi)\frac{(\sin^2\psi_1)^{-\lambda}\,d\psi_1}{(1-2\alpha\cos\psi_1+\alpha^2)^{1-\lambda}}.$$

On voit, comme précédemment, que les deux intégrales

$$\frac{(1-\alpha^2)\,\Gamma(1-\lambda)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\int_0^{l}\frac{(\sin^2\psi_1)^{-\lambda}\,d\psi_1}{(1-2\alpha\cos\psi_1+\alpha^2)^{1-\lambda}},$$

$$\frac{(1-\alpha^2)\,\Gamma(1-\lambda)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\int_{-l}^{0}\frac{(\sin^2\psi_1)^{-\lambda}\,d\psi_1}{(1-2\alpha\cos\psi_1+\alpha^2)^{1-\lambda}}$$

ont pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque α tend vers 1, l étant positif et plus petit que 2π. Donc si $f(\psi)$ est bornée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ on aura la valeur de l'intégrale singulière

$$I = \frac{1}{2}[f(\varphi + 0) + f(\varphi - 0)].$$

Pour $\varphi = 0$, on trouve

$$I = \frac{1}{2}[f(+0) + f(2\pi - 0)].$$

L'intégrale (81) généralise l'intégrale de Poisson qu'on retrouve en faisant $\lambda = 0$.

46. Lorsque α tend vers -1, l'intégrale (79) devient aussi une intégrale singulière qu'on pourrait, de même, employer à la représentation des fonctions.

DEUXIÈME PARTIE.

Généralisation des polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite.

1. On sait que les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite proviennent du développement suivant les puissances de a et b, de l'expression

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}},$$

qui généralise la fonction génératrice des polynomes de Legendre, fonction qu'on peut écrire

$$[(1-ax)^2-a^2(x^2-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement

$$(1)\quad [(1-ax-by)^2-(\alpha^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{\lambda}=\Sigma a^m b^n U_{m,n}(x, y, \lambda)$$

définit les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ qui généralisent les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite et qui peuvent être considérés aussi comme une généralisation des polynomes $P_m(x, \lambda)$ qu'on retrouve en faisant $b=0$ et $y=0$.

Le développement (1) est valable pour $x^2+y^2 \leqq 1$ et $a^2+b^2<1$, comme nous le montrerons bientôt. Montrons, dès à présent, que, pour $x^2+y^2 \leqq 1$, $a>0$, $b>0$ et $1+a+b<\sqrt{2}$, ce développement est absolument et uniformément convergent. Mettons pour cela le premier membre de (1) sous la forme

$$\{1-[2ax+2by-2abxy+a^2(y^2-1)+b^2(x^2-1)]\}^{\lambda}=(1-u)^{\lambda}.$$

Si $\lambda<0$, le développement suivant les puissances de a et b de

$$[1-(2a+2b+2ab+a^2+b^2)]^{\lambda}$$

est absolument et uniformément convergent si $1+a+b<\sqrt{2}$, et il sera majorant pour (1). Notre proposition est donc vraie dans ce cas.

Si $\lambda > 0$, on posera $\lambda = m + \lambda_1$, où m est un entier positif et λ_1 une quantité négative et la démonstration se fera en considérant le produit

$$(1-u)^m(1-u)^{\lambda_1}.$$

2. Démontrons que le polynome $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ est de la forme

$$A(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}, \tag{2}$$

A un coefficient numérique. Nous formerons pour cela, en suivant la méthode qu'emploie Didon dans sa thèse pour les polynomes d'Hermite, un système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait l'expression (2); nous vérifierons ensuite que le polynome $U_{m,m}(x, y, \lambda)$ satisfait au même système et que ces deux solutions doivent être identiques.

Soit

$$S = (x^2+y^2-z^2)^{m+n+\mu},$$

on aura

$$x\frac{dS}{dx}+y\frac{dS}{dy}+z\frac{dS}{dz} = 2(m+n+\mu)S.$$

Différentions cette égalité m fois par rapport à x et n fois par rapport à y, nous aurons

$$x\frac{d^{m+n+1}S}{dx^{m+1}\,dy^n}+y\frac{d^{m+n+1}S}{dx^m\,dy^{n+1}}+z\frac{d^{m+n+1}S}{dz\,dx^m\,dy^n} = (m+n+2\mu)\frac{d^{m+n}S}{dx^m\,dy^n}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x\frac{d^{m+n+1}S}{dx^{m+1}\,dy^n}+y\frac{d^{m+n+1}S}{dx^m\,dy^{n+1}} - 2z^2(m+n+\mu)\frac{d^{m+n}S}{dx^m\,dy^n} \\ = (m+n+2\mu)\frac{d^{m+n}S}{dx^m\,dy^n}. \end{aligned}$$

Si l'on fait $z = 1$ dans cette égalité, et si l'on pose

$$T = \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu}}{dx^m\,dy^n},$$

il vient

$$2(m+n+\mu)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}}{dx^m\,dy^n} = x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dy}-(m+n+2\mu)T. \tag{3}$$

Soit, d'autre part,

$$E = (x^2 + y^2 - 1)^{m+n+\mu},$$

on tire

$$\frac{dE}{dx} = 2(m+n+\mu)\, x(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}.$$

En différentiant cette égalité $m+1$ fois par rapport à x et n fois par rapport à y, on a

$$\frac{d^{m+n+2}E}{dx^{m+2}\,dy^n} = 2(m+n+\mu)\, x \frac{d^{m+n+1}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}}{dx^{m+1}\,dy^n}$$
$$+ 2(m+n+\mu)(m+1)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}}{dx^m\,dy^n}.$$

De cette relation on déduit, en tenant compte de la relation (3), l'équation suivante, à laquelle satisfait la fonction T,

$$(4)\qquad \frac{d^2T}{dx^2} - x\frac{d\left[x\frac{dT}{dx} + y\frac{dT}{dy} - (m+n+2\mu)T\right]}{dx}$$
$$- (m+1)\left[x\frac{dT}{dx} + y\frac{dT}{dy} - (m+n+2\mu)T\right] = 0.$$

Si dans cette équation nous faisons un changement de fonction en prenant U pour nouvelle fonction, U étant tel que l'on ait

$$(5)\qquad T = (x^2+y^2-1)^{\mu}U,$$

nous obtiendrons une équation à laquelle satisfait le polynome (2), si l'on fait $\mu = -\lambda - \frac{1}{2}$. Nous aurons, après avoir divisé par $(x^2+y^2-1)^{\mu-1}$,

$$(x^2+y^2-1)\left[\frac{d^2U}{dx^2} - x\frac{d\Theta}{dx} - (m+1)\Theta\right] - 2\mu\left(mU - x\frac{dU}{dx}\right) - 2\mu x^2\Theta = 0,$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \Theta = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U.$$

Nous obtiendrons une autre équation à laquelle satisfait U en permutant x et y, m et n dans cette équation. Nous concluons donc que l'expression (2) satisfait au système d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$
(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2-1)\left[\frac{d^2U}{dx^2}-x\frac{d\Theta}{dx}-(m+1)\Theta\right]+(2\lambda+1)\left(mU-x\frac{dU}{dx}+x^2\Theta\right)=0,\\ &(x^2+y^2-1)\left[\frac{d^2U}{dy^2}-y\frac{d\Theta}{dy}-(n+1)\Theta\right]+(2\lambda+1)\left(nU-y\frac{dU}{dy}+y^2\Theta\right)=0. \end{aligned} \right.
$$

Démontrons à présent que $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ satisfait à ce même système. Reprenons pour cela le développement

$$
(1)\qquad H^\lambda = \Sigma a^m b^n U_{m,n},
$$

où

$$
(8)\qquad H=(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1).
$$

En dérivant (1) par rapport à a et en multipliant ensuite par a, nous aurons

$$
\lambda(-2ax-2a^2y^2+2abxy+2a^2)H^{\lambda-1}=\Sigma m a^m b^n U_{m,n}
$$

et de même

$$
\lambda(-2by-2b^2y^2+2abxy+2b^2)H^{\lambda-1}=\Sigma n a^m b^n U_{m,n},
$$

$$
\lambda(-2ax-2b^2x^2+2abxy)H^{\lambda-1}=\Sigma x a^m b^n \frac{dU_{m,n}}{dx},
$$

$$
\lambda(-2by-2a^2y^2+2abxy)=\Sigma y a^m b^n \frac{dU_{m,n}}{dy}.
$$

Nous déduisons de ces relations

$$
-2\lambda(a^2+b^2)H^{\lambda-1}=\Sigma a^m b^n \Theta_{m,n},
$$

$\Theta_{m,n}$ étant la valeur que prend Θ de (6) quand U a été remplacé par $U_{m,n}$. Et puis

$$
(9)\qquad -2\lambda a^2(x^2+y^2-1)H^{\lambda-1}=\Sigma a^m b^n\left[mU_{m,n}-x\frac{dU_{m,n}}{dx}+x^2\Theta_{m,n}\right].
$$

Et des relations

$$
\begin{aligned} &-2\lambda(3a^2+b^2)H^{\lambda-1}-2\lambda(2\lambda-1)(a^2+b^2)\\ &\quad\times(-2ax-2a^2y^2+2abxy+2a^2)H^{\lambda-2}=\Sigma(m+1)a^m b^n\Theta_{m,n}, \end{aligned}
$$

$$
-2\lambda(\lambda-1)(a^2+b^2)(-2ax-2b^2x^2+2abxy)H^{\lambda-2}=\Sigma x a^m b^n\frac{d\Theta_{m,n}}{dx},
$$

$$
-2\lambda b^2H^{\lambda-1}+\lambda(\lambda-1)(-2a-2b^2x+2aby)^2H^{\lambda-2}=\Sigma a^m b^n\frac{d^2U_{m,n}}{dx^2},
$$

et de l'identité

$$(a^2+b^2)(-2ax-b^2x^2+2abxy-a^2y^2+a^2)+(a-aby+b^2x)^2=a^2\mathrm{H}$$

il résulte que nous avons

$$(4\lambda^2+2\lambda)a^2\mathrm{H}^{\lambda-1}=\Sigma a^m b^n\left[\frac{d^2\mathrm{U}_{m,n}}{dx^2}-x\frac{d\Theta_{m,n}}{dx}-(m+1)\Theta_{m,n}\right].$$

De cette relation et de la relation (9), il résulte que le polynome $\mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda)$ satisfait à la première équation du système (7). De même pour l'autre équation du système.

Il nous reste à démontrer que la solution (2), du système (7), est la même que $\mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda)$. Faisons, pour cela, dans ce système, le changement de fonction

$$\mathrm{U}=(x^2+y^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\mathrm{T}.$$

Nous retombons sur le système d'équations

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&(1-x^2)\frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2}-xy\frac{d^2\mathrm{T}}{dx\,dy}+(n-2\lambda-3)x\frac{d\mathrm{T}}{dx}-(m+1)y\frac{d\mathrm{T}}{dy}+(m+n-2\lambda-1)(m+1)\mathrm{T}=0,\\&(1-y^2)\frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2}-xy\frac{d^2\mathrm{T}}{dx\,dy}+(m-2\lambda-3)y\frac{d\mathrm{T}}{dy}-(n+1)x\frac{d\mathrm{T}}{dx}+(m+n-2\lambda-1)(n+1)\mathrm{T}=0,\end{aligned}\right.$$

formé par l'équation (4) et son analogue. Ce système aura donc les solutions

$$(11)\quad\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}\quad\text{et}\quad(x^2+y^2-1)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda).$$

Mais le système (10) a pour intégrale générale ([1])

$$\begin{aligned}(12)\qquad&\mathrm{A}\,\mathrm{F}_2\left(\frac{2\lambda+1-m-n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x^2,y^2\right)\\&+\mathrm{B}x\;\mathrm{F}_2\left(1+\frac{2\lambda-m-n}{2},\frac{m}{2}+1,\frac{n+1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},x^2,y^2\right)\\&+\mathrm{C}y\;\mathrm{F}_2\left(1+\frac{2\lambda-m-n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n}{2}+1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2,y^2\right)\\&+\mathrm{C}xy\,\mathrm{F}_2\left(\frac{3+2\lambda-m-n}{2},\frac{m}{2}+1,\frac{n}{2}+1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},x^2,y^2\right),\end{aligned}$$

([1]) P. Appell, *Fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1882, p. 189).

$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$ étant une des fonctions hypergéométriques de deux variables de M. Appell. Comme les solutions (11) n'ont, dans leurs développements suivant les puissances des x et y, que des termes en x et y respectivement de même parité que m et n, il faut que ces deux solutions se réduisent à un même terme de la somme (12). Par exemple, si m et n sont tous deux pairs, les deux expressions (11) se réduiront à

$$A\,F_2\left(\frac{2\lambda+1-m-n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right)$$

et ne différeront que par la valeur de la constante A.

Il résulte donc bien que l'on a

$$U_{m,n}(x, y, \lambda) = A(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}+\lambda}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

Calculons le coefficient numérique A de cette relation. Posons pour cela

$$(13)\qquad D_{m,n}(x, y, \mu) = (x^2+y^2-1)^{-\mu}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu}}{dx^m\,dy^n}.$$

De l'identité

$$\frac{d(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu}}{dx} = 2(m+n+\mu)x(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1},$$

nous déduisons, en différentiant $m-1$ fois par rapport à x et n fois par rapport à y,

$$\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu}}{dx^m\,dy^n} = 2(m+n+\mu)x\frac{d^{m+n-1}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}}{dx^{m-1}\,dy^n}$$
$$+\,2(m+n+\mu)(m-1)\frac{d^{m+n-2}(x^2+y^2-1)^{m+n+\mu-1}}{dx^{m-2}\,dy^n}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(x^2+y^2-1)^{-\mu}$ et en tenant compte de (13), nous aurons

$$D_{m,n}(x, y, \mu) = 2(m+n+\mu)x\,D_{m-1,n}(x, y, \mu)$$
$$+\,2(m+n+\mu)(m-1)(x^2+y^2-1)\,D_{m-2,n}(x, y, \mu+1).$$

Si dans cette relation nous faisons $y=\sqrt{1-x^2}$, elle deviendra

$$D_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu) = 2(m+n+\mu)x\,D_{m-1,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu).$$

De proche en proche nous arrivons à la relation

$$(14)\quad D_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu) = 2^m(m+n+\mu)(m+n+\mu-1)\ldots(n+\mu+1)x^m \times D_{0,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu),$$

$D_{0,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu)$ se calcule facilement par la formule qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux facteurs, car on peut écrire

$$D_{0,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu) = \left[(x^2+y^2-1)^{-\mu} \frac{d^n(y+\sqrt{1-x^2})^{n+\mu}(y-\sqrt{1-x^2})^{n+\mu}}{dy^n}\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}$$

et l'on trouve

$$D_{0,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu) = (n+\mu)(n+\mu-1)\ldots(\mu+1)(2\sqrt{1-x^2})^n.$$

L'égalité (14) deviendra donc

$$(15)\quad D_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \mu) = 2^{m+n}(m+n+\mu)(m+n+\mu-1)\ldots(\mu+1)\, x^m(1-x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

En partant, d'autre part, du développement (1) où l'on fait $y = \sqrt{1-x^2}$, nous voyons que $U_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \lambda)$ est le coefficient de $a^m b^n$ dans le développement de

$$(1 - ax - b\sqrt{1-x^2})^{2\lambda}.$$

Donc

$$U_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \lambda) = (-1)^{m+n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!} x^m(1-x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

En faisant $\mu = -\lambda - \frac{1}{2}$ dans l'égalité (15) et en tenant compte de l'égalité

$$U_{m,n}(x, \sqrt{1-x^2}, \lambda) = A\, D_{m,n}\left(x, \sqrt{1-x^2}, -\lambda - \frac{1}{2}\right),$$

on a

$$(-1)^{m+n}\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!} = A(-1)^{m+n}(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m-2n+1).$$

Et finalement

$$(16)\quad U_{m,n}(x,y,\lambda) = \frac{1}{m!\,n!}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m-2n+1)}$$
$$\times\,(x^2+y^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

Quelques propriétés des polynomes $U_{m,n}(x,y,\lambda)$.

3. De la forme analytique (16) des polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ on déduit, par des intégrations par parties, que l'on a

$$(17)\qquad \iint (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,U_{m,n}(x,y,\lambda)\,U_{p,q}(x,y,\lambda)\,dx\,dy = 0,$$

le domaine d'intégration étant $x^2+y^2 \leqq 1$ et $m+n \neq p+q$, $\lambda < \frac{1}{2}$. Ceci résulte aussi d'une autre propriété des polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$. En faisant, en effet, la somme des équations du système (7), on trouve l'équation aux dérivées partielles

$$(18)\quad (1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2xy\frac{d^2z}{dx\,dy} + (1-y^2)\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$+(2\lambda-2)\left(x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right)+(m+n)(m+n-2\lambda+1)z = 0,$$

à laquelle satisfait $U_{m,n}(x, y, \lambda)$. Et, d'après un théorème [1] de M. Appell sur les équations de la forme (18), il résulte que l'on a l'égalité (17).

4. L'équation en x

$$(19)\qquad U_{m,n}(x,y,\lambda) = 0,$$

où $\lambda < \frac{1}{2}$ et $|y| < 1$, a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre $-\sqrt{1-y^2}$ et $+\sqrt{1-y^2}$. En effet, il résulte de la formule (16)

[1] *Journal de Mathématiques*, 1882, p. 212.

que l'on a

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} (1-y^2-x^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \mathrm{U}_{m,n}(x, y, \lambda)\, \varphi(x)\, dx = 0,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome quelconque de degré inférieur à m.

Si l'équation (19) n'admet que i racines réelles $x_1, x_2, \ldots, x_i$ comprises entre $-\sqrt{1-y^2}$ et $+\sqrt{1-y^2}$, posons

$$\mathrm{P} = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i)$$

et

$$\mathrm{P}.\mathrm{Q} = \mathrm{U}_{m,n}(x, y, \lambda),$$

Q ne changeant pas de signe dans l'intervalle $-\sqrt{1-y^2}$ à $+\sqrt{1-y^2}$. Or, en prenant $\varphi(x) = \mathrm{P}$, l'intégrale précédente devient

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \mathrm{P}^2\mathrm{Q}\, dx = 0,$$

ce qui n'est possible que si Q change de signe dans l'intervalle

$$-\sqrt{1-y^2} \quad \text{à} \quad +\sqrt{1-y^2}.$$

Il faut donc que $i = m$.

5. Démontrons que la courbe $\mathrm{U}_{m,n}(x, y, \lambda) = 0$, abstraction faite du facteur x ou y, suivant les cas, sera toute comprise dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2 = 1$, si $\lambda < 0$.

En désignant toujours par H l'expression (8), écrivons, pour cela,

$$\mathrm{H}^\lambda = u^{2\mu}[1-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)u^2]^{-\mu},$$

où l'on a posé $\lambda = -\mu$, μ étant essentiellement positif et

$$u = (1-ax-by)^{-1}.$$

Nous aurons alors le développement

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^\lambda = {} & u^{2\mu} + \mu(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)u^{2(\mu+1)} + \ldots \\ & + \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+i-1)}{i!}(a^2+b^2)^i(x^2+y^2-1)^i u^{2(\mu+i)} + \ldots.\end{aligned}$$

En égalant l'ensemble homogène des termes de degré k en a et b des deux membres, nous aurons

$$a^k U_{k,0}(x, y, \lambda) + a^{k-1} b U_{k-1,1}(x, y, \lambda) + \ldots + b^k U_{0,k}(x, y, \lambda)$$
$$= \frac{2\mu(2\mu+1)\ldots(2\mu+k-1)}{k!}(ax+by)^k + \ldots$$
$$+ \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+i-1)}{i!} \frac{(2\mu+2i)(2\mu+2i+1)\ldots(2\mu+k-1)}{(k-2i)!}$$
$$\times (a^2+b^2)^i (x^2+y^2-1)^i (ax+by)^{k-2i} + \ldots.$$

Cette relation met ce fait en évidence, que pour des valeurs positives des coordonnées, rendant positif x^2+y^2-1, toutes les quantités $U_{k,0}$, $U_{k-1,1}$, ..., $U_{0,k}(x, y, \lambda)$ seront également positives si $\lambda < 0$. Or, $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ étant de l'une des formes

$$F(x^2, y^2), \qquad x F(x^2, y^2), \qquad y F(x^2, y^2), \qquad xy F(x^2, y^2)$$

ne pourra, par conséquent, jamais s'annuler, quel que soit le signe des coordonnées, abstraction faite du facteur x ou y, qu'en supposant $x^2+y^2-1 < 0$, ce qui démontre notre proposition.

6. M. Appell montre [1] comment les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite peuvent être rattachés aux polynomes X_n de Legendre. On peut voir, de même, comment les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ se rattachent aux polynomes $P_n(x, \lambda)$. En effet, si dans le développement (1) nous posons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad a = \rho\cos\alpha, \qquad b = \rho\sin\alpha,$$

il deviendra

$$[1 - 2\rho r\cos(\theta-\alpha) + \rho^2 - \rho^2 r^2 \sin^2(\theta-\alpha)]^\lambda = \Sigma \rho^N H_N$$

avec

$$H_N = \sum_{m+n=N} \cos^m\alpha \sin^n\alpha \, U_{m,n}(x, y, \lambda).$$

On déduit facilement de là que l'on a

$$H_N = [1 - r^2\sin^2(\theta-\alpha)]^{\frac{N}{2}} P_N\left[\frac{r\cos(\theta-\alpha)}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\theta-\alpha)}}, \lambda\right]$$

ou bien

$$H_N = [1 - (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2]^{\frac{N}{2}} P_N\left[\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sqrt{1-(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}}, \lambda\right].$$

---

[1] *Annaes da Academia polytechnica do Porto*, t. V, 1910, p. 65.

En rendant le deuxième membre homogène en $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, on voit qu'on peut former tous les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ d'un même degré donné $m+n=N$, au moyen du polynome $P_N(x, \lambda)$.

Les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ peuvent être définis aussi à l'aide des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$. On vérifie, en effet, sans difficulté, la relation

$$\sum_{m+n=N} a^m b^n U_{m,n}(x, y, \lambda) = (a^2+b^2)^{\frac{N}{2}} (x^2+y^2-1)^{\frac{N}{2}} \times \Pi_N\left[\frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}}, \lambda\right].$$

7. Étendons aux polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ une autre propriété que donne [1] M. Appell pour les polynomes d'Hermite. Considérons l'intégrale

$$\iint (x^2+y^2)^s (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} U_{m,n}(x, y, \lambda)\, dx\, dy, \tag{20}$$

$\lambda < \frac{1}{2}$, $x^2+y^2 \leqq 1$; elle est nulle si $2s < m+n$. En exprimant cette propriété en coordonnées polaires, nous aurons

$$\int_0^1 r^{2s+1}(1-r^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dr \int_0^{2\pi} U_{m,n}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\, d\theta = 0.$$

Mais l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} U_{m,n}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\, d\theta$$

est nulle si les entiers m et n ne sont pas tous les deux pairs.

Soient donc $m = 2p$, $n = 2q$ et

$$R_{p,q}(r^2, \lambda) = \int_0^{2\pi} U_{2p,2q}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\, d\theta,$$

$R_{p,q}(r^2, \lambda)$ est un polynome de degré $p+q$ en r^2 et tel que

$$\int_0^1 R_{p,q}(r^2, \lambda)(1-r^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} r^{2s+1}\, dr = 0$$

---

[1] *Annaes da Academia polytechnica do Porto*, t. V, 1910, p. 209.

pour toute valeur de $s < p + q$. En faisant $r^2 = z$ nous aurons

$$\text{(21)} \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 R_{p,q}(z, \lambda)(1 - z)^{-\lambda-\frac{1}{2}} z^s\, dz = 0.$$

Ceci nous montre que l'on a

$$R_{p,q}(z, \lambda) = A_{p,q}(1 - z)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{p+q} z^{p+q}(1 - z)^{p+q-\lambda-\frac{1}{2}}}{dz^{p+q}},$$

$A_{p,q}$ étant un facteur constant. Donc, tous les polynomes $R_{p,q}(z, \lambda)$ d'un même degré $p + q$ sont égaux, à des facteurs constants près, à un même polynome. Ce résultat établi pour $\lambda < \frac{1}{2}$ est, évidemment, valable quel que soit λ. $A_{p,q}$ se calcule facilement en faisant $s = p + q$ et en égalant les valeurs des intégrales (20) et (21). L'intégrale (20) se réduit après avoir remplacé $U_{2p,2q}(x, y, \lambda)$ par sa valeur (16), à

$$\frac{1}{(2p)!}\,\frac{1}{(2q)!}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-2p-2q+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-4p-4q+1)}\,\frac{d^{2p+2q}(x^2+y^2)^{p+q}}{dx^{2p}\,dy^{2q}}$$
$$\times\iint(1 - x^2 - y^2)^{2p+2q-\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$

ou bien

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-2p-2q+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-4p-4q+1)}\,\frac{2\pi}{4p+4q-2\lambda-1}.$$

L'intégrale (21) se calcule facilement et l'on trouve

$$(-1)^{p+q} A_{p,q}[(p+q)!]^2 \frac{\Gamma\left(p+q-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(2p+2q-\lambda+\frac{3}{2}\right)}.$$

En égalant ces deux dernières expressions, on trouve

$$A_{p,q} = \frac{4\pi}{4p+4q-2\lambda+1}\,\frac{(-1)^{p+q}}{p!\,q!\,(p+q)!}$$
$$\times\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-2p-2q+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-4p-4q+1)}\,\frac{\Gamma\left(2p+2q-\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(p+q-\lambda+\frac{1}{2}\right)}.$$

D'où il résulte aussi l'égalité

$$(N-p)!\,p!\int_0^{2\pi} U_{2N-2p,2p}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\,d\theta$$
$$= (N-q)!\,q!\int_0^{2\pi} U_{2N-2q,2q}(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\,d\theta.$$

8. Changeons dans le développement (1) x en $x\sqrt{\frac{1}{-2\lambda}}$, y en $y\sqrt{\frac{1}{-2\lambda}}$, a en $a\sqrt{\frac{1}{-2\lambda}}$, b en $b\sqrt{\frac{1}{-2\lambda}}$. Nous aurons, pour le premier membre,

$$\left(1+\frac{ax+by-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\dfrac{abxy-\frac{1}{4}b^2x^2-\frac{1}{4}a^2y^2}{\lambda}}{\lambda}\right)^{\lambda},$$

et en faisant croître λ indéfiniment par des valeurs négatives, ce premier membre aura comme limite

$$e^{ax+by-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2} = e^{ax-\frac{1}{2}a^2}\,e^{by-\frac{1}{2}b^2}.$$

Donc

$$\lim_{\lambda=-\infty} m!\,n!\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^{\frac{m+n}{2}} U_{m,n}\left(x\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\, y\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\, \lambda\right)$$
$$= (-1)^m e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^m e^{-\frac{1}{2}x^2}}{dx^m}(-1)^n e^{\frac{1}{2}y^2}\frac{d^n e^{-\frac{1}{2}y^2}}{dy^n}.$$

Autres polynomes remarquables à deux variables.

9. Les polynomes $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$, définis par le développement

(22) $$[(1-\alpha x-\beta y)^2-\alpha^2-\beta^2]^{\lambda} = \Sigma\, \alpha^m \beta^n\, \Pi_{m,n}(x, y, \lambda),$$

sont des généralisations des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ que nous avons considérés dans la première Partie. Remarquons que si nous faisons

$$\alpha = a\sqrt{x_1^2+y_1^2-1}, \qquad \beta = b\sqrt{x_1^2+y_1^2-1},$$
$$x = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-1}}, \qquad y = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-1}},$$

le premier membre de (22) devient identique au premier membre de (1); donc

$$(23)\quad U_{m,n}(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2 - 1)^{\frac{m+n}{2}} \Pi_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \lambda\right)$$

et inversement

$$(24)\quad \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2 - 1)^{\frac{m+n}{2}} U_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \lambda\right).$$

10. Ces polynomes $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$ peuvent être définis à l'aide des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$. En effet, on voit facilement que l'on a

$$(25)\qquad \sum_{m+n=N} a^m b^n \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = (a^2 + b^2)^{\frac{N}{2}} \Pi_N\left(\frac{ax + by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \lambda\right),$$

et que le second membre est un polynome homogène de degré N en a et b.

11. Du développement (22) et de ses dérivées par rapport à α, β, x et y on déduit les relations

$$(26)\quad (m + n - 2\lambda)\, \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = \frac{d\, \Pi_{m+1,n}(x, y)}{dx} = \frac{d\, \Pi_{m,n+1}(x, y, \lambda)}{dy}$$

qui nous montrent que les polynomes $\Pi_{m,n}$ rentrent dans la classe des polynomes de M. Appell.

12. Du développement (22) et de sa dérivée par rapport à α, on déduit une relation entre les six polynomes $\Pi_{m,n}$, $\Pi_{m,n-1}$, $\Pi_{m,n-2}$, $\Pi_{m-1,n}$, $\Pi_{m-1,n-1}$, $\Pi_{m-2,n}$ de même paramètre λ, qui, à l'aide des relations (26), nous conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&(m - 2\lambda - 2)(x^2 - 1)\frac{d^2 z}{dx^2} + 2(m - \lambda - 1)xy\frac{d^2 z}{dx\, dy} \\
&\quad + m(y^2 - 1)\frac{d^2 z}{dy^2} - 2(m - \lambda - 1)(m + n - 2\lambda - 2)x\frac{dz}{dx} \\
&\quad - 2m(m + n - 2\lambda - 2)y\frac{dz}{dy} + m(m + n - 2\lambda - 1)(m + n - 2\lambda - 2)z = 0,
\end{aligned}$$

à laquelle satisfait le polynome $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$. En permutant m et n, x et y, nous obtiendrons une deuxième équation à laquelle satisfait ce même polynome. Si l'on élimine entre ces deux équations $\frac{d^2 z}{dy^2}$ et $\frac{d^2 z}{dx^2}$ on obtient le système d'équations plus simples

$$(27)\quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{d^2 z}{dx^2} - xy\dfrac{d^2 z}{dx\,dy} + (n+2m-2\lambda-2)x\dfrac{dz}{dx} + my\dfrac{dz}{dy} - m(m+n-2\lambda-1)z = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{d^2 z}{dy^2} - xy\dfrac{d^2 z}{dx\,dy} + (m+2n-2\lambda-2)y\dfrac{dz}{dy} + nx\dfrac{dz}{dx} - n(m+n-2\lambda-1)z = 0, \end{cases}$$

auquel satisfait le polynome $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$.

13. Considérons l'intégrale (71), que nous avons trouvée dans la première Partie,

$$[(1-az)^2 - a^2]^\lambda = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}(1-az+au)^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du \quad (\lambda<0)$$

et posons

$$az = \alpha x + \beta y \qquad \text{et} \qquad a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

nous aurons ainsi

$$(28)\quad \begin{aligned} &[(1-\alpha x-\beta y)^2 - \alpha^2 - \beta^2]^\lambda \\ &= \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}\left(1-\alpha x-\beta y+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,u\right)^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du. \end{aligned}$$

Mais par une transformation orthogonale, comme nous l'avons vu à propos de l'intégrale (75), on prouve que

$$\begin{aligned} &2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma^2\left(-\lambda-\frac{1}{2}\right)}\iint_{u^2+v^2\leqq 1}(1-\alpha x-\beta y+\alpha u+\beta v)^{2\lambda}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}} \\ &= \int_{-1}^{+1}\left(1-\alpha x-\beta y+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,u\right)^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du. \end{aligned}$$

Donc l'égalité (28) deviendra

$$(29)\quad \begin{aligned} &[(1-\alpha x-\beta y)^2 - \alpha^2 - \beta^2]^\lambda \\ &= \frac{-\lambda-\frac{1}{2}}{\pi}\iint_{u^2+v^2\leqq 1}[1-\alpha(x-u)-\beta(y-v)]^{2\lambda} \\ &\qquad \times (1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}\,du\,dv. \end{aligned}$$

En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de α et β, on déduit la représentation intégrale

$$(30)\quad \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = (-1)^{m+n+1}\frac{2\lambda+1}{2\pi}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!}$$
$$\times \iint_{u^2+v^2\leq 1}(x-u)^m(y-v)^n(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv,$$

où l'on suppose, bien entendu, $\lambda < -\frac{1}{2}$.

14. De cette formule on peut obtenir un développement analogue à (73). On déduit, en effet,

$$\Sigma(-1)^{m+n}\frac{\alpha^m\beta^n}{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m-n+1)}\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$$
$$= -\frac{2\lambda+1}{2\pi}\iint_{u^2+v^2\leq 1} e^{(x-u)\alpha+(y-v)\beta}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv.$$

L'intégrale du second membre se réduit à

$$-\frac{2\lambda+1}{\pi}\,\frac{2^{-2\lambda-2}\Gamma\left(-\lambda-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-2\lambda-1)}\int_{-1}^{+1}e^{x\alpha+y\beta-u\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(1-u^2)^{-\lambda-1}du$$
$$= \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}e^{x\alpha+y\beta}\int_0^{\pi}e^{-\cos\varphi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\sin\varphi)^{-2\lambda-1}d\varphi.$$

D'où, comme pour (73), le développement

$$(31)\qquad e^{\alpha x+\beta y}\left(\frac{i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}J^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{\alpha^m\beta^n}{\Gamma(m+n-2\lambda)}\Pi_{m,n}(x, y, \lambda),$$

valable quels que soient α, β, x et y.

15. On peut voir, par les mêmes changements que pour les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$, que les polynomes $\Pi_n(x, y, \lambda)$ se réduisent, dans un cas limite, au produit des deux polynomes d'Hermite à une variable

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{d^m e^{\frac{1}{2}x^2}}{dx^m}\,e^{-\frac{1}{2}y^2}\frac{d^n e^{\frac{1}{2}y^2}}{dy^n}.$$

16. Considérons les polynomes

$$O_{m,n}(x, y, \lambda) = x^m y^n \Pi_{m,n}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \lambda\right)$$

qui ont pour fonction génératrice

$$[(1-\alpha-\beta)^2 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2]^\lambda.$$

Ces polynomes peuvent se définir à l'aide des polynomes $O_n(x, \lambda)$ d'une seule variable, par la relation facile à établir

$$\sum_{m+n=N} \alpha^m \beta^n O_{m,n}(x, y, \lambda) = (\alpha+\beta)^N O_N\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}}{\alpha+\beta}, \lambda\right).$$

De la relation (30) on déduit

$$(32)\quad O_{m,n}(x, y, \lambda) = (-1)^{m+n+1} \frac{2\lambda+1}{2\pi} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!} \times \iint_{u^2+v^2 \leqq 1} (1-xu)^m (1-yv)^n (1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}} du\, dv.$$

D'où l'égalité limite

$$(33)\quad \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} (-1)^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)} O_{m,n}\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \lambda\right) = \frac{2\lambda+1}{2\pi} \iint_{u^2+v^2 \leqq 1} e^{-xu-yv} (1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}} du\, dv.$$

Il est intéressant de remarquer que le second membre de cette égalité peut être considéré comme une généralisation de la fonction cylindrique

$$\left(\frac{ix}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix)$$

qu'on retrouve en faisant $y = 0$.

Du système (27), auquel satisfait $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$, on déduit le système d'équations aux dérivées partielles

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} & x(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + y\frac{d^2 z}{dx\, dy} + [2(m-1)x^2 - 2\lambda]\frac{dz}{dx} + m(1-m)xz = 0, \\ & y(1-y^2)\frac{d^2 z}{dy^2} + x\frac{d^2 z}{dx\, dy} + [2(n-1)y^2 - 2\lambda]\frac{dz}{dy} + n(1-n)yz = 0, \end{aligned} \right.$$

auquel satisfait $O_{m,n}(x, y, \lambda)$. Vérifions-le, pour la première équation, en prenant ce polynome sous sa forme (32). On sera conduit à prouver que

$$\begin{aligned}\int\!\!\int&[(1-m)x(1-u^2)+2\lambda u(1-ux)]\\&\times(1-ux)^{m-2}(1-vy)^n(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv\\&=-\int\!\!\int nuvy(1-ux)^{m-1}(1-vy)^{n-1}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv\end{aligned}$$

ou bien, en développant $(1-vy)^n$ et $(1-vy)^{n-1}$ et en égalant les mêmes puissances de y,

$$\begin{aligned}\int\!\!\int&[x(1-m)(1-u^2)+(2\lambda-p)u(1-ux)]\\&\times(1-ux)^{m-2}v^p(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv=0.\end{aligned}$$

Pour p impair, cette intégrale est bien nulle. Pour p pair, elle se réduit, après avoir intégré par rapport à v, à

$$\int_{-1}^{+1}[x(1-m)(1-u^2)+(2\lambda-p)u(1-ux)](1-ux)^{m-2}(1-u^2)^{\frac{p}{2}-\lambda-1}du=0,$$

égalité qu'on vérifie immédiatement.

Du système (34) on déduit, en tenant compte de l'égalité (33), le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}x\frac{d^2z}{dx^2}+y\frac{d^2z}{dx\,dy}-2\lambda\frac{dz}{dx}-xz=0,\\y\frac{d^2z}{dy^2}+x\frac{d^2z}{dx\,dy}-2\lambda\frac{dz}{dy}-yz=0,\end{aligned}$$

qui a pour solution

$$\int\!\!\int_{u^2+v^2\leqq 1}e^{-xu-yv}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv.$$

La première équation du système (34) ne dépendant pas de n, il résulte que cette équation aux dérivées partielles a pour solution l'intégrale

$$(35)\qquad \int\!\!\int_{u^2+v^2\leqq 1}f(1-yv)(1-xu)^m(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv,$$

f désignant une fonction quelconque admettant un développement taylorien.

Remarquons encore que la vérification que nous avons donnée reste la même dans le cas où m et n ne sont plus des entiers.

Les intégrales (32) et (35) satisferont donc aux mêmes équations aux dérivées partielles, m et n étant des quantités quelconques.

17. Les polynomes $A_{m,n}(x, y, \lambda)$ définis par le développement

$$[(1-\alpha x-\beta y)^2-(\alpha+\beta)^2]^\lambda = \Sigma\, \alpha^m \beta^n A_{m,n}(x, y, \lambda)$$

sont aussi des généralisations des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$. On vérifie, sans difficulté, qu'on a

$$(m+n-2\lambda) A_{m,n}(x, y, \lambda) = \frac{d A_{m+1,n}(x, y, \lambda)}{dx} = \frac{d A_{m,n+1}(x, y, \lambda)}{dy},$$

donc ces polynomes sont de la classe de polynomes de M. Appell, et que le polynome $A_{m,n}(x, y, \lambda)$ satisfait au système d'équations aux dérivées partielles

$$(36)\left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2}+(1-xy)\frac{d^2 z}{dx\,dy}+(n+2m-2\lambda-2)x\frac{dz}{dx}+my\frac{dz}{dy}-m(m+n-2\lambda-1)z=0,\\ &(1-y^2)\frac{d^2 z}{dy^2}+(1-xy)\frac{d^2 z}{dx\,dy}+(m+2n-2\lambda-2)x\frac{dz}{dy}+nx\frac{dz}{dx}-n(m+n-2\lambda-1)z=0. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale (71) nous donnera, de même que pour (28),

$$\begin{aligned} &[(1-\alpha x-\beta y)^2-(\alpha+\beta)^2]^\lambda \\ &\quad = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}[1-\alpha(x-u)-\beta(y-u)]^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}du; \end{aligned}$$

d'où la représentation intégrale

$$\begin{aligned} (37)\quad A_{m,n}(x, y, \lambda) &= (-1)^{m+n}\frac{2^{2\lambda+1}\Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(-\lambda)}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!} \\ &\quad \times\int_{-1}^{+1}(x-u)^m(y-u)^n(1-u^2)^{-\lambda-1}\,du. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une solution du système (36) mise sous forme d'intégrale définie. De la relation (37) on déduit le développement analogue à (31)

$$e^{\alpha x+\beta y}\left(\frac{i\alpha+i\beta}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{-\lambda-\frac{1}{2}}(i\alpha+i\beta)$$
$$=\frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{\alpha^m\beta^n}{\Gamma(m+n-2\lambda)}\mathrm{A}_{m,n}(x,y,\lambda),$$

valable quels que soient α, β, x et y.

On pourrait considérer aussi les polynomes

$$x^m y^n \mathrm{A}_{m,n}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\lambda\right),$$

et étendre à ces polynomes toutes les propriétés établies pour $\mathrm{O}_{m,n}(x,y,\lambda)$.

Représentation intégrale des polynomes $\mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda)$.

18. Nous avons vu que

$$(23)\quad \mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda)=(x^2+y^2-1)^{\frac{m+n}{2}}\Pi_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}},\lambda\right),$$

donc l'intégrale (30) nous donnera

$$(38)\quad \mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda)=(-1)^{m+n+1}\frac{2\lambda+1}{2\pi}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!}$$
$$\times\iint_{u^2+v^2\leq 1}(x-u\sqrt{x^2+y^2-1})^m$$
$$\times(y-v\sqrt{x^2+y^2-1})^n$$
$$\times(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}\,du\,dv.$$

19. Le développement (31) deviendra, après les transformations qui relient les polynomes $\Pi_{m,n}$ et $\mathrm{U}_{m,n}$,

$$(39)\quad e^{ax+by}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\mathrm{J}^{-\lambda-\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1-x^2-y^2})$$
$$=\frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{a^m b^n}{\Gamma(m+n-2\lambda)}\mathrm{U}_{m,n}(x,y,\lambda),$$

valable quels que soient a, b, x et y.

20. De même, l'intégrale (29) devient

$$[(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^\lambda$$
$$= -\frac{2\lambda + 1}{2\pi} \int\!\!\int_{u^2+v^2 \leqq 1} \left(1 - ax - by + au\sqrt{x^2+y^2-1} + bv\sqrt{x^2+y^2-1}\right)^{2\lambda}$$
$$\times (1 - u^2 - v^2)^{-\lambda - \frac{3}{2}} du\, dv.$$

Démontrons, à l'aide de cette intégrale, que le développement (1) est convergent si

$$x^2 + y^2 \leqq 1 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 < 1.$$

Supposons d'abord $\lambda < -\frac{1}{2}$, alors cette intégrale est finie, et le développement (1) sera convergent dans les mêmes conditions que le développement suivant les puissances de a et b de

$$\left(1 - ax - by + au\sqrt{x^2+y^2-1} + bv\sqrt{x^2+y^2-1}\right)^{2\lambda}.$$

Ce développement sera convergent si

$$\left|- ax - by + iau\sqrt{1-x^2-y^2} + ibv\sqrt{1-x^2-y^2}\right| < 1$$

ou bien si

$$(ax + by)^2 + (au + bv)^2(1 - x^2 - y^2) < 1.$$

En passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad a = \rho\cos\varphi,$$
$$b = \rho\sin\varphi, \qquad u = R\cos\psi, \qquad v = R\sin\psi,$$

il revient à prouver que

$$r^2\rho^2 + R^2\rho^2(1 - r^2) < 1$$

si $R \leqq 1$, $r^2 \leqq 1$ et $\rho^2 < 1$, ce qui est immédiat, comme on le voit en remplaçant R par sa plus grande valeur 1.

Si $\lambda \geqq -\frac{1}{2}$, on posera $\lambda = \lambda_1 + m$ où $\lambda_1 < -\frac{1}{2}$ et m un entier positif; on est ainsi ramené au cas précédent.

Généralisation des polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite.

21. Considérons les polynomes $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ définis par le développement

$$(40) \qquad (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}(x, y, \lambda).$$

Ces polynomes peuvent être définis aussi à l'aide des polynomes $P_n(x, \lambda)$. Reprenons, en effet, le développement

$$(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} = \Sigma \alpha^n P_n\left(z, \lambda - \frac{1}{2}\right)$$

qui, comme nous l'avons vu, est absolument convergent si $|z| \leqq 1$ et $\alpha < 1$. Par les changements

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on voit que

$$(41) \qquad \sum_{m+n=N} a^m b^n V_{m,n}(x, y, \lambda) = (a^2 + b^2)^{\frac{N}{2}} P_N\left(\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \lambda - \frac{1}{2}\right),$$

et de plus que le développement (40) est convergent si

$$|\sqrt{a^2 + b^2}| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqq 1,$$

conditions qui sont remplies si

$$a^2 + b^2 < 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leqq 1,$$

comme on le voit par un passage aux coordonnées polaires.

22. Démontrons que l'on a

$$(42) \qquad \iint_{x^2+y^2 \leqq 1} (1 - x^2 - y^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} U_{m,n}(x, y, \lambda) V_{p,q}(x, y, \lambda)\, dx\, dy = 0,$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ et si l'on n'a pas en même temps $m = p$ et $n = q$. Calculons pour cela l'intégrale

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leqq 1} (1 - x^2 - y^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} U_{m,n}(x, y, \lambda)$$
$$\times [1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{\lambda - \frac{1}{2}} dx\, dy$$

qui devient, en tenant compte de (16),

$$I = C \iint \frac{d^{m+n}(1 - x^2 - y^2)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^n} [1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{\lambda - \frac{1}{2}} dx\, dy$$

où l'on pose

$$C = \frac{(-1)^{m+n}}{m!\, n!} \frac{2\lambda(2\lambda - 1)\ldots(2\lambda - m - n + 1)}{(2\lambda - 1)(2\lambda - 3)\ldots(2\lambda - 2m - 2n + 1)}.$$

Après $m + n$ intégrations par parties, nous aurons

$$I = (-1)^{m+n} 2\lambda(2\lambda - 1)\ldots(2\lambda - m - n + 1) \frac{a^m b^n}{m!\, n!}$$
$$\times \iint \frac{(1 - x^2 - y^2)^{m+n-\lambda+\frac{1}{2}} dx\, dy}{(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{m+n-\lambda+\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale figurant dans cette expression devient, après la transformation orthogonale,

$$x = \frac{au + bv}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad y = \frac{bu - av}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

et après avoir posé $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\iint_{u^2+v^2 \leqq 1} \frac{(1 - u^2 - v^2)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}} du\, dv}{(1 - 2ru + r^2)^{m+n-\lambda+\frac{1}{2}}},$$

ou, après avoir intégré par rapport à v,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2)^{m+n-\lambda} du}{(1 - 2ru + r^2)^{m+n-\lambda+\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}} d\xi.$$

Mais la première intégrale de ce produit ne dépend pas de r si $|r| \leqq 1$, comme nous l'avons vu pour (78), il nous reste donc

$$\int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^{m+n-\lambda} du \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{\pi}{m + n - \lambda + \frac{1}{2}};$$

d'où finalement la valeur de l'intégrale I

$$I = (-1)^{m+n}\,2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)\frac{a^m b^n}{m!\,n!}\,\frac{\pi}{m+n-\lambda+\frac{1}{2}}.$$

Si dans l'intégrale I on remplace

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

par son développement (40), on déduit que l'on a bien (42) et que

$$\iint (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,U_{m,n}(x,y,\lambda)\,V_{m,n}(x,y,\lambda)\,dx\,dy$$
$$= \frac{(-1)^{m+n}\pi}{m+n-\lambda+\frac{1}{2}}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m-n+1)}{m!\,n!}.$$

23. Il résulte de (42) que le polynome $U_{m,n}(x,y,\lambda)$ s'exprime linéairement au moyen des polynomes $V_{p,q}(x,y,\lambda)$ où $p+q=m+n$. Nous aurons donc aussi

$$V_{m,n} = \sum_{r=0}^{r=m+n} \alpha_r\,U_{r,m+n-r}$$

et, par suite,

$$\iint (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,V_{m,n}V_{p,q}\,dx\,dy = 0$$
$$\left(\lambda<\frac{1}{2} \text{ et } m+n \neq p+q\right).$$

Faisons une application de cette formule aux polynomes $P_n(x,\lambda)$. L'égalité (41) pouvant s'écrire encore

$$\sum_{m+n=N} \cos^m\alpha \sin^n\alpha\, V_{m,n}(x,y,\lambda) = P_N\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ \lambda-\frac{1}{2}\right),$$

nous aurons

$$\iint (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_N\left(x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ \lambda-\frac{1}{2}\right)$$
$$\times P_M\left(x\cos\beta+y\sin\beta,\ \lambda-\frac{1}{2}\right)dx\,dy = 0,$$

si $M \neq N$. Pour $\alpha=\beta$ cette formule se réduit, après une transformation orthogonale et une intégration, à la propriété fondamentale des polynomes $P_n(x, \lambda)$. Pour $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, elle devient

$$\int_0^1 r(1-r^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dr \int_0^{2\pi} P_N\left(r\cos\theta, \lambda - \frac{1}{2}\right) P_M\left(r\sin\theta, \lambda - \frac{1}{2}\right) d\theta = 0.$$

Si nous intégrons par rapport à θ, nous avons un résultat nul si M et N ne sont pas pairs en même temps. Dans le cas où M et N sont pairs cette formule est une conséquence immédiate de la formule (49) qui relie les polynomes de Jacobi aux polynomes $P_n(x, \lambda)$.

24. Si dans le développement

$$(1 + 2ax + 2by + a^2 + b^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \Sigma(-1)^{m+n} a^m b^n V_{m,n}(x, y, \lambda),$$

nous faisons les changements

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}, \qquad y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}},$$
$$a = \frac{\alpha}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}, \qquad b = \frac{\beta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}},$$

le premier membre deviendra

$$\left[\frac{(\xi+\alpha)^2 + (\eta+\beta)^2 - 1}{\xi^2+\eta^2-1}\right]^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

et comme

$$\left[\frac{d^{m+n}[(\xi+\alpha)^2 + (\eta+\beta)^2 - 1]^{\lambda-\frac{1}{2}}}{d^m\alpha \, d^n\beta}\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = \frac{d^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{d\xi^m \, d\eta^n},$$

il résulte que

$$(43) \quad V_{m,n}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}}, \lambda\right)$$
$$= \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}(\xi^2+\eta^2-1)^{\frac{m+n}{2}-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{d\xi^m \, d\eta^n}.$$

25. Du développement (40) et de ses dérivées par rapport à x, y, a et b, on déduit facilement le développement

$$(1-2\lambda)(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{\lambda-\frac{3}{2}} = \Sigma a^m b^n \Theta_{m,n},$$

où l'on a posé

$$\Theta_{m,n} = x\frac{d\,V_{m,n}(x, y, \lambda)}{dx} + y\frac{d\,V_{m,n}(x, y, \lambda)}{dy} + (m+n-2\lambda+1)\,V_{m,n}(x, y, \lambda);$$

et de ce développement on obtient cet autre

$$a^2(1-2\lambda)(3-2\lambda)(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{\lambda-\frac{5}{2}} = \Sigma a^m b^n\left(x\frac{d\Theta_{m,n}}{dx} - m\Theta_{m,n}\right),$$

où l'on voit que le premier membre est la dérivée seconde du premier membre de (40) par rapport à x. Par suite,

$$\frac{d^2 V_{m,n}}{dx^2} - x\frac{d\Theta_{m,n}}{dx} + m\Theta_{m,n} = 0.$$

On obtiendra de même une autre équation correspondante à la variable y. Donc le polynome $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ satisfait au système d'équations aux dérivées partielles

$$(44)\quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{d^2z}{dx^2} - xy\dfrac{d^2z}{dx\,dy} - (n-2\lambda+2)x\dfrac{dz}{dx} + my\dfrac{dz}{dy} + m(m+n-2\lambda+1)z = 0, \\[2ex] (1-y^2)\dfrac{d^2z}{dy^2} - xy\dfrac{d^2z}{dx\,dy} - (m-2\lambda+2)y\dfrac{dz}{dy} + nx\dfrac{dz}{dx} + n(m+n-2\lambda+1)z = 0. \end{cases}$$

Si nous additionnons membre à membre ces deux équations, nous retrouvons l'équation (18) à laquelle satisfont les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ de même degré $m+n$. Le fait que le polynome $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ y satisfait aussi n'est qu'une conséquence du fait que ce polynome s'exprime linéairement au moyen des polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ de même degré $m+n$.

26. Entre les polynomes $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ et $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$ il existe une relation très simple qui correspond à la relation

$$(70)\quad P_n(x, \lambda) = (-1)^n\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2n+1)}\Pi_n\left(x, n-\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

que nous avons trouvée dans la première Partie. En effet, des relations

$$(25)\qquad \sum_{m+n=N} a^m b^n \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = (a^2+b^2)^{\frac{N}{2}} \Pi_N\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \lambda\right),$$

$$(41)\qquad \sum_{m+n=N} a^m b^n V_{m,n}(x, y, \lambda) = (a^2+b^2)^{\frac{N}{2}} P_N\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \lambda-\frac{1}{2}\right),$$

il résulte, en tenant compte de (70), que

$$(45)\qquad V_{m,n}\left(x, y, \lambda+\frac{1}{2}\right) = (-1)^{m+n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\dots(2\lambda-2m-2n+1)} \times \Pi_{m,n}\left(x, y, m+n-\lambda-\frac{1}{2}\right),$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$(45')\qquad \Pi_{m,n}(x, y, \lambda) = (-1)^{m+n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\dots(2\lambda-2m-2n+1)} \times V_{m,n}(x, y, m+n-\lambda).$$

Si dans le système (27) auquel satisfait $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$ on change λ en $m+n-\lambda$, nous tombons sur le système (44) auquel satisfait $P_{m,n}(x, y, \lambda)$. Ceci est bien d'accord avec la relation (45).

27. De la relation (45′) et des relations (23) et (24) on déduit

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} U_{m,n}(x, y, \lambda) &= (-1)^{m+n} \frac{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m-n+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\dots(2\lambda-2m-2n+1)} \\ &\quad \times (x^2+y^2-1)^{\frac{m+n}{2}} \\ &\quad \times V_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, m+n-\lambda\right), \\ V_{m,n}(x, y, \lambda) &= (-1)^{m+n} \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-2)\dots(2\lambda-m-n)}{(2\lambda-2)(2\lambda-4)\dots(2\lambda-2m-2n)} \\ &\quad \times (x^2+y^2-1)^{\frac{m+n}{2}} \\ &\quad \times U_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, m+n-\lambda\right). \end{aligned}\right.$$

Donc on peut déduire le polynome $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ lorsque l'on connaît le polynome $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ et inversement.

28. De la relation (46) on déduit, en tenant compte de (43),

$$U_{m,n}(x, y, \lambda) = \frac{2\lambda(2\lambda - 1)\ldots(2\lambda - m - n + 1)}{(2\lambda - 1)(2\lambda - 3)\ldots(2\lambda - 2m - 2n + 1)} \frac{1}{m!\,n!}$$
$$\times (x^2 + y^2 - 1)^{\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^n}.$$

Nous avons ainsi une autre démonstration de la formule (16).

29. Représentons le polynome $V_{2p,2q}(x, y, \lambda)$ par la fonction hypergéométrique $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$. Faisons pour cela, dans les équations (44), $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$, $m = 2p$, $n = 2q$; elles deviennent

$$(\xi - \xi^2)\frac{d^2 z}{d\xi^2} - \xi\eta\frac{d^2 z}{d\xi\, d\eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \lambda + q + 1\right)\xi\right]\frac{dz}{d\xi} + p\eta\frac{dz}{d\eta} + p\left(p + q - \lambda + \frac{1}{2}\right)z = 0,$$
$$(\eta - \eta^2)\frac{d^2 z}{d\eta^2} - \xi\eta\frac{d^2 z}{d\xi\, d\eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \lambda + p + 1\right)\eta\right]\frac{dz}{d\eta} + q\xi\frac{dz}{d\xi} + q\left(p + q - \lambda + \frac{1}{2}\right)z = 0,$$

et il résulte

$$V_{2p,2q}(x, y, \lambda) = A\, F_2\left(p + q - \lambda + \frac{1}{2}, -p, -q, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \xi, \eta\right).$$

A doit être égal à $V_{2p,2q}(0, 0, \lambda)$; donc

$$(47) \quad V_{2p,2q}(x, y, \lambda) = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\lambda - p - q + \frac{1}{2}\right)}{p!\,q!}$$
$$\times F_2\left(p + q - \lambda + \frac{1}{2}, -p, -q, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2, y^2\right).$$

Si les indices m, n ne sont pas tous les deux pairs, l'expression de $V_{m,n}$ se réduira de la formule précédente par les relations :

$$D_x\, V_{m,n}(x, y, \lambda) = (1 - 2\lambda)\, V_{m-1,n}(x, y, \lambda - 1),$$
$$D_y\, V_{m,n}(x, y, \lambda) = (1 - 2\lambda)\, V_{m,n-1}(x, y, \lambda - 1),$$
$$D_{xy}\, V_{m,n}(x, y, \lambda) = (1 - 2\lambda)(3 - 2\lambda)\, V_{m-1,n-1}(x, y, \lambda - 2).$$

30. Considérons le polynome représenté par l'intégrale

$$I_{p,q}(x, y, \lambda, \mu, \nu) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} V_{2p,2q}(\sqrt{x}\cos\theta, \sqrt{y}\cos\varphi, \lambda)$$
$$\times (\sin\theta)^{2(\mu-1)}(\sin\varphi)^{2(\nu-1)}\, d\theta\, d\varphi,$$

où $\mu > \frac{1}{2}$ et $\nu > \frac{1}{2}$. En remplaçant dans cette intégrale $V_{2p,2q}$ par son expression (47), on voit facilement, comme nous l'avons vu pour les polynomes $P_n(x, \lambda)$ en établissant (49), que

$$I_{p,q} = C\,F_2\left(p+q-\lambda+\frac{1}{2}, -p, -q, \mu, \nu, x, y\right),$$

où

$$C = \pi\frac{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\lambda-p-q+\frac{1}{2}\right)}{p!\,q!}\,\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)F(\nu)}.$$

Le polynome $I_{p,q}$ satisfait donc à l'équation

$$(x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - 2xy\frac{d^2z}{dx\,dy} + (y-y^2)\frac{d^2z}{dy^2} + \left[\mu-\left(\frac{1}{2}-\lambda+1\right)x\right]\frac{dz}{dx}$$
$$+\left[\nu-\left(\frac{1}{2}-\lambda+1\right)y\right]\frac{dz}{dy} + (p+q)\left(p+q-\lambda+\frac{1}{2}\right)z = 0.$$

Mais à cette même équation satisfait (¹) aussi le polynome de M. Appell

$$W_{p,q} = x^{1-\mu}y^{1-\nu}(1-x-y)^{\mu+\nu+\lambda-\frac{1}{2}}$$
$$\times\frac{d^{p+q}\left[x^{p+\mu-1}y^{q+\nu-1}(1-x-y)^{p+q-\lambda-\mu-\nu+\frac{1}{2}}\right]}{dx^p\,dy^q}.$$

Le polynome $I_{p,q}$ est donc, d'après un théorème (²) de M. Appell, le polynome associé de $W_{p,q}$.

31. De l'intégrale (75) on déduit, après avoir changé λ en $\lambda-\frac{1}{2}$,

$$[1-2\alpha z+\alpha^2]^{\lambda-\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda}{\pi}\iint_{u^2+v^2\leq 1}[1-\alpha(z+uz+iv)]^{2\lambda-1}$$
$$\times(1-u^2-v^2)^{-\lambda-1}\,du\,dv \qquad (\lambda<0);$$

ce qui deviendra, en posant

$$\alpha z = ax+by, \qquad \alpha = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$[1-2ax+2by+a^2+b^2]^{\lambda-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{\lambda}{\pi}\iint\left[1-(ax+by)(1+u)+iv\sqrt{a^2+b^2}\right]^{2\lambda-1}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-1}\,du\,dv$$

(¹) P. Appell, *Journal de Mathématiques*, 1882, p. 212.

(²) *Loc. cit.*, p. 207.

ou bien

$$\begin{aligned}
&[1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2]^{\lambda - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{-\lambda\,\Gamma(-\lambda)}{(\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)} \\
&\quad \times \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leqq 1} [1 - (ax + by)(1 + u) + i(va + wb)]^{2\lambda - 1} \\
&\qquad\qquad \times (1 - u^2 - v^2 - w^2)^{-\lambda - \frac{3}{2}}\, du\, dv\, dw,
\end{aligned}$$

où $\lambda < -\frac{1}{2}$. Cette égalité nous conduit à la formule

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{m,n}(x, y, \lambda) &= \frac{(-1)^{m+n}\,\Gamma(-\lambda + 1)}{(\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)}\,\frac{(2\lambda - 1)(2\lambda - 2)\ldots(2\lambda - m - n)}{m!\,n!} \\
&\quad \times \iiint [x(1 + u) - iv]^m [y(1 + u) - iw]^n \\
&\qquad\qquad \times (1 - u^2 - v^2 - w^2)^{-\lambda - \frac{3}{2}}\, du\, dv\, dw.
\end{aligned}$$

32. De cette formule on déduit le développement

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,(-1)^{m+n}\,\frac{a^m b^n\,\mathrm{V}_{m,n}(x, y, \lambda)}{(2\lambda - 1)(2\lambda - 2)\ldots(2\lambda - m - n)} \\
&= \frac{\Gamma(-\lambda + 1)}{(\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)}\,e^{ax+by} \\
&\quad \times \iiint e^{(ax+by)u - iav - ibw}\,(1 - u^2 - v^2 - w^2)^{-\lambda - \frac{3}{2}}\, du\, dv\, dw.
\end{aligned}$$

Mais après avoir fait une transformation orthogonale dans l'intégrale du second membre on pourra effectuer deux intégrations et ce second membre se réduira à

$$\frac{\Gamma(-\lambda + 1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right)}\,e^{ax+by} \int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{a^2+b^2-(ax+by)^2}}\,(1 - u^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}\, du$$

ou bien

$$\Gamma(-\lambda + 1)\left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - (ax + by)^2}}{2}\right]^{\lambda} \mathrm{J}_{-\lambda}\left(\sqrt{a^2 + b^2 - (ax + by)^2}\right) e^{ax+by}.$$

Donc

$$\Sigma(-1)^{m+n}\frac{a^m b^n \mathrm{V}_{m,n}(x, y, \lambda)}{(2\lambda-1)(2\lambda-2)\ldots(2\lambda-m-n)}$$
$$=\Gamma(-\lambda+1)\,e^{ax+by}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2-(ax+by)^2}}{2}\right]^{\lambda}\mathrm{J}_{-\lambda}\left(\sqrt{a^2+b^2-(ax+by)^2}\right),$$

développement valable quels que soient a, b, x et y.

33. Les polynomes $\mathrm{V}_{m,n}(x, y, \lambda)$ se réduisent aussi, dans un cas limite, au produit des deux polynomes d'Hermite. On a, en effet,

$$\lim_{\lambda=-\infty} m!\,n!\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{m+n}{2}}\mathrm{V}_{m,n}\left(x\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\, y\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\, \lambda\right)$$
$$=(-1)^{m+n}\,e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\frac{d^{m+n}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{dx^m\,dy^n}.$$

Les polynomes $\mathrm{U}_{m,n}(x, y, \lambda)$, $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$, $\mathrm{V}_{m,n}(x, y, \lambda)$ se confondent donc dans un cas limite.

Sur quelques intégrales doubles.

34. Du développement (1) on déduit

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{\lambda}$$
$$\times(1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,dx\,dy=\frac{2\pi}{1-2\lambda}$$
$$\left(\lambda<\frac{1}{2}\text{ et }a^2+b^2<1\right).$$

En faisant $b=0$ dans cette intégrale, on trouve une propriété des polynomes $\mathrm{P}_n(x, \lambda)$ exprimée par l'intégrale

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{P}_n\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}},\, \lambda\right)dx\,dy=0.$$

35. Nous avons vu que

$$\sum_{m+n=N} a^m b^n U_{m,n}(x, y.\lambda)$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{N}{2}} (x^2+y^2-1)^{\frac{N}{2}} \Pi_N\left[\frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}}, \lambda\right].$$

Donc

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} (1-x^2-y^2)^{\frac{M+N}{2}-\lambda-\frac{1}{2}} \Pi_N\left[\frac{ax+by}{\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}}, \lambda\right]$$
$$\times \Pi_M\left[\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2-1)}}, \lambda\right] dx\, dy = 0$$
$$\left(\lambda < \frac{1}{2},\ M \neq N \text{ et } a, b, \alpha, \beta \text{ quelconques}\right).$$

Nous avons trouvé aussi

$$[(1-(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2]^{\frac{N}{2}} P_N\left[\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sqrt{1-(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}}, \lambda\right]$$
$$= \Sigma \cos^m\alpha \sin^n\alpha\, U_{m,n}(x, y, \lambda).$$

Désignons par $A_N(\alpha)$ le premier membre de cette égalité; nous aurons

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} (1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} A_N(\alpha) A_M(\beta)\, dx\, dy = 0 \qquad \left(\lambda < \frac{1}{2} \text{ et } M \neq N\right).$$

36. Du développement (40) on déduit

$$(48) \qquad \iint \frac{(1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx\, dy}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \frac{2\pi}{1-2\lambda}.$$

Nous avons calculé directement cette intégrale et nous avons vu que sa valeur ne dépend pas de a et b tant que $a^2+b^2 \leqq 1$.

Si nous dérivons (48) par rapport à a et à b, nous trouvons des valeurs nulles tant que le point (a, b), dans ces nouvelles intégrales est à l'intérieur du cercle $a^2+b^2=1$, mais aussi près que l'on veut de son contour. On déduit de ces intégrales, par une combinaison facile, l'intégrale

$$(48) \qquad (1-a^2-b^2)\iint \frac{(1-x^2-y^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} dx\, dy}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}-\lambda}} = \frac{2\pi}{1-2\lambda}.$$

Cette égalité est valable tant que $a^2+b^2<1$. Si le point (a, b) s'approche d'un point $M(1, \theta)$ de la circonférence $a^2+b^2=1$, la quantité $1-a^2-b^2$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, mais l'égalité (48) subsistera, car un élément de l'intégrale sera, dans ce cas, très grand; cet élément est celui qui entoure le point des mêmes coordonnées polaires 1, θ que le point M vers lequel tend (a, b), comme on le voit en égalant à zéro le dénominateur de la quantité sous signe d'intégration de (48) et en passant aux coordonnées polaires.

L'intégrale (48) est donc une intégrale singulière et l'on pourrait l'employer à la représentation des fonctions à deux variables.

Polynomes $U_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, \lambda)$.

37. Ces polynomes seront définis [1] par le développement

$$
\begin{aligned}
(49)\qquad & [(1-a_1x_1-a_2x_2-\ldots-a_sx_s)^2 \\
& -(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_s^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_s^2-1)]^\lambda \\
& = \Sigma a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_s^{m_s}U_{m_1,m_2,\ldots,m_s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, \lambda).
\end{aligned}
$$

Nous désignerons par $\mathcal{H}$ la quantité entre crochets.

Commençons par établir que ces polynomes peuvent être mis sous la même forme analytique (16) que les polynomes à deux variables. De l'identité

$$2\mathcal{H}-a_1\frac{d\mathcal{H}}{da_1}-a_2\frac{d\mathcal{H}}{da_2}-\ldots-a_s\frac{d\mathcal{H}}{da_s}=2(1-a_1x_1-a_2x_2-\ldots-a_sx_s)$$

on déduit le développement

$$
\begin{aligned}
(50)\quad & (1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s)\mathcal{H}^{\lambda-1} \\
& =\sum\frac{2\lambda-m_1-m_2-\ldots-m_s}{2\lambda}a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda).
\end{aligned}
$$

Nous avons aussi l'identité

$$
\begin{aligned}
(51)\qquad & (1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}D_{a_1}(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s)\mathcal{H}^{\lambda-1} \\
& =-D_{x_1}(1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\mathcal{H}^{\lambda-1},
\end{aligned}
$$

[1] ANGELESCO, *Comptes rendus*, t. CLVIII, p. 1770.

qui est une généralisation de l'identité (41) et qui se vérifie facilement en la réduisant à cette autre

$$(1 - a_1 x_1 - \ldots - a_s x_s)\frac{d\mathcal{H}}{da_1} + (1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2)\frac{d\mathcal{H}}{dx_1} = -2x_1\mathcal{H}.$$

De l'identité (51) et des développements (49) et (50) nous déduisons la relation

$$\begin{aligned}(1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} & \mathrm{U}_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &= \frac{2\lambda}{m_1(m_1 + m_2 + \ldots + m_s - 2\lambda)} \mathrm{D}_{x_1}(1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \\ &\quad \times \mathrm{U}_{m_1-1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda - 1);\end{aligned}$$

nous aurons $s - 1$ autres relations analogues, correspondant aux variables x_2, x_3, ..., x_s. Démontrons à l'aide de ces s relations que l'on a

$$\begin{aligned}(52)\quad & \mathrm{U}_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &= \frac{1}{m_1! \ldots m_s!} \frac{2\lambda(2\lambda - 1)\ldots(2\lambda - m_1 - \ldots - m_s + 1)}{(2\lambda - 1)(2\lambda - 3)\ldots(2\lambda - 2m_1 - \ldots - 2m_s + 1)} \\ &\quad \times (x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{m_1+\ldots+m_s}(x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1)^{m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx_1^{m_1} \ldots dx_s^{m_s}}.\end{aligned}$$

Ceci est immédiat, d'après les s relations, pour les s polynomes

$$\mathrm{U}_{1,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda), \quad \mathrm{U}_{0,1,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda), \quad \ldots, \quad \mathrm{U}_{0,\ldots,0,1}(x_1, \ldots, x_s, \lambda).$$

En supposant la formule (52) vraie pour le polynome

$$\mathrm{U}_{m_1, m_2, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda),$$

on voit facilement, à l'aide des s relations, qu'elle subsiste pour les polynomes $\mathrm{U}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$, où n_1, n_2, ..., n_s sont respectivement égaux aux m_1, m_2, ..., m_s augmentés ou non d'une unité. La formule (52) est donc démontrée de proche en proche.

38. De la formule (52) nous déduisons

$$\begin{aligned}\int_{(s)} (1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} & \mathrm{U}_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ & \times \mathrm{U}_{n_1, \ldots, n_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)\, dx_1, \ldots, dx_s = 0,\end{aligned}$$

où $\lambda < \frac{1}{2}$ et $m_1 + \ldots + m_s \neq n_1 \ldots + n_s$, le domaine d'intégration étant $x_1^2 + \ldots + x_s^2 \leqq 1$.

39. Les polynomes $U_{m_1, \ldots, m_s}$ peuvent être définis aussi à l'aide des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$. En effet, on voit sans peine que

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s=N} a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$
$$= [(a_1^2 + \ldots + a_s^2)(x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1)]^{\frac{N}{2}} \Pi_N \left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s}{\sqrt{(a_1^2+\ldots+a_s^2)(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)}}, \lambda \right].$$

40. L'équation en x_1

$$U_{m_1 \ldots, m_s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, \lambda) = 0,$$

où $\lambda < \frac{1}{2}$ et $x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_s^2 < 1$ a toutes ses racines réelles et comprises entre $-\sqrt{1 - x_2^2 - \ldots - x_s^2}$ et $+\sqrt{1 - x_2^2 - \ldots - x_s^2}$. On le voit comme pour le cas de deux variables.

41. Formons le système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait $U_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$. Posons

$$\Theta_{m_1, m_2, \ldots, m_s} = x_1 \frac{dU_{m_1, \ldots, m_s}}{dx_1} + \ldots + x_s \frac{dU_{m_1, \ldots, m_s}}{dx_s} - (m_1 + \ldots + m_s) U_{m_1, \ldots, m_s}.$$

Du développement (49) et de ses dérivées nous déduisons

$$-2\lambda(a_1^2 + \ldots + a_s^2)\mathcal{H}^{\lambda-1} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \Theta_{m_1, \ldots, m_s}$$

et puis

$$-2\lambda a_1^2 (x_1^2 + \ldots + x_s^2)\mathcal{H}^{\lambda-1}$$
$$= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \left(m_1 U_{m_1, \ldots, m_s} - x_1 \frac{dU_{m_1, \ldots, m_s}}{dx_1} + x_1^2 \Theta_{m_1, \ldots, m_s} \right),$$

et aussi, en passant par l'identité,

$$2\left(a_1 \frac{d\mathcal{H}}{da_1} + x_1 \frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\right)(a_1^2 + \ldots + a_s^2) + \left(\frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\right)^2 = 4 a_1^2 \mathcal{H},$$

le développement

$$(4\lambda^2+2\lambda)a_1^2\mathcal{H}^{\lambda-1}$$
$$=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\left[\frac{d^2 U_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1^2}-x_1\frac{d\Theta_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1}-(m_1+1)\Theta_{m_1,\ldots,m_s}\right]:$$

de la comparaison de ces deux derniers développements, on déduit

$$(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)\left[\frac{d^2 U_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1^2}-x_1\frac{d\Theta_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1}-(m_1+1)\Theta_{m_1,\ldots,m_s}\right]$$
$$+(2\lambda+1)\left(m_1 U_{m_1,\ldots,m_s}-x_1\frac{dU_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1}+x_1^2\Theta_{m_1,\ldots,m_s}\right)=0,$$

qui est une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le polynome $U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$. Nous obtiendrons de même les $s-1$ autres équations, correspondant aux variables x_2, x_3, ..., x_s, auxquelles satisfait le même polynome.

42. De même que nous l'avons vu pour deux variables, on peut voir que :

L'hypersurface représentée par l'équation

$$U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)=0,$$

abstraction faite des facteurs x_1, x_2, ..., x_s, est tout entière comprise à l'intérieur de l'hypersphère

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_s^2=1,$$

si $\lambda<0$.

43. Les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}$ se réduisent, dans un cas limite, au produit de s polynomes d'Hermite à une variable. On a, en effet,

$$\lim_{\lambda=-\infty} m_1!\ldots m_s!\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^{\frac{m_1+\ldots+m_s}{2}}U_{m_1,\ldots,m_s}\left(x_1\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\ldots,x_s\sqrt{\frac{-1}{2\lambda}},\lambda\right)$$
$$=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}e^{\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_s^2)}\frac{d^{m_1+\ldots+m_s}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_s^2)}}{dx_1^{m_1}\ldots dx_s^{m_s}},$$

comme on le voit en partant soit du développement (49), soit de la formule (52).

Polynomes $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$.

44. Ces polynomes seront définis par le développement

$$(53)\qquad \begin{aligned}&[(1 - a_1 x_1 - \ldots - a_s x_s)^2 - a_1^2 - \ldots - a_s^2]^\lambda \\ &= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda).\end{aligned}$$

Ils sont reliés aux polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ par la relation

$$(54)\qquad \begin{aligned}&U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &= (x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1)^{\frac{m_1+\ldots+m_s}{2}} \\ &\times \Pi_{m_1,\ldots,m_s}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}}, \ldots, \frac{x_s}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}}, \lambda\right),\end{aligned}$$

comme on le voit en posant dans (53)

$$(55)\qquad \begin{cases} a_1 = b_1\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}, & \ldots, \quad a_s = b_s\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}, \\ x_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}, & \ldots, \quad x_s = \dfrac{y_s}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}. \end{cases}$$

45. Les polynomes $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$ peuvent être définis à l'aide des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$. En effet, on voit facilement que l'on a

$$(56)\qquad \begin{aligned}&\sum_{m_1+\ldots+m_s=N} a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &= (a_1^2+\ldots+a_s^2)^{\frac{N}{2}} \Pi_N\left(\frac{a_1 x_1+\ldots+a_s x_s}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_s^2}}, \lambda\right).\end{aligned}$$

46. Du développement (53) et de ses dérivées on déduit

$$(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)\,\Pi_{m_1,\ldots,m_s} = \frac{d\Pi_{m_1+1,m_2,\ldots,m_s}}{dx_1} = \ldots = \frac{d\Pi_{m_1,\ldots,m_s+1}}{dx_s}.$$

Ces polynomes sont donc de la classe de polynomes de M. Appell.

47. De l'intégrale (71) nous déduisons, comme dans le cas de deux variables,

$$K^\lambda = \frac{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}\left(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s+u\sqrt{a_1^2+\ldots+a_s^2}\right)^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}du,$$

où K^λ désigne le premier membre de (53). Mais par une transformation orthogonale et $s-1$ intégrations, nous voyons que l'on a

$$\frac{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}\int_{(s)}(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s+a_1u_1+\ldots+a_su_s)^{2\lambda}$$

$$\times(1-u_1^2-\ldots-u_s^2)^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s$$

$$=\frac{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\lambda)}\int_{-1}^{+1}\left(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s+u\sqrt{a_1^2+\ldots+a_s^2}\right)^{2\lambda}(1-u^2)^{-\lambda-1}du,$$

si $\lambda<\frac{1-s}{2}$. De cette nouvelle forme de K^λ nous déduisons immédiatement

$$\text{(57)}\quad \Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)=A\int_{(s)}(x_1-u_1)^{m_1}(x_2-u_2)^{m_2}\ldots(x_s-u_s)^{m_s}$$

$$\times(1-u_1^2-\ldots-u_s^2)^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s,$$

où l'on a posé

$$\text{(58)}\quad A=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}\frac{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_s+1)}{m_1!\ldots m_s!}.$$

48. De cette formule nous déduisons le développement

$$\text{(59)}\quad e^{a_1x_1+\ldots+a_sx_s}\left(\frac{i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_s^2}}{2}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}J^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{a_1^2+\ldots+a_s^2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)}\Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),$$

valable quels que soient $a_1,\ldots,a_s$ et $x_1,\ldots,x_s$.

49. Ces polynomes se réduisent aussi dans un cas limite au produit de s polynomes d'Hermite à une variable.

50. Soit, pour la simplification de l'exposition d'une généralisation des polynomes $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$, le cas de deux variables; partons de l'inté-

grale

$$[(1-a_1x_1-a_2x_2)^2-a_1^2-a_2^2]^\lambda$$
$$=-\frac{2\lambda+1}{\pi}\int\int(1-a_1x_1-a_2x_2+a_1u+a_2v)^{2\lambda}(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv.$$

Si nous posons

$$a_1=b_1+b_2+\ldots+b_i,\qquad a_1x_1=b_1y_1+\ldots+b_iy_i,$$
$$a_2=c_1+c_2+\ldots+c_\gamma,\qquad a_2x_2=c_1z_1+\ldots+c_\gamma z_\gamma,$$

l'intégrale précédente deviendra

$$(60)\quad [(1-b_1y_1-\ldots-b_iy_i-c_1z_1-\ldots-c_\gamma z_\gamma)^2-(b_1+\ldots+b_i)^2-(c_1+\ldots+c_\gamma)^2]^\lambda$$
$$=-\frac{2\lambda+1}{2\pi}\int\int[1-b_1(y_1-u)-\ldots-b_i(y_i-u)$$
$$-c_1(z_1-v)-\ldots-c_\gamma(z_\gamma-v)]^{2\lambda}$$
$$\times(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv.$$

Désignons par $A_{m_1,\ldots,m_i,n_1,\ldots,n_\gamma}(y_1,\ldots,y_i,z_1,\ldots,z_j)$ le polynome qui est le coefficient de $b_1^{m_1},\ldots,b_i^{m_i},c_1^{n_1},\ldots,c_\gamma^{n_\gamma}$ dans le développement du premier membre de (60), suivant les puissances de $b_1,\ldots,b_i,c_1,\ldots,c_\gamma$. Il résulte de (60) que nous aurons

$$A_{m_1,\ldots,m_i,n_1,\ldots,n_\gamma}=C\int\int(y_1-u)^{m_1}\ldots(y_i-u)^{m_i}(z_1-v)^{n_1}\ldots(z_\gamma-v)^{n_\gamma}$$
$$\times(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv,$$

où l'on a posé

$$C=(-1)^{m_1+\ldots+m_i+n_1+\ldots+n_\gamma+1}\frac{2\lambda+1}{2\lambda}$$
$$\times\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_i-n_1-\ldots-n_\gamma+1)}{m_1!\ldots m_i!\,n_1!\ldots n_\gamma!}.$$

Nous aurons donc pour ces polynomes aussi un développement analogue à (59).

Il est évident que ces considérations peuvent être appliquées au cas général de s variables $x_1,\ldots,x_s$.

Les polynomes ainsi obtenus seront donnés par des intégrales multiples d'ordre s.

51. Les polynomes

$$O_{m_1, \ldots, m_s} = x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s} \Pi_{m_1, \ldots, m_s}\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_s}, \lambda\right),$$

qui ont pour fonction génératrice

$$[(1 - a_1 - \ldots - a_s)^2 - a_1 x_1^2 - \ldots - a_s x_s^2]^\lambda,$$

auront pour représentation intégrale

$$(61) \qquad O_{m_1, \ldots, m_s} = A \int_{(s)} (1 - x_1 u_1)^{m_1} \ldots (1 - x_s u_s)^{m_s} \times (1 - u_1^2 - \ldots - u_s^2)^{-\lambda - \frac{s+1}{2}} du_1 \ldots du_s,$$

où A a la valeur (58).

On peut vérifier que le polynome $O_{m_1, \ldots, m_s}$ satisfait au système formé par l'équation

$$(62) \qquad x_1(1 - x_1^2)\frac{d^2 z}{dx_1^2} + x_2 \frac{d^2 z}{dx_2\, dx_1} + \ldots + x_s \frac{d^2 z}{dx_s\, dx_1} + [2(m_1 - 1)x_1^2 - 2\lambda]\frac{dz}{dx_1} + m_1(1 - m_1)x_1 z = 0$$

et les $s - 1$ autres correspondant aux variables $x_2, \ldots, x_s$. On sera conduit, en remplaçant dans cette équation z par l'intégrale (61) et en procédant, comme pour deux variables, à prouver que l'intégrale

$$\int_{(s)} [(1 - m_1)\, x_1(1 - u_1^2) + (2\lambda - p_2 - p_3 - \ldots - p_s)\, u_1(1 - u_1 x_1)] \times (1 - u_1 x_1)^{m_1 - 2} u_2^{p_2} \ldots u_s^{p_s} (1 - u_1^2 - \ldots - u_s^2)^{-\lambda - \frac{s+1}{2}} du_1 \ldots du_s$$

est nulle, ce qui se voit en intégrant par rapport à $u_2, u_3, \ldots, u_s$.

De même que pour deux variables, on voit que ces polynomes se réduisent dans un cas limite à la fonction

$$(63) \qquad \int_{(s)} e^{-x_1 u_1 - \ldots - x_s u_s} (1 - u_1^2 - \ldots - u_s^2)^{-\lambda - \frac{s+1}{2}} du_1 \ldots du_s,$$

qui généralise la fonction cylindrique. La fonction (63) satisfera au système formé par l'équation

$$x_1 \frac{d^2 z}{dx_1^2} + x_2 \frac{d^2 z}{dx_2\, dx_1} + \ldots + x_s \frac{d^2 z}{dx_s\, dx_1} - 2\lambda \frac{dz}{dx_1} - x_1 z = 0$$

et les $s - 1$ autres analogues.

Autres propriétés des polynomes $U_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots x_s, \lambda)$.

52. Des formules (54) et (57) on obtient immédiatement

$$(64)\quad U_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$
$$= A \int_{(s)} (x_1 - u_1\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1})^{m_1} \ldots (x_s - u_s\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1})^{m}$$
$$\times (1 - u_1^2 - \ldots - u_s)^{-\lambda - \frac{s+1}{2}} du_1 \ldots du_s,$$

A ayant la valeur (58), $\lambda < \frac{1-s}{2}$, le domaine d'intégration $u_1^2 + \ldots + u_s^2 \leqq 1$, comme d'ailleurs dans toutes les intégrales multiples d'ordre s que nous avons considérée.

53. Le développement (59) nous conduira au développement

$$(65)\quad e^{a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s}\left(\frac{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_s^2}\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2}}{2}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}$$
$$\times J^{-\lambda - \frac{1}{2}}(\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_s^2}\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_s^2})$$
$$= \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}} \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1 + \ldots + m_s - 2\lambda)} U_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda),$$

valable quels que soient $a_1, \ldots, a_s, x_1, \ldots, x_s$ et qui généralise le développement donné par M. Kampé de Fériet [1] pour les polynomes définis de M. Appell [2].

54. Nous avons mis, en étudiant les polynomes $\Pi_{m_1, \ldots, m_s}$, K^λ sous forme d'intégrale d'ordre s; on déduit de là $\mathcal{K}^\lambda$ sous forme d'intégrale d'ordre s, $\mathcal{K}^\lambda$ étant le premier membre de (49). La quantité

$$(1 - a_1 x_1 - \ldots - a_s x_s + a_1 u_1\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1} + \ldots + a_s u_s\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2 - 1})^{2\lambda},$$

sous signes d'intégration de cette nouvelle intégrale, sera développable

(1) *Comptes rendus*, t. CLVII, p. 1393.

(2) *Comptes rendus*, t. CLVI, p. 1582.

suivant les puissances de $a_1, \ldots, a_s$ si

$$|a_1x_1-\ldots-a_sx_s+i(a_1u_1+\ldots+a_su_s)\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_s^2}|<1$$

ou bien

$$(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)^2+(a_1u_1+\ldots+a_su_s)^2(1-x_1^2-\ldots-x_s^2)<1.$$

Et l'on voit, comme pour deux variables, par un passage aux coordonnées polaires dans l'espace à s dimensions, que cette dernière inégalité est satisfaite, dans le champ d'intégration $u_1^2+\ldots+u_s^2\leqq 1$, si

$$(66) \qquad a_1^2+\ldots+a_s^2<1 \quad \text{et} \quad x_1^2+\ldots+x_s^2\leqq 1.$$

Il résulte que le développement (49) de $\mathcal{H}^\lambda$ est valable pour $\lambda<\frac{1-s}{2}$ dans les mêmes conditions (66). La valabilité, dans les mêmes domaines, subsiste pour $\lambda\geqq\frac{1-s}{2}$, comme on le voit en posant dans le développement (49) $\lambda=\lambda_1+m$, m un entier positif et $\lambda_1<\frac{1-s}{2}$.

55. Du développement (49) on déduit

$$\int_{(s)}(1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathcal{H}^\lambda\,dx_1\ldots dx_s=(\pi)^{\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\lambda\right)} \qquad \left(\lambda<\frac{1}{2}\right),$$

égalité qui sera donc valable pour $a_1^2+\ldots+a_s^2\leqq 1$. En faisant $a_2=a_3=\ldots=a_s=0$, nous déduirons

$$\int_{(s)}(1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-x_2^2-\ldots-x_s^2)^{\frac{n}{2}}$$
$$\times P_n\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2-\ldots-x_s^2}},\lambda\right)dx_1\ldots dx_s=0.$$

56. De la généralisation des polynomes $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$ on déduit, par des transformations analogues à (55), une généralisation des polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}$ qui nous permet de donner une extension nouvelle à la formule (64) et au développement (65). Considérons, par exemple, le développement

$$\{(1-ax-by-cz)^2-[a^2+(b+c)^2](x^2+y^2+z^2-1)\}^\lambda=\Sigma a^pb^qc^rS_{p,q,r},$$

qui se déduit du développement de l'expression

$$[(1-\alpha x'-\beta y'-\gamma z')^2-\alpha^2-(\beta+\gamma)^2]^\lambda,$$

en posant

$$\alpha = a\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}, \qquad \beta = b\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}, \qquad \gamma = c\sqrt{x^2+y^2+z^2-1},$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}, \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}, \qquad z' = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}.$$

Il résulte, de ce que nous avons vu pour les polynomes $A_{m_1,\ldots,m_\cdot,n_1,\ldots,n_\gamma}$, que

$$S_{p,q,r} = C\int\int(x-u\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})^p(y-v\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})^q$$
$$\times(z-v\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})^r(1-u^2-v^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}}du\,dv,$$

où l'on pose

$$C = (-1)^{p+q+r+1}\frac{2\lambda+1}{2\pi}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-p-q-r+1)}{p!\,q!\,r!},$$

et aussi

$$e^{ax+by+cz}\left[\frac{\sqrt{a^2+(b+c)^2}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}{2}\right]^{\lambda+\frac{1}{2}}$$
$$\times J^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{a^2+(b+c)^2}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\right]$$
$$= \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{a^p b^q c^r}{\Gamma(p+q+r-2\lambda)}S_{p,q,r}.$$

On pourrait traiter de même les polynomes généraux définis par le développement de

$$[(1-A_1-\ldots-A_s)^2-(B_1+\ldots+B_s)(Y_1+\ldots+Y_s-1)]^\lambda,$$

où l'on a posé

$$A_1 = a_1^1x_1^1+\ldots+a_i^1x_i^1, \qquad B_1 = (a_1^1+\ldots+a_i^1)^2, \qquad Y_1 = (x_1^1)^2+\ldots+(x_i^1)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_s = a_1^s x_1^s+\ldots+a_k^s x_k^s, \qquad B_s = (a_1^s+\ldots+a_k^s)^2, \qquad Y_s = (x_1^s)^2+\ldots+(x_k^s)^2,$$

suivant les puissances de $a_1^1, \ldots, a_i^1, \ldots, a_1^s, \ldots, a_k^s$. Ces polynomes seront représentés par des intégrales multiples d'ordre s, faciles à trouver, de même que le développement correspondant à (65).

Polynomes $V_{m_1,\dots m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)$.

57. Nous définissons ces polynomes par le développement

$$(67)\qquad (1-2a_1x_1-\dots-2a_sx_s+a_1^2+\dots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s-1}{2}} = \Sigma a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s} V_{m_1,\dots,m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda).$$

Ces polynomes $V_{m_1,\dots,m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)$ peuvent être définis aussi à l'aide des polynomes $P_n(x, \lambda)$. En effet, du développement

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^\lambda = \Sigma \alpha^n P_n(x, \lambda),$$

qui est absolument convergent si $|x| \leqq 1$ et $|\alpha| < 1$, on déduit que

$$(68)\qquad \sum_{m_1+\dots+m_s=N} a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s} V_{m_1,\dots,m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda) = (a_1^2+\dots+a_s^2)^{\frac{N}{2}} P_N\left(\frac{a_1x_1+\dots+a_sx_s}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_s^2}}, \lambda-\frac{s-1}{2}\right)$$

et de plus que le développement (67) est convergent si

$$\sqrt{a_1^2+\dots+a_s^2} < 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{a_1x_1+\dots+a_sx_s}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_s^2}}\right| \leqq 1,$$

conditions qui sont remplies si

$$a_1^2+\dots+a_s^2 < 1 \qquad \text{et} \qquad x_1^2+\dots+x_s^2 \leqq 1,$$

comme on le voit par un passage aux coordonnées polaires.

58. Démontrons que l'on a l'égalité fondamentale

$$(69)\qquad \int_{(s)} (1-x_1^2-\dots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \times U_{m_1,\dots,m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda) V_{n_1,\dots,n_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)\, dx_1\dots dx_s = 0,$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ et si l'on n'a pas en même temps $m_1 = n_1, \dots, m_s = n_s$. Calculons, pour cela, l'intégrale

$$I = \int_{(s)} (1-x_1^2-\dots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}} \times U_{m_1,\dots,m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)(1-2a_1x_1-\dots-2a_sx_s+a_1^2+\dots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s-1}{2}} dx_1\dots dx_s$$

qui se ramène, après avoir remplacé $U_{m_1,\dots,m_s}$ par sa valeur (52) et fait $m_1+\dots+m_s$ intégrations par parties, à

$$(70)\quad I = C a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s}\int_{(s)} \frac{(1-x_1^2-\dots-x_s^2)^{m_1+\dots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}\,dx_1\dots dx_s}{(1-2a_1x_1-\dots-2a_sx_s+a_1^2+\dots+a_s^2)^{m_1+\dots+m_s+\frac{s-1}{2}-\lambda}}$$

où l'on pose

$$C = (-2)^{m_1+\dots+m_s}\frac{\left(\lambda-\frac{s-1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{s-1}{2}-1\right)\dots\left(\lambda-\frac{s-1}{2}-m_1-\dots-m_s+1\right)}{m_1!\dots m_s!}$$
$$\times\frac{2\lambda(2\lambda-1)\dots(2\lambda-m_1-\dots-m_s+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\dots(2\lambda-2m_1-\dots-2m_s+1)}.$$

Si dans l'intégrale précédente on fait la transformation

$$x_1 = \frac{a_1y_1+a_2y_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \quad\text{et}\quad x_2 = \frac{a_2y_1-a_1y_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},$$

on voit que la variable y_2 disparaît dans l'expression

$$1-2a_1x_1-2a_2x_2-\dots-2a_sx_s+a_1^2+\dots+a_s^2$$

et que le domaine d'intégration restera le même. Après $s-2$ transformations analogues, nous aurons

$$I = C a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s}\int \frac{(1-x_1^2-\dots-x_s^2)^{m_1+\dots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2\alpha x_1+\alpha^2)^{m_1+\dots+m_s+\frac{s-1}{2}-\lambda}}\,dx_1\dots dx_s,$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sqrt{a_1^2+\dots+a_s^2}.$$

En intégrant par rapport à $x_s, x_{s-1}, \dots, x_2$ nous aurons

$$C a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x_1^2)^{m_1+\dots+m_s+\frac{s-1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}}}{(1-2\alpha x_1+\alpha^2)^{m_1+\dots+m_s+\frac{s-1}{2}-\lambda}}\,dx_1\dots$$
$$\times\int_{-1}^{+1}(1-y_{s-1}^2)^{m_1+\dots+m_s-\lambda}\,dy_{s-1}\int_{-1}^{+1}(1-y_s^2)^{m_1+\dots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}\,dy_s.$$

La première des intégrales de ce produit ne dépend pas de α, si $|\alpha|\leqq 1$, comme on l'a vu pour l'intégrale (78) dans la première Partie;

nous aurons donc

$$I = C a_1^{m_1} \dots a_s^{m_s} (\pi)^{\frac{s}{2}} \frac{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s + \frac{s-1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s + \frac{s-1}{2} - \lambda + 1\right)} \dots$$

$$\times \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_s - \lambda + 1)}{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s - \lambda + \frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s - \lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m_1 + \dots + m_s - \lambda + 1)}$$

ou bien

$$I = C(\pi)^{\frac{s}{2}} \frac{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s - \lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s + \frac{s+1}{2} - \lambda\right)} a_1^{m_1} \dots a_s^{m_s};$$

d'où l'égalité (69) et aussi l'égalité

$$\int_{(s)} (1 - x_1^2 - \dots - x_s^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} V_{m_1, \dots, m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda) U_{m_1, \dots, m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)\, dx_1 \dots dx_s$$
$$= C(\pi)^{\frac{s}{2}} \frac{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s - \lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1 + \dots + m_s + \frac{s+1}{2} - \lambda\right)}.$$

59. Il résulte de l'égalité (69) que le polynome $U_{m_1, \dots, m_s}$ s'exprime linéairement au moyen des polynomes $V_{n_1, \dots, n_s}$ où

$$n_1 + \dots + n_s = m_1 + \dots + m_s;$$

on en conclut

$$\int_{(s)} (1 - x_1^2 - \dots - x_s^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}$$
$$\times V_{m_1, \dots, m_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda) V_{n_1, \dots, n_s}(x_1, \dots, x_s, \lambda)\, dx_1 \dots dx_s = 0,$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ et si $m_1 + \dots + m_s \neq n_1 + \dots + n_s$. De cette égalité on déduit, en tenant compte de (68), que

$$\int_{(s)} (1 - x_1^2 - \dots - x_s^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}$$
$$\times P_N\left(\frac{a_1 x_1 + \dots + a_s x_s}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_s^2}}, \lambda - \frac{s-1}{2}\right)$$
$$\times P_M\left(\frac{b_1 x_1 + \dots + b_s x_s}{\sqrt{b_1^2 + \dots + b_s^2}}, \lambda - \frac{s-1}{2}\right) dx_1 \dots dx_s = 0,$$

même domaine d'intégration, $\lambda < \frac{1}{2}$ et $M \neq N$.

60. Si dans le développement (67) nous faisons les changements

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}, \quad \ldots, \quad x_s = \frac{y_s}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}$$

et

$$a_1 = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}, \quad \ldots, \quad a_s = \frac{-\alpha_s}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}},$$

nous déduirons, comme dans le cas de deux variables, que

$$(71)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{y_1^2+\ldots+y_s^2-1}}, \lambda\right) \\ &= \frac{(-1)^{m_1+\ldots+m_s}}{m_1!\ldots m_s!}(y_1^2+\ldots+y_s^2-1)^{\frac{m_1+\ldots+m_s}{2}-\lambda+\frac{s-1}{2}} \\ &\quad\times \frac{d^{m_1+\ldots+m_s}(y_1^2+\ldots+y_s^2-1)^{\lambda-\frac{s-1}{2}}}{dy_1^{m_1}\ldots dy_s^{m_s}}. \end{aligned}$$

61. Le système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait le polynome $\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ se forme facilement. En effet, du développement

$$(s-2\lambda-1)(1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+a_1^2+\ldots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s+1}{2}} = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\Theta_{m_1,\ldots,m_s},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Theta_{m_1,\ldots,m_s} = x_1\frac{d\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1} + \ldots + x_s\frac{d\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_s} \\ + (m_1+\ldots+m_s+s-1-2\lambda)\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}, \end{aligned}$$

qui se déduit de (67) et de ses dérivées, on obtient

$$\begin{aligned} &a_1^2(s-2\lambda-1)(s-2\lambda+1)(1-2a_1x_1-\ldots-\ldots-2a_sx_s+a_1^2+\ldots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s+1}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\left(x_1\frac{d\Theta_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1} - m_1\Theta_{m_1,\ldots,m_s}\right), \end{aligned}$$

où l'on voit que le premier membre est précisément la dérivée seconde par rapport à x_1 du premier membre de (67); donc

$$(72)\qquad \frac{d^2\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1^2} - x_1\frac{d\Theta_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_1} + m_1\Theta_{m_1,\ldots,m_s} = 0,$$

ce qui est une des équations cherchées. On aura, de même, les $s-1$ autres correspondant aux variables $x_2, \ldots, x_s$.

62. Entre les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_s}$ et $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$ il existe la relation très simple

$$(73)\quad V_{m_1,\ldots,m_s}\left(x_1,\ldots,x_s,\lambda+\frac{s-1}{2}\right)$$
$$=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_s+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m_1-\ldots-2m_s+1)}$$
$$\times\Pi_{m_1,\ldots,m_s}\left(x_1,\ldots,x_s,m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

qui résulte, comme pour deux variables, des relations (56) et (68).

On aura donc un système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait le polynome $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$ si dans le système formé par l'équation (72) et les $s-1$ autres analogues, on change λ en $m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{s}{2}-1$.

La relation (73) peut encore s'écrire

$$(73')\quad \Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$$
$$=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_s+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m_1-\ldots-2m_s+1)}$$
$$\times V_{m_1,\ldots,m_s}\left(x_1,\ldots,x_s,m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{s}{2}-1\right).$$

63. Des relations (73), (73′) et (54) on déduit

$$(74)\quad\left\{\begin{aligned}
&U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)\\
&\quad=A(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)^{\frac{m_1+\ldots+m_s}{2}}\\
&\quad\times V_{m_1,\ldots,m_s}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}},\ldots,\frac{x_s}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}},m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{s}{2}-1\right),\\
&V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)\\
&\quad=B(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)^{\frac{m_1+\ldots+m_s}{2}}\\
&\quad\times U_{m_1,\ldots,m_s}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}},\ldots,\frac{x_s}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_s^2-1}},m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{s}{2}-1\right);
\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$A=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_s+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m_1-\ldots-2m_s+1)},$$
$$B=(-1)^{m_1+\ldots+m_s}\frac{(2\lambda-s+1)(2\lambda-s)\ldots(2\lambda-s+1-m_1-\ldots-m_s+1)}{(2\lambda-s)(2\lambda-s-2)\ldots(2\lambda-s+1-2m_1-\ldots-2m_s+1)}.$$

Ces relations nous montrent qu'on peut déduire du polynome $V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ le polynome $U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ et inversement.

64. De la comparaison des relations (71) et (74) il résulte

$$U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$
$$= A\frac{(-1)^{m_1+\ldots+m_s}}{m_1!\ldots m_s!}(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d^{m_1+\ldots+m_s}(x_1^2+\ldots+x_s^2-1)^{m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx_1^{m_1}\ldots dx_s^{m_s}},$$

A ayant la même valeur que dans (74). C'est précisément la formule (52). Nous avons donc une nouvelle démonstration de cette formule.

65. Pour avoir une représentation intégrale des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_s}$ reprenons l'intégrale qu'on a obtenue dans la première Partie

$$(1-2\alpha z+\alpha^2)^\mu = \frac{2^{2\mu+1}\Gamma(-2\mu)}{\Gamma^2(-\mu)}\int_{-1}^{+1}(1-\alpha z - v\sqrt{\alpha^2 z^2-\alpha^2})^{2\mu}(1-v^2)^{-\mu-1}\,dv$$

et faisons

$$\alpha z = a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s \qquad \text{et} \qquad \alpha^2 = a_1^2 + \ldots + a_s^2;$$

nous aurons alors

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+a_1^2+\ldots+a_s^2)^\mu$$
$$= \frac{2^{2\mu+1}\Gamma(-2\mu)}{\Gamma^2(-\mu)}\int_{-1}^{+1}\Big[1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s$$
$$- v\sqrt{(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)^2-a_1^2-\ldots-a_s^2}\Big]^{2\mu}(1-v^2)^{-\mu-1}\,dv.$$

Mais le deuxième membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(-\mu-\frac{s}{2}\right)}\int_{(s+1)}\Big[1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s$$
$$- v(a_1x_1+\ldots+a_sx_s) - ia_1u_1-\ldots-ia_su_s\Big]^{2\mu}$$
$$\times(1-v^2-u_1^2-\ldots-u_s^2)^{-\mu-\frac{s+2}{2}}\,dv\,du_1\ldots du_s,$$

domaine d'intégration étant $v^2+u_1^2+\ldots+u_s^2 \leqq 1$. Si nous faisons $\mu = \lambda - \frac{s-1}{2}$, nous déduisons immédiatement

$$(75) \quad \begin{aligned} & V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ & = C \int_{(s+1)} [(1+v)x_1 + iu_1]^{m_1} \ldots [(1+v)x_s + iu_s]^{m_s} \\ & \qquad \times (1 - v^2 - u_1^2 - \ldots - u_s^2)^{-\lambda-\frac{3}{2}} dv\, du_1 \ldots du_s, \end{aligned}$$

où $\lambda < -\frac{1}{2}$ et

$$C = (-1)^{m_1+\ldots+m_s} \frac{(2\lambda - s + 1)(2\lambda - s)\ldots(2\lambda - s + 1 - m_1 - \ldots - m_s + 1)}{m_1! \ldots m_s!} \times \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)}{(\pi)^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)}.$$

66. De la formule (75) nous déduisons le développement

$$(76) \quad \begin{aligned} & e^{a_1x_1+\ldots+a_sx_s} \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_s^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_sx_s)^2}}{2} \right)^{\lambda - \frac{s-2}{2}} \\ & \times J^{\frac{s-2}{2}-\lambda} \left(\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_s^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_sx_s)^2} \right) \\ & = \frac{\Gamma(s - 2\lambda - 1)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)} \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1 + \ldots + m_s + s - 2\lambda - 1)} V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \end{aligned}$$

qui est valable quels que soient $a_1, \ldots, a_s$ et $x_1, \ldots, x_s$.

67. On voit facilement que la représentation intégrale (75) et le développement (76) peuvent être étendus à des polynomes plus généraux, qui résultent du développement de l'expression

$$\begin{aligned} & [1 - (2a_1^1x_1^1 + \ldots + 2a_l^1x_l^1) - \ldots \\ & \quad - (2a_1^sx_1^s + \ldots + 2a_k^sx_k^s) + (a_1^1 + \ldots + a_l^1)^2 + \ldots + (a_1^s + \ldots + a_k^s)^2]^\mu \end{aligned}$$

suivant les puissances de $(a_1^1, \ldots, a_l^1), \ldots, (a_1^s, \ldots, a_k^s)$.

68. Les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ se réduisent aussi, dans un cas limite au produit de s mêmes polynomes, à une variable, d'Hermite, que les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$.

69. Nous avons vu, en calculant l'intégrale I, que l'on a

$$\int_{(s)} (1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}(1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+a_1^2+\ldots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s-1}{2}} dx_1\ldots dx_s$$
$$=(\pi)^{\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\lambda\right)}$$

tant que $a_1^2+\ldots+a_s^2 \leqq 1$; de cette intégrale et de ses dérivées par rapport à $a_1, \ldots, a_s$ nous déduisons

$$(77)\quad (1-a_1^2-\ldots-a_s^2)\int (1-x_1^2-\ldots-x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}$$
$$\times(1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+a_1^2+\ldots+a_s^2)^{\lambda-\frac{s+1}{2}} dx_1\ldots dx_s$$
$$=(\pi)^{\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\lambda\right)},$$

égalité valable pour $a_1^2+\ldots+a_s^2<1$. On voit, en passant aux coordonnées polaires dans l'espace à s dimensions, que, lorsque le point $(a_1, \ldots, a_s)$ s'approche infiniment près d'un point fixe M de coordonnées $(a'_1, \ldots, a'_s)$ situé sur l'hypersphère $a_1^2+\ldots+a_s^2=1$, l'intégrale précédente devient une intégrale singulière, car elle n'a qu'un seul élément qui compte dans l'intégration : c'est celui qui contient le point $x_1=a'_1, \ldots, x_s=a'_s$.

Généralisation des polynomes précédents par des polynomes rattachables aux formes quadratiques.

70. Soit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s)=\sum_{\iota=1,\ \gamma=1}^{\iota=s,\ \gamma=s} c_{\iota\gamma}x_\iota x_\gamma \qquad (c_{\iota\gamma}=c_{\gamma\iota})$$

une forme quadratique quelconque, de s variables $x_1, \ldots, x_s$, que nous désignerons par $\varphi(x)$ et par $\varphi(a)$ la forme $\varphi(a_1, \ldots, a_s)$.

On voit immédiatement, en développant $\varphi(x_1+a_1, \ldots, x_s+a_s)$

suivant les puissances des x ou des a, que l'on a l'identité

$$(78)\qquad \frac{d\varphi(x)}{dx_1}a_1+\ldots+\frac{d\varphi(x)}{dx_s}a_s=\frac{d\varphi(a)}{da_1}x_1+\ldots+\frac{d\varphi(a)}{da_s}x_s.$$

Désignons par E un des membres de cette égalité, et considérons l'expression

$$\mathrm{H}=\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)^2-\varphi(a)[\varphi(x)-1].$$

Si nous posons

$$\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)=\frac{1}{m_1!\ldots m_s!}\left(\frac{d^{m_1+\ldots+m_s}\mathrm{H}^\lambda}{da_1^{m_1}\ldots da_s^{m_s}}\right)_{a_1=0,\ldots,a_s=0}$$

nous aurons le développement en série de Taylor

$$(79)\qquad \mathrm{H}^\lambda=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),$$

qui nous définit (¹) les polynomes $\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$ qui généralisent les polynomes $\mathrm{U}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$ précédents.

71. La formule (52) peut être étendue à ces nouveaux polynomes. On déduit, en effet, de l'identité

$$2\mathrm{H}-a_1\frac{d\mathrm{H}}{da_1}-\ldots-a_s\frac{d\mathrm{H}}{da_s}=2-\mathrm{E},$$

que l'on a le développement

$$(80)\qquad \left(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)\mathrm{H}^{\lambda-1}=\sum\frac{2\lambda-m_1-\ldots-m_s}{2\lambda}a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda).$$

Nous avons aussi l'identité

$$(81)\qquad [1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathrm{D}_{a_1}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)\mathrm{H}^{\lambda-1}=-\mathrm{D}_{x_1}[1-\varphi(x)]^{\frac{1}{2}-\lambda}\mathrm{H}^{\lambda-1},$$

D_x étant la notation différentielle de Cauchy, identité qui se vérifie facilement en la réduisant à cette autre

$$\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)\frac{d\mathrm{H}}{da_1}+[1-\varphi(x)]\frac{d\mathrm{H}}{dx_1}=-\frac{d\varphi(x)}{dx_1}\mathrm{H}$$

en tenant compte des deux expressions (78) de E.

(¹) Angelesco, *Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, t. IV, p. 30.

De l'identité (81) et des développements (79) et (80) nous déduisons la relation

$$[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathcal{V}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$$
$$=\frac{2\lambda}{m_1(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)}\,D_{x_1}[1-\varphi(x)]^{\frac{1}{2}-\lambda}\mathcal{V}_{m_1-1,m_2,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda-1);$$

Nous aurons $s-1$ autres relations analogues, correspondant aux variables $x_2, \ldots, x_s$. Démontrons, à l'aide de ces s relations, que l'on a

$$(82)\quad \mathcal{V}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$$
$$=\frac{1}{m_1!\ldots m_s!}\,\frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-m_1-\ldots-m_1+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots(2\lambda-2m_1-\ldots-2m_s+1)}$$
$$\times[\varphi(x)-1]^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d^{m_1+\ldots+m_s}[(x)-1]^{m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx_1^{m_1}\ldots dx_s^{m_s}}.$$

Ceci est immédiat pour les s polynomes

$$\mathcal{V}_{1,0,\ldots,0}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),\quad \mathcal{V}_{0,1,0,\ldots,0}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),\quad \ldots,$$
$$\mathcal{V}_{0,\ldots,0,1}(x_1,\ldots,x_s,\lambda).$$

En supposant la formule (82) vraie pour le polynome

$$\mathcal{V}_{m_1,m_2,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),$$

on voit facilement, à l'aide des s relations, qu'elle subsiste pour le polynome $\mathcal{V}_{p_1,p_2,\ldots,p_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$ où $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sont respectivement égaux aux $m_1, m_2, \ldots, m_s$ augmentés ou non d'une unité. La formule (82) est donc démontrée de proche en proche.

72. En supposant la forme quadratique $\varphi(x)$ décomposable en s carrés positifs, nous déduisons de la formule (82)

$$\int_{(s)}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathcal{V}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)\,\mathcal{V}_{n_1,\ldots,n_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)\,dx_1\ldots dx_s=0,$$

le domaine d'intégration étant $\varphi(x)\leqq 1$ et où $\lambda<\frac{1}{2}$ et

$$m_1+\ldots+m_s\neq n_1+\ldots+n_s.$$

73. Considérons les polynomes $\mathcal{N}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$ définis par

le développement

$$(83)\qquad \left[\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)^2-\varphi(x)\right]^\lambda=\Sigma a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s}\mathfrak{M}_{m_1,\dots,m_s}(x_1,\dots,x_s,\lambda).$$

Ces polynomes sont reliés, comme on le voit facilement, au polynome précédent $\mathfrak{V}_{m_1,\dots,m_s}$ par la relation

$$(84)\qquad \mathfrak{V}_{m_1,\dots,m_s}(x_1,\dots,x_s,\lambda)$$
$$=[\varphi(x)-1]^{\frac{m_1+\dots+m_s}{2}}\mathfrak{M}_{m_1,\dots,m_s}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\varphi(x)-1}},\dots,\frac{x_s}{\sqrt{\varphi(x)-1}},\lambda\right).$$

On peut les déduire aussi des polynomes $\Pi_n(x,\lambda)$ de même que les polynomes $\Pi_{m_1,\dots,m_s}(x_1,\dots,x_s,\lambda)$ qu'ils généralisent. On a, en effet,

$$(85)\qquad \sum_{m_1+\dots+m_s=\mathrm{N}} a_1^{m_1}\dots a_s^{m_s}\mathfrak{M}_{m_1,\dots,m_s}(x_1,\dots,x_s,\lambda)=[\varphi(a)]^{\frac{\mathrm{N}}{2}}\Pi_{\mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{E}}{2\sqrt{\varphi(a)}},\lambda\right).$$

74. Ayant mis le premier membre de (53) sous forme d'intégrale multiple, nous avons trouvé

$$(86)\qquad [(1-\alpha_1 y_1-\dots-\alpha_s y_s)^2-\alpha_1^2-\dots-\alpha_s^2]^\lambda$$
$$=\frac{\Gamma\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}\int_{(s)}(1-\alpha_1 y_1-\dots-\alpha_s y_s+\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_s v_s)^{2\lambda}$$
$$\times(1-v_1^2-\dots-v_s^2)^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}dv_1\dots dv_s.$$

Supposons la forme $\varphi(a)$ décomposable en s carrés positifs. Soit

$$\varphi(a)=\sum_{i=1}^{i=s}(\mathrm{A}_{1i}a_1+\mathrm{A}_{2i}a_2+\dots+\mathrm{A}_{si}a_s)^2$$

une décomposition quelconque. Faisons alors dans l'égalité (86) les changements

$$\alpha_i=\mathrm{A}_{1i}a_1+\mathrm{A}_{2i}a_2+\dots+\mathrm{A}_{si}a_s\qquad(i=1,2,\dots,s),$$
$$y_i=\mathrm{A}_{1i}x_1+\mathrm{A}_{2i}x_2+\dots+\mathrm{A}_{si}x_s\qquad(i=1,2,\dots,s),$$
$$v_i=\mathrm{A}_{1i}u_1+\mathrm{A}_{2i}u_2+\dots+\mathrm{A}_{si}u_s\qquad(i=1,2,\dots,s);$$

le premier membre de (86) deviendra identique au premier membre de (83), car il est facile de voir que

$$\sum_{i=1}^{i=s}(A_{1i}a_1+\ldots+A_{si}a_s)(A_{1i}x_1+\ldots+A_{si}x_s)=\frac{1}{2}E,$$

et l'intégrale du second membre deviendra, en désignant par Δ le discriminant de la forme $\varphi(a)$

$$\sqrt{\Delta}\int_{(s)}\left\{1-\frac{1}{2}a_1\left[\frac{d\varphi(x)}{dx_1}-\frac{d\varphi(u)}{du_1}\right]-\ldots-\frac{1}{2}a_s\left[\frac{d\varphi(x)}{dx_s}-\frac{d\varphi(u)}{du_s}\right]\right\}^{2\lambda}$$
$$\times[1-\varphi(u)]^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s,$$

le nouveau domaine d'intégration étant $\varphi(u)\leqq 1$. Il résulte de là la représentation intégrale

$$(87)\quad \mathcal{H}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$$
$$=A\sqrt{\Delta}\int_{(s)}\left[\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx_1}-\frac{1}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_1}\right]^{m_1}\cdots$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx_s}-\frac{1}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_s}\right]^{m_s}[1-\varphi(u)]^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s,$$

où $\lambda<\frac{1-s}{2}$, le domaine d'intégration $\varphi(u)\leqq 1$, et le coefficient A ayant la même valeur (58) que dans la représentation intégrale du polynome $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$.

75. En remarquant que l'intégrale

$$\sqrt{\Delta}\int_{(s)}e^{-\frac{a_1}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_1}-\ldots-\frac{a_s}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_s}}[1-\varphi(u)]^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s,$$

étendue au domaine $\varphi(u)\leqq 1$, devient, après les changements

$$A_{1i}u_1+\ldots+A_{si}u_s=v_i\qquad(i=1,2,\ldots,s),$$
$$\int_{(s)}e^{-v_1(A_{11}a_1+\ldots+A_{s1}a_s)-\ldots-v_s(A_{1s}a_1+\ldots+A_{ss}a_s)}(1-v_1^2-\ldots-v_s^2)^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}dv_1\ldots dv_s$$

étendue au domaine $v_1^2+\ldots+v_s^2\leqq 1$, intégrale dont on a déjà trouvé la valeur, on déduit que l'on a le développement

$$(88)\quad e^{\frac{1}{2}E}\left[\frac{i\sqrt{\varphi(a)}}{2}\right]^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(i\sqrt{\varphi(a)})$$
$$= \frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}} \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)} \mathcal{X}_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_s$ et $x_1, \ldots, x_s$.

76. Les polynomes $\mathcal{X}_{m_1,\ldots,m_s}$ ne sont plus de la classe de polynomes de M. Appell. On peut généraliser les polynomes $\Pi_{m_1,\ldots,m_s}$ par des polynomes se rattachant à la forme quadratique $\varphi(a)$ et qui soient en même temps de la classe de polynomes de M. Appell. En effet, on vérifie facilement que, entre les polynomes $\Phi_{m_1,\ldots,m_s}$, définis par le développement

$$[(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s)^2+\varphi(a)]^\lambda = \Sigma\, a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\Phi_{m_1,\ldots,m_s},$$

on a les relations

$$(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)\Phi_{m_1,\ldots,m_s} = \frac{d\Phi_{m_1+1,m_2,\ldots,m_s}}{dx_1} = \ldots = \frac{d\Phi_{m_1,\ldots,m_s+1}}{dx_s}.$$

Les polynomes plus généraux, définis par le développement de l'expression

$$[(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s)^p+\varphi_p(a)]^\lambda,$$

où $\varphi_p(a)$ désigne un polynome homogène de degré p en $a_1, \ldots, a_s$, sont aussi de la classe de polynomes de M. Appell.

77. De la comparaison des relations (84) et (87) il résulte que

$$\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda)$$
$$= A\sqrt{\Delta}\int_{(s)}\left[\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx_1}-\frac{1}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_1}\sqrt{\varphi(x)-1}\right]^{m_1}\ldots$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx_s}-\frac{1}{2}\frac{d\varphi(u)}{du_s}\sqrt{\varphi(x)-1}\right]^{m_s}[1-\varphi(u)]^{-\lambda-\frac{s+1}{2}}du_1\ldots du_s,$$

le coefficient A étant le même que dans (87), le domaine d'intégration aussi $\varphi(u)\leqq 1$, $\varphi(u)$ étant, comme dans tout ce qui va suivre, décomposable en s carrés positifs,

78. Du développement (88) nous déduisons cet autre

$$e^{\frac{1}{2}E}\left[\frac{\sqrt{\varphi(a)}\sqrt{1-\varphi(x)}}{2}\right]^{\lambda+\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\varphi(a)}\sqrt{1-\varphi(x)}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(-\lambda)}{2^{2\lambda+1}\sqrt{\pi}}\sum\frac{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1+\ldots+m_s-2\lambda)}\mho_{m_1,\ldots,m_s}(x_1,\ldots,x_s,\lambda),$$

E désignant un des membres de l'identité (78).

79. De l'intégrale qui représente le premier membre de (83) on déduit la représentation intégrale de H^λ, premier membre de (79). En cherchant les conditions pour que l'on ait

$$\left|\frac{1}{2}a_1\frac{d\varphi(x)}{dx_1}+\ldots+\frac{1}{2}a_s\frac{d\varphi(x)}{dx_s}\right.$$
$$\left.-i\sqrt{1-\varphi(x)}\left[\frac{1}{2}a_1\frac{d\varphi(u)}{du_1}+\ldots+\frac{1}{2}a_s\frac{d\varphi(u)}{du_s}\right]\right|<1$$

dans le domaine d'intégration $\varphi(u)\leqq 1$, on trouve, comme pour les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}$, en nous servant d'une décomposition en s carrés positifs de φ, qu'il suffit que l'on ait

$$\varphi(a)<1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x)\leqq 1.$$

Si ces conditions sont remplies, le développement (79) est convergent.

80. Désignons par $\psi(a)$ une forme quadratique $\psi(a_1,\ldots,a_s)$ décomposable en s carrés positifs. Soit $\varphi(x)$ ce que devient cette forme après la transformation

$$(89) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\psi(a)}{da_i}=x_i \qquad (i=1,2,\ldots,s);$$

$D\varphi(a)$ sera donc, en désignant par D le discriminant de la forme $\psi(a)$, la forme adjointe à $\psi(a)$. En partant d'une décomposition en carrés de la forme $\psi(a)$

$$(90) \qquad \psi(a)=\sum_{i=1}^{i=s}(\alpha_{1i}a_1+\alpha_{2i}a_2+\ldots+\alpha_{si}a_s)^2$$

et en posant

$$(91) \qquad \alpha_{1i}a_1+\ldots+\alpha_{si}a_s=b_i \qquad (i=1,2,\ldots,s),$$

on tire

$$(92)\qquad a_i = \beta_{1i} b_1 + \beta_{2i} b_2 + \ldots + \beta_{si} b_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

La transformation (89) deviendra, avec ces notations,

$$(93)\qquad \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \ldots + \alpha_{is} b_s = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

et, de la comparaison des deux systèmes (91) et (93), on déduit que l'on aura

$$b_i = \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \ldots + \beta_{is} x_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Donc

$$(94)\qquad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{i=s} (\beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \ldots + \beta_{is} x_s)^2.$$

Considérons alors le développement

$$(95)\qquad \begin{aligned}&[1 - 2a_1 x_1 - \ldots - 2a_s x_s + \psi(a)]^{\lambda - \frac{s-1}{2}} \\ &\quad = \Sigma\, a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \varphi_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)\end{aligned}$$

définissant les polynomes $\varphi_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ qui généralisent les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$.

Du développement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda = \Sigma\, \alpha^n P_n(x, \lambda),$$

qui est absolument convergent si $|\alpha| < 1$ et $|x| \leqq 1$, on déduit que

$$(96)\qquad \begin{aligned}&\sum_{m_1 + \ldots + m_s = N} a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} \varphi_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &\quad = [\psi(\alpha)]^{\frac{N}{2}} P_N\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s}{\sqrt{\psi(a)}}, \lambda - \frac{s-1}{2}\right],\end{aligned}$$

relation qui nous permet de déterminer les polynomes $\varphi_{m_1, \ldots, m_s}$ à l'aide des polynomes P_n, et, de plus, que le développement (95) est convergent si

$$\psi(a) < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{(a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s)^2}{\psi(a)} \leqq 1;$$

en remplaçant dans ces inégalités $\psi(a)$ par sa valeur (90) et en gardant les notations (91) et (92) on voit que

$$a_1x_1+\ldots+a_sx_s=\sum_{i=1}^{i=s}(\alpha_{1i}a_1+\ldots+\alpha_{si}a_s)(\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{is}x_s);$$

donc, d'après ce qu'on a vu pour les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_s}$ et de la relation (94), il résulte que les inégalités précédentes sont vérifiées si

$$\psi(a)<1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x)\leqq 1,$$

et dans ces mêmes conditions le développement (95) est convergent.

81. Les polynomes $\mho_{m_1, \ldots, m_s}$ et $\varphi_{n_1, \ldots, n_s}$, de même paramètre λ, sont des polynomes associés (¹). Démontrons, en effet, que l'on a

$$\int_{(s)}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mho_{m_1, \ldots, m_s}\varphi_{n_1, \ldots, n_s}\,dx_1\ldots dx_s=0, \tag{97}$$

le domaine d'intégration étant $\varphi(x)\leqq 1$, $\lambda<\frac{1}{2}$ et si l'on n'a pas en même temps $m_1=n_1, \ldots, m_s=n_s$.

Calculons pour cela l'intégrale

$$\mathfrak{J}=\int_{(s)}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}[1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+\psi(a)]^{\lambda-\frac{s-1}{2}} \times \mho_{m_1, \ldots, m_s}\,dx_1\ldots dx_s$$

étendue au même domaine. Cette intégrale se réduit, après avoir remplacé $\mho_{m_1, \ldots, m_s}$ par sa valeur (82) et après avoir fait $m_1+\ldots+m_s$ intégrations par parties, à

$$\mathfrak{J}=Ca_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\int_{(s)}[1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+\psi(a)]^{\lambda-\frac{s-1}{2}-m_1-\ldots-m_s} \times[1-\varphi(x)]^{m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}dx_1\ldots dx_s,$$

la constante C ayant la même valeur que dans l'intégrale I de (70).

Remplaçons dans cette intégrale $\psi(a)$ par la décomposition (90) et,

(¹) Angelesco, *Comptes rendus* t. CLXI. p. 490

en gardant les notations de (92), faisons les changements

$$\alpha_{1i}a_1+\ldots+\alpha_{si}a_s=b_i \qquad (i=1,2,\ldots,s),$$
$$\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{is}x_s=y_i \qquad (i=1,2,\ldots,s),$$

on aura, en tenant compte de (94),

$$\mathfrak{I}=\frac{Ca_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}}{\sqrt{\Delta}}\int_{(s)}[1-2b_1y_1-\ldots-2b_sy_s+b_1^2+\ldots+b_s^2]^{\lambda-\frac{s-1}{2}-m_1-\ldots-m_s}$$
$$\times(1-y_1^2-\ldots-y_s^2)^{m_1+\ldots+m_s-\lambda-\frac{1}{2}}dy_1\ldots dy_s,$$

le domaine d'intégration étant $y_1^2+\ldots+y_s^2\leqq 1$ et Δ le discriminant de $\varphi(x)$. Donc

$$\sqrt{\Delta}\,\mathfrak{I}=\mathrm{I},$$

I étant l'intégrale (70). En nous reportant aux résultats trouvés pour cette intégrale, on voit que

$$\mathfrak{I}=C(\pi)^{\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1+\ldots+m_s+\frac{s+1}{2}-\lambda\right)}\frac{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}}{\sqrt{\Delta}},$$

pour $\psi(a)\leqq 1$. Cette intégrale nous prouve que l'on a bien l'égalité (97) et, de plus, que

$$\int_{(s)}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathfrak{V}_{m_1,\ldots,m_s}\mathfrak{P}_{m_1,\ldots,m_s}dx_1\ldots dx_s$$
$$=\frac{C(\pi)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\Gamma\left(m_1+\ldots+m_s-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1+\ldots+m_s+\frac{s+1}{2}-\lambda\right)}.$$

Il résulte de la relation (97) que le polynome $\mathfrak{V}_{m_1,\ldots,m_s}$ de degré $m_1+\ldots+m_s=\mathrm{N}$ s'exprime linéairement au moyen des polynomes $\mathfrak{P}_{n_1,\ldots,n_s}$ de degré $n_1+\ldots+n_s=\mathrm{N}$ et que

$$\int_{(s)}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_{m_1,\ldots,m_s}\mathfrak{P}_{n_1,\ldots,n_s}dx_1\ldots dx_s=0$$
$$\left(\lambda>\frac{1}{2},\ m_1+\ldots+m_s\neq n_1+\ldots+n_s\right)$$

et le domaine d'intégration $\varphi(x)\leqq 1$.

De cette dernière égalité et de (96) il résulte que

$$\int_{(s)} [1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}} \quad P_N\left[\frac{a_1 x_1+\ldots+a_s x_s}{\sqrt{\psi(a)}}, \lambda-\frac{s-1}{2}\right]$$
$$\times P_M\left[\frac{b_1 x_1+\ldots+b_s x_s}{\sqrt{\psi(b)}}, \lambda-\frac{s-1}{2}\right] dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

même domaine d'intégration, $\lambda < \frac{1}{2}$, $M \neq N$ et $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ quelconques.

82. En étudiant les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_s}$ nous avons trouvé

$$(1-2\mu_1 z_1-\ldots-2\mu_s z_s+\mu_1^2+\ldots+\mu_s^2)^{\lambda-\frac{s-1}{2}}$$
$$= A\int_{(s+1)} [1-(1+v)(\mu_1 z_1+\ldots+\mu_s z_s)-i\mu_1 u_1-\ldots-i\mu_s u_s]^{2\lambda-s+1}$$
$$\times [1-v^2-u_1^2-\ldots-u_s^2]^{-\lambda-\frac{3}{2}} dv\, du_1 \ldots du_s,$$
$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{(\pi)^{\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{1}{2}\right)} \qquad \left(\lambda < -\frac{1}{2}\right),$$

et le domaine d'intégration étant $v^2+u_1^2+\ldots+u_s^2 \leqq 1$.

Si, en gardant les notations de (90) et (92), nous faisons dans cette égalité les changements

$$\alpha_{1i} a_1+\alpha_{2i} a_2+\ldots+\alpha_{si} a_s = \mu_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s),$$
$$\alpha_{i1} z_1+\alpha_{i2} z_2+\ldots+\alpha_{is} z_s = x_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s),$$
$$\alpha_{i1} u_1+\alpha_{i2} u_2+\ldots+\alpha_{is} u_s = w_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s),$$

on voit que le premier membre devient identique au premier membre du développement (95) et le second membre deviendra

$$A\sqrt{\Delta}\int_{(s+1)} [1-(1+v)(a_1 x_1+\ldots+a_s x_s)-i a_1 w_1-\ldots-i a_s w_s]^{2\lambda-s+1}$$
$$\times [1-v^2-\varphi(w)]^{-\lambda-\frac{3}{2}} dv\, dw_1 \ldots dw_s,$$

Δ étant le discriminant de $\varphi(a)$ et l'intégration étendue au domaine $v^2+\varphi(w) \leqq 1$, car des relations

$$\alpha_{i1} u_1+\alpha_{i2} u_2+\ldots+\alpha_{is} u_s = w_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s)$$

on tire, comme pour (93),

$$u_i = \beta_{i1} w_1 + \beta_{i2} w_2 + \ldots + \beta_{is} w_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

et par suite, en tenant compte de (94),

$$u_1^2 + \ldots + u_s^2 = \varphi(w).$$

Il résulte de là la représentation intégrale

$$\begin{aligned} &\mathfrak{V}_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \\ &= C\sqrt{\Delta} \int_{(s+1)} [(1+v)x_1 + i w_1]^{m_1} \ldots [(1+v)x_s + i w_s]^{m_s} \\ &\qquad \times [1 - v^2 - \varphi(w)]^{-\lambda - \frac{3}{2}} \, dv \, dw_1 \ldots dw_s, \end{aligned}$$

même domaine d'intégration $v^2 + \varphi(w) \leqq 1$ et la constante C ayant la même valeur que dans (75).

83. De même que pour les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_s}$ on déduira, de la représentation intégrale précédente des polynomes $\mathfrak{V}_{m_1, \ldots, m_s}$, le développement

$$\begin{aligned} &e^{a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s} \left[\frac{\sqrt{\psi(a) - (a_1 x_1 - \ldots - a_s x_s)^2}}{2} \right]^{\lambda - \frac{s-2}{2}} \\ &\qquad \times J^{\frac{s-2}{2} - \lambda} \left(\sqrt{\psi(a) - (a_1 x_1 - \ldots - a_s x_s)^2} \right) \\ &= \frac{\Gamma(s - 2\lambda - 1)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)} \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s}}{\Gamma(m_1 + \ldots + m_s + s - 2\lambda - 1)} \\ &\qquad \times \mathfrak{V}_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \end{aligned}$$

valable quels que soient les a et les x.

84. On peut facilement former une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont tous les polynomes $\mathfrak{V}_{m_1, \ldots, m_s}$ et $\mathfrak{V}_{n_1, \ldots, n_s}$ de même degré N. En effet, si dans la relation

$$\begin{aligned} &(1 - x^2) P''_N\left(x, \lambda - \frac{s-1}{2}\right) \\ &\quad + (2\lambda - s) x P'_N\left(x, \lambda - \frac{s-1}{2}\right) + N(N - 2\lambda + s - 1) P_N\left(x, \lambda - \frac{s-1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

on remplace x par

$$\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s}{\sqrt{\psi(a)}}$$

et qu'on multiplie ensuite par $[\psi(a)]^{\frac{N}{2}}$, on voit, en tenant compte de (96) et de ses dérivées,

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s=N} a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\frac{d\,\varphi_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_i} = a_i\quad [\psi(a)]^{\frac{N-1}{2}}\mathrm{P}'_{\mathrm{N}}\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_sx_s}{\sqrt{\psi(a)}},\,\lambda-\frac{s-1}{2}\right],$$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s=N} a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}\frac{d^2\varphi_{m_1,\ldots,m_s}}{dx_i\,dx_\gamma} = a_i a_\gamma[\psi(a)]^{\frac{N-2}{2}}\mathrm{P}''_{\mathrm{N}}\left[\frac{a_1x_1+\ldots+a_sx_s}{\sqrt{\psi(a)}},\,\lambda-\frac{s-1}{2}\right],$$

que les polynomes $\varphi_{m_1,\ldots,m_s}$ de degré $m_1+\ldots+m_s = \mathrm{N}$, satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(98)\qquad \begin{aligned}&\psi(a)-(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)^2\\ &\quad+(2\lambda-s)(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)+\mathrm{N}(\mathrm{N}-2\lambda+s-1)z=0,\end{aligned}$$

où l'on remplace $a_i a_\gamma$ par $\dfrac{d^2 z}{dx_i\,dx_\gamma}$ et a_i par $\dfrac{dz}{dx_i}$.

A cette même équation satisfont aussi les polynomes $\mathfrak{V}_{m_1,\ldots,m_s}$ de degré $m_1+\ldots+m_s = \mathrm{N}$, parce que ces polynomes s'expriment linéairement au moyen des polynomes $\varphi_{n_1,\ldots,n_s}$ de degré $n_1+\ldots+n_s = \mathrm{N}$. Il est facile de vérifier ce résultat pour les polynomes $\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m}$ et $\mathrm{U}_{m_1,\ldots,m_s}$.

85. Si dans le développement (79) on remplace les a_i par $a_i\sqrt{\dfrac{-1}{2\lambda}}$ et les x_i par $x_i\sqrt{\dfrac{-1}{2\lambda}}$ et que l'on fasse ensuite croître indéfiniment λ par des valeurs négatives, la limite du premier membre sera

$$e^{\frac{1}{2}x_1\frac{d\varphi(a)}{da_1}+\ldots+\frac{1}{2}x_s\frac{d\varphi(a)}{da_s}-\frac{1}{2}\varphi(a)},$$

expression qui coïncide avec la fonction exponentielle par laquelle Hermite définit (¹) ses polynomes $\mathrm{U}_{n,n',n'',\ldots}$.

De même, si dans le développement (95) nous faisons les mêmes changements, on trouve, comme limite du premier membre,

$$e^{a_1x_1+\ldots+a_sx_s-\frac{1}{2}\psi(a)},$$

(¹) *OEuvres de Charles Hermite*, t. II, p. 301.

qui coïncide avec la fonction exponentielle par laquelle Hermite définit (1) ses polynomes $V_{n,n',n''}$, car il est facile de voir que, avec nos notations, la fonction par laquelle Hermite définit les polynomes $V_{n,n',n''}$, peut s'écrire

$$e^{\frac{1}{4}\frac{d\psi(a)}{da_1}\frac{d\varphi(x)}{dx_1}+\quad+\frac{1}{4}\frac{d\psi(a)}{da_s}\frac{d\varphi(x)}{dx_s}-\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{d\psi(a)}{da}\right)},$$

et que ces deux dernières fonctions exponentielles sont identiques en vertu des identités

$$\frac{1}{4}\frac{d\psi(a)}{da_1}\frac{d\varphi(x)}{dx_1}+\ldots+\frac{1}{4}\frac{d\psi(a)}{da_s}\frac{d\varphi(x)}{dx_s}=a_1x_1+\ldots+a_sx_s,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{d\psi(a)}{da}\right)=\psi(a)$$

qui se vérifient sans difficulté à l'aide des relations (90), (91), (92), (93) et (94).

Les polynomes $U_{n,n',n''}$, et $V_{n,n',n''}$, sont le premier exemple de polynomes associés à plusieurs variables. Nous les retrouvons comme cas limite des polynomes $\mathfrak{V}_{m_1,\ ,m}$ et $\mathfrak{P}_{n_1,\ ,n}$ qui généralisent d'autres polynomes associés d'Hermite.

On pourra déduire des égalités limites reliant les polynomes $U_{n,n',n''}$, et $\mathfrak{V}_{n_1,\ ,n}$, $V_{n,n',n''}$, et $\mathfrak{P}_{n_1,\ ,n}$ la représentation intégrale des polynomes $U_{n,n'}$, et $V_{n,n'}$, .

86. Du calcul que nous avons fait pour avoir la valeur de l'intégrale $\mathfrak{I}$, il résulte que

$$\int_{(s)}[1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+\psi(a)]^{\lambda-\frac{s-1}{2}}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}dx_1\ldots dx_s$$
$$=\frac{(\pi)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\lambda\right)},$$

tant que $\psi(a)\leqq 1$, le domaine d'intégration étant $\varphi(x)\leqq 1$.

De cette intégrale et de ses dérivées par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_s$ nous

(1) *Loc. cit.*

déduisons

$$[\ -\psi(a)]\int_{(s)}[1-2a_1x_1-\ldots-2a_sx_s+\psi(a)]^{\lambda-\frac{s+1}{2}}[1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}}dx_1\ldots dx_s$$
$$=\frac{(\pi)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\lambda\right)},$$

égalité valable pour $\psi(a)<1$. On voit de même que pour (77), que cette intégrale est une intégrale singulière, car lorsque le point $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ s'approche infiniment près d'un point fixe M de coordonnées $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_s)$ situé sur l'hyperellipsoïde $\psi(a)=1$, il n'y a qu'un seul élément qui compte dans l'intégrale précédente : c'est l'élément qui contient le point de coordonnées $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_s)$ tel que l'on ait, en gardant les notations (90) et (92),

$$\beta_{i1}x'_1+\beta_{i2}x'_2+\ldots+\beta_{is}x'_s=\alpha_{1i}a'_1+\alpha_{2i}a'_2+\ldots+\alpha_{si}a'_s,$$

ce qui nous donne, d'après ce qu'on a vu pour (93),

$$x'_i=\frac{1}{2}\frac{d\psi(a')}{da'_i}.$$

Ce point est situé sur l'hyperellipsoïde d'intégration $\varphi(x)=1$.

87. Les polynomes $V_{m_1, \ \ , m_s}$ peuvent être généralisés aussi par d'autres polynomes déduits du développement

$$(99)\qquad \left[1-x_1\frac{d\varphi(a)}{da_1}-\ldots-x_s\frac{d\varphi(a)}{da_s}+\varphi(a)\right]^{\lambda-\frac{s-1}{2}}$$
$$=\Sigma a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}W_{m_1, \ \ , m_s}(x_1, \ \ldots, x_s, \lambda).$$

Si dans le développement (95) nous posons

$$a_i=\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha_i},$$

son premier membre deviendra, aux notations près, identique au premier membre de (99). Ceci nous montre que les polynomes $W_{m_1, \ \ , m_s}$ de même degré $m_1+\ldots+m_s=N$ s'expriment linéairement au moyen des polynomes $\varphi_{n_1, \ \ , n_s}$ où $n_1+\ldots+n_s=N$.

Donc tous les polynomes $W_{m_1, \ldots, m_s}$ de même degré N satisfont à l'équation aux dérivées partielles (98) et l'on aura aussi

$$\int_{(s)} [1-\varphi(x)]^{-\lambda-\frac{1}{2}} W_{m_1, \ldots, m_s} W_{p_1, \ldots, p_s} dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

si $\lambda < \frac{1}{2}$, $m_1 + \ldots + m_s \neq p_1 + \ldots + p_s$, le domaine d'intégration étant $\varphi(x) \leqq 1$.

Ces polynomes $W_{m_1, \ldots, m_s}$ peuvent être définis aussi à l'aide des polynomes P_n. En effet, on voit facilement que l'on a

$$\sum_{m_1 + \ldots + m_s = N} a_1^{m_1} \ldots a_s^{m_s} W_{m_1, \ldots, m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$
$$= [\varphi(a)]^{\frac{N}{2}} P_N\left[\frac{E}{2\sqrt{\varphi(a)}}, \lambda - \frac{s-1}{2}\right],$$

en désignant par E un des membres de l'identité (78).

De cette relation et de la relation (85) on déduit, de même que pour (73), que

$$(100) \qquad W_{m_1, \ldots, m_s}\left(x_1, \ldots, x_s, \lambda + \frac{s-1}{2}\right)$$
$$= A\, \mathfrak{M}_{m_1, \ldots, m_s}\left(x_1, \ldots, x_s, m_1 + \ldots + m_s - \lambda - \frac{1}{2}\right),$$

en désignant par A le coefficient numérique du second membre de (73).

Si dans le développement (99) nous faisons les changements

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{\varphi(y) - 1}}, \qquad \ldots, \qquad x_s = \frac{y_s}{\sqrt{\varphi(y) - 1}}$$

et

$$a_1 = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{\varphi(y) - 1}}, \qquad \ldots, \qquad a_s = \frac{-\alpha_s}{\sqrt{\varphi(y) - 1}},$$

nous voyons que son premier membre deviendra

$$\left[\frac{\varphi(\alpha_1 + y_1, \ldots, \alpha_s + y_s) - 1}{\varphi(y) - 1}\right]^{\lambda - \frac{s-1}{2}},$$

et par suite

$$(101)\quad W_{m_1, \ldots, m_s}\left[\frac{y_1}{\sqrt{\varphi(y)-1}}, \ldots, \frac{y_s}{\sqrt{\varphi(y)-1}}, \lambda\right]$$

$$= \frac{(-1)^{m_1+\ldots+m_s}}{m_1!\ldots m_s!}[\varphi(y)-1]^{\frac{m_1+\ldots+m}{2}-\lambda+\frac{s-1}{2}} \frac{d^{m_1+\ldots+m_s}[\varphi(y)-1]^{\lambda-\frac{s-1}{2}}}{dy_1^{m_1}\ldots dy_s^{m_s}}.$$

De la comparaison des relations (84), (100) et (101) il résulte la formule (82). Nous avons donc une nouvelle démonstration simple de cette formule générale.

88. On pourrait considérer aussi les polynomes définis par le développement de l'expression

$$\{(1-a_1x_1-\ldots-a_sx_s)^2-\psi(a)[\varphi(x)-1]\}^\lambda.$$

Tous ces polynomes de degré N s'expriment linéairement au moyen des polynomes $\mathcal{V}_{m_1, \ldots, m_s}$ de degré $m_1+\ldots+m_s = N$. De là les propriétés correspondantes.

89. Jusqu'ici, dans ce travail, nous nous sommes occupé des polynomes définis par le développement d'une expression de la forme

$$H^\mu.$$

Si $\mu = 0$, ce développement ne définit plus aucun polynome. Une fonction génératrice de ces polynomes, correspondant à la valeur $\mu = 0$, est

$$\log H,$$

comme on le voit en considérant la limite

$$\lim_{\mu=0} \frac{H^\mu - 1}{\mu}.$$

TROISIÈME PARTIE.

Sur une classe de polynomes à plusieurs variables.

1. Imaginons, dans l'espace à s dimensions, un domaine d'intégration D auquel seront étendues toutes les intégrales d'ordre s que nous considérerons, et désignons par K une fonction de s variables x_1, x_2, ..., x_s susceptible d'intégration et conservant un *signe constant* dans toute l'étendue du domaine D. Cherchons le polynome P en x_1, x_2, ..., x_s, le plus général d'un degré donné p, vérifiant les conditions

$$(1) \qquad \int_{(s)} K x_1^{i_1} \dots x_s^{i_s} P \, dx_1 \dots dx_s = 0 \qquad (i_1 + \dots + i_s < p)$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers i_1, i_2, ..., i_s dont la somme est moindre que p. Soit N_p le nombre des coefficients $\alpha_{m_1, \dots, m_s}$ dans le polynome le plus général de degré p,

$$P = \sum_{m_1 + \dots + m_s = 0}^{m_1 + \dots + m_s = p} \alpha_{m_1, \dots, m_s} x_1^{m_1} \dots x_s^{m_s}.$$

En écrivant les conditions (1) au nombre de N_{p-1}, on aura, entre les coefficients $\alpha_{m_1, \dots, m_s}$, autant d'équations linéaires et homogènes qui permettront de les exprimer tous en fonction de i d'entre eux convenablement choisis, en désignant par i le nombre $N_p - N_{p-1}$. Nous allons montrer qu'on peut prendre arbitrairement les i coefficients des termes de degré p dans P, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \alpha_{m_1, \dots, m_s} \qquad (m_1 + \dots + m_s = p),$$

les entiers $m_1, \dots, m_s$ prenant toutes les valeurs positives ou nulles telles que leur somme soit égale à p. Dans les équations du premier degré (1) qui déterminent les autres coefficients en fonction linéaire et homogène de ceux-là, le déterminant des coefficients des inconnues $\alpha_{i_1, \ldots, i_s} (i_1 + \ldots + i_s < p)$ *n'est pas nul* En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait supposer les coefficients (2) tous nuls et tirer des équations (1) des valeurs des $\alpha_{i_1, \ldots, i_s} (i_1 + \ldots + i_s < p)$ non nulles toutes à la fois; on aurait alors un polynome P, de degré $p - 1$ seulement, vérifiant les conditions (1), ce qui est impossible; car, en multipliant chacune des équations (1) par le coefficient

$$\alpha_{i_1, \ldots, i_s} (i_1 + \ldots + i_s < p)$$

et ajoutant, on aurait

$$\int_{(s)} \mathrm{KP}^2 \, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

condition absurde, puisque K a un signe constant.

Ainsi, on pourra résoudre les équations (1) par rapport aux coefficients $\alpha_{i_1, \ldots, i_s} (i_1 + \ldots + i_s < p)$ et les exprimer en fonction linéaire et homogène des coefficients (2). Le polynome le plus général P vérifiant les conditions (1) est donc de la forme

$$\mathrm{P} = \sum_{m_1 + \ldots + m_s = p} \alpha_{m_1, \ldots, m_s} \mathrm{V}_{m_1, \ldots, m_s},$$

avec i coefficients arbitraires, $\mathrm{V}_{m_1, \ldots, m_s} (m_1 + \ldots + m_s = p)$ désignant des polynomes linéairement indépendants. Ce dernier point est évident, car le polynome $\mathrm{V}_{n_1, \ldots, n_s} (n_1 + \ldots + n_s = p)$ contient un seul terme de degré p, le terme $x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s}$.

Nous appellerons les polynomes P, polynomes de la classe (1).

2. Tout polynome en $x_1, \ldots, x_s$ de degré p peut être mis sous la forme d'une somme de polynomes $\mathrm{V}_{m_1, \ldots, m_s}$ de degrés égaux et inférieurs à p multipliés par des constantes.

Pour le montrer, il suffit de faire voir que si ce théorème est vrai pour un polynome de degré $p - 1$, il l'est pour un polynome de degré p. Soit donc un polynome de degré p, que nous écrirons

$$\varphi_p(x_1, \ldots, x_s) = \varphi_{p-1}(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{n_1 + \ldots + n_s = p} \lambda_{n_1, \ldots, n_s} x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s},$$

en mettant en évidence les termes de degré p. Le polynome

$$V(x_1, \dots, x_s) = \sum_{n_1+\dots+n_s=p} \lambda_{n_1,\dots,n_s} V_{n_1,\dots,n_s}$$

est également de degré p et a les mêmes termes de degré p que le polynome $\varphi_p(x_1, \dots, x_s)$. La différence

$$\varphi_p(x_1, \dots, x_s) - V(x_1, \dots, x_s)$$

est donc un polynome de degré $p-1$ exprimable par hypothèse à l'aide d'une somme de polynomes $V_{m_1,\dots,m_s}$.

3. Désignons par $P_\gamma^{(p)}(\gamma = 1, 2, \dots, N_p - N_{p-1}; p = 1, 2, \dots, ad\ inf.)$ les termes d'une suite complète de polynomes de la classe (1); supposons, dans cette suite, les i polynomes $(i = N_p - N_{p-1})$ d'un même degré p linéairement indépendants. Donc une relation de la forme

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=i} \mu_\gamma P_\gamma^{(p)} = 0$$

n'est possible que si tous les μ_γ sont nuls. En mettant dans cette relation les polynomes $P_\gamma^{(p)}$ sous la forme

$$P_\gamma^{(p)} = \sum_{m_1+\dots+m_s=p} \lambda^\gamma_{m_1,\dots,m_s} V_{m_1,\dots,m_s} \qquad (\gamma = 1, 2, \dots, i), \tag{3}$$

nous voyons, comme cette relation n'est possible que pour des valeurs nulles des μ_γ, que le déterminant des coefficients des $V_{m_1,\dots,m_s}(m_1 + \dots + m_s = p)$ dans les i relations (3) est différent de zéro. On pourra donc tirer, de ces i relations, $V_{m_1,\dots,m_s}(m_1 + \dots + m_s = p)$ en fonction des $P_\gamma^{(p)}(\gamma = 1, 2, \dots, i)$. Par suite, le théorème plus général que le précédent :

« Tout polynome en $x_1, \dots, x_s$ de degré q peut être mis sous la forme d'une somme de polynomes $P_\gamma^{(p)}(\gamma = 1, 2, \dots, N_p - N_{p-1})$ de degrés égaux et inférieurs à q multipliés par des constantes, les polynomes $P_\gamma^{(p)}$ de la classe (1) formant une suite complète et les i polynomes $(i = N_p - N_{p-1})$ d'un degré p de cette suite étant linéairement indépendants. »

4. En désignant par $P^{(p)}$ et $P^{(q)}$ deux polynomes quelconques de la classe (1) de degrés différents p et q, nous aurons évidemment la relation

$$\int_{(s)} P^{(p)} P^{(q)} \, dx_1 \ldots dx_s = 0.$$

Supposons que l'on ait trouvé, d'une manière quelconque, une suite complète de polynomes $A_\gamma^{(p)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1}$; $p = 1, 2, \ldots, ad\ inf.$) tels que les i polynomes ($i = N_p - N_{p-1}$) d'un degré p soit linéairement indépendants et que l'on ait

$$(4) \qquad \int_{(s)} K A_\alpha^{(p)} A_\beta^{(q)} \, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

si $p \neq q$. Les polynomes $A_\gamma^{(p)}$ sont de la classe (1).

Pour $p = 1$ les relations

$$\int_{(s)} K A_1^{(0)} A_\gamma^{(1)} \, dx_1 \ldots dx_s = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, s)$$

nous montrent que les polynomes $A_\gamma^{(1)}$ sont bien de la classe (1).

Notre théorème sera démontré si, en le supposant vrai pour les polynomes de degré $p-1$, nous prouvons qu'il l'est aussi pour les polynomes de degré p. D'après le théorème précédent, $x_1^{i_1} \ldots x_s^{i_s}$ ($i_1 + \ldots + i_s < p$) peut se mettre sous la forme d'une somme de polynomes $A_\gamma^{(r)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_r - N_{r-1}$; $r = 1, 2, \ldots, p-1$) multipliés par des constantes; donc, des relations (4), on déduira que l'on doit avoir

$$\int_{(s)} K x_1^{i_1} \ldots x_s^{i_s} A_\gamma^{(p)} \, dx_1 \ldots dx_s = 0 \qquad (i_1 + \ldots + i_s < p)$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $i_1, \ldots, i_s$ dont la somme est moindre que p. Les polynomes $A_\gamma^{(p)}$ sont donc de la classe (1) et notre théorème est démontré.

5. On peut démontrer de même que, si l'on a deux suites complètes de polynomes $B_\gamma^{(p)}$ et $C_\gamma^{(p)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1}$; $p = 1, 2, \ldots, ad\ inf.$) les i polynomes ($i = N_p - N_{p-1}$) d'un degré p, dans ces deux suites,

étant linéairement indépendants et si

$$\int_{(s)} \mathrm{K}\,\mathrm{B}_\alpha^{(p)}\mathrm{C}_\beta^{(q)}\,dx_1\ldots dx_s = 0$$

pour $p \neq q$, $\alpha \leqq \mathrm{N}_p - \mathrm{N}_{p-1}$, $\beta \leqq \mathrm{N}_q' - \mathrm{N}_{q-1}$, les polynomes $\mathrm{B}_\gamma^{(r)}$ et $\mathrm{C}_\gamma^{(r)}$ sont de la classe (1).

6. Associons aux polynomes $\mathrm{V}_{m_1, \ \ , m_s}$ des polynomes adjoints $\mathrm{W}_{m_1, \ \ , m_s}$ tels que l'intégrale

$$\int_{(s)} \mathrm{K}\,\mathrm{V}_{m_1, \ \ , m_s}\mathrm{W}_{n_1, \ \ , n_s}\,dx_1\ldots dx_s$$

est nulle tant que l'on n'a pas $m_1 = n_1, \ldots, m_s = n_s$. Désignons les i polynomes adjoints de degré p par $\mathrm{W}_\gamma^{(p)}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}_p - \mathrm{N}_{p-1})$; ces polynomes étant de la classe (1) posons, pour les déterminer,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}_1^{(p)} = \alpha_{11}\mathrm{V}_1^{(p)} + \alpha_{12}\mathrm{V}_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{1i}\mathrm{V}_i^{(p)}, \\ \mathrm{W}_2^{(p)} = \alpha_{21}\mathrm{V}_1^{(p)} + \alpha_{22}\mathrm{V}_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{2i}\mathrm{V}_i^{(p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{W}_i^{(p)} = \alpha_{i1}\mathrm{V}_1^{(p)} + \alpha_{i2}\mathrm{V}_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{ii}\mathrm{V}_i^{(p)}, \end{array}\right.$$

en désignant par $\mathrm{V}_\gamma^{(p)}(\gamma = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}_p - \mathrm{N}_{p-1})$ les i polynomes $\mathrm{V}_{m_1, \ \ , m_s}(m_1 + \ldots + m_s = p)$, les polynomes $\mathrm{V}_\gamma^{(p)}$ et $\mathrm{W}_\gamma^{(p)}$ désignant des polynomes V et W de mêmes indices $m_1, \ldots, m_s$. Donc

$$(6)\qquad \int_{(s)} \mathrm{K}\,\mathrm{V}_\mu^{(p)}\mathrm{W}_\nu^{(p)}\,dx_1\ldots dx_s = 0,$$

μ et ν désignant des entiers *différents*. Posons encore, pour abréger,

$$(7)\qquad \mathrm{A}_{\mu\nu} = \int_{(s)} \mathrm{K}\,\mathrm{V}_\mu^{(p)}\mathrm{V}_\nu^{(p)}\,dx_1\ldots dx_s \qquad (\mathrm{A}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\nu\mu}),$$

et considérons la forme quadratique de i variables $y_1, y_2, \ldots, y_i$

$$\psi(y_1, y_2, \ldots, y_i) = \sum_{\mu+\nu=1}^{\mu+\nu=i} \mathrm{A}_{\mu\nu}y_\mu y_\nu$$

ou, d'après les valeurs des $\mathrm{A}_{\mu\nu}$,

$$(8)\qquad \psi(y_1, y_2, \ldots, y_i) = \int_{(s)} (y_1\mathrm{V}_1^{(p)} + y_2\mathrm{V}_2^{(p)} + \ldots + y_i\mathrm{V}_i^{(p)})^2\,dx_1\ldots dx_s.$$

De la première des relations (5) et des conditions (7) nous déduisons le système

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} A_{11} + \alpha_{12} A_{12} + \ldots + \alpha_{1i} A_{1i} = C_1,\\
&\alpha_{11} A_{21} + \alpha_{12} A_{22} + \ldots + \alpha_{1i} A_{2i} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_{11} A_{i1} + \alpha_{12} A_{i2} + \ldots + \alpha_{1i} A_{ii} = 0,
\end{aligned}$$

C_1 étant une constante quelconque, car les polynomes W seront déterminés à des facteurs constants près, qui nous permettra de trouver α_{11}, α_{12}, ..., α_{1i} sans indétermination, parce que le déterminant des coefficients de ces inconnues dans ce système, étant précisément le discriminant de la forme quadratique ψ, n'est pas nul, car de l'expression (8) de ψ il résulte que cette forme ne peut s'annuler que pour des valeurs de y_1, y_2, ..., y_i nulles à la fois. On pourra déterminer de même toutes les quantités $\alpha_{\mu\nu}$ de (5).

Les polynomes associés W nous permettent de prouver l'existence d'une relation de la forme

$$V_{m_1+1, m_2, \ldots, m_s} = x_1 V_{m_1, m_2, \ldots, m_s} + \sum_{n_1+\ldots+n_s=p} \lambda_{n_1, \ldots, n_s} V_{n_1, \ldots, n_s} + \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s=p-1} \mu_{\nu_1, \ldots, \nu_s} V_{\nu_1, \ldots, \nu_s},$$

où $m_1+\ldots+m_s=p$ et de déterminer les coefficients $\lambda_{n_1, \ldots, n_s}$ et $\mu_{\nu_1, \ldots, \nu_s}$.

7. A toute suite complète de polynomes de la classe (1), $P_\gamma^{(p)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1}$; $p = 1, 2, \ldots$, *ad inf.*), les i polynomes ($i = N_p - N_{-1}$) de degré p étant linéairement indépendants, on peut associer une suite complète de polynomes

$$W_\gamma^{(p)} (\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1};\ p = 1, 2, \ldots, \textit{ad inf.})$$

tels que l'intégrale

$$\int_{(s)} K W_\mu^{(p)} P_\nu^{(q)}\, dx_1 \ldots dx_s$$

est nulle tant que l'on n'a pas $p = q$ et $\mu = \nu$.

Les polynomes cherchés $W_\gamma^{(p)}$ doivent être de la classe (1); on pourra donc poser, d'après le théorème du point 3,

$$W_\gamma^{(p)} = \beta_{\gamma 1} P_1^{(p)} + \beta_{\gamma 2} P_2^{(p)} + \ldots + \beta_{\gamma i} P_i^{(p)} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, i),$$

Ces i relations nous permettent de déterminer les i^2 coefficients $\beta_{\mu\nu}$ comme nous l'avons fait pour les $\alpha_{\mu\nu}$ de (5). On formera, de même, une forme quadratique qui, mise sous forme d'intégrale, nous montre que son discriminant est positif, les i polynomes $P_\gamma^{(p)}$ étant linéairement indépendants.

8. Proposons-nous de chercher les suites des polynomes

$$U_\gamma^{(p)} \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1};\ p = 1, 2, \ldots, \textit{ad inf.})$$

de la classe (1), les i polynomes ($i = N_p - N_{p-1}$) de degré p étant linéairement indépendants, qui soient *identiques à leurs adjoints*, c'est-à-dire tels que l'intégrale

$$\int_{(s)} K U_\mu^{(p)} U_\nu^{(q)}\, dx_1 \ldots dx_s$$

reste nulle tant que l'on n'a pas en même temps $p = q$ et $\mu = \nu$.

Voici comment nous formerons les i polynomes $U_\gamma^{(p)}$ d'un degré donné p. Posons

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_1^{(p)} = \alpha_{11} V_1^{(p)} + \alpha_{12} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{1i} V_i^{(p)}, \\ U_2^{(p)} = \alpha_{21} V_1^{(p)} + \alpha_{22} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{2i} V_i^{(p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_i^{(p)} = \alpha_{i1} V_1^{(p)} + \alpha_{i2} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{ii} V_i^{(p)}, \end{array} \right.$$

les lettres $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ii}$ désignant i^2 constantes dont le déterminant n'est pas nul. Nous allons montrer qu'on peut, d'une infinité de façons, déterminer ces constantes, de manière à vérifier les conditions suivantes :

$$(10) \qquad \int_{(s)} K U_\mu^{(p)} U_\nu^{(p)}\, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

μ et ν désignant des entiers *différents*.

En gardant les notations (7) et (8) on voit facilement que la condition

$$\int_{(s)} K U_1^{(p)} U_2^{(p)}\, dx_1 \ldots dx_s = 0$$

devient, si l'on remplace $U_1^{(p)}$ et $U_2^{(p)}$ par leurs valeurs (9),

$$\alpha_{21} \frac{d\psi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i})}{d\alpha_{11}} + \alpha_{22} \frac{d\psi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i})}{d\alpha_{12}} + \ldots + \alpha_{2i} \frac{d\psi(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1i})}{d\alpha_{1i}} = 0,$$

et, en général, les conditions (10) peuvent s'écrire

$$\alpha_{\mu 1}\frac{d\psi(\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \ldots, \alpha_{\nu i})}{d\alpha_{\nu 1}} + \alpha_{\mu 2}\frac{d\psi(\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu i})}{d\alpha_{\nu 2}} + \ldots + \alpha_{\mu i}\frac{d\psi(\alpha_{\nu 1}, \ldots, \alpha_{\nu i})}{d\alpha_{\nu i}} = 0.$$

Sous cette forme, on voit que les conditions (10) expriment que, dans l'espace à $i-1$ dimensions, les points ayant pour coordonnées homogènes

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i}), \quad (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2i}), \quad \ldots, \quad (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ii})$$

sont les sommets d'un polyèdre de i faces, conjugué à la quadrique $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_i) = 0$. Nous avons vu que le discriminant de la forme quadratique ψ n'est pas nul. On pourra donc déterminer les quantités $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1i}), (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2i}), \ldots, (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ii})$ d'une infinité de façons, par exemple en décomposant la forme ψ en carrés. L'une de ces déterminations étant adoptée pour chaque degré p, on aura des polynomes $U_\gamma^{(p)}$ tels que

$$\int_{(s)} K U_\mu^{(p)} U_\nu^{(q)} dx_1 \ldots dx_s = 0, \tag{11}$$

tant que l'on n'a pas $p = q$ et $\mu = \nu$. De plus, comme les quantités $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1i}), (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2i}), \ldots, (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ii})$ ne sont déterminées qu'à des facteurs près, on pourra supposer ces facteurs choisis de telle façon que les intégrales

$$\int_{(s)} K[U_1^{(p)}]^2 dx_1 \ldots dx_s, \quad \int_{(s)} K[U_2^{(p)}]^2 dx_1 \ldots dx_s, \quad \ldots, \quad \int_{(s)} K[U_i^{(p)}]^2 dx_1 \ldots dx_s,$$

qui ont pour expressions respectives

$$\psi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i}) \quad \psi(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2i}), \quad \ldots, \quad \psi(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ii})$$

soient toutes égales à l'*unité* [1].

En résumé, nous avons formé des polynomes $U_\gamma^{(p)}$ satisfaisant aux conditions (11) et en outre tels que

$$\int_{(s)} K[U_\gamma^{(p)}]^2 dx_1 \ldots dx_s = 1, \tag{12}$$

quels que soient p et γ ($\gamma \leqq N_p - N_{p-1}$).

---

[1] K étant positive dans le domaine D.

Un polynome quelconque d'un degré p, $\varphi_p(x_1, \ldots, x_s)$, pourra se mettre sous la forme d'une somme de polynomes $U_\gamma^{(p)}$ multipliés par des constantes

$$(13) \qquad \varphi_p(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{r=1}^{r=p} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=N_r-N_{r-1}} \lambda_\gamma^{(r)} U_\gamma^{(r)},$$

et des relations (11) et (12) on déduit

$$\lambda_\gamma^{(r)} = \int_{(s)} K\,\varphi(x_1, \ldots, x_s)\, U_\gamma^{(r)}\, dx_1 \ldots dx_s.$$

On peut à l'aide des polynomes $U_\gamma^{(p)}$ résoudre le problème suivant :

Déterminer le polynome $\varphi_p(x_1, \ldots, x_s)$, d'un degré donné p, qui rend minimum l'intégrale

$$J = \int_{(s)} K[f(x_1, \ldots, x_s) - \varphi_p(x_1, \ldots, x_s)]^2\, dx_1 \ldots dx_s,$$

$f(x_1, \ldots, x_s)$ étant une fonction donnée, bornée et integrable de même que son carré, et la fonction K étant positive dans le domaine d'intégration D.

Remplaçons dans l'intégrale J le polynome $\varphi_p(x_1, \ldots, x_s)$ par son expression (13), en fonction des polynomes $U_\gamma^{(r)}$, et considérons J comme une fonction de $\lambda_\gamma^{(r)}(\gamma = 1, 2, \ldots, N_r - N_{r-1};\ r = 1, 2, \ldots, p)$. Pour avoir son minimum, prenons les dérivées de J par rapport à chacune des variables $\lambda_\gamma^{(r)}$ et égalons-les à zéro. On aura ainsi

$$\frac{dJ}{d\lambda_\gamma^{(r)}} = -\int_{(s)} K f(x_1, \ldots, x_s)\, U_\gamma^{(r)}\, dx_1 \ldots dx_s + \lambda_\gamma^{(r)} = 0,$$

donc

$$(14) \qquad \lambda_\gamma^{(r)} = \int_{(s)} K f(x_1, \ldots, x_s)\, U_\gamma^{(r)}\, dx_1 \ldots dx_s$$

$$(\gamma = 1, 2, \ldots, N_r - N_{r-1};\ r = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces valeurs des $\lambda_\gamma^{(r)}$ rendent minimum J, car les dérivées secondes sont toutes positives et égales à l'unité. Il résulte de ces valeurs des $\lambda_\gamma^{(r)}$ que si dans le développement en série de polynomes $U_\gamma^{(r)}$ de $f(x_1, \ldots, x_s)$ on s'arrête aux termes de degré p, inclusivement, on obtient précisément le polynome φ_p rendant minimum J.

Calculons la valeur de ce minimum J. On voit, en effectuant le carré qui est sous signe d'intégration, que

$$(15) \qquad J_{\min}^{(p)} = \int_{(s)} \mathrm{K} f^2(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s - \sum_{r=1}^{r=p} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\mathrm{N}_r-\mathrm{N}_{r-1}} [\lambda_\gamma^{(r)}]^2,$$

les $\lambda_\gamma^{(r)}$ ayant les valeurs (14); donc plus le degré p est grand, plus $J_{\min.}^{(p)}$ diminue. Mais comme $J_{\min}^{(p)}$ doit en tout cas être positive, il résulte que :

La série formée par la somme des carrés des coefficients du développement d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_s)$, bornée, intégrable et de carré intégrable dans le domaine D, en série de polynomes $U_\gamma^{(r)}$, est convergente.

De plus, si l'on est assuré qu'il est possible, d'une manière quelconque, de déterminer un polynome $p_n(x_1, \ldots, x_s)$ de degré n assez grand pour que

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - p_n(x_1, \ldots, x_s)| < \varepsilon$$

dans toute l'étendue du domaine D, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra (extension du théorème de Weierstrass), la série

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\mathrm{N}_r-\mathrm{N}_{r-1}} [\lambda_\gamma^{(r)}]^2,$$

des carres des coefficients, est convergente et a pour somme

$$\int_{(s)} \mathrm{K} f^2(x, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

En effet, en considérant l'intégrale

$$\int_{(s)} \mathrm{K}[f(x_1, \ldots, x_s) - p_n(x_1, \ldots, x_s)]^2\, dx_1 \ldots dx_s,$$

on pourra choisir $p_n(x_1, \ldots, x_s)$ tel que la valeur de cette intégrale soit plus petite que toute quantité η donnée d'avance. Mais au degré n de $p_n(x_1, \ldots, x_s)$ ainsi choisi, correspondra le polynome $\varphi_n(x_1, \ldots, x_s)$ pour lequel on a le minimum $J_{\min}^{(n)}$. On a donc

$$J_{\min.}^{(n)} < \eta;$$

et par suite de (15) il résulte notre proposition.

On voit aussi que, dans les mêmes conditions, le coefficient (14) tend vers zéro, lorsque le degré r de $U_\gamma^{(r)}$ augmente indéfiniment.

Didon ([1]) a donné un exemple de polynome $U_\gamma^{(r)}$ pour le cas $K = 1$ et le domaine D étant défini par $x_1^2 + \ldots + x_s^2 \leqq 1$.

Les polynomes de Didon ont été généralisés par Orlov ([2]) et par Steklov ([3]). On peut facilement former d'autres polynomes $U_\gamma^{(r)}$.

Prenons $K = (1 - x_1^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}(1 - x_2^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} \ldots (1 - x_s^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}$ et le domaine D défini par $x_1^2 \leqq 1$, $x_2^2 \leqq 1$, ..., $x_s^2 \leqq 1$. En posant alors

$$U_{m_1, \ldots, m_s} = P_{m_1}(x_1, \lambda) \ldots P_{m_s}(x_s, \lambda),$$

$P_m(x, \lambda)$ étant les polynomes dont nous nous sommes occupés dans la première Partie, on voit que l'intégrale

$$\int_{(s)} (1 - x_1^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} \ldots (1 - x_s^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}} U_{m_1, \ldots, m_s} U_{n_1, \ldots, n_s} \, dx_1 \ldots dx_s$$

est nulle tant que l'on n'a pas $m_1 = n_1$, ..., $m_s = n_s$.

Plus généralement, on formera des polynomes $U_\gamma^{(r)}$, à l'aide des polynomes X_{im} ($i = 1, 2, \ldots, s$) de degré m tels que

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} k_i(x) X_{in} X_{im} \, dx = 0 \qquad (m \neq n),$$

$k_i(x)$ gardant un signe constant pour x compris entre α_i et β_i, où $K = k_1(x_1) k_2(x_2)$, ..., $k_s(x_s)$ et le domaine D défini par les inégalités $\alpha_i < x_i < \beta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$).

9. Cherchons à former deux suites complètes de polynomes $P_\gamma^{(r)}$ et $R_\gamma^{(r)}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, N_r - N_{r-1}$; $r = 1, 2, \ldots$, *ad inf.*), les polynomes de même degré dans les deux suites étant linéairement indépendants, tels que

$$\int_{(s)} K P_\mu^{(p)} R_\nu^{(q)} \, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

tant que l'on n'a pas $p = q$ et $\mu = \nu$. Ces polynomes P et R doivent

---

([1]) *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII.

([2]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1881 et 1882.

([3]) Thèse, Petrograd, 1881.

être de la classe (1), d'après ce qu'on a vu au point 5. On vérifiera, sans peine, que l'on obtiendra les polynomes $P_\gamma^{(p)}$ et $R_\gamma^{(p)}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, N_p - N_{p-1})$ d'un degré donné p par la méthode suivante. On posera

$$\begin{aligned} P_1^{(p)} &= \alpha_{11} V_1^{(p)} + \alpha_{12} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{1i} V_i^{(p)}, \\ P_2^{(p)} &= \alpha_{21} V_1^{(p)} + \alpha_{22} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{2i} V_i^{(p)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_i^{(p)} &= \alpha_{i1} V_1^{(p)} + \alpha_{i2} V_2^{(p)} + \ldots + \alpha_{ii} V_i^{(p)}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} R_1^{(p)} &= \beta_{11} V_1^{(p)} + \beta_{12} V_2^{(p)} + \ldots + \beta_{1i} V_i^{(p)}, \\ R_2^{(p)} &= \beta_{21} V_1^{(p)} + \beta_{22} V_2^{(p)} + \ldots + \beta_{2i} V_i^{(p)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_i^{(p)} &= \beta_{i1} V_1^{(p)} + \beta_{i2} V_2^{(p)} + \ldots + \beta_{ii} V_i^{(p)}, \end{aligned}$$

où l'on désigne par i le nombre $N_p - N_{p-1}$, et l'on prendra pour

$$\begin{array}{llll} (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1i}), & (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2i}), & \ldots, & (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ii}), \\ (\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1i}), & (\beta_{21}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2i}), & \ldots, & (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ii}), \end{array}$$

les coordonnées homogènes, dans l'espace à $i - 1$ dimensions, des sommets de deux polyèdres à i faces conjugués l'un de l'autre par rapport à la quadrique $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_i) = 0$ définie au (8).

10. Si d'une manière quelconque on a obtenu une suite complète de polynomes $P_\gamma^{(r)}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, N_r - N_{r-1}; r = 1, 2, \ldots, ad\ inf.)$ de la classe (1), les polynomes d'un même degré étant linéairement indépendants, on peut déduire tous les polynomes de la classe (1); il suffit, pour cela, de déduire de cette suite les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_s}$. Voilà comment on procédera pour déterminer tous les polynomes $V_{n_1, \ldots n_s}$ $(n_1 + \ldots + n_s = p)$ d'un même degré donné p. Désignons par $\varphi_\gamma^{(p)}$ l'ensemble de termes homogènes de degré p en $x_1, x_2, \ldots, x_s$ contenus dans le polynome $P_\gamma^{(p)}$ et considérons le système formé par les i équations, $i = N_p - N_{p-1}$,

$$\varphi_\gamma^{(p)} - a_\gamma = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, i),$$

comme un système déterminant les i inconnues

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_s^{m_s} (m_1 + m_2 + \ldots + m_s = p);$$

nous tirerons $x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}$ en fonction linéaire et homogène de $a_1, a_2, \dots, a_i$. On aura le polynome $V_{n_1, \dots, n_s}$ $(n_1+\dots+n_s=p)$ si dans cette expression de $x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}$ on remplace les a_γ par $P_\gamma^{(p)}$. C'est ce qui résulte du fait que les polynomes $P_\gamma^{(p)}(\gamma=1, 2, \dots, i)$ sont linéairement indépendants, et que, ces polynomes étant de la classe (1), le coefficient de $x_1^{r_1}\dots x_s^{r_s}(r_1+\dots+r_s=p)$ dans $P_\mu^{(p)}$ est le même que le coefficient de $V_{r_1, \dots, r_s}$ dans son expression

$$P_\mu^{(p)} = \sum_{m_1+\dots+m_s=p} \alpha_{m_1, \dots, m_s} V_{m_1, \dots, m_s}.$$

Didon (¹) indique cette méthode pour déduire les polynomes V d'Hermite des polynomes U.

11. Tout polynome P de la classe (1) doit s'annuler dans le domaine D d'intégration, car s'il gardait un signe constant, l'intégrale

$$\int_{(s)} \mathrm{K\,P}\, dx_1 \dots dx_s$$

ne pourrait pas être nulle, mais des conditions (1) il résulte que cette intégrale est nulle.

Plus généralement, si un polynome P, de la classe (1), est décomposable en un produit de deux facteurs entiers $P = QR$, chacun des polynomes Q et R doit s'annuler dans le domaine D. En effet, si le polynome R, par exemple, gardait un signe constant dans le domaine D, l'intégrale

$$\int_{(s)} \mathrm{K\,QP}\, dx_1 \dots dx_s,$$

qui devrait être nulle en vertu des relations (1), puisque le degré de Q est moindre que celui de P, ne le serait pas, car en remplaçant P par QR, elle deviendrait

$$\int_{(s)} \mathrm{K\,Q^2R}\, dx_1 \dots dx_s,$$

ce qui est une intégrale composée d'éléments ayant tous le même signe.

(¹) Thèse, p. 5.

12. Les polynomes P définis par les conditions (1) se rencontrent dans la résolution d'un problème qui se pose dans la recherche des fractions continues algébriques correspondant à une certaine fonction. Considérons, en effet, la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \int_{(s)} \frac{K(y_1, y_2, \ldots, y_s)}{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots(x_s - y_s)} dy_1\, dy_2 \ldots dy_s,$$

l'intégration étendue au même domaine D, dans lequel $K(y_1, \ldots, y_s)$ garde un signe constant. Le point $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ étant pris dans une région convenablement choisie, on aura le développement

$$\frac{1}{x_1 \ldots x_s \left(1 - \frac{y_1}{x_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{y_s}{x_s}\right)} = \frac{1}{x_1 \ldots x_s} \sum \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{m_1} \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{y_s}{x_s}\right)^{m_s},$$

valable dans le domaine D entièrement à distance finie.

En posant alors

$$A_{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \int_{(s)} K(y_1, \ldots, y_s)\, y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_s^{m_s}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_s,$$

nous aurons le développement $f(x_1, \ldots, x_s)$ suivant les puissances négatives des variables

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_s} \sum \frac{A_{m_1, m_2, \ldots, m_s}}{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_s^{m_s}}.$$

Proposons-nous de trouver le polynome P, le plus général de degré p en $x_1, x_2, \ldots, x_s$, tel que le produit

$$P.f = \frac{P}{x_1 \ldots x_s} \sum \frac{A_{m_1, \ldots, m_s}}{x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}}$$

n'ait plus de termes de la forme $\frac{1}{x_1^{i_1+1} x_2^{i_2+1} \ldots x_s^{i_s+1}}$, où $i_1 + i_2 + \ldots + i_s < p$, les i_r étant des entiers positifs ou nuls.

Posons

$$P = \sum_{m_1 + \ldots + m_s = 0}^{m_1 + \ldots + m_s = p} \alpha_{m_1, \ldots, m_s} x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}$$

et exprimons que le coefficient de $\frac{1}{x_1^{i_1+1} \ldots x_s^{i_s+1}}$ dans le produit fP est nul, nous aurons

$$\sum_{m_1+\dots+m_s=0}^{m_1+\dots+m_s=p} \alpha_{m_1,\dots,m_s} \mathrm{A}_{m_1+i_1,\, m_2+i_2,\, \dots,\, m_s+i_s} = 0$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $i_1, i_2, \dots, i_s$ dont la somme est moindre que p. Ces conditions sont identiques, comme on le voit immédiatement, aux conditions (1). Donc le polynome P cherché est un quelconque des polynomes de degré p de la classe (1). On pourrait déterminer complètement le polynome P par des conditions supplémentaires. Par exemple, que le polynome P n'ait qu'un terme de degré p, le terme $x_1^{n_1}\dots x_s^{n_s}(n_1+\dots+n_s=p)$, alors on trouvera le polynome $\mathrm{V}_{n_1,\dots,n_s}$; ou bien que les termes de la forme $\frac{1}{x_1^{i_1+1}\dots x_s^{i_s+1}}$, où $i_1+\dots+i_s=p$, disparaissent aussi du produit $f\mathrm{P}$, excepté le terme en $\frac{1}{x_1^{n_1+1}\dots x_s^{n_s+1}}(n_1+\dots+n_s=p)$, alors P se réduira au polynome $\mathrm{W}_{n_1,\dots,n_s}$ qui est le polynome adjoint de $\mathrm{V}_{n_1,\dots,n_s}$.

Calcul approché des intégrales multiples.

13. La théorie des quadratures mécaniques a été étendue par M. Appell [1] aux intégrales doubles. Nous allons étendre cette théorie aux intégrales multiples, en la précisant et en la complétant sur certains points. Considérons d'abord le cas des intégrales simples.

Soient $\mathrm{K}(x)$ une fonction donnée de x susceptible d'intégration dans un intervalle donné a, b, et

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\nu x^\nu + \dots$$

une série convergente dans cet intervalle ainsi qu'aux limites.

Pour évaluer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b \mathrm{K}(x) f(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu \mathrm{I}_\nu,$$

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1890, p. 9.

où

$$I_\nu = \int_a^b K(x) x^\nu \, dx,$$

substituons à $f(x)$ le polynome de degré $n - 1$

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} f(x_1) \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} f(x_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} f(x_n),\end{aligned}$$

qui est, d'après la formule de Lagrange, le polynome de degré $n -$ qui devient égal à $f(x)$ pour n valeurs x_1, x_2, ..., x_n choisies dans l'intervalle a, b. Nous prendrons pour valeur approchée de l'intégrale I, l'intégrale

$$J = \int_a^b K(x) \varphi(x) \, dx = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n),$$

p_1, p_2, ..., p_n désignant des constantes qui dépendent de la valeur de x_1, x_2, ..., x_n, mais non de la nature de la fonction $f(x)$. Par exemple

$$p_1 = \int_a^b \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} K(x) \, dx.$$

En remplaçant $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ par les séries correspondantes, on a

$$J = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (p_1 x_1^\nu + p_2 x_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\nu).$$

Si l'on suppose nuls les coefficients

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad ad\ inf.,$$

$f(x)$ se réduit à un polynome de degré $n - 1$, $\varphi(x)$ devient identique à $f(x)$, et l'on a alors

$$I = J,$$

quels que soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. On a donc

$$(16) \quad \begin{cases} p_1 + \ p_2 \ + \ldots + \ p_n \ = I_0, \\ p_1 x_2 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = I_1, \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 = I_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_1 x_1^{n \;\; 1} p_2 x_2^{n-1} + \ldots + p_n x_n^{n-1} = I_{n-1}. \end{cases}$$

Ces relations ont lieu quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour obtenir une approximation plus grande, disposons de ces n quantités de façon à rendre égaux les n termes suivants en

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad a_{2n-1}$$

dans les expressions de I et J. Nous aurons les n nouvelles équations

$$(17) \quad \begin{cases} p_1 x_1^n + \ p_2 x_2^n \ + \ldots + \ p_n x_n^n \ = I_n, \\ p_1 x_1^{n+1} + p_2 x_2^{n+1} + \ldots + p_n x_n^{n+1} = I_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_1 x_1^{2n-1} + p_2 x_2^{2n-1} + \ldots + p_n x_n^{2n-1} = I_{2n-1}. \end{cases}$$

On a en tout $2n$ équations (16) et (17) à $2n$ inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_n x^n,$$

le polynome de degré n ayant pour racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On aura

$$P(x_i) = 0, \qquad x_i P(x_i) = 0, \qquad \ldots, \qquad x_i^{n-1} P(x_i) = 0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors, en multipliant, dans le Tableau des équations (16) et (17), la première par λ_0, la deuxième par λ_1, ..., la $(n+1)^{\text{ieme}}$ par λ_n et ajoutant, on verra que les coefficients de p_1, $p_2, \ldots, p_n$ sont nuls, et l'on aura

$$\lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_{n-1} I_{n-1} + \lambda_n I_n = 0.$$

De même, en multiplant la deuxième de ces équations par λ_0, la troisième par $\lambda_1, \ldots$, la $(n+2)^{\text{ieme}}$ par λ_n, on aura

$$\lambda_0 I_1 + \lambda_1 I_2 + \ldots + \lambda_{n-1} I_n + \lambda_n I_{n+1} = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\lambda_0 I_{n-1} + \lambda_1 I_n + \ldots + \lambda_{n-1} I_{2n-2} + \lambda_n I_{2n-1} = 0.$$

Ces équations, qui déterminent les rapports des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ à l'un d'entre eux, expriment que le polynome $P(x)$ satisfait aux n relations

$$\int_a^b K(x) x^p P(x)\, dx = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui déterminent le polynome $P(x)$ à un facteur constant près, à condition que $K(x)$ garde un signe constant entre a et b. Par exemple, si $K(x) = (1 - x^2)^{-\lambda - \frac{1}{2}}$, $a = -1$, $b = +1$, $P(x)$ est égal à un facteur constant près, au polynome $P_n(x, \lambda)$ de la première Partie.

Si $K(x)$ changeait de signe dans l'intervalle a, b, le polynome $P(x)$ pourrait ne pas être déterminé par les conditions précédentes. Il paraît alors possible d'annuler un terme de plus dans la différence $I - J$. Par exemple, en prenant $a = -1$, $b = +1$, $K(x) = 5x^2 + x\sqrt{15}$, il existe une infinité de polynomes du second degré $P(x)$ vérifiant les deux conditions

$$\int_{-1}^{+1} K(x) P(x)\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} K(x) x P(x)\, dx = 0.$$

C'est ce que l'on vérifiera sans peine, en montrant que le polynome P contient deux coefficients arbitraires.

14. Le problème de l'extension de la méthode de Gauss aux intégrales multiples se présente maintenant d'une manière simple. Soient K une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_s$ susceptible d'intégration et gardant un signe constant dans le domaine d'intégration à s dimensions D; $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ une fonction développable dans le domaine D en une série de puissances

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \Sigma a_{m_1, m_2, \ldots, m_s} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_s^{m_s}.$$

L'intégrale multiple d'ordre s

$$I = \int_{(s)} K f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s,$$

étendue au domaine D, aura pour expression la série

$$I = \Sigma a_{m_1, m_2, \ldots, m_s} I_{m_1, m_2, \ldots, m_s},$$

si l'on pose

$$I_{m_1,\ldots,m_s} = \int_{(s)} K x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_s^{m_s}\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Prenons un polynome complet de degré p en $x_1, x_2, \ldots, x_s$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{m_1+\ldots+m_s=0}^{m_1+\ldots+m_s=p} b_{m_1,\ldots,m_s} x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}.$$

Désignons par i le nombre des coefficients $b_{m_1,\ldots,m_s}$ et déterminons ces i coefficients en exprimant que le polynome $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ prend la même valeur que $f(x_1, \ldots, x_s)$ en i points $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$, $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{s2})$, $\ldots$, $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{si})$ situés dans le domaine D et n'appartenant pas à une surface d'ordre p. Les coefficients $b_{m_1,\ldots,m_s}$ sont ainsi déterminés par des équations du premier degré dont le déterminant n'est pas nul. Ce polynome pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \ldots, x_s) = {} & P_1(x_1, \ldots, x_s) f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1}) \\ & + P_2(x_1, \ldots, x_s) f(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{s2}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + P_i(x_1, \ldots, x_s) f(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{si}),\end{aligned}$$

les polynomes $P_\nu(x_1, \ldots, x_s)$ étant tous de degré p et ne dépendant pas de la nature de la fonction $f(x_1, \ldots, x_s)$; car on voit que, par exemple, le polynome $P_1(x_1, \ldots, x_s)$ sera complètement déterminé par les conditions : se réduire à l'unité au point $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$ et s'annuler aux autres $i-1$ points $(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$. L'intégrale

$$J = \int_{(s)} K \varphi(x_1, \ldots, x_s)\, dx \ldots dx_s$$

deviendra

$$J = p_1 f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1}) + p_2 f(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{s2}) + \ldots + p_i f(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{si}),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_i$ ne dépendent que de $(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots, i$. Cette intégrale J pourra s'écrire sous forme de série

$$J = \Sigma a_{m_1,m_2,\ldots,m_s}(p_1 x_{11}^{m_1} x_{21}^{m_2} \ldots x_{s1}^{m_s} + p_2 x_{12}^{m_1} x_{22}^{m_2} \ldots x_{s2}^{m_s} + \ldots + p_i x_{1i}^{m_1} x_{2i}^{m_2} \ldots x_{si}^{m_s}),$$

et l'on prendra J pour valeur approchée de I. Si, dans $f(x_1, \ldots, x_s)$, les coefficients $a_{m_1,m_2,\ldots,m_s}$ de tous les termes de degré supérieur à p

$(m_1+\ldots+m_s>p)$ étaient nuls, $f(x_1, \ldots, x_s)$ serait un polynome de degré p, et $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ serait identique à $f(x_1, \ldots, x_s)$. On aurait donc

$$I = J,$$

quelles que soient les valeurs de i premiers coefficients

$$a_{m_1,\ldots,m_s}(m_1+\ldots+m_s \leqq p),$$

ce qui donne

$$(18)\quad p_1 x_{11}^{m_1} x_{21}^{m_2} \ldots x_{s1}^{m_s} + p_2 x_{12}^{m_1} x_{22}^{m_2} \ldots x_{s2}^{m_s} + \ldots + p_i x_{1i}^{m_1} x_{2i}^{m_2} \ldots x_{si}^{m_s} = I_{m_1, m_2, \ldots m_s}$$

pour toutes les valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_s$ dont la somme est moindre que $p+1$,

$$m_1+m_2+\ldots+m_s \leqq p.$$

On pourra ensuite chercher à disposer de si indéterminées $(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots, i$, de façon à rendre identiques si des termes suivants dans les développements de I et de J, ce qui fournira si équations nouvelles de la forme

$$(19)\quad p_1 x_{11}^{\mu_1} x_{22}^{\mu_2} \ldots x_{s1}^{\mu_s} + p_2 x_{12}^{\mu_1} x_{22}^{\mu_2} \ldots x_{s2}^{\mu_s} + \ldots + p_i x_{1i}^{\mu_1} x_{2i}^{\mu_2} \ldots x_{si}^{\mu_s} = I_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s}.$$

On aura en tout un système de $(s+1)i$ équations (18) et (19) à $(s+1)i$ inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_i$, $(x_{i\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots, i$.

Il faudra, pour que le problème soit possible, que ces équations soient compatibles et donnent, pour les points $(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots, i$, des points réels appartenant au domaine D et non situés sur une surface d'ordre p.

15. Le cas le plus simple de tous est le cas $p = 0$, $i = 1$. On susbtitue alors à $f(x_1, \ldots, x_s)$ une constante $f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$ égale à la valeur que prend $f(x_1, \ldots, x_s)$ en un certain point $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$ du domaine D. L'intégrale J devient

$$J = p_1 f(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1}), \qquad p_1 = \int_{(s)} K\, dx_1 \ldots dx_s = I_{0,0,\ldots,0}.$$

On pourra disposer du point $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$ de façon à égaler les s termes suivants dans les développements de I et de J, ce qui donne

$$p_1 x_{11} = I_{1,0,\ldots,0}, \qquad p_1 x_{21} = I_{0,1,0,\ldots,0}, \qquad \ldots, \qquad p_1 x_{s1} = I_{0,\ldots,0,1},$$

d'où

$$x_{11} = \frac{I_{1,0,\ldots,0}}{I_{0,0,\ldots,0}}, \qquad x_{21} = \frac{I_{0,1,0,\ldots,0}}{I_{0,0,\ldots,0}}, \qquad \ldots, \qquad x_{s1} = \frac{I_{0,\ldots,0,1}}{I_{0,0,\ldots,0}}.$$

Donc le point $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{s1})$ devra être choisi au centre de gravité du domaine D, la densité en chaque point étant égale à $K(x_1, x_2, \ldots, x_s)$.

Si l'on forme le polynome le plus général du premier degré

$$P = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_s x_s,$$

s'annulant pour $x_1 = x_{11}$, $x_2 = x_{21}$, $\ldots$, $x_s = x_{s1}$, on voit, en écrivant

$$A_0 + A_1 x_{11} + A_2 x_{21} + \ldots + A_s x_{s1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_0 I_{0,0,\ldots,0} + A_1 I_{1,0,\ldots,0} + A_2 I_{0,1,0,\ldots,0} + \ldots + A_s I_{0,\ldots,0,1} = 0,$$

que ce polynome possédera la propriété

$$\int_{(s)} \mathrm{KP}\, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

ce sera donc le plus simple des polynomes de la classe (1). Ce polynome égalé à zéro donnera un plan passant par le point fixe cherché (x_{11}, x_{21}, x_{s1}).

10. M. Appell donne, pour le cas de deux variables, deux autres exemples simples, sur lesquels on voit comment les polynomes de la classe (1) interviennent dans cette théorie.

Sur un autre exemple, M. Appell montre que la détermination par les équations (18) et (19) des $p_1, p_2, \ldots, p_i$ et des points $(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{s\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots, i$ situés dans le domaine D, peut être impossible.

17. M. Bourget [1] a apporté à cette théorie, dans un cas particulier, un complément intéressant. Essayons de dégager l'idée générale, qui, croyons-nous, a conduit M. Bourget au résultat qu'il énonce. Consi-

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVI, p. 634.

dérons le cas de deux variables. On cherchera, de même, à trouver une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int\int_D K f(x, y)\, dx\, dy$$

par la substitution à la fonction $f(x,y)$, qui admet un développement suivant les puissances de x et y valable dans D, d'un polynome $\varphi(x,y)$ tel que

$$J = \int\int_D K \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

donne une bonne approximation. Mais le polynome $\varphi(x, y)$ sera déterminé par un autre nombre de points que précédemment.

Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux polynomes de degré p tels que les courbes

$$P(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q(x, y) = 0$$

se coupent en p^2 points

$$(20) \qquad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_{p^2}, y_{p^2})$$

situés dans le domaine D. On prendra pour $\varphi(x, y)$ un polynome d'un degré p'

$$\frac{(p'+1)(p'+2)}{2} > p^2 \qquad (p' \leqq 2p - 1)$$

à p^2 termes. La forme du polynome $\varphi(x, y)$ n'est pas déterminée, elle sera choisie de manière à ce que certaines conditions, que nous allons préciser, soient satisfaites. Nous déterminerons les p^2 coefficients du polynome $\varphi(x, y)$ en exprimant qu'il prend la même valeur que $f(x, y)$ en les p^2 points (20). Il faudra, pour qu'il n'y ait pas indétermination, que la forme de $\varphi(x, y)$ ne soit pas telle que les p^2 points (20) soient situés sur une courbe dont l'équation contient les mêmes termes en x et y que $\varphi(x, y)$. Le polynome $\varphi(x, y)$ pourra alors se mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) = P_1(x, y) f(x_1, y_1) + P_2(x, y) f(x_2, y_2) + \ldots + P_{p^2}(x, y) f(x_{p^2}, y_{p^2}),$$

le polynome $P_\mu(x, y)$ étant complètement déterminé par les conditions : être de la même forme que $\varphi(x, y)$ (c'est-à-dire avoir les mêmes p^2 termes en x et y), se réduire à l'unité au point x_μ, y_μ et s'annuler en tous les autres $p^2 - 1$ points (20). Les polynomes $P_\mu(x, y)$ ne dépendent donc pas de la nature de la fonction $f(x, y)$. L'intégrale J deviendra

$$(21) \qquad J = \Pi_1 f(x_1, y_1) + \Pi_2 f(x_2, y_2) + \ldots + \Pi_{p^2} f(x_{p^2}, y_{p^2}),$$

où l'on a posé

$$\Pi_\mu = \int\int_D K\, P_\mu(x, y)\, dx\, dy.$$

On verra, comme précédemment, que l'on a les p^2 relations

$$\Pi_1 x_1^\mu y_1^\nu + \Pi_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + \Pi_{p^2} x_{p^2}^\mu y_{p^2}^\nu = I_{\mu,\nu},$$

où

$$I_{\mu,\nu} = \int\int_D K x^\mu y^\nu\, dx\, dy,$$

correspondant à tous les termes $x^\mu y^\nu$ qui entrent dans la composition de $\varphi(x, y)$. Ces p^2 équations nous permettent de calculer les Π_μ, qui entrent dans l'expression (21) de J, en fonction des coordonnées (20).

En général, si les polynomes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ appartiennent à la classe (1), on aura $2p^2 + p$ relations de la forme

$$\Pi_1 x_1^i y_1^\gamma + \Pi_2 x_2^i y_2^\gamma + \ldots + \Pi_{p^2} x_{p^2}^i y_{p^2}^\gamma = I_{i,\gamma} \qquad (i + \gamma < 2p)$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers i et γ dont la somme est moindre que $2p$. Donc dans les développements de I et J les $2p^2 + p$ premiers termes seraient identiques.

Démontrons-le en supposant, pour simplifier l'exposition, $p = 2$. Prenons pour $\varphi(x, y)$ le polynome

$$\varphi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy.$$

On aura alors, quels que soient les points

$$(22) \qquad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad (x_4, y_4)$$

situés dans le domaine D, les quatre relations :

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 - I_{0,0} = 0, \\ X_2 &= \Pi_1 x_1 + \Pi_2 x_2 + \Pi_3 x_3 + \Pi_4 x_4 - I_{1,0} = 0, \\ X_3 &= \Pi_1 y_1 + \Pi_2 y_2 + \Pi_3 y_3 + \Pi_4 y_4 - I_{0,1} = 0, \\ X_4 &= \Pi_1 x_1 y_1 + \Pi_2 x_2 y_2 + \Pi_3 x_3 y_3 + \Pi_4 x_4 y_4 - I_{1,1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous voulons que l'on ait encore les six relations :

$$(24)\quad \begin{cases} X_5 = \Pi_1 x_1^2 + \Pi_2 x_2^2 + \Pi_3 x_3^2 + \Pi_4 x_4^2 - I_{2,0} = 0, \\ X_6 = \Pi_1 y_1^2 + \Pi_2 y_2^2 + \Pi_3 y_3^2 + \Pi_4 y_4^2 - I_{0,2} = 0, \\ X_7 = \Pi_1 x_1^2 y_1 + \Pi_2 x_2^2 y_2 + \Pi_3 x_3^2 y_3 + \Pi_4 x_4^2 y_4 - I_{2,1} = 0, \\ X_8 = \Pi_1 x_1 y_1^2 + \Pi_2 x_2 y_2^2 + \Pi_3 x_3 y_3^2 + \Pi_4 x_4 y_4^2 - I_{1,2} = 0, \\ X_9 = \Pi_1 x_1^3 + \Pi_2 x_2^3 + \Pi_3 x_3^3 + \Pi_4 x_4^3 - I_{3,0} = 0, \\ X_{10} = \Pi_1 y_1^3 + \Pi_2 y_2^3 + \Pi_3 y_3^3 + \Pi_4 y_4^3 - I_{0,3} = 0. \end{cases}$$

Les relations (23) et (24) forment un système de 10 équations à 12 inconnues $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ et les 8 coordonnées (22). Prenons les polynomes $P_2(x, y)$ et $Q_2(x, y)$ de la classe (1) :

$$P_2(x, y) = A\, x^2 + B\, xy + C\, y^2 + D\, x + E\, y + F,$$
$$Q_2(x, y) = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1.$$

Donc

$$(25)\quad \begin{cases} A\, I_{2,0} + B\, I_{1,1} + C\, I_{0,2} + D\, I_{1,0} + E\, I_{0,1} + F\, I_{0,0} = 0, \\ A\, I_{3,0} + B\, I_{2,1} + C\, I_{1,2} + D\, I_{2,0} + E\, I_{1,1} + F\, I_{1,0} = 0, \\ A\, I_{2,1} + B\, I_{1,2} + C\, I_{0,3} + D\, I_{1,1} + E\, I_{0,2} + F\, I_{0,1} = 0, \\ A_1 I_{2,0} + B_1 I_{1,1} + C_1 I_{0,2} + D_1 I_{1,0} + E_1 I_{0,1} + F_1 I_{0,0} = 0, \\ A_1 I_{3,0} + B_1 I_{2,1} + C_1 I_{1,2} + D_1 I_{2,0} + E_1 I_{1,1} + F_1 I_{1,0} = 0, \\ A_1 I_{2,1} + B_1 I_{1,2} + C_1 I_{0,3} + D_1 I_{1,1} + E_1 I_{0,2} + F_1 I_{0,1} = 0. \end{cases}$$

On est alors conduit à considérer les équations

$$(26)\quad \begin{cases} A\, X_5 + B\, X_4 + C\, X_6 + D\, X_2 + E\, X_3 + F\, X_1 = 0, \\ A\, X_9 + B\, X_7 + C\, X_8 + D\, X_5 + E\, X_4 + F\, X_2 = 0, \\ A\, X_7 + B\, X_8 + C\, X_{10} + D\, X_4 + E\, X_6 + F\, X_3 = 0, \\ A_1 X_5 + B_1 X_4 + C_1 X_6 + D_1 X_2 + E_1 X_3 + F_1 X_1 = 0, \\ A_1 X_9 + B_1 X_7 + C_1 X_8 + D_1 X_5 + E_1 X_4 + F_1 X_2 = 0, \\ A_1 X_7 + B_1 X_8 + C_1 X_{10} + D_1 X_4 + E_1 X_6 + F_1 X_3 = 0. \end{cases}$$

On vérifie alors immédiatement, en remplaçant les X_ν par leurs expressions de (23) et (24) que ce système (26) est satisfait si les points (22) sont les points de rencontre de coniques

$$P_2(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_2(x, y) = 0.$$

Pour que le système formé par les équations (23) et (24) soit équivalent au système formé par (23) et (26), et par suite être satisfait pour les mêmes valeurs des points (22), il faut que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & B & C & A & 0 \\ D_1 & 0 & B_1 & C_1 & A_1 & 0 \\ 0 & E & A & B & 0 & C \\ 0 & E_1 & A_1 & B_1 & 0 & C_1 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, condition qui, en général, est remplie.

Pour le cas de p quelconque la démonstration sera la même, on formera les p^2 équations correspondant aux (22) et les p^2+p correspondant aux (24); il faut seulement tenir compte que, pour $p \geqq 4$, le polynome $\varphi(x, y)$ doit être choisi de manière qu'il n'y ait pas une des p^2+p équations correspondant aux (26) qui résulte seulement des p^2 équations correspondant aux (23), car dans le cas contraire on ne pourrait plus conclure à l'équivalence des systèmes correspondant aux (24) et (26).

Pour que l'on puisse appliquer les considérations précédentes au calcul approché des intégrales doubles, il faut d'abord s'assurer de l'existence des polynomes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ de la classe (1) tels que les p^2 points d'intersection des courbes

$$P(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q(x, y) = 0$$

soient dans le domaine D, et puis choisir convenablement le polynome $\varphi(x, y)$, ce qui est probablement toujours possible vu le degré d'indétermination du problème.

Dans le cas $K = 1$, le domaine D étant $x^2+y^2 \leqq 1$, M. Bourget indique, comme polynomes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, les polynomes d'Hermite $U_{p,0}$ et $U_{0,p}$. Les courbes

$$U_{p,0} = \frac{d^p(1-x^2-y^2)^p}{dx^p} = 0 \qquad \text{et} \qquad U_{0,p} = \frac{d^p(1-x^2-y^2)^p}{dy^p} = 0$$

se coupent bien en p^2 points situés à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$. Donnons, pour le cas simple $p=2$, quelques détails.

Les courbes

$$U_{2,0} = 3x^2+y^2-1 = 0 \qquad \text{et} \qquad U_{0,2} = x^2+3y^2-1 = 0$$

déterminent les points (22)

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = -\frac{1}{2}, \quad y_4 = -\frac{1}{2}.$$

Le polynome

$$\varphi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

pourra être déterminé de façon à prendre la même valeur que $f(x, y)$ en ces quatre points, car le déterminant

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. En faisant dans le tableau (26)

$$B = D = E = B_1 = D_1 = E_1 = 0,$$
$$A = C_1 = 3, \qquad C = A_1 = 1, \qquad F = F_1 = -1,$$

il deviendra

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3X_5 + X_6 - X_1 = 0, \\ 3X_9 + X_8 - X_2 = 0, \\ 3X_7 + X_{10} - X_3 = 0, \\ X_5 + 3X_6 - X_1 = 0, \\ X_9 + 3X_8 - X_2 = 0, \\ X_7 + 3X_{10} - X_3 = 0, \end{array} \right.$$

sur lequel on voit immédiatement que si $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, conditions résultant de la forme de $\varphi(x, y)$, on aura aussi

$$X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = X_{10} = 0.$$

Donc toutes nos conditions sont remplies.

On pourrait choisir pour $\varphi(x, y)$ un polynome d'une autre forme, par exemple

$$\varphi(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy + \beta_4 x^2.$$

Le déterminant correspondant à (27) sera différent de zéro ; on pourra donc déterminer les coefficients β_1, β_2, β_3, β_4 dans les conditions voulues. De cette forme du polynome $\varphi(x, y)$ il résulte

$$X_2 = 0, \qquad X_3 = 0, \qquad X_4 = 0, \qquad X_5 = 0.$$

Du tableau (28) on tire alors

$$X_1 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = X_{10} = 0.$$

Pour cette forme aussi du polynome $\varphi(x,y)$ toutes nos conditions sont remplies.

Dans le tableau (28) X_4 n'entre pas; on ne s'est donc pas servi de la relation

$$X_4 = 0,$$

qui résulte de chacune des deux formes de $\varphi(x, y)$. Montrons, à l'aide de cette relation, que

$$\begin{aligned} X_{11} &= \text{H}_1 x_1^3 y_1 + \text{H}_2 x_2^3 y_2 + \text{H}_3 x_3^3 y_3 + \text{H}_4 x_4^3 y_4 - \text{I}_{3,1} = 0, \\ X_{12} &= \text{H}_1 x_1 y_1^3 + \text{H}_2 x_2 y_2^3 + \text{H}_3 x_3 y_3^3 + \text{H}_4 x_4 y_4^3 - \text{I}_{1,3} = 0. \end{aligned}$$

En effet, en tenant compte de

$$\iint xy\,\text{U}_{2,0}\,dx\,dy = 0 \qquad \text{et} \qquad \iint xy\,\text{U}_{0,2}\,dx\,dy = 0,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} 3X_{11} + X_{12} - X_4 &= 0, \\ X_{12} + 3X_{11} - X_4 &= 0. \end{aligned}$$

Donc si $X_4 = 0$, on déduit $X_{11} = 0$ et $X_{12} = 0$. Nous voyons donc, sur ce cas particulier, qu'en employant cette méthode, on peut atteindre le maximum de l'approximation cherchée, car on a la solution d'un système de 12 équations à 12 inconnues et ce résultat peut être obtenu avec différentes formes du polynome $\varphi(x, y)$.

18. Les considérations générales précédentes, sur la méthode de M. Bourget, peuvent être étendues aux intégrales multiples.

On peut voir que, ayant trouvé les polynomes $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $P_2(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, ..., $P_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ de degré p de la classe (1) tels que les surfaces

(29) $\quad P_1(x_1, \ldots, x_s) = 0, \quad P_2(x_1, \ldots, x_s) = 0, \quad \ldots, \quad P_s(x_1, \ldots, x_s) = 0$

se coupent en p^s points situés dans le domaine D, on pourra déterminer, si certaines conditions que nous avons précisées pour le cas de deux variables sont satisfaites, un polynome $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ de degré moindre que $2p$ ayant p^s termes et prenant la même valeur que la fonction à intégrer $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ en les p^s points où se coupent les surfaces (29), tel que, en remplaçant dans l'intégrale I, $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ par $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, on ait une intégrale J, les intégrales I et J ayant dans leurs développements tous les termes, d'ordre moindre que $2p$, identiques.

Dans le cas $K = (1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_s^2)^{-\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda < \frac{1}{2}$ et le domaine D défini par $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 \leqq 1$, on peut prendre pour polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_s$ les s polynomes $U_{p,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$, $U_{0,p,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$, ..., $U_{0,\ldots,0,p}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ que nous avons étudiés dans la deuxième Partie de ce travail. Montrons que les surfaces

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_{p,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) = 0, \\ U_{0,p,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{0,\ldots,0,p}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) = 0 \end{array}\right.$$

se coupent bien en p^s points situés à l'intérieur de l'hypersphère $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = 1$. Considérons pour cela l'expression

$$(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_s^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^p(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_s)^{p-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx_1^p},$$

qui est égale, à un facteur constant près, au polynome $U_{p,0,\ldots,0}$ et faisons le changement

$$x_1 = z\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_s^2};$$

elle deviendra

$$(1 - z^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}(1 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_s^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p(1 - z^2)^{p-\lambda-\frac{1}{2}}}{dz^p}.$$

Donc

$$U_{p,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$
$$= (1 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_s^2)^{\frac{p}{2}} P_p\left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_s^2}}, \lambda\right).$$

Mais de la décomposition

$$P_p(z, \lambda) = (z^2 - \mu_1^2)(z^2 - \mu_2^2)\dots\left(z^2 - \mu^2_{\frac{1}{2}p}\right),$$

où l'on suppose p pair, les μ_i^2 étant distinctes et moindres que l'unité, on déduit la décomposition

$$\begin{aligned} U_{p,0,\dots,0} = {} & [x_1^2 - \mu_1^2(1 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_s^2)] \\ & \times [x_1^2 - \mu_2^2(1 - x_2^2 - \dots - x_s^2)]\dots\left[x_1^2 - \mu^2_{\frac{1}{2}p}(1 - x_2^2 - \dots - x_s^2)\right]. \end{aligned}$$

On décomposera de même $U_{0,p,0,\dots,0}, \dots, U_{0,\dots,0,p}$. Nous sommes donc conduit aux systèmes de la forme

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \mu_i^2(1 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_s^2), \\ x_2^2 &= \mu_\gamma^2(1 - x_1^2 - x_3^2 - \dots - x_s^2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_s^2 &= \mu_l^2(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{s-1}^2), \end{aligned}$$

qui se résolvent immédiatement en posant $S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2$ et l'on trouve pour $x_1^2, x_2^2, \dots, x_s^2$, S des valeurs positives et moindres que l'unité. Ceci nous prouve que les points de rencontre des surfaces (30) sont au nombre de p^s et situés à l'intérieur de l'hypersphère $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = 1$. La démonstration sera la même pour p impair, à cela près, que la décomposition du polynome $U_{p,0,\dots,0}$, par exemple, contiendra le facteur x_1.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 janvier 1916.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 janvier 1916.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.