SPYRIDION SARANTOPOULOS

Analyse supérieure : les fonctions croissantes et la théorie des fonctions entières. Algèbre supérieure : sur le calcul numérique d'une catégorie de racines des équations algébriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1923

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1923__35__1_0>

N° D'ORDRE : 10
SÉRIE : U

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

(MENTION : SCIENCES)

PAR

M. SPYRIDION SARANTOPOULOS

ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ (DOCTEUR) DE L'UNIVERSITÉ D'ATHÈNES.

1re THÈSE. — ANALYSE SUPÉRIEURE : LES FONCTIONS CROISSANTES ET LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES.
ALGÈBRE SUPÉRIEURE : SUR LE CALCUL NUMÉRIQUE D'UNE CATÉGORIE DE RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 23 mars 1923, devant la Commission d'examen

MM. M. FRÉCHET, *Président.*
H. VILLAT, G. VALIRON. } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1923

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG.

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

	MM.	
Doyen.........	MULLER (P.), professeur de	Chimie générale et Chimie physique.
Doyen honoraire....	BATAILLON (E.).	
Professeurs....	DENJOY (A.)...............	Mathématiques générales.
	VALIRON (G.)..............	Calcul différentiel et intégral.
	VILLAT (H.)...............	Mécanique.
	FRÉCHET (M.)..............	Analyse supérieure.
	ESCLANGON (E.)............	Astronomie.
	WEISS (P.)................	Physique générale.
	OLLIVIER (H.).............	Physique générale.
	ROTHÉ (E.)................	Physique du globe.
	HACKSPILL (L.)............	Chimie minérale.
	GAULT (H.)................	Chimie organique.
	TOPSENT (E.)..............	Zoologie et Anatomie comparée.
	HOUARD (C.)...............	Botanique.
	TERROINE (E.).............	Physiologie générale.
	DE LAPPARENT (J.).........	Pétrographie.
	GIGNOUX (M.)..............	Géologie et Paléontologie.
	CHATTON (E.)..............	Biologie générale.
	BAUER (E.)................	Physique mathématique.
	CORNEC (E.)...............	Chimie appliquée.
	LABROUSTE (H.)............	Physique du globe.
	RIBAUD (G.)...............	Physique générale.
	VLÈS (F.).................	Physique biologique.
Secrétaire.....	RENARD (A.).	

69869 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, Quai des Grands-Augustins, 55.

A

MONSIEUR GEORGES RÉMOUNDOS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ
ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE D'ATHÈNES

Témoignage de ma profonde reconnaissance

PRÉFACE

La présente Thèse est constituée de deux Mémoires dont l'un est indépendant de l'autre. Le premier a comme sujet, dans le domaine de l'Analyse supérieure, les fonctions croissantes et la théorie des fonctions entières. Le deuxième se rapporte, dans le domaine de l'Algèbre supérieure, au calcul numérique d'une catégorie des racines des équations algébriques.

J'adresse ici mes vifs remercîments à MM. M. Fréchet, G. Valiron et H. Villat, professeurs à l'Université de Strasbourg, pour l'excellent accueil qu'ils ont bien voulu faire à mes recherches. Particulièrement à M. H. Villat, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour les facilités et les marques d'amitié que j'ai reçues de lui pendant mon séjour à Strasbourg.

C'est mon devoir de rendre ici témoignage de la profonde reconnaissance que je dois à M. G. Rémoundos, professeur à l'Université d'Athènes, qui a été le principal levier de mon voyage scientifique en Europe et à qui je dois la plupart de mes connaissances, tant comme élève au Lycée que comme étudiant à l'Université d'Athènes.

S. S.

PREMIÈRE THÈSE

LES

FONCTIONS CROISSANTES

ET LA

THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

INTRODUCTION.

1. La théorie des fonctions croissantes ([1]) dont M. Borel a jeté les fondements dans son Mémoire *Sur les fonctions entières* (*Acta mathematica*, t, XX, 1897) est aujourd'hui assez classique pour qu'il soit utile d'en signaler l'importance. Les applications de cette théorie dans l'étude des propriétés générales des fonctions entières et dans la démonstration du théorème de M. Picard sont bien connues.

Dans son Mémoire fondamental, M. Borel a donné deux propriétés générales des fonctions croissantes :

I. *Si* $M(x)$ *désigne une fonction croissante dérivable, sa dérivée* $M'(x)$ *vérifie l'inégalité*

$$M'(x) < [M(x)]^{1+\alpha}, \tag{1}$$

où a est un nombre positif arbitraire, à partir d'une valeur de x, sauf peut-être dans une suite d'intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

II. *Si* $M(x)$ *est une fonction croissante quelconque, et a et* ε *deux nombres positifs, finis, arbitraires, l'inégalité*

$$M\left[x + \frac{1}{[\log M(x)]^{\varepsilon}}\right] < [M(x)]^{1+\alpha} \tag{2}$$

([1]) Il est bien entendu que dans tout ce qui suit il ne sera question que des fonctions croissantes *continues*.

a lieu à partir d'une valeur de x, sauf peut-être dans une suite d'intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

Le premier objet de ce Mémoire est de compléter sur certains points les deux propositions de M. Borel; parmi les résultats que j'ai obtenus et qui sont exposés dans la première Partie, je signalerai les deux suivants :

1° Dans l'inégalité (2) on peut remplacer la constante ε par une fonction $\varphi(x)$, décroissante, mais décroissant assez lentement pour que $x\varphi(x)$: $\log x$ finisse par dépasser tout nombre donné [1];

2° Dans cette même inégalité on peut remplacer $[\log M(x)]^{\varepsilon}$ par $[\log_2 M(x)]^{1+\varepsilon}$.

Dans la seconde Partie j'applique mes résultats à l'étude des relations entre certaines des fonctions croissantes qui s'introduisent dans la théorie des fonctions entières. Après avoir employé la méthode même de M. Borel, j'utilise une méthode indiquée par M. G. Rémoundos dans les *Comptes rendus du Congrès de Strasbourg*. Grâce à la meilleure approximation de mes inégalités, la méthode de M. Rémoundos peut conduire à quelques résultats intéressants que je rapproche de ceux obtenus par M. Valiron par une autre méthode.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPLÉMENTS AUX THÉORÈMES DE M. BOREL SUR LES FONCTIONS CROISSANTES.

2. Le premier théorème de M. Borel. — Dans deux Notes, M. G. Rémoundos et M. Th. Varopoulos ont apporté des compléments au premier théorème de M. Borel; M. Rémoundos [2] a montré que l'inégalité (1) peut être remplacée par

$$M'(x) < M(x)[\log M(x)]^{1+\alpha}. \tag{3}$$

---

(1) J'ai donné pour la première fois ce résultat et quelques autres dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, 22 mai 1922, p. 1320.

(2) *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 829.

M. Varopoulos [1] donna l'inégalité encore plus précise

$$(4) \qquad M'(x) < M(x)\log M(x)\ldots \log_{\nu-1} M(x)[\log_\nu M(x)]^{1+\alpha}.$$

Ces résultats obtenus par diverses méthodes ne sont visiblement pas autre chose que celui de M. Borel appliqué à la fonction $\log_\nu M(x)$; ils sont vrais dans les mêmes conditions.

Il est clair que tant qu'on ne fait pas d'autre hypothèse sur la fonction $M(x)$, on ne peut remplacer l'inégalité (4) par une inégalité analogue où α serait nul, car par exemple si l'on pose $e_1(x) = e^x$, $e_\nu(x) = e_1[e_{\nu-1}(x)]$, la fonction $M(x) = e_{\nu+1}(x)$ a une dérivée qui est précisément égale à $M(x)\log M(x)\ldots\log_\nu M(x)$.

3. Théorème. — *Si la fonction croissante* $M(x)$ *reste inférieure à* $e_\nu[\mu(x)]$ *à partir d'une valeur de* x, *l'inégalité*

$$(5) \qquad M'(x) < M(x)\log M(x)\ldots\log_\nu M(x)\mu'(x)$$

est satisfaite dans des intervalles aussi éloignés que l'on veut.

Si la fonction croissante $M(x)$ *reste seulement inférieure à* $e_\nu[\mu(x)]$ *dans une infinité d'intervalles*, (5) *doit être remplacée par*

$$(6) \qquad M'(x) < M(x)\log M(x)\ldots\log_{\nu-1} M(x)\mu'(x).$$

α. Supposons qu'à partir d'une valeur de r la fonction croissante $P(x)$ reste inférieure à $\mu(x)$. On a

$$\frac{1}{\mu(x)} < \frac{1}{P(x)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{\mu(x)}}{\mu(x)} < \frac{e^{\mu(x)}}{P(x)}.$$

Le rapport $e^{\mu(x)} : \mu(x)$ croît indéfiniment avec $\mu(x)$, donc avec x; $e^{\mu(x)} : P(x)$ finit donc par dépasser tout nombre donné, et il en est de même de $\mu(x) - \log P(x)$. La dérivée de cette différence ne peut pas rester constamment nulle ou négative, car si cela avait lieu, la différence ne pourrait dépasser tout nombre donné. Il y a donc certainement une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tels que $\lim x_p = \infty$, qui satisfait à l'inégalité

$$\mu'(x) - \frac{P'(x)}{P(x)} > 0,$$

[1] *Comptes rendus*, t. 171, 1921, p. 613.

ou bien à la suivante :

$$(7) \qquad P'(x) < P(x)\,\mu'(x).$$

Cette inégalité, à cause de la continuité, aura lieu à gauche et à droite des points $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$, dans une suite des intervalles aussi éloignés que l'on veut.

Cela posé, supposons que l'on ait $M(x) < e_\nu[\mu(x)]$. Alors $\log_\nu M(x)$ est inférieure à $\mu(x)$. En appliquant la formule (7) avec $P(x) = \log_\nu M(x)$ on en tire

$$M(x) < M(x) \log M(x) \ldots \log_\nu M(x)\,\mu'(x),$$

c'est-à-dire la formule (5). Pour $\nu = 0$, on retrouve l'inégalité (7).

β. Supposons que $M(x)$ vérifie l'hypothèse de la seconde partie du théorème; comme ci-dessus, dans une infinité d'intervalles, la dérivée

$$[\mu(x) - \log_\nu M(x)]'$$

reste positive; donc, dans ces intervalles, on aura

$$M'(x) < M(x) \log M(x) \ldots \log_{\nu-1} M(x)\,\mu'(x),$$

c'est-à-dire la relation (6).

Corollaire. — Si $\mu(x) = x$, les formules (5) et (6) deviennent

$$(8) \qquad M'(x) < M(x) \log M(x) \ldots \log_{\nu-\varepsilon} M(x),$$

où l'on a $\varepsilon = 0$ pour le premier cas et $\varepsilon = 1$ pour le second. Visiblement cette formule est plus précise que les (1), (3), (4).

4. Le deuxième théorème de M. Borel. — *Étant donnés une fonction décroissante $\varphi(x)$, telle que l'on ait* $\lim\left[\frac{x\varphi(x)}{\log x}\right] = \infty$, *et un nombre positif fini α arbitrairement petit, une fonction croissante quelconque $M(x)$ vérifie l'inégalité*

$$(9) \qquad M\left[x + \frac{1}{[\log M(x)]^{\varphi(x)}}\right] < [M(x)]^{1+\alpha},$$

sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

M. Borel a démontré ce théorème dans le cas où $\varphi(x)$ est une constante quelconque.

Supposons que pour les valeurs suivantes :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 \ \ + \dfrac{1}{[\log M(x_0)]^{\varphi(x_0)}}, \\ x_2 = x_1 \ \ + \dfrac{1}{[\log M(x_1)]^{\varphi(x_1)}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_\nu = x_{\nu-1} + \dfrac{1}{[\log M(x_{\nu-1})]^{\varphi(x_{\nu-1})}}, \end{array}\right.$$

l'inégalité (9) ne soit pas vraie. Les égalités (10) donnent

$$(11)\qquad x_\nu = x_0 + \frac{1}{[\log M(x_0)]^{\varphi(x_0)}} + \dots + \frac{1}{[\log M(x_{\nu-1})]^{\varphi(x_{\nu-1})}}.$$

Supposons maintenant que le nombre des valeurs (10) qui ne satisfont pas à l'inégalité (9) soit infini et considérons la série $\sum \frac{1}{[\log M(x_\nu)]^{\varphi(x_\nu)}}$.

Pour les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_{\nu-1}$, on doit avoir

$$\begin{array}{l} \log M(x_1) > (1+a)\log M(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \log M(x_\nu) > (1+a)\log M(x_{\nu-1}), \end{array}$$

d'où l'on tire

$$(12)\qquad \log M(x_k) > (1+a)^k \log M(x_0)$$

pour $k = 1, 2, \dots, \nu$; on a donc

$$\frac{1}{[\log M(x_\nu)]^{\varphi(x_\nu)}} < \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}\cdot\frac{1}{[\log M(x_0)]^{\varphi(x_\nu)}} < \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}.$$

Pour que la série $\sum \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}$ soit convergente, il suffit d'avoir, à partir d'une valeur de ν,

$$\frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}} < \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}},$$

où ε est positif constant. Cela aura lieu quand on a

$$(13)\qquad \nu\varphi(x_\nu)\log(1+a) > (1+\varepsilon)\log\nu.$$

Mais à cause de (11), v est supérieur à $x_v - x_0$; on a aussi

$$\varphi(x_v) > \varphi(v + x_0) \qquad \text{et} \qquad \log(v + x_0) > \log v.$$

Donc la relation (13) aura lieu nécessairement si l'on a

$$v\varphi(v + x_0)\log(1 + a) > (1 + \varepsilon)\log(v + x_0),$$

ou bien

$$(v + x_0)\varphi(v + x_0) - x_0\varphi(v + x_0) > \frac{1 + \varepsilon}{\log(1 + a)}\log(v + x_0),$$

ou encore

$$(14) \qquad x\varphi(x) - x_0\varphi(x) > \frac{1 + \varepsilon}{\log(1 + a)}\log x.$$

Or $x_0\varphi(x)$ tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Si donc nous choisissons la fonction décroissante $\varphi(x)$ telle qu'on ait

$$\lim\left[\frac{x}{\log x}\cdot\varphi(x)\right] = \infty,$$

l'inégalité (14) se vérifie, à partir d'une valeur de x, quel que soit a, et par suite, *a fortiori*, l'inégalité (13) est vérifiée à partir d'une valeur de v. La série $\sum \frac{1}{(1 + a)^{v\varphi(x_v)}}$ et, par conséquent,

$$\sum \frac{1}{[\log M(x_v)]^{\varphi(x_v)}}, \qquad \sum \frac{1}{(1 + a)^{v\varphi(x_v)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_v)}}$$

sont convergentes; la valeur x_v tend donc vers une limite finie. Mais ceci est en contradiction avec le fait que x_v tend vers l'infini en même temps que v, comme il résulte de la relation (12). Donc, les valeurs (10) sont en nombre fini et l'intervalle exceptionnel $x_v - x_0$ est plus petit que

$$\sum_0^{v-1} \frac{1}{(1 + a)^{v\varphi(x_v)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_v)}} = \frac{1}{[\log M(x_0)]^{\varphi(x_0)}} + \frac{1}{(1 + a)^{\varphi(x_1)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_1)}} + \dots$$
$$+ \frac{1}{(1 + a)^{(v-1)\varphi(x_{v-1})}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_{v-1})}}.$$

On en déduit que l'étendue totale de ces intervalles exceptionnels est finie et au plus égale au nombre représenté par la série convergente

$$\Sigma(x_\nu - x_0) = \sum_0^\infty \frac{1}{[\log M(x_\nu)]^{\varphi(x_\nu)}}.$$

En effet, soient x_0, x_1, ..., $x_{\nu-1}$ les valeurs exceptionnelles qu'on peut construire avec les formules (10), étant donnée la première x_0; soient aussi x'_0 la première valeur exceptionnelle qu'on rencontre après x_ν et x'_1, x'_2, ..., $x'_{\lambda-1}$ les valeurs exceptionnelles qu'on trouve de la même façon, et ainsi de suite. L'étendue totale sera égale à la somme

$$S = (x_\nu - x_0) + (x'_\lambda - x'_0) + (\ldots) + \ldots;$$

on a donc

$$\begin{aligned} S < & \frac{1}{[\log M(x_0)]^{\varphi(x_0)}} + \frac{1}{(1+a)^{\varphi(x_1)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_1)}} + \ldots \\ & + \frac{1}{(1+a)^{(\nu-1)\varphi(x_{\nu-1})}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_{\nu-1})}} \\ & + \frac{1}{[\log M(x'_0)]^{\varphi(x'_0)}} + \frac{1}{(1+a)^{\varphi(x'_1)}[\log M(x'_0)]^{\varphi(x'_1)}} + \ldots \\ & + \frac{1}{(1+a)^{(\lambda-1)\varphi(x'_{\lambda-1})}[\log M(x'_0)]^{\varphi(x'_{\lambda-1})}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais puisque $M(x)$ est croissante et $x'_0 > x_\nu$, on a $M(x'_0) > M(x_\nu)$. D'autre part, puisque $x_{\nu-1}$ est une valeur exceptionnelle, on a, à cause de (12),

$$M(x_\nu) > (1+a)^\nu M(x_0); \qquad \text{par suite,} \qquad M(x'_0) > (1+a)^\nu M(x_0).$$

On peut donc écrire *a fortiori*

$$\begin{aligned} S < & \frac{1}{\log M(x_0)} + \frac{1}{(1+a)^{\varphi(x_1)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_1)}} + \ldots \\ & + \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_\nu)}} + \ldots + \frac{1}{(1+a)^{(\nu+k)\varphi(x_{\nu+k})}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_{\nu+k})}} + \ldots, \end{aligned}$$

où les nombres 0, 1, 2, ..., ν, ..., $\nu+k$ désignent le rang de chaque valeur exceptionnelle à partir de la première x_0. Mais comme on a déjà vu, la série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^{\varphi(x_\nu)}[\log M(x_0)]^{\varphi(x_\nu)}}$$

est convergente, sous la condition qu'on ait

$$\lim \left[\frac{x\,\varphi(x)}{\log x}\right] = \infty$$

et représente un nombre inférieur à celui que donne la somme

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}.$$

5. On peut donner au théorème précédent la forme suivante :

Étant données la fonction croissante $M(x)$ *et une autre* $\varphi(x)$ *décroissante (ou constante) et telle que*

$$\lim \left[\varphi(x)\,\frac{\log x}{\log_2 x}\right] = \infty$$

l'inégalité

$$M\left[x\,e^{\frac{1}{[\log M(x)]^{\varphi(x)}}}\right] < [M(x)]^{1+a}$$

se vérifie, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels où la variation totale de $\log x$, *à partir de la première valeur exceptionnelle* x_0, *est finie* (1).

En effet, on peut écrire

$$M(x) = M(e^{\log x}) = M(e^y) \qquad (\text{où } y = \log x).$$

$M(e^y)$ croît avec y. Puisque l'on a

$$\lim \left[\frac{\varphi(x)\log x}{\log_2 x}\right] = \infty,$$

par suite $\frac{y\varphi(e^y)}{\log y}$ tend vers l'infini [$\varphi(e^y) = \varphi(x)$ étant décroissante], on peut appliquer le théorème précédent. On aura alors

$$M\left[e^{y+\frac{1}{[\log M(e^y)]^{\varphi(e^y)}}}\right] < [M(e^y)]^{1+a}$$

---

(1) Ma Note des *Comptes rendus* signalée page 2 renferme au sujet des intervalles exceptionnels relatifs à ce cas une erreur que tous les lecteurs auront aisément vérifiée.

ou, plus simplement,

$$\mathrm{M}\left[x\, e^{\frac{1}{[\log \mathrm{M}(x)]^{\varphi(x)}}}\right] < [\mathrm{M}(x)]^{1+a}.$$

La variation totale de y dans les intervalles exceptionnels, et par suite la variation totale de $\log x$, sera plus petite que le nombre représenté par la somme $\sum \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}$ qui peut s'écrire $\sum \frac{1}{(1+a)^{\nu\varphi(x_\nu)}}$.

6. Théorème. — *Si la fonction croissante* $\mathrm{M}(x)$ *reste toujours, à partir d'une valeur de* x *inférieure à* $e_2\left(\frac{hx}{\log x}\right)$, *h étant constant, la formule*

$$(15) \qquad \mathrm{M}\left[x + \frac{1}{\log_\nu \mathrm{M}(x)}\right] < [\mathrm{M}(x)]^{1+a}$$

se vérifie toujours, sauf dans des intervalles d'étendue totale finie.

Si $\mathrm{M}(x)$ *devient plus petite que* $e_2\left(\frac{hx}{\log x}\right)$ *en une suite de points* x_1, $x_2, \ldots, x_p, \ldots$ *tels que* $\lim x_p = \infty$, *l'inégalité* (15) *se vérifie dans une infinité d'intervalles d'étendue totale infinie.*

a'. Supposons que $\mathrm{M}(x)$ reste toujours plus petit que $e_2\left(\frac{hx}{\log x}\right)$. Posons

$$\frac{1}{[\log \mathrm{M}(x)]^{\varphi(x)}} = \frac{1}{\log_\nu \mathrm{M}(x)};$$

on en tire

$$\varphi(x) = \frac{\log_{\nu+1}\mathrm{M}(x)}{\log_2 \mathrm{M}(x)}.$$

Alors on aura

$$\frac{x\,\varphi(x)}{\log x} > \frac{x \log_{\nu+1}\mathrm{M}(x)}{\log x \log_2 \mathrm{M}(x)} > \frac{x \log_{\nu+1}\mathrm{M}(x)}{\log x \dfrac{hx}{\log x}} > \frac{\log_{\nu+1}\mathrm{M}(x)}{h},$$

puisque $\log_2 \mathrm{M}(x)$ est inférieure à $\frac{hx}{\log x}$. Il en résulte que

$$\lim\left(\frac{x\,\varphi(x)}{\log x}\right) = \infty.$$

On peut donc appliquer le théorème du paragraphe 4 et trouver la formule (15). La première partie du théorème est démontrée.

b'. Supposons que $M(x) < e_2\left(\frac{hx}{\log x}\right)$ pour une suite de points x_1, $x_2, \ldots, x_p, \ldots$ tel que $\lim x_p = \infty$, et soit k un nombre constant plus grand que h. Posons

$$M_1(x) = M(x) \qquad \text{si} \qquad M(x) \leqq e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right)$$

et

$$M_1(x) = e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right) \qquad \text{si} \qquad M(x) = e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right).$$

On aura alors

$$M_1(x) \leqq e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right);$$

par conséquent, à cause de la première partie du théorème, on a

$$\text{(16)} \qquad M_1\left[x + \frac{1}{\log_\nu M_1(x)}\right] < [M_1(x)]^{1+\alpha},$$

sauf dans des intervalles d'étendue totale finie. Je vais démontrer qu'il y a des intervalles dans lesquels l'inégalité (16) a lieu, $M_1(x)$ et $M_1\left(x + \frac{1}{\log_\nu M_1(x_1)}\right)$ coïncidant avec $M(x)$ et $M\left(x + \frac{1}{\log_\nu M(x)}\right)$. En effet, pour $x = x_p$, à cause de l'hypothèse, on a

$$M_1(x_p) = M(x_p) < e_2\left(\frac{hx}{\log x_p}\right) < e_2\left(\frac{kx_p}{\log x_p}\right).$$

Mais on a

$$e_2\left(\frac{hx_p}{\log x_p}\right) = e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right) \qquad \text{quand} \qquad \frac{x}{\log x} = \frac{hx_p}{k \log x_p},$$

ce qui donne pour x une valeur x'_p inférieure à x_p, puisque $k > h$. On aura

$$x'_p = \frac{hx_p}{k} \frac{\log x'_p}{\log x_p}$$

et par suite

$$x'_p < \frac{h}{k} x_p \qquad (\text{car } \log x'_p < \log x_p).$$

Or on doit avoir, dans l'intervalle (x'_p, x_p), $M(x) < M(x_p)$, puisque $M(x)$ est croissante, et par suite dans tout cet intervalle (au moins), on aura

$$M_1(x) = M(x) < e_2\left(\frac{kx}{\log x}\right).$$

Un tel intervalle (x'_p, x_p) a une longueur supérieure à celle de l'intervalle $\left(\frac{h}{k}x_p, x_p\right)$. Mais cette longueur $x_p\left(1 - \frac{h}{k}\right)$ va en croissant avec le rang p. Donc, dans chacun de ces intervalles (x'_p, x_p), il y aura un point x' au moins où (16) a lieu, le point $x' + \frac{1}{\log_\nu M(x')}$ appartenant aussi à ce même intervalle pour lequel $M_1(x) = M(x)$ et par suite

$$M\left(x + \frac{1}{\log_\nu M(x)}\right) < [M(x)]^{1+a}.$$

Corollaire. — Si nous posons

$$\log M(x) = m(x) \qquad \text{et} \qquad \nu - 1 = n,$$

la formule (15) peut s'écrire

$$(15') \qquad m\left[x + \frac{1}{\log_n m(x)}\right] < [m(x)](1 + a).$$

Alors, bien entendu, il faut comparer $m(x)$ à $e_1\left(\frac{hx}{\log x}\right)$.

7. Lemme. — *Étant donnée une fonction croissante* $M(x)$ *de la forme* $M(x) = e_2[f(x)]$, *si la différence* $f[x + m(x)] - f(x)$ *peut devenir et rester, dans un intervalle, négative ou plus petite que la quantité positive* $\log(1 + a)$, *on aura dans cet intervalle*

$$(17) \qquad M[x + m(x)] < [M(x)]^{1+a},$$

a étant positif et aussi petit que l'on veut. L'inégalité (17) *change de sens dans les intervalles dans lesquels on a*

$$f[x + m(x)] - f(x) > \log(1 + a).$$

Posons

$$f[x + m(x)] - f(x) = \varphi[x, m(x)].$$

On peut écrire

$$\mathrm{M}[x+m(x)]$$
$$=e_2\big[f[x+m(x)]\big]=e_2\big[f(x)+\varphi[x,m(x)]\big]=e_1\left[e^{f(x)}\,e^{\varphi[x,m(x)]}\right];$$

on en tire

$$\mathrm{M}[x+m(x)]=\big[e_2[f(x)]\big]^{e^{\varphi[x,m(x)]}}.$$

Si donc, dans un intervalle (a, b), $\varphi[x, m(x)]$ est inférieure à $\log(1+a)$ $\big[$cette condition est remplie quand on a $\varphi[x, m(x)] < 0\big]$, on aura

$$e^{\varphi[x,m(x)]} < 1+a$$

et par suite

$$\big[e_2[f(x)]\big]^{e^{\varphi[x,m(x)]}} < \big[e_2[f(x)]\big]^{1+a},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M}[x+m(x)] < [\mathrm{M}(x)]^{1+a}.$$

On trouve de même

$$\mathrm{M}[x+m(x)] > [\mathrm{M}(x)]^{1+a} \quad \text{quand} \quad \varphi[x, m(x)] > \log(1+a).$$

8. Théorème. — *Si, étant donnée la fonction croissante* $\mathrm{M}(x)$, *le rapport* $e^{\mu(x)} : \log_{\nu+2}\mathrm{M}(x)$ *croît dans une infinité d'intervalles d'étendue totale infinie, la fonction* $\frac{\mu(x)}{x}$ *étant décroissante et tendant vers zéro, l'inégalité*

$$(18) \qquad \mathrm{M}\left[x+\frac{1}{\log_2\mathrm{M}(x)\log_3\mathrm{M}(x)\ldots\log_{\nu+2}\mathrm{M}(x)}\right] < [\mathrm{M}(x)]^{1+a}$$

est satisfaite dans une suite d'intervalles aussi éloignés que l'on veut (¹). *Nous pouvons prendre comme* $\mu(x)$ *la fonction* εx, *où* ε *est un nombre positif et aussi petit que l'on veut.*

Posons

$$\log_2\mathrm{M}(x)=\mathrm{P}(x).$$

Le rapport $e^{\mu(x)} : \log_\nu \mathrm{P}(x)$, à cause de l'hypothèse faite, va en croissant dans des intervalles que nous appelons (Δ); dans ces intervalles, nous aurons

$$\mu'(x)-[\log_{\nu+1}\mathrm{P}(x)]' \geqq 0.$$

(¹) Si $e^{\mu(x)} : \log_{\nu+2}\mathrm{M}(x)$ va constamment en croissant, (18) est satisfaite, sauf dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

ce qui revient à l'inégalité

$$P'(x) \leqq P(x) \log P(x) \ldots \log_\nu P(x) \mu'(x).$$

Le théorème des accroissements finis donne

$$(19) \qquad P\left[x + \frac{1}{P(x)\log P(x)\ldots\log_\nu P(x)}\right] = P(x) + \frac{P'(x')}{P(x)\log P(x)\ldots\log_\nu P(x)},$$

où

$$x < x' < x + \frac{1}{P(x)\log P(x)\ldots\log_\nu P(x)};$$

or on a

$$(20) \qquad P'(x') < P(x')\log P(x')\ldots\log_\nu P(x')\mu'(x') \equiv \Phi(x')\mu'(x')$$

et

$$\Phi(x') < \Phi\left[x + \frac{1}{\Phi(x)}\right].$$

Le théorème classique sur les fonctions croissantes de M. Borel donne

$$(21) \qquad \Phi\left[x + \frac{1}{\Phi(x)}\right] < (1 + a_1)\Phi(x)$$

partout, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie (δ); a_1 est un nombre constant arbitraire, positif. Il y aura donc des intervalles d'étendue totale $(\Delta) - (\delta)$, dans lesquels, par rapport à x', les formules (20) et (21) sont satisfaites simultanément. On aura donc

$$P'(x') < (1 + a_1)\Phi(x)\mu'(x') = (1 + a_1)P(x)\log P(x)\ldots\log_\nu P(x)\mu'(x').$$

Il en résulte que le rapport

$$P'(x') : P(x)\log P(x)\ldots\log_\nu P(x),$$

dans une infinité d'intervalles d'étendue totale au moins égale à $(\Delta) - (\delta)$, reste plus petit que $(1 + a_1)\mu'(x')$. Or cette quantité est moindre que $\log(1 + a)$, quel que soit a positif, à partir d'une valeur de x'. En effet, $\mu(x) : x$ va continuellement en décroissant et tend vers zéro. On aura donc

$$\mu'(x) \leqq \frac{\mu(x)}{x}, \qquad \text{où} \qquad \mu'(x) > 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$\lim[\mu(x) : x] = 0, \qquad \text{par suite} \qquad \lim \mu'(x) = 0.$$

Donc, en vertu du lemme, la formule (18) sera en vigueur, quand x' varie dans les intervalles $(\Delta) - (\delta)$, pour une suite de valeurs de x, au moins, $x_1, x_2, \ldots, x_p$, telles que l'on ait $\lim x_p = \infty$. Mais, à cause de la continuité, (18) sera de même satisfaite à gauche et à droite de ces valeurs, c'est-à-dire dans une infinité d'intervalles aussi éloignés que l'on veut.

Si $\mu(x) = \varepsilon x$ avec $\varepsilon < \log(1 + a)$, il en résulterait $\mu'(x) < \varepsilon < \log(1 + a)$, et par suite la formule (18) sera encore valable.

Corollaire. — Si nous posons

$$\log M(x) = m(x) \qquad \text{et} \qquad \nu + 1 = n,$$

la relation (18) devient

$$m\left[x + \frac{1}{\log m(x) \ldots \log_n m(x)}\right] < (1 + a)\, m(x), \tag{22}$$

où $e^{\mu(x)} : \log_n m(x)$ doit satisfaire aux conditions du théorème précédent.

8. Dans le cas général où $M(x)$ est une fonction croissante quelconque, j'ai établi le théorème suivant :

Théorème général. — *Étant donnés une fonction croissante quelconque $M(x)$ et deux nombres positifs arbitraires ε et a, l'inégalité*

$$M\left[x + \frac{1}{[\log_2 M(x)]^{1+\varepsilon}}\right] < [M(x)]^{1+a} \tag{23}$$

se vérifie partout, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

Cette inégalité est meilleure que celle de M. Borel, car la quantité ajoutée à x est

$$\frac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x)]^{1+\varepsilon}} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{\log \mathrm{M}(x)}.$$

Pour le démontrer, posons

$$(24) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 \quad + \dfrac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x_0)]^{1+\varepsilon}}, \\ x_2 = x_1 \quad + \dfrac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x_1)]^{1+\varepsilon}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_\nu = x_{\nu-1} + \dfrac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x_{\nu-1})]^{1+\varepsilon}}, \end{array}\right.$$

et supposons que, pour les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$, la formule (23) ne soit pas satisfaite; on aura donc pour x_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$)

$$\mathrm{M}(x_{k+1}) > [\mathrm{M}(x_k)]^{1+a}.$$

On en tire

$$(25) \qquad \log \mathrm{M}(x_\nu) > (1+a)^\nu \log \mathrm{M}(x_0).$$

On voit bien que si $\lim \nu = \infty$, on a également $\lim x_\nu = \infty$. On tire facilement de la relation (25)

$$(26) \qquad [\log_2 \mathrm{M}(x_\nu)]^{1+\varepsilon} > [\nu \log(1+a)]^{1+\varepsilon},$$

et, par suite,

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x_\nu)]^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{k=\nu} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

La série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$$

est convergente et par conséquent $x_\nu - x_0$ reste plus petit que

$$\frac{1}{[\log_2 \mathrm{M}(x_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}} \sum_1^\infty \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Cela est en contradiction avec la remarque déjà faite que $\lim x_\nu = \infty$ quand $\lim \nu = \infty$.

On en conclut que la formule (23) est vraie, sauf peut-être quelques intervalles exceptionnels. Nous allons maintenant démontrer que l'étendue totale de ces intervalles est plus petite que

$$\frac{1}{[\log_2 M(x_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}},$$

x_0 étant la première valeur exceptionnelle.

En effet, supposons que $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ soient les valeurs exceptionnelles qu'on peut construire avec les formules (24), étant donnée la première x_0. Supposons aussi que x'_0 soit la première valeur exceptionnelle qu'on rencontre après x_ν et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{\nu_1-1}$ les valeurs exceptionnelles qu'on trouve de la même manière, et ainsi de suite. L'étendue totale des intervalles exceptionnels sera égale à la somme

$$S = (x_\nu - x_0) + (x'_{\nu_1} - x'_0) + (x''_{\nu_2} - x''_0),$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{[\log_2 M(x_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log_2 M(x_1)]^{1+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{[\log_2 M(x_{\nu-1})]^{1+\varepsilon}} \\ & + \frac{1}{[\log_2 M(x'_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log_2 M(x'_1)]^{1+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{[\log_2 M(x'_{\nu_1-1})]^{1+\varepsilon}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais, on déduit de la formule (25), puisque $x'_0 > x_\nu$ et, par suite, $M(x'_0) > M(x_\nu)$:

$$\log M(x'_0) > (1+a)^\nu \log M(x_0);$$

et, puisque $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{\nu_1-1}$ sont exceptionnelles, on a

$$\log M(x'_1) > (1+a) \log M(x'_0), \qquad \ldots, \qquad \log M(x'_{\nu_1}) > (1+a) \log M(x'_{\nu_1-1}),$$

d'où l'on tire

$$\log M(x'_i) > (1+a)^{\nu+i} \log M(x_0) \tag{27}$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu_1 - 1, \nu_1$. On trouve de la même façon

$$\log M(x''_u) > (1+a)^{\nu+\nu_1+u} \log M(x_0) \tag{28}$$

pour $u = 0, 1, 2, \ldots, \nu_2 - 1, \nu_2$, et ainsi de suite.

On obtient maintenant, à partir des formules (25), (27), (28), la formule (26) et de même

$$[\log_2 M(x''_i)]^{1+\varepsilon} > [(\nu + i)\log(1+a)]^{1+\varepsilon},$$
$$[\log_2 M(x''_u)]^{1+\varepsilon} > [(\nu + \nu_1 + u)\log(1+a)]^{1+\varepsilon},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on tire

$$S < \frac{1}{[\log_2 M(x_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Corollaire. — Si nous posons $\log M(x) = m(x)$ la formule (23) peut s'écrire

$$m\left[x + \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}}\right] < (1+a)\, m(r). \tag{29}$$

Alors l'étendue totale des intervalles exceptionnels sera inférieure à

$$\frac{1}{[\log m(x_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{[\log(1+a)]^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

M. Th. Varopoulos à qui j'avais communiqué le théorème ci-dessus, à Paris, le 2 mai 1922, en a fait une extension (¹); il a démontré l'inégalité

$$m\left[x + \frac{1}{\log m(x) \ldots \log_{\nu-1} m(x)\,[\log_\nu m(x)]^{1+\varepsilon}}\right] < (1+a)\, m(x). \tag{30}$$

9. Nous allons terminer l'examen du théorème classique de M. Borel par la proposition suivante qui montre que ce théorème ne peut être précisé au delà d'une certaine limite.

Si, étant donnée la fonction croissante $M(x)$, *le rapport* $e^x : \log_{\nu+2} M(x)$ *va en décroissant ou reste constant, dans un intervalle* $(x_0,\ x_0 + 2A + B)$ *avec*

$$A = \frac{1}{\log_2 M(x_0) \log_3 M(x_0) \ldots \log_{\nu+2} M(x_0)} \qquad \text{et} \qquad B > 0,$$

(¹) *Comptes rendus*, 22 mai 1922.

l'inégalité

$$(31) \qquad M\left[x + \frac{1}{\log_2 M(x) \log_3 M(x) \dots \log_{\nu+2} M(x)}\right] > [M(x)]^{1+a}$$

se vérifie dans cet intervalle, ou au moins dans l'intervalle $(x_0, x_0 + A + B)$; *a est un nombre positif au plus égal à* $e - 1$.

Posons

$$\log_2 M(x) = P(x);$$

le rapport $e^x : \log_\nu P(x)$, à cause de l'hypothèse faite, va en décroissant ou reste constant dans l'intervalle $(x_0, x_0 + 2A + B)$. On a donc, dans cet intervalle,

$$1 - [\log_{\nu+1} P(x)]' \geqq 0,$$

c'est-à-dire

$$(32) \qquad P'(x) > P(x) \log P(x) \dots \log_\nu P(x).$$

Le théorème des accroissements finis donne

$$P\left[x + \frac{1}{P(x) \log P(x) \dots \log_\nu P(x)}\right] = P(x) + \frac{P'(x')}{P(x) \log P(x) \dots \log_\nu P(x)},$$

où

$$x < x' < x + \frac{1}{P(x) \log P(x) \dots \log_\nu P(x)}.$$

Or on a, puisque $P(x)$ est croissante,

$$\frac{P'(x')}{P(x) \log P(x) \dots \log_\nu P(x)} > \frac{P'(x')}{P(x') \log P(x') \dots \log_\nu P(x')} \equiv H(x');$$

mais il résulte de la formule (32) que le deuxième membre est plus grand que 1, car si x' est dans l'intervalle $(x_0, x_0 + 2A + B)$, on a, *a fortiori*,

$$H(x') > \log(1 + a).$$

On peut par conséquent constater, d'après le lemme, que dans l'intervalle $(x_0, x_0 + A + B)$ au moins, la formule (31) sera satisfaite. Je dis dans l'intervalle $(x_0, x_0 + A + B)$ au moins, puisqu'on voit bien que

$$\begin{aligned} x_0 + A + B < x' < x_0 + A + B \\ + \frac{1}{P(x_0 + A + B) \ldots \log_\nu P(x_0 + A + B)} \\ < x_0 + A + B + \frac{1}{P(x_0) \ldots \log_\nu P(x_0)} = x_0 + 2A + B; \end{aligned}$$

x' peut d'ailleurs rester encore dans l'intervalle $(x_0, x_0 + 2A + B)$ quand x varie un peu au delà de $x_0 + A + B$ en restant dans l'intervalle

$$(x_0 + A + B,\ x_0 + 2A + B).$$

Remarque. — Si $B = \infty$, l'inégalité (31) est en vigueur partout et *a fortiori*

$$M\left[x + \frac{1}{\log_2 M(x)}\right] > [M(x)]^{1+a}.$$

Il en résulte que si nous voulons avoir un théorème général plus précis que le théorème classique de M. Borel, nous ne pouvons ajouter à x que l'inverse d'une fonction d'ordre de grandeur supérieure que celui de $\log_2 M(x)$.

Exemple. — Considérons la fonction croissante $M(x) = e_3(x)$. Alors on a

$$f(x) \equiv \log_2 M(x) = e^x,$$

et, par suite,

$$f\left[x + \frac{1}{\log_2 M(x)}\right] = e^{x + \frac{1}{e^x}}.$$

Mais on a

$$e^{x + \frac{1}{e^x}} = e^x . e^{\frac{1}{e^x}} = e^x \left[1 + \frac{1}{1 . e^x} + \frac{1}{2! e^{2x}} + \frac{1}{3! e^{3x}} + \ldots\right],$$

d'où

$$f\left[x + \frac{1}{\log_2 M(x)}\right] = f(x) + 1 + e^x\left[\frac{1}{2! e^{2x}} + \ldots\right] > f(x) + 1.$$

On n'aura donc jamais

$$e_3\left(x + \frac{1}{e^x}\right) < [e_3(x)]^e.$$

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

10. Soit $M(r)$ le module maximum d'une fonction entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \ldots . \tag{33}$$

Posons

$$A_n = |a_n|, \qquad r = |z|$$

et

$$\overline{M}(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_n r^n \ldots . \tag{34}$$

On déduit du théorème classique de Cauchy l'inégalité suivante :

$$A_n = |a_n| < \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{ou} \qquad A_n r^n < M(r). \tag{35}$$

Dans la série (33) il y aura, pour chaque valeur de r, un terme qui, en module, ne sera pas inférieur aux autres. Désignons le module de ce terme maximum par $m(r)$. C'est une fonction continue qui croît indéfiniment avec r ainsi que son rang. On a

$$m(r) < M(r),$$

de même

$$M(r) \leqq \overline{M}(r) \qquad \text{et} \qquad m(r) < \overline{M}(r).$$

On connaît, depuis longtemps, une autre relation de sens contraire entre $\overline{M}(r)$ et une fonction quelconque $M(r)$ qui satisfait à (35); c'est la relation

$$|f(z)| \leqq \overline{M}(r) < \frac{r_1 M(r_1)}{r_1 - r} \qquad (\text{pour } r_1 > r).$$

En prenant $r_1 = r + \frac{1}{\log M(r)}$ et en appliquant le théorème de M. Borel, on aboutit facilement à l'inégalité asymptotique

$$\overline{M}(r) < [M(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{36}$$

où ε est aussi petit que l'on veut. Cette formule est vraie pour les valeurs suffisamment grandes de r, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale négligeable.

Ce résultat de M. Borel peut être précisé de la manière suivante :

I. Tout d'abord nous remarquons que $M(r)$ ne peut pas être plus petit que le terme maximum de la série donnée; en se servant donc de $m(r)$ on a

$$\overline{\mathbf{M}}(x) < \frac{r_1 m(r_1)}{r_1 - r}. \tag{37}$$

Si maintenant au lieu d'appliquer le théorème de M. Borel, nous nous servons de l'inégalité (29), nous trouvons, en prenant

$$r_1 = r + \frac{1}{[\log m(r)]^{1+\varepsilon}},$$
$$\overline{\mathbf{M}}(r) < rm(r)[\log m(r)]^{1+\varepsilon}$$

à partir d'une valeur de r, sauf peut-être, dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie, dans lesquels la formule (29) peut ne pas être satisfaite.

II. On sait que l'on a également, en désignant par $\overline{\mathbf{M}}^{(\nu)}(r)$ la dérivée, d'ordre ν, de $M(r)$:

$$\overline{\mathbf{M}}^{(\nu)}(r) < m(r_1)\left(\frac{r_1}{r_1 - r}\right)^{(\nu)},$$

c'est-à-dire

$$\overline{\mathbf{M}}^{(\nu)}(r) < m(r_1)\,\frac{r_1 \nu!}{(r_1 - r)^{\nu+1}}.$$

En prenant maintenant $r_1 = r + \frac{1}{[\log m(r)]^{1+\varepsilon}}$ et en utilisant la formule (29), on trouve

$$\overline{\mathbf{M}}^{(\nu)}(r) < r(1 + a)m(r)[\log m(r)]^{(\nu+1)(1+\varepsilon)}.\left[1 + \frac{1}{r[\log m(r)]^{1+\varepsilon}}\right]\nu!,$$

qui, à partir d'une valeur de r, peut s'écrire

$$\overline{\mathbf{M}}^{(\nu)}(r) < rm(r)[\log m(r)]^{(\nu+1)(1+\varepsilon)}$$

et se vérifie partout, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie dans lesquels la formule (29) n'est pas satisfaite.

III. *Supposons qu'étant donnée la fonction entière* (33) *on ait, à partir d'une valeur de* r,

(38) $$|a_n| r^n < m(r).$$

Si le rapport $e^{\mu(r)} : \log_{\nu+1} m(r)$ *va en croissant dans des intervalles d'étendue totale infinie et si* $\lim [\mu(r) : r] = 0$, *l'inégalité*

(39) $$|f(z)| \leq \overline{\mathrm{M}}(r) < hrm(r) \log m(r) \ldots \log_\nu m(r)$$

sera satisfaite, à partir d'une valeur de r, *sous les mêmes conditions que le théorème du paragraphe* 8; h *est un nombre constant plus grand que l'unité.*

En effet, la formule (38) pour $r_1 > r$ donne $|a_n| < \frac{m(r_1)}{r_1^n}$; alors, à cause de (34), on aboutit à l'inégalité (37). Si nous posons dans cette inégalité

$$r_1 = r + \frac{1}{\log m(r) \ldots \log_\nu m(r)},$$

puisque, d'après la formule (22), $m(r_1)$ est inférieure à $(1+a)m(r)$, on trouve

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < h_1 rm(r) \log m(r) \ldots \log_\nu m(r)$$

avec

$$h_1 = 1 + \frac{1}{m(r) \log m(r) \ldots \log_\nu m(r)};$$

on a $\lim h_1 = 1$ pour $\lim r = \infty$. Donc la formule (39) est valable à partir d'une valeur de r.

IV. *Si la fonction entière* (33) *est telle qu'on ait* $\log m(r) \leqq \frac{hr}{\log r}$, *où* h *est constant arbitraire et* $m(r)$ *le terme maximum, on aura, à partir d'une valeur de* r,

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < rm(r)[\log_p m(r)]^{1+\varepsilon}$$

quel que soit le nombre p [1].

---

[1] Il résulte de l'inégalité donnée par M. Valiron dans sa Thèse, page 9 (*Annales de la Faculté de Toulouse*), que l'on a dans ces cas $\mathrm{M}(r) < \frac{2hrm(r)}{\log r}$, à partir d'une valeur de r.

On aura toujours $m(r)$ inférieure à $e_1\left(\frac{hr}{\log r}\right)$; en prenant donc dans la formule (37) $r_1 = r + \frac{1}{\log_p m(r)}$ et en appliquant l'inégalité (15') qui se vérifie toujours, sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels d'étendue totale finie, on aboutit à l'inégalité

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < rm(r)[\log_p m(r)]^{1+\varepsilon}. \tag{40}$$

Cette inégalité aura lieu partout, à partir d'une valeur de r, sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

On en conclut de plus, du corollaire du paragraphe 6, la proposition suivante :

V. *Si la fonction entière $f(z)$ est telle que $m(r)$ devienne inférieure à $e_1\left(\frac{hr}{\log r}\right)$ en une suite de points $r_1, r_2, \ldots, r_p$ tels que $\lim r_p = \infty$, la relation (40) aura lieu dans une infinité d'intervalles d'étendue totale infinie.*

Cette proposition est intéressante puisque $f(z)$ peut être alors d'ordre fini ou infini, quelconque, $m(r)$ pouvant devenir inférieure à $e_1\left(\frac{hr}{\log r}\right)$ dans certains intervalles et être supérieure à $e_n(r)$ dans d'autres intervalles.

11. Sur une fonction $q(r)$ introduite par M. G. Remoundos. — Les formules que j'ai données précédemment comme complément au théorème classique de M. Borel sont en vigueur partout, à partir d'une valeur de r, sauf peut-être quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie. Ces intervalles se présentent dans le cas d'irrégularité de la croissance de $m(r)$. M. G. Rémoundos désirant éviter ces irrégularités et ayant en vue le théorème classique de M. Borel, a énoncé la proposition suivante dans une Note intitulée : *Le module et les zéros des fonctions analytiques*, présentée au Congrès international des Mathématiciens en 1921, 20-30 septembre, à Strasbourg (*Comptes rendus du Congrès de Strasbourg*) :

« *Soit*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z_2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{41}$$

une fonction entière et posons

$$(42) \qquad \overline{\mathrm{M}}(r) = |a_0| + |a_1| r + \ldots + |a_n| r^n + \ldots.$$

» *Si nous avons, à partir d'une valeur de r, l'inégalité*

$$(43) \qquad |a_n| r^n < \mu(r) q(r),$$

où $q(r)$ est une fonction à croissance transcendante, dont le poids dépasse, à partir d'une valeur de r, une caractéristique de la convergence (uniforme) de la série (41) d'un excès supérieur à l'unité, la quantité $\overline{\mathrm{M}}(r)$ satisfait, à partir d'une valeur de r, à l'inégalité

$$(44) \qquad \overline{\mathrm{M}}(r) < \mu(r)[q(r)]^{1+a}$$

(a étant positif arbitraire), sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale inférieure à $\frac{a_1}{a_1 - 1} \cdot \frac{1}{\log_q(r_0)}$ (1), r_0 étant la première des valeurs exceptionnelles considérées. Les intervalles exceptionnels n'existent pas si $q(r)$ est à croissance typique. »

La fonction $q(r)$ appelée par M. G. Rémoundos « fonction à croissance transcendante » est telle que le rapport $q(r) : r^n$ tende vers l'infini pour chaque valeur finie de n. La fonction $q(r) : r^n$ est croissante pour toutes les valeurs de r qui satisfont à l'inégalité

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > n;$$

la quantité $\frac{rq'(r)}{q(r)}$ est nommée « l'ordre ou le poids de la croissance transcendante » de $q(r)$.

Nous savons qu'une série entière (41) converge uniformément dans tout cercle $|z| \leqq r$; par conséquent, si nous posons

$$\mathrm{R}_n(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots,$$

à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier ν tel que,

(1) a_1 étant plus petit que a et quelconque.

pour $n \geqq \nu$ et pour tous les points du cercle $|z| \leqq r$, on ait l'inégalité

$$R_\nu(z) < \varepsilon.$$

C'est cette quantité $\nu = N(r, \varepsilon)$ que M. G. Rémoundos a appelée « caractéristique » de la convergence de la série $f(z)$ dans les cercles du centre origine. Elle dépend évidemment de r et de ε. On voit facilement que quand r croît indéfiniment, une caractéristique dépasse toute quantité.

12. En suivant la méthode de M. G. Rémoundos rappelée ci-dessus et en appliquant non la proposition classique de M. Borel, mais la formule générale (29), on peut améliorer le résultat (44) en donnant le suivant :

$$\overline{M}(r) < r\mu(r)\, q(r)\, [\log q(r)]^{1+\alpha}. \tag{45}$$

En effet, nous remarquons que, à cause de l'hypothèse, on a

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} - N(r, \varepsilon) > 1.$$

Alors, aussi grand que soit r, il existe toujours un entier ν tel que

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > \nu > N(r, \varepsilon)$$

et, par suite, la fonction $\frac{q(r)}{r^n}$ va en croissant pour $n \leqq \nu$, à partir de valeur r, et d'autre part pour $n = \nu$ et en tous les points du cercle $|z| \leqq r$ on aura l'inégalité

$$|R'_\nu(z)| < \varepsilon.$$

Évidemment ν varie avec r en général. Nous avons supposé

$$|a_n r^n| \leqq \mu(r)\, q(r).$$

Nous pouvons écrire

$$|a_n| < \mu(r) \frac{q(r)}{r^n}$$

et nous aurons *a fortiori*, pour $n \leqq \nu$, à partir de la valeur r,

$$|a_n| < \mu(r) \frac{q(r_1)}{r_1^n}. \tag{46}$$

Nous allons nous servir de l'inégalité (46). On déduit de (42)

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < \mu(r)\,q(r)\left[1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r^2}{r_1^2} + \ldots + \frac{r^\nu}{r_1^\nu}\right] + \varepsilon;$$

on aboutit donc à la relation

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < \mu(r)\,q(r_1)\,\frac{r_1}{r_1 - r} + \varepsilon.$$

Maintenant, à cause de (29), cette inégalité devient

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < \mu(r)\,q(r)\,(1 + a_1)\left[r\,[\log q(r)]^{1+\varepsilon_1} + 1\right] + \varepsilon$$

(ε_1 et a_1 sont des nombres constants positifs et aussi petits que l'on veut); on en tire pour r assez grand

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < r\,\mu(r)\,q(r)\,[\log q(r)]^{1+\alpha} \qquad (\alpha > a_1;\ a \text{ constant}).$$

L'étendue totale des intervalles exceptionnels sera inférieure à

$$\frac{1}{[\log q(r_0)]^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{\log(1 + a_1)^{1+\varepsilon_1}} \sum_{\mathrm{K}=1}^{\mathrm{K}=\infty} \frac{1}{\mathrm{K}^{1+\varepsilon_1}}$$

et ces intervalles exceptionnels n'existent pas si $q(r)$ est à croissance typique.

13. Résultats obtenus par MM. Wiman et G. Valiron. — Il me semble utile de rappeler ici quelques résultats obtenus par M. Wiman (*Acta mathematica*, t. 36) et par M. G. Valiron (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1920) en suivant des méthodes différentes.

$\mathrm{M}(r)$ désigne toujours le module maximum pour $|z| = r$ d'une fonction $f(z)$ et $m(r)$ le maximum du module des termes de la série de Taylor, développement de $f(z)$.

α'. Toute fonction d'ordre fini inférieur à ρ vérifie l'inégalité

$$\mathrm{M}(r) < \sqrt{2\pi}\,.\,\rho\sqrt{\log m(r)}\,.\,m(r)$$

pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r (A. Wiman).

β'. Quel que soit le nombre fini q, toute fonction entière d'ordre fini vérifie l'inégalité

$$M(r) < m(r)\sqrt{\log m(r)}\,\log_q m(r)$$

pour les valeurs de r comprises entre $0 \ldots R$ extérieures à un nombre fini d'intervalles dans lesquels la variation totale des $\log r$ est inférieure à $\varepsilon(R)\log R$ (Valiron, *Annales de l'École Normale supérieure*).

γ'. Toute fonction d'ordre fini ρ vérifie l'inégalité

$$M(r) < m(r)\,r^{\rho+\varepsilon}$$

à partir d'une valeur de r (Valiron, *Annales de la Faculté de Toulouse*).

δ'. Toute fonction entière vérifie l'inégalité

$$M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{1}{2}}\,[\log_2 m(r)]^{1+\varepsilon}$$

aussi petit que soit le nombre positif ε, sauf peut-être dans les intervalles dont le nombre entre $0 \ldots r$ est inférieur au rang du terme maximum et dans lesquels la variation totale de $\log r$ est inférieure à un nombre fixe indépendant de r (Valiron, *Annales de l'École Normale supérieure*).

Critique.

14. A'. *Résultats de MM. Valiron, Wiman.* — Les résultats α', β', δ' ci-dessus sont plus précis que les correspondants que je donne, mais ceux-ci ont l'avantage d'être en vigueur partout, sauf peut-être dans quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie. Je vais montrer que la méthode de M. Rémoundos peut conduire, grâce à mes inégalités, à un résultat voisin de γ'.

B'. *Fonction $q(r)$ de M. G. Rémoundos.* — Dans la Note mentionnée, M. G. Rémoundos fait une observation relativement à l'usage de $q(r)$ en écrivant : « L'avantage fourni par la formule (44) consiste en ce que : 1° Si $q(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $\mu(r)q(r)$, la formule (44) substituée à la place de l'inégalité (36) nous fait gagner en grandeur; 2° Si $q(r)$ est à croissance typique, tandis que le produit $\mu(r)q(r)$ ne jouit pas de cette propriété, nous gagnons en régularité, à cause de l'absence des intervalles exceptionnels, ce qui est parfois un avantage considérable.... »

Relativement au gain en grandeur que l'on obtiendrait en se servant de $q(r)$, j'ai fait avec M. Valiron la remarque que ce gain est inexistant.

M. Valiron a démontré [1] que, entre le terme maximum $m(r)$ et son rang $n(r)$, existe la relation

$$\log m(r) = \int_0^r \frac{n(r)\,dr}{r}. \tag{47}$$

Or, si $N(r, \varepsilon)$ est la caractéristique de la convergence (uniforme), le rang $n(r)$ du terme maximum $m(r)$ doit être plus petit que $N(r, \varepsilon)$ (ou au plus égal). Mais on a

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} \geqq N(r, \varepsilon),$$

par suite

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > n(r).$$

Il en résulte

$$\int_0^r \frac{q'(r)}{q(r)}\,dr > \int_0^r \frac{n(r)}{r}\,dr,$$

ou, à cause de (47),

$$\log q(r) > \log m(r) + K,$$

K étant constant. On a donc

$$q(r) > e^K m(r).$$

Ce qui montre bien que l'on ne peut vraiment rien gagner en grandeur. *Mais pourtant nous pouvons gagner au point de vue de la régularité. Ainsi la formule* (45) *est une amélioration intéressante.*

Exemple I [2]. — Supposons que le module $\overline{M}(r)$ d'une fonction entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (|a_n| = A)$$

---

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse,* 1913.

(2) J'ai donné ce premier exemple à la demande de M. Valiron qui m'a fourni quelques indications pour la démonstration.

reste plus petit que e^{r^ρ} et essayons d'appliquer la méthode de M. Rémoundos. On aura $m(r) < e^{r^\rho}$ et, par suite, pour toute valeur de n et de r,

$$A r^n < e_1(r^\rho).$$

En cherchant la valeur minimum du second membre pour n donné, on aboutit facilement à l'inégalité [1]

$$A_n \leqq \left(\frac{B}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}, \qquad \text{où } B = \rho e.$$

Après cela, on doit avoir

$$\overline{M}(r) = \sum_0^\infty A_n r^n < \sum_0^\infty \left(\frac{B}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} r^n$$

et

$$R_\nu(r) < \sum_{\nu+1}^\infty \left(\frac{B}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+1}{\rho}} r^{\nu+1}, \qquad \text{où } R_\nu(r) = \sum_{\nu+1}^\infty A_{\nu+1} r^{\nu+1}.$$

On obtient, *a fortiori*,

$$R_\nu(r) < \left(\frac{B}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+1}{\rho}} r^{\nu+1} + \left(\frac{B}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+2}{\rho}} r^{\nu+2} + \ldots.$$

Si maintenant étant donné r, choisissons ν tel qu'on ait

$$(48) \qquad \left(\frac{B}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{\rho}} r \leqq \frac{1}{2}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad r \leqq \frac{(\nu+1)^{\frac{1}{\rho}}}{2B^{\frac{1}{\rho}}},$$

on trouve

$$R_\nu(r) < \frac{2}{2^{\nu+1}} < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ donné d'avance})$$

(pour ν assez grand). De plus, de toutes valeurs de ν qui satisfont à (48), nous pouvons prendre celle qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{\nu^{\frac{1}{\rho}}}{2B^{\frac{1}{\rho}}} \leqq r,$$

---

[1] *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, p. 62.

de sorte qu'on ait

$$\frac{\nu^{\frac{1}{\rho}}}{2B^{\frac{1}{\rho}}} \leqq r \leqq \frac{(\nu+1)^{\frac{1}{\rho}}}{2B^{\frac{1}{\rho}}}. \tag{49}$$

Après cela, prenons $q(r)$ égal à $e_1(r^{\rho_1})$, où $\rho_1 > \rho$. On doit avoir $\frac{r q'(r)}{q(r)} > n$ pour toute valeur $0, 1, \ldots, \nu$ de n. Cela exige qu'on ait $r^{\rho_1} \geqq \frac{\nu}{\rho_1}$, ou bien

$$r \geqq \left(\frac{\nu}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}. \tag{50}$$

Pour que les conditions (49) et (50) soient satisfaites en même temps, il suffit d'avoir

$$\left(\frac{\nu}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} < \frac{\nu^{\frac{1}{\rho}}}{2B^{\frac{1}{\rho}}}$$

ou bien

$$\frac{2B^{\frac{1}{\rho}}}{\rho_1^{\frac{1}{\rho_1}}} < \nu^{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}};$$

ce qui est possible, évidemment (puisque $\rho_1 > \rho$), à partir d'une valeur de ν, et, par suite, à partir d'une valeur de r, sans intervalles exceptionnels. $q(r)$ est donc une fonction de M. Rémoundos.

Cela posé, prenons $\mu(r) = \frac{m(r)}{q(r)}$. On aura toujours

$$A_n r^n \leqq \mu(r) q(r),$$

et, par conséquent, à cause de (45),

$$\overline{M}(r) < m(r) r^{\rho+1+\sigma},$$

où σ est positif, constant et arbitraire, car on a

$$\rho_1 = \rho + \eta \qquad \text{et} \qquad [\log q(r)]^{1+\alpha} = r^{(\rho+\eta)(1+\alpha)} = r^{\rho+\sigma}$$

avec

$$\sigma = \eta + \alpha(\rho + \eta),$$

les nombres η et α étant positifs, constants et aussi petits que l'on veut.

Exemple II. — Supposons que pour la fonction $f(z)$ on ait

$$\overline{\mathrm{M}}(r) < e_u(r^\rho).$$

Alors on a

$$m(r) \leq e_u(r^\rho),$$

et, par suite, pour toute valeur de n et r,

$$\mathrm{A}_n < e[e_{u-1}(r^\rho) - n \log r]. \tag{51}$$

Supposons que r_1 est la valeur qui rend le second membre minimum. On doit avoir, pour $r = r_1$:

$$\rho\, e_{u-1}(r^\rho)\, e_{u-2}(r^\rho) \ldots e_1(r^\rho)\, r^\rho = n. \tag{52}$$

Pour r assez grand, on a évidemment

$$\rho\, e_{u-1}(r^{\rho+\sigma}) > \rho\, e_{u-1}(r^\rho) \ldots e_1(r^\rho)\, r^\rho, \tag{53}$$

σ étant arbitrairement petit et positif.

Prenons r plus grand que l'unité et n assez grand pour que (52) et (53) soient vérifiées. Soit n_0 la plus petite valeur de n pour laquelle cela a lieu. Alors on en tire, pour $n > n_0$,

$$e_{u-1}(r^\rho) < \frac{n}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \log r > \left[\log_u \frac{n}{\rho}\right] \cdot \frac{1}{\rho + \sigma}.$$

Alors (51) donne (pour $n > n_0$)

$$\mathrm{A}_n < e^{\frac{n}{\rho} - \frac{n}{\rho+\sigma}\left]\log_u \frac{n}{\rho}\right]}$$

ou bien

$$\mathrm{A}_n < \frac{e^{\frac{n}{\rho}}}{\left[\log_u \frac{n}{\rho_1}\right]^{\frac{n}{\rho+\sigma}}}.$$

On voit maintenant que, pour $\nu + 1 > n_0 + 1$, on doit avoir

$$\mathrm{R}_\nu(r) = \sum_{\nu+1}^{\infty} \mathrm{A}_{\nu+1}\, r^{\nu+1} < \sum_{\nu+1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\nu+1}{\rho}}\, r^{\nu+1}}{\left[\log_{u-1} \frac{\nu+1}{\rho}\right]^{\frac{\nu+1}{\rho+1}}}.$$

Pour r donné et ν assez grand, tel qu'on ait

$$e^{\frac{1}{\rho}} r : \left[\log_{u-1} \frac{\nu + 1}{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma}} \leqq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$r \leqq \left[\log_{u-1} \frac{\nu + 1}{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma}} : 2 e^{\frac{1}{\rho}},$$

on trouve facilement

$$R_\nu(r) < \frac{1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

On peut évidemment choisir ν, de sorte que

$$\left[\log_{u-1} \frac{\nu}{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma}} : 2 e^{\frac{1}{\rho}} \leqq r \leqq \left[\log_{u-1} \frac{\nu + 1}{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma}} : 2 e^{\frac{1}{\rho}}. \tag{54}$$

Or, en prenant

$$q(r) = e_u(r^{\rho_1}) \qquad (\rho_1 > \rho),$$

on doit avoir

$$\frac{r\, q'(r)}{q(r)} < \nu,$$

c'est-à-dire l'inégalité

$$e_{u-1}(r^{\rho_1})\, e_{u-2}(r^{\rho_1}) \ldots e_1(r^{\rho_1}) r^{\rho_1} > \frac{\nu}{\rho_1},$$

qui aura lieu, *a fortiori*, si l'on a

$$e_{u-1}(r^{\rho_1}) \geqq \frac{\nu}{\rho_1}$$

ou bien

$$r \geqq \left[\log_{u-1} \frac{\nu}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{\rho_1}}. \tag{55}$$

Les conditions (54) et (55) seront satisfaites quand on a

$$\left[\log_{u-1} \frac{\nu}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{\rho}} < \left[\log_{u-1} \frac{\nu}{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma}} : 2 e^{\frac{1}{\rho}}.$$

Cela est possible si l'on prend $\rho_1 > \rho + \sigma$, pour r assez grand permettant de trouver ν qui satisfasse à l'inégalité suivante :

$$2 e^{\frac{1}{\rho}} < \left[\log_{u-1} \frac{\nu}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{\rho+\sigma} - \frac{1}{\rho}}$$

$q(r)$ est donc une fonction de M. Rémoundos. Alors on aboutit, comme précédemment, à la relation

$$\overline{\mathbf{M}}(r) < m(r)\, e_{u-1}[(1+a)\, e_{u-2}(r^{\rho_1})],$$

a étant aussi petit que l'on veut, ou plus simplement

$$\overline{\mathbf{M}}(r) < m(r)\, e_{u-1}(r^{\rho+\eta}),$$

η étant positif et arbitrairement petit.

I'. Dans une Note récente (1), M. Varopoulos faisant usage d'une fonction $q(r)$ qui a la propriété de croitre plus vite que toute puissance de r, pour toute valeur assez grande de r, a donné quelques résultats, qui peuvent être reconnus inexacts par de simples exemples.

En supposant $|a_n|r^n < \mu(r)$, dans la série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\overline{\mathbf{M}}(r) = |a_0| + |a_1|r + \ldots + |a_n|r^n + \ldots,$$

et en désignant par $\mathrm{M}'(r)$ le module maximum de la dérivée $f'(z)$, il donne les inégalités

$$\overline{\mathbf{M}}(r) < \theta r\, \mu(r)\, q(r) \log q(r) \ldots [\log_p q(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{56}$$
$$\mathrm{M}'(r) < \theta r\, \mu(r)\, q(r) [\log q(r)]^{a}, \tag{57}$$

où $\varepsilon > 0$ quelconque, $\theta > 1$ et $a > 2$ arbitraires.

Les formules de M. Le Roy (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900) ou de M. G. Valiron, *Sur le calcul approché de certaines fonctions entières* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1914) montrent de suite l'inexactitude de la formule (56).

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, 22 mai 1922.

SUR
LE CALCUL NUMÉRIQUE
D'UNE
CATÉGORIE DE RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Introduction.

1. Viète, le premier (1540-1600), s'est occupé du calcul numérique des racines des équations algébriques dont les coefficients sont des nombres commensurables donnés (*De numerosa postetatum affectarum resolitione*). Par ce calcul on ne peut trouver précisément que les racines commensurables, et toutes les autres approximativement par différentes méthodes, de Newton, Daniel Bernoulli, Gräffe, Lagrange ([1]), etc.

Dans ce travail, nous allons donner une nouvelle méthode par laquelle nous pouvons calculer avec précision, de plus, des racines d'une catégorie, incommensurables, réelles ou imaginaires, au moyen de calcul numérique et de résolution d'équations du quatrième degré au plus. En se servant de cette méthode, on peut toujours calculer, parmi les racines d'un polynome $\sigma(z)$, celles qui appartiennent à des facteurs, irréductibles dans le domaine des nombres commensurables, de degré 4 au plus.

2. M. B. Niewenglowski, dans son Algèbre, fait la transformation $z = x \pm y$ à l'équation $\sigma(z) = 0$, qui soit de degré μ, pour aboutir à deux équations qui ont comme racines la demi-somme et la demi-différence des racines de $\sigma(z)$. Sur cette transformation, nous ferons

([1]) *Voir* J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, 1910, p. 320-372, ou Henri Weber, *Traité d'Algèbre supérieure*, p. 392-412.

une petite modification. Posons

(1) $$z = x \pm iy.$$

Alors on obtient

$$\sigma(z) = \sigma(x + iy) = p(x, y^2) \pm iy\, q(x, y^2).$$

Pour la facilité du langage, nous appellerons le système

(2) $$p(x, y^2) = 0, \qquad q(x, y^2) = 0,$$

système résolvant de $\sigma(z)$ [ou de $\sigma(z) = 0$]. Supposons que $\varphi(x) = 0$ et $f(y^2)$ sont les résultats qui correspondent à l'élimination de x et y^2 entre les équations (2); $\varphi(x)$ sera appelé *première résolvante* du système (2) [ou de l'équation $\sigma(z) = 0$], et $f(y^2)$ *deuxième résolvante* du même système (ou équation).

Cela posé nous allons faire quelques remarques qui seront utiles dans ce qui va suivre.

α'. Chaque solution x, y^2 du système résolvant, c'est-à-dire chaque paire de racines correspondantes des résolvantes, donne, moyennant la formule (1) deux racines de $\sigma(z)$; réciproquement, en combinant deux racines $\rho_1 = x + iy$, $\rho_2 = x - iy$ (ou $\rho_1 = x - iy$, $\rho_2 = x + iy$), on trouve une solution

(3) $$x = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \qquad y^2 = -\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2$$

du système résolvant, c'est-à-dire une paire de racines correspondantes x, y^2, de deux résolvantes.

Il en résulte que les résolvantes $\varphi(x)$ et $f(y^2)$ ayant comme racines correspondantes les (3) sont de degré $\frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}$ par rapport à x et y^2.

β'. Une racine quelconque de $\sigma(z)$ provient, au moyen de la formule (1), de $\mu - 1$ différentes solutions du système résolvant.

γ'. Si x et y sont réels et $y \neq 0$, la formule (1) donne des racines conjuguées de $\sigma(z)$. La réciproque est vraie comme on le voit de (3).

δ'. Pour que $\sigma(z)$ ait des racines multiples il est nécessaire et suffisant que la deuxième résolvante $f(y^2)$ ait au moins une racine nulle ([1]).

Calcul des racines d'une certaine catégorie.

3. De ce qui précède on voit que pour obtenir les racines de $\sigma(z)$, il faut faire par la formule (1) la liaison des valeurs de chaque solution du système résolvant, c'est-à-dire des racines correspondantes des résolvantes $\varphi(x)$ et $f(y^2)$. On peut trouver ces racines de la manière suivante conformément à une remarque faite par Liouville ([2]).

Soit

$$P(x, t) = 0, \qquad Q(x, t) = 0 \tag{4}$$

un système algébrique quelconque. Posons $\omega = at + x$ et supposons que le résultat de l'élimination de t entre les $P(\omega - at, t) = 0$ et $Q(\omega - at, t) = 0$, soit $\varphi(\omega, a) = 0$. En ordonnant ce résultat par rapport à a, on peut écrire

$$\rho_0(\omega) + a\rho_1(\omega) + a^2\rho_2(\omega) + \ldots = 0. \tag{5}$$

Un raisonnement facile montre que, quel que soit le nombre a, la valeur de ω qui satisfait à (5) correspond à une solution x, t du système (4). Autrement dit, il faut avoir l'identité suivante :

$$\rho_0(at + x) + a\rho_1(at + x) + a^2\rho_2(at + x) + \ldots = 0 \tag{6}$$

qui doit être vérifiée quel que soit a, si (x, t) est une solution de (4).

Les coefficients du développement (6) par rapport aux puissances de a devant être nuls, nous aurons donc des équations de la forme

$$\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{d^n\rho_0(x)}{dx^n} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}\rho_1(x)}{dx^{n-1}} + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{d^{n-2}\rho_2(x)}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{t\,d\rho_{n-1}(x)}{dx} + \rho_n(x) = 0 \tag{7}$$

([1]) On peut donc écrire les conditions de multiplicité des racines de $\sigma(z)$ en annulant les coefficients des $y^0, y^2, \ldots y^{2n}$, dans $f(y^2) = 0$.

([2]) *Voir* J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, 1910, p. 160, ou B. Niewenglowski, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, 1910, p. 320.

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\rho_0(x)$ coïncide avec $\Phi(x)$, $\Phi(x)$ étant le résultat de l'élimination de t entre les équations (4).

Les équations (7) seront appelées *équations de Liouville.*

4. Le système (4) peut avoir des solutions qui sont constituées par des valeurs de x et t finies ou infinies. Supposons que le dernier cas n'ait pas lieu. Alors nous remarquons que quand dans la solution x, t du système (4), x est une racine de $\Phi(x)$ d'un degré de multiplicité u, toutes les équations (7) où $n \leq u - 1$ doivent être des identités. En effet, il faut qu'elles soient vérifiées par u valeurs correspondantes, finies, de t, quoique leur degré n soit inférieur à u. Il en résulte que c'est l'équation du degré $n = u$ qui convient pour fournir les valeurs de t correspondant aux racines x de $\Phi(x)$.

Cela posé, supposons que le système (4) coïncide avec le système (2) qui nécessairement a des solutions finies, car les racines de $\sigma(z)$ qu'on trouve par la formule (3) sont aussi finies. $\Phi(x)$ coïncide avec $\varphi(x)$ et t avec y^2.

Si $x = a$ est une racine de $\varphi(x)$ d'un degré de multiplicité u inférieur ou égal à 4 et si l'on peut la calculer exactement d'une manière quelconque, comme par exemple par le calcul numérique dans le cas où elle est commensurable, les valeurs correspondantes de y^2 seront racines d'une équation de Liouville de degré $u \leq 4$; par conséquent, elles pourront être calculées exactement. Si $\beta + \gamma i$ est une de ces racines, on aura pour racines de $\sigma(z)$, à cause de (1),

$$z = a \pm i\sqrt{\beta + i\gamma}.$$

En procédant de la même façon en ce qui concerne la deuxième résolvante $f(y^2)$, on trouve pour équations de Liouville les suivantes :

$$(8) \quad \frac{x^\nu}{\nu!}\cdot\frac{d^\nu u_0(t)}{dt^\nu} + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot\frac{du_1(t)}{dt^{\nu-1}} + \ldots + x\frac{du_{\nu-1}(t)}{dt} + u_\nu(t) = 0 \quad (t = y^2),$$

où $u_0(y^2)$ coïncide avec $f(y^2)$. Il en résulte que

$$z = \beta + \gamma i \pm i\sqrt{a}$$

sont racines de $\sigma(z)$ qu'on peut calculer précisément; a est une racine connue de $f(y^2)$ quadruple au plus; $\beta + \gamma i$ est une racine quelconque d'une équation (8) de degré $\nu \leqq 4$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Étant donnée l'équation $\sigma(z) = 0$ dont les coefficients sont donnés en nombres, on peut calculer exactement toutes les racines de la forme $z = a \pm i\sqrt{\beta + i\gamma}$ et $z = \beta + i\gamma \pm \sqrt{a}$, où a est une racine connue* (par exemple commensurable) *de la première ou deuxième résolvante de $\sigma(z)$, d'un degré de multiplicité $u \leqq 4$, et $\beta + \gamma i$ une racine de l'équation correspondante de Liouville de degré u.*

5. Supposons que la première (ou deuxième) résolvante de $\sigma(z)$ n'ait pas une racine commensurable, en général une racine connue, mais qu'il y ait des racines de la forme du théorème précédent, qu'on peut donc calculer exactement en se servant de ses résolvantes. Alors, en appliquant la méthode du même théorème, on en conclut qu'on peut calculer exactement les racines de $\sigma(z)$ qui sont de la forme

$$z = A \pm i\sqrt{B + i\Gamma} \qquad \text{ou} \qquad z = B + i(\Gamma \pm \sqrt{A});$$

A est une racine connue de l'une des deux résolvantes de $\sigma(z)$, d'un degré de multiplicité $u \leqq 4$ et $B + i\Gamma$ une racine de l'équation correspondante de Liouville de degré u dont les coefficients peuvent être commensurables ou non, réels ou imaginaires.

Si les résolvantes de $\varphi(x)$ et de $f(y^2)$ n'ont pas une racine connue en partant de laquelle on pourrait connaître les racines de $\varphi(x)$ et $f(y^2)$ et par suite celle de $\sigma(z)$, on peut considérer les résolvantes des résolvantes, et ainsi de suite jusqu'au moment où nous aurons trouvé une telle racine (s'il y en a), d'un degré de multiplicité 4 au plus, que nous appellerons *base*.

Il en résulte plus généralement le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant donnée l'équation $\sigma(z) = 0$ dont les coefficients sont donnés en nombres, on peut calculer exactement toutes les racines de la forme*

$$A \pm \sqrt{B + i\Gamma} \quad \text{ou} \quad B + i(\Gamma \pm \sqrt{A})$$

(s'il y en a), où A *est une racine de la même forme et constitution d'une*

résolvante, d'un degré de multiplicité $n \leqq 4$, ***et*** $B + i\Gamma$ ***une racine d'une équation de Liouville, de degré*** u, ***qui joint cette résolvante à sa correspondante; il suffit de connaître la base de ces racines.***

Résolvantes de différents ordres.

6. Nous avons été amenés précédemment à considérer les résolvantes des résolvantes de $\sigma(z)$ et ainsi de suite. Désormais nous désignerons les résolvantes de $\sigma(z)$ pour les symboles $\bar{\sigma}_x(x)$, $\bar{\sigma}_y(y^2)$ et nous les appellerons « résolvantes de $\sigma(z)$ du premier ordre ». Les résolvantes du premier ordre de $\bar{\sigma}_x(x)$ seront désignées par $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$ et $\bar{\sigma}_{xy}(y^2)$ et celles de $\bar{\sigma}_y(y^2)$ par $\bar{\sigma}_{xy}(x)$ et $\bar{\sigma}_{y^2}(y^2)$. Les résolvantes $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$, $\bar{\sigma}_{xy}(y^2)$, $\bar{\sigma}_{xy}(x)$, $\bar{\sigma}_{y^2}(y^2)$ seront appelées « résolvantes de $\sigma(z)$ du deuxième ordre ». Ainsi de suite nous aurons pour $\sigma(z)$ des résolvantes de différents ordres.

Propriété des résolvantes d'une équation du troisième degré.

7. On peut démontrer les propositions suivantes :

I. Étant données une équation $\sigma(z) = 0$ du troisième degré et la somme a de ses racines, on a la relation

$$\bar{\sigma}_{x^\nu}(x) = \lambda_\nu \sigma(z), \tag{9}$$

où

$$z = \frac{a}{3}[1 - (-2)^\nu] + (-2)^\nu x \tag{10}$$

et λ_ν constant.

En effet, soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines de $\sigma(z)$ et r_1, r_2, r_3 les racines de $\bar{\sigma}_x(x)$ qui sera de degré $\frac{3.2}{1.2} = 3$ (§ 2, α'). On doit avoir

$$r_1 = \frac{\rho_2 + \rho_3}{2}, \qquad r_2 = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2}, \qquad r_3 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \qquad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = a,$$

d'où l'on tire

$$r_1 = \frac{a}{2} - \frac{\rho_1}{2}, \qquad r_2 = \frac{a}{2} - \frac{\rho_2}{2}, \qquad r_3 = \frac{a}{2} - \frac{\rho_3}{2}.$$

Les racines de $\sigma(z)$ et $\bar{\sigma}_x(x)$ sont donc liées par la formule $z = a - 2x$; par suite, on a

$$\bar{\sigma}_x(x) = \lambda_1 \sigma(a - 2x) \qquad (\lambda_1 = \text{const.}).$$

Il faut remarquer que l'on a encore $r_1 + r_2 + r_3 = a$; par conséquent,

$$\bar{\sigma}_{x^2}(x_1) = \lambda_1 \bar{\sigma}_x(a - 2x_1) = \lambda'_1 \lambda_1 \sigma[a - 2(a - 2x_1)] \qquad (\lambda' = \text{const.})$$

ou bien

$$\bar{\sigma}_{x^2}(x) = \lambda_2 \sigma[a - 2(a - 2x)] \qquad (\lambda_2 = \lambda'_1 \lambda_1).$$

En général on obtient la formule

$$\bar{\sigma}_{x^\nu}(x) = \lambda_\nu \sigma\Big[a - 2\big[a - 2[a \ldots 2(a - 2x)] \ldots\big]\Big]$$

ou plus simplement la formule (9) avec (10).

II. Toute résolvante $\bar{\sigma}_{x^\nu y}(y^2)$ provient de $\bar{\sigma}_y(y^2)$ par la formule

$$(11) \qquad \bar{\sigma}_{x^\nu y}(y^2) = \mu_\nu \bar{\sigma}_y(2^{2\nu} y^2) \qquad (\mu_\nu = \text{const.}).$$

En effet, on voit bien que la résolvante $\bar{\sigma}_{x^\nu}(x)$ a comme racines

$$\frac{\rho_1}{(-2)^\nu} - k_\nu, \quad \frac{\rho_2}{(-2)^\nu} - k_\nu, \quad \frac{\rho_3}{(-2)^\nu} - k_\nu, \qquad \text{où} \qquad k_\nu = \frac{a}{3}[1 - (-2)^\nu];$$

donc la deuxième résolvante de $\bar{\sigma}_{x^\nu}(x)$, c'est-à-dire la $\bar{\sigma}_{x^\nu y}(y^2)$ aura comme racines

$$-\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2^{\nu+1}}\right)^2, \quad -\left(\frac{\rho_1 - \rho_3}{2^{\nu+1}}\right)^2, \quad -\left(\frac{\rho_2 - \rho_3}{2^{\nu+1}}\right)^2.$$

Les racines des $\bar{\sigma}_y(y^2)$ sont

$$-\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2, \quad -\left(\frac{\rho_1 - \rho_3}{2}\right)^2, \quad -\left(\frac{\rho_2 - \rho_3}{2}\right)^2.$$

Il en résulte donc la formule (11).

III. Nous allons calculer la résolvante $\bar{\sigma}_{x^\nu y x^n}(x)$, étant donné le $\bar{\sigma}_y(y^2)$. On a, conformément à I,

$$\bar{\sigma}_{x^\nu y x}(x) = \lambda_1 \bar{\sigma}_{x^\nu y}(z), \qquad z = \frac{A}{3}[1 - (-2)^n] + (-2)^n x \qquad (\lambda_1 = \text{const.}),$$

où A est la somme des racines de $\bar{\sigma}_{x^\nu y}(z)$, c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{2^{2\nu}}\left[-\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\rho_2-\rho_3}{2}\right)^2\right] = \frac{a}{2^{2\nu}};$$

a est la somme de racines de $\bar{\sigma}_y(y^2)$. Mais, d'autre part, à cause de II, on a

$$\bar{\sigma}_{x^\nu y}(y^2) = \lambda_2 \bar{\sigma}_y(2^{2\nu} y^2) \qquad (y^2 = z, \quad \lambda_2 = \text{const.}).$$

On en tire

$$\bar{\sigma}_{x^\nu y x^n}(x) = \lambda_1 \bar{\sigma}_{x^\nu y}(z) = \lambda_2 \sigma_{x^\nu y}(y^2) = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\sigma}_y(2^{2\nu} y^2) = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\sigma}_y(z^{2\nu} z),$$

ou, en posant $\lambda_1 \lambda_2 = u$,

$$\bar{\sigma}_{x^\nu y x^n}(x) = u \bar{\sigma}_y(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{a}{3}[1-(-2)^n] + (-2)^{n+2\nu} x.$$

Résolution des équations du quatrième degré par les résolvantes.

8. Soient $\sigma(z) = 0$ une équation algébrique du quatrième degré, r_1, r_2, r_2, r_4 ses racines et a leur somme. La résolvante $\bar{\sigma}_x(x)$ sera du sixième degré et aura pour racines : $\frac{r_\lambda + r_\mu}{2}$ où $\lambda \neq \mu$ et $\lambda = 1, 2, 3, 4$; $\mu = 1, 2, 3, 4$. De la même façon la résolvante $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$ doit avoir comme racines $\frac{1}{4}[r_u + r_\pi + r_\tau + r_\nu]$ où u, π, τ, ν prennent les valeurs 1, 2, 3, 4 de toutes les manières où plus de deux indices n'ont pas à la fois la même valeur. Ces combinaisons proviennent de racines de $\bar{\sigma}_x(x)$ par la formule $x = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ du paragraphe 2, α'. Trois seulement de ces combinaisons correspondent aux valeurs de u, π, τ, ν, différentes (par exemple $u = 1$, $\pi = 2$, $\tau = 3$, $\nu = 4$) et donnent pour la $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$ la racine connue

$$\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = \frac{a}{4}$$

d'un degré de multiplicité 3 (¹). Les valeurs correspondantes de y^2

(¹) Si l'on a $\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + 2r_3) = \frac{a}{4}$, on en conclut $r_3 = r_4$; alors $\sigma(z)$ doit avoir des racines multiples. Nous laissons ce cas facile à part.

seront racines d'une équation de Liouville du troisième degré. Désignons-les par β, γ, δ. Alors les racines de $\sigma_x(x)$ seront

$$(12)\qquad \frac{a}{4} \pm i\sqrt{\beta},\quad \frac{a}{4} \pm i\sqrt{\gamma},\quad \frac{a}{4} \pm i\sqrt{\delta}.$$

On doit donc avoir les relations suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{r_1+r_2}{2} = \dfrac{a}{4} + i\varepsilon\sqrt{\beta}, & \dfrac{r_1+r_3}{2} = \dfrac{a}{2} + i\varepsilon'\sqrt{\gamma}, & \dfrac{r_1+r_4}{2} = \dfrac{a}{4} + i\varepsilon''\sqrt{\delta}, \\ \dfrac{r_3+r_4}{2} = \dfrac{a}{2} - i\varepsilon\sqrt{\beta}, & \dfrac{r_2+r_4}{2} = \dfrac{a}{4} - i\varepsilon'\sqrt{\gamma}, & \dfrac{r_2+r_3}{2} = \dfrac{a}{4} - i\varepsilon''\sqrt{\delta}, \end{array}\right.$$

où ε, ε', ε'' sont ± 1. On en tire les formules

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{a}{4} + i\varepsilon\sqrt{\beta} + i\varepsilon'\sqrt{\gamma} + i\varepsilon''\sqrt{\delta}, \\ r_2 = \dfrac{a}{4} + i\varepsilon\sqrt{\beta} - i\varepsilon'\sqrt{\gamma} - i\varepsilon''\sqrt{\delta}, \\ r_3 = \dfrac{a}{4} - i\varepsilon\sqrt{\beta} + i\varepsilon'\sqrt{\gamma} - i\varepsilon''\sqrt{\delta}, \\ r_4 = \dfrac{a}{4} - i\varepsilon\sqrt{\beta} - i\varepsilon'\sqrt{\gamma} + i\varepsilon''\sqrt{\delta}. \end{array}\right.$$

Il faut remarquer que les raisonnements précédents laissent dans les (13) les signes ε, ε', ε'' arbitraires; les r_1, r_2, r_3, r_4 qu'on trouve par les formules (14) sont nécessairement les racines de $\sigma(z)$. Donc, pour résoudre une équation du quatrième degré, il suffit de résoudre l'équation de Liouville qui lie les deux résolvantes $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$ et $\bar{\sigma}_{xy}(y^2)$ et appliquer les formules (14) [comparer (¹) méthodes Louis Ferrari, Lagrange, Descartes, etc.).

Si les racines (12) sont différentes, on trouve par la formule (7), pour $\nu = 1$, des racines simples de $\bar{\sigma}_y(y^2)$ de la forme

$$y^2 = \sum(a + i\sqrt{\beta}) \qquad \text{où} \qquad \sum(x) = -\frac{\rho(x)}{[\bar{\sigma}_x(x)]'}.$$

On aura donc les racines de l'équation donnée sous une forme diffé-

(¹) J.-A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, 1910, p. 471.

rente ; on a, en se servant de la racine $a \pm i\sqrt{\beta}$,

$$r_1 = \frac{a + i\sqrt{\beta}}{4} + i\sqrt{\sum\left(\frac{a}{4} + i\sqrt{\beta}\right)},$$

$$r_2 = \frac{a - i\sqrt{\beta}}{4} + i\sqrt{\sum\left(\frac{a}{4} + i\sqrt{\beta}\right)},$$

$$r_3 = \frac{a - i\sqrt{\beta}}{4} + i\sqrt{\sum\left(\frac{a}{4} - i\sqrt{\beta}\right)},$$

$$r_4 = \frac{a - i\sqrt{\beta}}{4} - i\sqrt{\sum\left(\frac{a}{4} - i\sqrt{\beta}\right)}.$$

Les autres racines (12) doivent donner les mêmes résultats (§ 2, β').

On voit facilement que si quelques racines de (12) coïncident, $\bar{\sigma}_{x}(y^2)$ a une racine nulle, au moins ; l'un des nombres β, γ, δ, soit β, sera nul. $\frac{a}{4}$ sera racine double (au moins) de $\sigma_x(x)$. Il suffit donc de considérer une équation de Liouville du second degré pour trouver les racines de $\bar{\sigma}_x(y^2)$.

La composition des racines de $\sigma_x(x)$ montre que la transformation $x = a - \omega$ donne une équation équivalente $\bar{\sigma}_x(a - \omega) = 0$. On a donc

$$\bar{\sigma}_x(a - \omega) = k\,\sigma(\omega) \quad (k = \text{const.}).$$

Des équations qui peuvent être décomposées en autres irréductibles du quatrième degré au plus.

9. Au moyen de résolvantes du premier et du deuxième ordre, on peut calculer toutes les racines d'un polynome $\sigma(z)$ qui est un produit d'autres polynomes, dont les coefficients sont commensurables, de degré 4 au plus, sans qu'il soit nécessaire de décomposer $\sigma(z)$.

On montre facilement le lemme suivant :

LEMME. — *Une résolvante* (première ou deuxième) *du premier ordre d'un produit de polynomes donnés est le produit des résolvantes correspondantes du premier ordre et d'un autre polynome qui a pour racines toutes celles que la formule correspondante de* (3) *donne par les combinaisons de racines appartenant aux différents polynomes.*

Soit
$$\sigma(z)=\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)\ldots\sigma_\nu(z),$$

où $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, ..., $\sigma_\nu(z)$ sont de degrés quelconques. On aura

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x(x) &= \bar{\sigma}_{1x}(x)\,\bar{\sigma}_{2x}(x)\ldots\sigma_{\nu x}(x)\,\Sigma_x(x),\\ \bar{\sigma}_y(y^2) &= \bar{\sigma}_{1y}(y^2)\,\bar{\sigma}_{2y}(y^2)\ldots\sigma_{\nu y}(y^2)\,\Sigma_y(y^2),\end{aligned}$$

$\Sigma_x(x)$ et $\Sigma_y(y^2)$ ont pour racines les combinaisons correspondantes (3) qui se font sur les racines de différents facteurs de $\sigma(z)$.

Cela posé, supposons que le polynomes $\sigma(z)$ ait des coefficients commensurables, et qu'il soit le produit de multiplication de facteurs irréductibles dont quelques-uns ou tous sont de degré 4 au plus. Nous verrons comment nous pourrons trouver les racines de tous ces facteurs dont le degré est 4 au plus, sans décomposer $\sigma(z)$.

α'. On remarque que les racines commensurables correspondantes des résolvantes du premier ordre (qu'on peut par conséquent calculer par la méthode du calcul numérique) constituent un polynome rationnel (avec des coefficients commensurables) du deuxième degré; et réciproquement. On peut donc, au moyen des résolvantes du premier ordre, calculer toutes les racines de ces facteurs.

Supposons que $\sigma(z)$ soit privé de tels facteurs.

β'. Considérons un facteur irréductible du $\sigma(z)$ du troisième degré, soit $\sigma_\lambda(z)$. On peut imaginer, en multipliant $\sigma(z)$ par $z-\beta$, où β est un nombre commensurable quelconque, que $z-\beta$ soit lié à $\sigma_\lambda(z)$. Alors nous aurons à considérer un facteur $(z-d)\,\sigma_\lambda(z)$ du quatrième degré. On peut donc procéder comme dans le cas suivant, où l'on peut trouver les racines du facteur $(z-\beta)\,\sigma_\lambda(z)$ et par suite celles de $\sigma_\lambda(z)$.

γ'. Soit $\sigma_\lambda(z)$ un facteur du quatrième degré irréductible ou non, rationnel. Conformément au paragraphe 8, la résolvante $\bar{\sigma}_{\lambda x^2}(x)$ a nécessairement une racine triple commensurable égale au quart de la somme des racines de $\sigma_\lambda(z)$; appelons-la $4d$. Cette racine sera au moins triple pour la résolvante $\sigma_{x^2}(x)$ comme cela résulte du théorème précédent [que nous appliquons d'abord à $\sigma_x(x)$ et ensuite à $\sigma_{x^2}(x)$].

Si elle est triple, les racines correspondantes de $\bar{\sigma}_{xy}(y^2)$, qui sont en même temps des racines de $\bar{\sigma}_{\lambda xy}(y^2)$, sont données par les équations de Liouville du troisième degré. A l'aide des formules (14), nous trouverons toutes les racines de $\sigma(z)$ appartenant à $\sigma_\lambda(z)$.

Si cette racine, qui est égale à θ, est d'un degré de multiplicité $u > 3$ pour $\sigma_{x^2}(x)$, en se servant de la transformation,

$$z = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{15}$$

(α, β, γ, δ sont des nombres réels, commensurables, mais quelconques); on peut la remplacer par une autre dont le degré de multiplicité soit 3. En effet, on trouve les racines du polynome transformé $\sigma\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$ par la formule (15) qui, étant résolue par rapport à ω, donne

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

(où a, b, c, d ont des valeurs commensurables qu'on peut facilement calculer).

Les racines z_u, z_π, z_τ, z_ν de $\sigma(z)$, dont la somme est 4θ, se transforment en ω_u, ω_π, ω_τ, ω_ν dont la somme est $4r$. On a alors

$$\frac{az_u + b}{cz_u + d} + \frac{az_\pi + b}{cz_\pi + d} + \frac{az_\tau + b}{cz_\tau + d} + \frac{az_\nu + b}{cz_\nu + d} = 4r. \tag{16}$$

Le premier membre du (16) est une fonction symétrique des racines z_u, z_π, z_τ, z_ν. Si

$$M(x) = z^4 - 4\theta z^3 + A z^2 + B z + \Gamma$$

est le polynome admettant ces racines, on peut écrire la formule (16) :

$$\frac{F(a, b, c, d, 4\theta, A, B, \Gamma)}{\Phi(a, b, c, d, 4\theta, A, B, \Gamma)} = 4r.$$

S'il y a un autre groupe de quatre racines de $\sigma(z)$ [dont une au moins soit différente (1) de celles que nous avons déjà considérées]

(1) S'il n'y avait aucune racine qui soit différente de racines que nous avons considérées, $\sigma(z)$ aurait des racines multiples; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

qui donnent la même somme, et d'autre part si, par la transformation faite, les valeurs correspondantes de ω donnent pour somme $4r$, on aboutit à la formule

$$(17) \qquad \frac{F_1(a, b, c, d, 4\theta, A, B, \Gamma)}{\Phi_1(a, b, c, d, 4\theta, A, B, \Gamma)} = 4r.$$

En comparant les formules (16) et (17), on voit que les rapports de a, b, c, d à l'un d'eux doivent satisfaire à la relation fixe

$$(18) \qquad \frac{F}{\Phi} = \frac{F_1}{\Phi_1}.$$

Par conséquent, pour les nombres a, b, c, d qui ne satisfont pas à (18) (qui sont en nombre infini), la transformation (15) donnera des racines dont la somme pour chaque groupe de quatre d'entre elles sera différente. On remarque de plus que cette somme sera nécessairement commensurable, si elle provient d'un groupe de quatre racines appartenant à un facteur rationnel de $\sigma(z)$. On retombe donc sur le cas γ'.

Remarque A'. — Soient θ une racine, λ et u ses degrés de multiplicité pour $\bar{\sigma}_{\lambda x^2}(x)$ et $\bar{\sigma}_{ux^2}(x)$, et η pour $\Sigma_{x^2}(x)$. Les racines correspondantes de $\bar{\sigma}_{\lambda xy}(y^2)$, $\bar{\sigma}_{uxy}(y^2)$ et $\Sigma_{xy}(y^2)$ seront fournies par les équations de Liouville

$$\mathfrak{L}_\lambda(y^2) = 0, \qquad \mathfrak{L}_u(y^2) = 0, \qquad \mathfrak{L}_\eta(y^2) = 0$$

de degrés λ, u et η. D'autre part, les racines de ces équations doivent être fournies par une équation de Liouville $\mathfrak{L}(y^2) = 0$, de degré $u + \lambda + \eta$, qui relie les résolvantes $\bar{\sigma}_{x^2}(x)$ et $\bar{\sigma}_{xy}(y^2)$. On aura, par conséquent,

$$\mathfrak{L}(y^2) = \mathfrak{L}_\lambda(y^2)\,\mathfrak{L}_u(y^2)\,\mathfrak{L}_\eta(y^2).$$

On voit donc que si $\lambda \leqq 3$, $u \leqq 3$ et $\eta > 3$, au lieu de faire la transformation ci-dessus, on peut entreprendre la résolution de $\mathfrak{L}(y^2) = 0$, conformément à la méthode dont on vient de parler, et calculer ainsi les racines utiles de $\mathfrak{L}_\lambda(y^2)$ et $\mathfrak{L}_u(y^2)$.

Remarque B'. — Après avoir trouvé les racines commensurables d'un polynome $\sigma(z)$ et les racines de facteurs irréductibles du deuxième degré, pour trouver les racines des facteurs irréductibles du troisième degré, nous n'avons pas besoin de procéder comme ci-dessus. Il suffit d'appliquer la méthode suivante qui peut nous fournir tout entier le facteur du troisième degré.

Supposons que $\sigma(z)$ soit privé des racines commensurables et des racines provenant de facteurs irréductibles du deuxième degré. Supposons qu'on ait

$$\sigma(x) = \sigma_1(x)\,\sigma_2(x)\ldots\sigma_\nu(x)\,\Sigma(x),$$

où $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, …, $\sigma_\nu(x)$ sont du troisième degré. La première résolvante du deuxième ordre de $(x-\beta)\sigma(z)$ (ou β commensurable arbitraire) doit avoir comme racine au moins triple le quart de la somme des quatre racines du facteur $(x-\beta)\bar{\sigma}_1(x)$. Soient θ cette racine et α la somme de trois racines de $\bar{\sigma}_1(x)$; on aura

$$\frac{\alpha+\beta}{4} = \theta, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad \alpha = 4\theta - \beta.$$

Si maintenant nous faisons la transformation

$$x = \frac{\alpha}{3}[1-(-2)] + (-2)\omega$$

(après le paragraphe 6, I), ce qui revient à $x = \alpha - 2\omega$, on obtient

$$\bar{\sigma}_{1x}(\omega) = \lambda\,\sigma_1(\alpha - 2\omega) \qquad \text{ou} \qquad \bar{\sigma}_{1x}(x) = \lambda\,\sigma_1(\alpha - 2x)$$

ou bien

$$\bar{\sigma}_{1x}\left(\frac{\alpha - x}{2}\right) = \lambda\,\sigma_1(x);$$

mais on a

$$\bar{\sigma}_x(x) = \bar{\sigma}_{1x}(x)\,\bar{\sigma}_{2x}(x)\ldots\bar{\sigma}_{\nu x}(x)\,\Sigma_1(x)$$

[où l'on sait bien quelles racines contient $\Sigma_1(x)$]. On peut donc écrire

$$\sigma_x\left(\frac{\alpha - x}{\cdot 2}\right) = \lambda\,\sigma_1(x)\,\sigma_{2x}\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)\cdots\sigma_{\nu x}\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)\Sigma_1\left(\frac{\alpha - x}{2}\right).$$

On voit de là que les polynomes $\sigma(x)$ et $\bar{\sigma}_x\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)$ doivent avoir $\bar{\sigma}_1(x)$ comme diviseur. Nous pouvons donc le calculer.

Il faut remarquer que si les racines de $\sigma_2(x)$ ont la même somme, il serait aussi commun diviseur entre les deux polynomes $\sigma(x)$ et $\sigma_x\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)$. Alors le degré de multiplicité de θ dépasserait 3. Mais dans ce cas nous pouvons, comme nous l'avons déjà vu, faire usage d'une transformation homographique (15) sur $\sigma(r)$. D'après cela, les $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, ..., $\sigma_\nu(x)$ auront des racines dont les sommes doivent être différentes. Supposons que cela ait lieu. Alors nous n'avons pas besoin de résolvante du deuxième ordre. En effet, sans connaître α, nous cherchons le plus grand commun diviseur entre $\sigma(x)$ et $\bar{\sigma}_x\left(\frac{\alpha - x}{2}\right)$ en exigeant que celui-ci soit du troisième degré. Nous allons ainsi obtenir différentes conditions sur les coefficients du reste qui sera un polynome du deuxième degré par rapport à x. Ces conditions qui doivent être compatibles déterminent des valeurs de α pour lesquelles correspondent des facteurs $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, ..., $\sigma_\nu(x)$. Entre les valeurs de α, il faut prendre les valeurs commensurables.