N. ARONSZAJN

Sur les décomposition des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1935

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1935__170__1_0>

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. N. ARONSZAJN

1RE THÈSE

SUR LES DECOMPOSITIONS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES
ET SUR LEURS APPLICATIONS

2E THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SOUTENUES LE 12 MARS 1935 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. G. JULIA PRÉSIDENT
M. FRÉCHET, G. VALIRON EXAMINATEURS

UPPSALA 1935
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

SUR LES DÉCOMPOSITIONS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES ET SUR LEURS APPLICATIONS.

PAR

N. ARONSZAJN

à PARIS.

Table des matières.

Préface.

Le problème de la décomposition d'une fonction en parties plus simples a été étudié depuis les premières recherches de la théorie des fonctions analytiques. Les cas élémentaires comme p. ex. la décomposition d'une fraction rationnelle en somme de fractions simples, ou bien la décomposition d'un polynôme en produit de binômes, sont connus déjà depuis quelques siècles. On étudiait également depuis longtemps des décompositions des fonctions transcendantes particulières (p. ex. les fonctions trigonométriques).

Mais, probablement, les premières classes assez générales des décompositions datent depuis la fondation de la théorie des fonctions holomorphes par

Cauchy. Sans vouloir faire ici une étude historique de ces questions, nous mentionnerons seulement les décompositions en séries de fractions simples trouvées par Cauchy pour une classe assez étendue de fonctions méromorphes[1] ainsi que les décompositions en produits de binômes élémentaires, établies par Laguerre pour une classe de fonctions entières (les fonctions de genre 0).[2]

Mais les premières recherches vraiment générales dans cette direction proviennent sans doute de l'école de Weierstrass. Il s'agit ici des décompositions de Weierstrass présentant une fonction entière (ou méromorphe) sous forme d'un produit de facteurs primaires et surtout des décompositions de Mittag-Leffler.

Les recherches de Mittag-Leffler se rattachant à ce sujet ont abouti à deux résultats: premièrement, qu'il existe une fonction analytique uniforme ayant des points singuliers isolés choisis arbitrairement d'avance, et présentant en ces points des parties principales choisies également d'avance d'une manière quelconque. Le deuxième résultat, qui s'obtient d'ailleurs immédiatement du précédent peut s'énoncer ainsi: *une fonction analytique uniforme $f(z)$ peut être toujours représentée comme somme de deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ dont une n'est singulière qu'aux points singuliers isolés de $f(z)$ et à leurs points limites, tandis que la seconde n'est singulière qu'aux points singuliers non-isolés de $f(z)$.*

Cette décomposition de Mittag-Leffler forme le premier exemple d'une décomposition d'une fonction analytique uniforme générale en somme de deux fonctions aux ensembles de points singuliers plus simples que celui de la fonction primitive.

Depuis la publication de ces résultats de Mittag-Leffler il y a eu beaucoup de travaux concernant les décompositions en somme ou en produit,[3] mais il semble bien que nulle part, avant le mémoire de M. M. Fréchet dans Acta math., t. 54, on n'ait repris l'idée de la décomposition d'une fonction $f(z)$ en deux fonctions aux ensembles de singularités plus simples que celui de $f(z)$.

Avant de parler de ce mémoire remarquons qu'il faut d'abord préciser dans quel sens un ensemble doit être considéré comme plus simple qu'un autre. Il est évident qu'il s'agit ici d'une convention à peu près arbitraire et que pour

[1] Pour les détails comp. E. Picard, Traité d'analyse, t. II, p. 160.

[2] Il y a lieu à noter ici encore des décompositions importantes mais d'un genre spécial obtenues par différents mathématiciens, p. ex. les décompositions des fonctions fuchsiennes en fonction zethafuchsiennes trouvées par Poincaré. A ce sujet comp. P. Appell, Sur la décomp. d'une fonc. mérom. en éléments simples, Mémorial Sc. Math., t. XXXVI.

[3] Comp. p. ex. E. Picard, Comptes Rendus, t. 92, 1881.

chaque décomposition d'un ensemble F en deux ensembles plus petits on pourrait choisir cette convention de manière que les deux parties puissent être considérées comme plus simples que F.

M. Fréchet considère dans une décomposition d'un ensemble fermé *arbitraire* F en deux ensembles fermés F_1 et F_2, ces derniers comme plus simples que F, s'ils appartiennent à des classes d'ensembles fixées d'avance, aucune de ces classes ne renfermant la totalité des ensembles fermés. Bien entendu, quand F appartient déjà à une de ces classes il n'y a pas lieu à le décomposer.

Dans cet ordre d'idées, M. Fréchet a démontré qu'en prenant pour F_1 l'ensemble des points isolés de F avec leurs points limites (c'est donc un ensemble qui est égal à la fermeture de l'ensemble de ses propres points isolés) et pour F_2 *le noyau parfait de l'ensemble* F (c'est le plus grand ensemble parfait compris dans F), on peut toujours décomposer une fonction $f(z)$ avec l'ensemble de points singuliers égal à F en somme de deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ayant pour ensembles de singularités respectivement F_1 ou F_2. De la sorte, f_1 et f_2 appartiennent effectivement à deux classes de fonctions moins générales que celle de fonctions analytiques uniformes.

M. Fréchet a obtenu des théorèmes analogues encore pour d'autres décompositions de l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique uniforme (comp. le § 1 de la II^me partie de notre mémoire).

Les recherches de M. Fréchet m'ont amené à me poser la question, si l'on ne pourrait pas obtenir une décomposition de la fonction $f(z)$ correspondant à une décomposition quelconque de l'ensemble des singularités de $f(z)$ (bien entendu les deux parties de cet ensemble doivent être fermées).

Ceci correspond à la recherche des décompositions de la fonction $f(z)$ en deux fonctions avec des ensembles de singularités plus simples que celui de $f(z)$, la »simplicité» d'ensembles étant définie de manière quelconque.

La réponse à la question ci-dessus est affirmative ce qui est établi dans le théorème fondamental **A** (comp. § 2, I^re partie).[1]

Pour obtenir ce théorème dans sa forme la plus forte et la plus générale, on est obligé de considérer des fonctions que j'appelle holomorphes et uniformes (comp. § 1, I^re partie), et qui sont localement analytiques, mais peuvent former différentes fonctions analytiques dans les différentes regions de leur ensem-

[1] Des cas particuliers de ce théoreme ont été démontré par M. Fréchet, notamment les cas où F_1 et F_2 sont isolés et celui où l'un des ensembles F_1, F_2 est une somme d'une suite dénombrable d'ensembles isolés et l'autre est égal a la fermeture du reste de l'ensemble F.

ble d'existence (où elles sont définies) — qui est supposé ouvert et partout dense dans le plan.

On voit facilement l'opportunité et l'utilité de l'introduction de telles fonctions dans nos recherches. En effet, nous sommes obligés d'opérer constamment avec des sommes de fonctions n'ayant pas les mêmes points singuliers. Il est donc tout naturel d'exiger que cette somme existe pour deux fonctions quelconques de la classe étudié. Mais: 1° si l'on admettait des fonctions à espaces lacunaires (où elles ne sont pas définies), on pourrait trouver deux fonctions dont chacune aurait pour ensemble d'existence l'ensemble lacunaire de l'autre, et leur somme n'aurait aucun sens; 2° il y a des fonctions analytiques uniformes dont la somme est égale, dans les différentes parties du plan, à différentes fonctions analytiques.

Ce dernier cas se trouve réalisé dans l'exemple II du § 4, I^re^ partie. Le premier exemple de ce genre a été trouvé par Poincaré[1] qui a obtenu en même temps la décomposition du théorème **A** dans le cas particulier où l'ensemble F est formé par l'axe réel, $F_1 =$ le segment rectiligne $[-1;\ +1]$ et F_2 est formé par deux demi-droites: $[-\infty;\ -1]$ et $[+1;\ +\infty]$.

Les résultats de ce mémoire ont été énoncés en partie dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.[2]

Le mémoire se divise en deux parties. Dans la première, on établit les théorèmes fondamentaux, tandis que dans la seconde se trouvent les applications des théorèmes de la première.

Le premier paragraphe de la I^re^ partie est consacré à la définition précise de la classe des fonctions holomorphes et uniformes (à notre sens) et aux propriétés de celles-ci.

Dans le § 2 nous démontrons le théorème **A** dans toute sa généralité et, dans un complément, nous donnons des méthodes pour le calcul effectif des décompositions dont l'existence est établie par le théorème **A**.

Ces méthodes effectives exigeant, dans certains cas, l'emploi des fonctions auxiliaires aux propriétés spéciales, nous établissons, dans le § 3, l'existence de ces fonctions dans des cas assez généraux. Pour ceci, nous démontrons le théorème **B** qui peut être considéré comme une généralisation du théorème bien connu

[1] Am. Journ. of Math., t. 14, 1892.

[2] Comp. N. Aronszajn, Comp. Rend. 194, p. 155, 196, p. 521, 196, p. 672.

de Runge sur l'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles, en dehors d'un ensemble ouvert contenant toutes ses singularités.

Dans le § 4 nous obtenons dans divers cas les décompositions d'une fonction correspondant à une décomposition de son ensemble de singularités. Nous appliquons à cet effet les méthodes effectives du § 2. Dans certains cas (comme p. ex. pour les fractions de Borel, ou pour les fonctions de Denjoy continues dans tout le plan), où la décomposition est facile à obtenir directement, nous montrons que par l'application convenable de nos méthodes on peut obtenir la même décomposition.

La seconde partie renferme les applications des théorèmes **A** et **B**. Pour ne pas augmenter encore plus le volume de ce mémoire nous avons dû laisser de coté certaines de ces applications.[1]

Dans le § 1 de cette partie nous considérons les décompositions de Fréchet et des décompositions analogues. Nous obtenons les résultats de M. Fréchet à l'aide du théor. **A** et montrons, comment le problème général posé par M. Fréchet, en vertu du même théorème, se réduit à un problème de la théorie des ensembles.

Dans le § 2 nous généralisons la notion de partie principale d'un ensemble isolé, notion que M. Fréchet avait lui-même obtenu comme généralisation de la notion classique. Nous obtenons pour ces parties principales généralisées des théorèmes généralisant les théorèmes de Mittag-Leffler sur le développement d'une fonction en série de ses parties principales.

Le § 3 est consacré aux décompositions en produits. A cet effet, il est nécessaire de compter parmi les singularités de la fonction $f(z)$ les zéros de celle-ci. On obtient ainsi un ensemble Φ de »singularités» de $f(z)$ (que nous appelons les points non-ordinaires). Pour une décomposition $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ on cherche une décomposition correspondante en produit $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$, f_1 et f_2 ayant pour ensembles des »singularités» Φ_1 et Φ_2. Il se montre qu'en général ceci est possible à obtenir. Les seuls cas exceptionnels ont lieu quand Φ_1 et Φ_2 sont disjoints et quand chacun des $\Phi_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2)$ présente pour $f(z)$ un caractère bien défini: d'un zéro ou d'un pôle (comp. le complément I au théorème III). Nous montrons à la fin du paragraphe, sur des exemples concrets, les différents cas qui peuvent se présenter.

[1] Il s'agit ici principalement de l'application aux fonctions analytiques multiformes dont certains résultats ont été énoncés (dans une forme assez imprécise d'ailleurs) dans la note des Comp. Rend. 196, p. 672. L'exposé précis de ces résultats (qui paraîtra ailleurs) nécessite tout un paragraphe préliminaire sur les singularités des fonctions analytiques multiformes.

Le § 4 est occupé par les fonctions entières. Il se divise en deux parties. Dans la première nous considérons des opérations linéaires transformant une fonction entière en une fonction présentant des points singuliers à distance finie. Comme on sait, il y a des relations entre la position de ces points singuliers et la vitesse de la croissance de la fonction entière dans diverses directions. A l'aide du théor. **A** et des décompositions qui en découlent pour la fonction entière, on parvient à préciser et compléter ces relations. Cette idée est d'abord appliquée aux opérations générales dont la théorie, présentée d'une manière très succincte et sans démonstrations, est exposée au commencement de cette partie du § 4. Après les opérations générales, nous étudions plus en détail l'opération correspondant au procédé de sommation de Borel.

La deuxième partie du § 4 est consacrée à l'application du théor. **B** aux fonctions entières. Nous y définissons les différentes allures d'une fonction entière dans un domaine s'étendant jusqu'à l'infini, ou bien sur un chemin allant vers l'infini. Ensuite nous définissons la notion d'une partie principale d'une fonction entière, correspondant à un domaine (à un certain voisinage de sa frontière près) et, à l'aide du théor. **B**, établissons l'existence d'une telle partie principale. Nous passons ensuite aux domaines et chemins particuliers, notamment aux angles et aux demi-droites, nous introduisons les directions singulières d'une fonction entière. En considérant ces dernières directions comme analogues aux points singuliers d'une fonction non entière, nous arrivons à un théorème pour les fonctions entières analogue au théor. **A** mais moins précis. Nous obtenons dans certains cas un énoncé tout à fait analogue au théor. **A** en employant une méthode effective du calcul d'une partie principale précise (c. à d. sans voisinage exceptionnel de la frontière du domaine correspondant). Par cette méthode effective, on peut obtenir les fonctions $E_\alpha(z)$ de Mittag-Leffler comme parties principales des fonctions $\frac{1}{\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$ (elle se confond d'ailleurs ici avec une des méthodes employées par Mittag-Leffler).

Le dernier paragraphe a un caractère différent des précédents. Nous y cherchons à généraliser le théorème **A** aux classes de fonctions autres que la classe des fonctions holomorphes et uniformes. Probablement, on peut le généraliser pour une grande catégorie de classes, pour les fonctions desquelles on peut définir convenablement la notion des points réguliers et de points singuliers. Nous nous contentons d'obtenir le théorème en question pour les fonctions p-

harmoniques de n variables réelles et pour les fonctions harmoniques d'ordre infini qui englobent toutes les fonctions p-harmoniques. Le § s'achève sur quelques propriétés des fonctions harmoniques d'ordre infini.

Dans deux notes à la fin du mémoire, nous étudions quelques questions se rattachant aux considérations de notre mémoire.

La note I a pour objet la recherche de l'allure des fonctions provenant de la décomposition d'une fonction $f(z)$ correspondant à une décomposition $F = F_1 + F_2$ de son ensemble singulier F. Nous ne considérons que le cas où F_1 et F_2 n'ont qu'un seul point a en commun et où on peut appliquer la plus simple des méthodes effectives. On trouve que l'allure de $f(z)$ détermine dans une certaine mesure celle des deux composantes de $f(z)$. Les mêmes méthodes permettent de calculer effectivement dans certains cas, les approximations dont l'existence est affirmée par le théor. **B**, et d'en étudier l'allure.

La note II est consacrée à la démonstration de l'existence d'un système spécial de coupures rendant uniforme le $\log f(z)$ (ou bien des fonctions multiformes plus générales) pour une fonction $f(z)$ holomorphe et uniforme (dans notre sens). Ce système de coupures est utilisé dans le § 3 de la II^{me} partie sans démonstration d'existence.

Avant d'achever cette préface, je voudrais exprimer tous mes remerciements à M. Maurice Fréchet, pour ses précieux conseils et l'intérêt qu'il a porté à mes recherches, ainsi qu'a M. Georges Valiron à qui je dois plusieurs renseignements dont j'ai profité au cours de mon travail.

I^{re} Partie.

Théorèmes généraux.

§ 1. Préliminaires.

Avant de s'occuper des théorèmes généraux faisant l'objet de la partie présente de notre mémoire, nous allons préciser certaines notions dont nous ferons un usage constant.

On voit aisément que si l'on veut considérer en général les sommes de fonctions n'ayant pas les mêmes points singuliers, on est obligé d'admettre des fonctions qui, dans différentes régions du plan coincident avec des fonctions analytiques différentes. P. ex., on verra dans le § 4 de cette partie (exemple II) qu'on peut construire deux fonctions analytiques uniformes telles que l'une ait pour points singuliers tous les points d'un arc d'une circonférence, l'autre — tous les points de l'arc restant de cette circonférence, et qu'en outre, leur somme coïncide à l'intérieur et à l'extérieur de la circonférence avec deux fonctions analytiques arbitraires, une régulière à l'intérieur, l'autre — à l'extérieur de la circonférence.

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes: *la fonction f sera appelée holomorphe et uniforme dans un ensemble ouvert G*, non nécessairement connexe ou borné, si: 1° la fonction f prend une seule valeur en chaque point de G, et 2° $f(z)$ est holomorphe en chaque point z_0 de G (c. à d. $f(z)$ est développable en une série de Taylor dans un petit cercle ayant z_0 pour centre).[1]

G sera le domaine[2] *d'holomorphie et d'uniformité — domaine h. u. — de $f(z)$*, s'il n'existe aucune fonction $f_1(z)$ holomorphe et uniforme dans un ensemble ouvert G_1 plus grand que G, et coïncidant dans G avec $f(z)$.

Si G est le domaine h. u. de $f(z)$, l'ensemble complémentaire de G par rapport au plan P_z de la variable complexe z, $F = P_z - G$, est appelé *l'ensemble singulier de $f(z)$*.

Comme exemple d'une fonction holomorphe et uniforme dans notre sens prenons $f(z) = 0$ pour $|z| < 1$ et $f(z) = 1$ pour $|z| > 1$. Le domaine h. u. de cette fonction sera l'intérieur et l'extérieur du cercle unité, son ensemble singulier, c'est la circonférence $|z| = 1$.

Si une fonction est définie, holomorphe et uniforme dans un ensemble ouvert G qui n'est pas son domaine h. u., on peut étendre (au moins d'une manière) cette fonction sur un ensemble ouvert G' plus grand que G et qui formera pour la fonction étendue le domaine h. u.

En effet, s'il y a des points extérieures à l'ensemble G et à sa frontière, on peut poser pour eux $f(z) = \varphi(z)$, où $\varphi(z)$ est une fonction quelconque régulière à l'extérieur de G. Ainsi on étend $f(z)$ sur un ensemble ouvert partout dense dans le plan P_z. Si maintenant $f(z)$ est définie dans un ensemble ouvert

[1] Ces fonctions sont donc localement analytiques. Signalons que recemment, M. L. Fantappie (dans Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., t. 43, 1933) a été amené, par des considérations tout à fait différentes, à considérer des fonctions du même genre.

[2] Nous donnons ici, *à titre exceptionnel*, le nom de domaine à un ensemble ouvert qui peut ne pas être connexe. Dans tous les autres cas nous appellerons domaine un ensemble ouvert et *connexe*.

G_1 partout dense et si celui-ci n'est pas son domaine h. u., il y aura des points frontières de G_1 dans l'entourage desquels (ces points y compris) $f(z)$ pourra être étendue. Prenons donc pour chaque point frontière de G_1 le cercle ouvert (s'il en existe) le plus grand dans lequel $f(z)$, partout où elle y est définie, prend les valeurs d'une même fonction analytique régulière dans ce cercle. On étendra $f(z)$ sur tous ces cercles en la définissant dans chacun d'eux comme égale à la fonction analytique régulière correspondante. On vérifie facilement qu'ainsi on obtient une extension de $f(z)$, holomorphe et uniforme dans G_1 augmenté de tous les cercles considérés et que cet ensemble augmenté est le domaine h. u. de la fonction étendue.

Dans la suite nous nous occuperons presque exclusivement des fonctions étendues jusqu'à ce qu'elles possèdent un domaine h. u. Nous appellerons de telles fonctions — *holomorphes et uniformes* (en abrégé — hol. et unif.) ou *uniformes* tout court, sans plus préciser.

Remarque I: De la démonstration précédente résulte la structure suivante d'une fonction $f(z)$ holomorphe et uniforme dans notre sens: son ensemble singulier F est fermé et non-dense (d'ailleurs quelconque) dans le plan P_z. Il y détermine une ou plusieurs régions connexes — les composants du domaine h. u. de $f(z)$. Dans chacune de ces régions $f(z)$ est égale à une fonction analytique régulière dans cette région.

Remarque II: La remarque précédente nous montre que si l'on connait l'ensemble singulier F d'une fonction $f(z)$, celle-ci sera parfaitement déterminée si l'on donne un élément de $f(z)$[1] dans chacune des régions déterminées par F.

Mais si l'ensemble singulier de $f(z)$ n'est pas connu, il faudra nécessairement donner les valeurs de $f(z)$ dans un ensemble partout dense dans le plan P_z pour déterminer $f(z)$.

D'autre part, on vérifie facilement qu'il y a au plus une seule fonction hol. et unif. prenant des valeurs données dans un ensemble partout dense.

Ainsi, si la fonction $f(z)$ est hol. et unif. dans un ensemble ouvert G partout dense, elle peut être étendue d'une manière unique pour former une fonction hol. et unif. dans notre sens (c. à d. possédant un domaine h. u. et un ensemble singulier). Cette extension s'obtient par prolongement analytique de cer-

[1] C. à d. son développement de Taylor dans un cercle ou, ce qui revient au même, ses valeurs dans ce cercle.

tains éléments (bien déterminés) de la fonction $f(z)$ sur une partie de la frontière de G.

Remarque III: On peut obtenir d'une fonction analytique multiforme (sans coupure essentielle), une fonction hol. et unif. dans notre sens par un système de coupures dans le plan de la variable indépendante. On obtient ainsi une branche de cette fonction multiforme. Le système de coupures (à condition qu'il soit irréductible) appartiendra à l'ensemble singulier de cette branche.

En changeant le système de coupures, on obtiendra une nouvelle branche. P. ex. pour la fonction $\log z$, on peut prendre comme coupure la demi-droite $\arg z = \frac{\pi}{2}$ ou bien $\arg z = -\frac{\pi}{2}\cdot$ La différence des deux branches obtenues (en partant de la même valeur initiale $\log 1 = 0$) sera égale à 0 pour $\Re(z) > 0$ et à $2\pi i$ pour $\Re(z) < 0$ et elle aura pour ensemble singulier l'axe imaginaire.

Remarque IV: On démontre facilement que si $u(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est analytique et régulière pour toute valeur finie de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et si $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont des fonctions hol. et unif. avec des ensembles singuliers $F_1, \ldots, F_n$, la fonction $u(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ sera hol. et unif. avec un ensemble singulier compris dans $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

Cette fonction est définie d'abord seulement en dehors de l'ensemble $\Sigma F_\varkappa$, mais chaque $F_\varkappa$ étant non-dense, leur somme l'est également. Par conséquent on peut prolonger cette fonction d'une manière unique jusqu'à ce qu'elle devienne une fonction hol. et unif. dont l'ensemble singulier sera compris dans $\Sigma F_\varkappa$. Nous désignerons cette fonction étendue également par $u(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Ainsi $\Sigma f_\varkappa(z), \Pi f_\varkappa(z)$ etc. sont des fonctions hol. et unif. dans notre sens.

D'autre part, si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont hol. et unif. la fonction composée $\varphi(f(z))$ le sera également avec un ensemble singulier compris dans la somme de l'ensemble singulier de $f(z)$ et de l'ensemble de tous les points z' tels que $f(z')$ appartient à l'ensemble singulier de $\varphi(z)$.

Remarque V: La notion habituelle de la convergence uniforme d'une suite de fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ à l'intérieur d'un domaine D peut être utilement généralisée dans le cas des fonctions hol. et unif. Dans ce cas, on dira que les $f_n(z)$ convergent uniformément à l'intérieur de D[1], si pour chaque ensemble fermé D_1 intérieur à D, les fonctions f_n sont holomorphes et uniformes

[1] D peut être ici un ensemble ouvert quelconque.

sur D_1 *à partir d'un certain rang,* et à partir de ce rang forment une suite uniformément convergente sur D_1 dans le sens habituel du mot.

Il est facile de voir que les fonctions $f_n(z)$ déterminent alors à l'intérieur de D une fonction limite qui sera hol. et unif. dans D.

Remarque VI: On généralise aisément les théorèmes fondamentaux de Cauchy au cas de nos fonctions hol. et unif. Notons seulement la généralisation suivante:

Soit G un ensemble ouvert (borné ou non) compris dans le domaine h. u. de $f(z)$ et dont tous les composants ont des frontières $F_1, F_2, \ldots$ rectifiables comprises également dans le domaine h. u. de $f(z)$. Dans ces conditions la somme des intégrales de Cauchy

$$I = \sum \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{F_\varkappa} \frac{f(z)}{z - x} dz$$

prises le long de toutes les $F_\varkappa$ (dans le sens positif par rapport au composant correspondant), est égale à $f(x)$ ou à o suivant que x se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de G. Dans le cas où le point à l'infini se trouve à l'intérieur de G il faut ajouter à I la valeur $f(\infty)$ pour avoir respectivement $f(x)$ ou o.

Nous emploierons dans la suite les notations usuelles de la théorie des ensembles et des espaces abstraits; ainsi pour les ensembles A et B, $A + B$ (somme) désigne l'ensemble de tous les points appartenant à A ou à B, $A - B$ (différence) est l'ensemble des points appartenant à A sans appartenir à B, $A \cdot B$ (produit) est l'ensemble de tous les points communs à A et B, $A < B$ signifie que B contient A, $\bar{A}$ (fermeture de A) désigne A complété par tous ses points limites, etc. . .

§ 2. Le théorème fondamental A.

Enoncé du théorème.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème fondamental dans sa forme précise.

Théorème A: *Soit $f(z)$ une fonction hol. et unif. avec l'ensemble singulier F. Pour chaque décomposition*

$$F = F_1 + F_2 \tag{1}$$

de l'ensemble F en deux ensembles fermés (non nécessairement disjoints) il existe une décomposition

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \tag{2}$$

de la fonction $f(z)$ en deux fonctions hol. et unif. $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ayant respectivement F_1 et F_2 pour ensembles singuliers.[1]

Remarque I: Il est facile de voir (en s'appuyant sur la remarque IV du § 1) que pour une décomposition du genre (2) n'introduisant aucun nouveau point singulier, la relation (1) est toujours satisfaite.

Remarque II: Notons encore que la décomposition (2) est parfaitement déterminée à une fonction additive ψ près qui n'a des singularités que dans $F_1 \cdot F_2$. En effet, s'il y a deux décompositions $f = f_1 + f_2$ et $f = g_1 + g_2$ pour une décomposition (1), on verra immédiatement que la fonction $\psi = g_1 - f_1 = -(g_2 - f_2)$, en vertu de ces équations, est holomorphe et uniforme en dehors de $F_1 \cdot F_2$.

Dans le cas des F_1 et F_2 disjoints ($F_1 \cdot F_2 = 0$), il en résulte le fait connu[2] que f_1 et f_2 sont déterminées à une constante près.

Considérations auxiliaires, lemme.

Avant de passer à la démonstration du théorème **A** nous ajouterons ici quelques considérations dont nous aurons besoin.

Soit L une somme d'un nombre fini d'arcs ou de courbes simples fermées disjoints deux à deux, rectifiables et tous compris dans le domaine h. u. d'une fonction uniforme $f(z)$.

Considérons l'integrale

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)}{z - x} dz \tag{3}$$

prise suivant tous les arcs et les courbes simples fermées de L. Il est évident qu'elle forme une fonction holomorphe et uniforme de x en dehors de L.

Supposons maintenant que L fait partie de la frontière $\bar{G} - G$ d'un ensemble ouvert G. Cette frontière — que nous désignerons par $\mathfrak{F}(G)$ — sera supposée composée d'un nombre fini de courbes simples fermées, disjointes deux à deux.

[1] Dans le cas où F_1 est la fermeture $\bar{E}$ d'une somme E d'ensembles isolés dans F (c. à. d. fermés ainsi que leurs compléments dans F) et $F_2 = F - E$, ce théorème a déjà été démontré par M. Fréchet dans le mémoire cité, Acta math., 54, p. 54.

[2] Comp. M. Fréchet, l. c., p. 45.

Soit F l'ensemble singulier de $f(z)$. L'ensemble L étant dans le domaine h. u. de $f(z)$, il n'a aucun point commun avec F. Donc, tous les points singuliers de $f(z)$ situés sur la frontière de G (s'il y en a), sont compris dans l'ensemble

$$M = \mathfrak{F}(G) - L. \tag{4}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme suivant:

Lemme: *La fonction $\psi(x)$ égale à $I(x)$ (où l'integrale est prise sur chaque arc ou courbe de L dans le sens négatif par rapport à G) pour x extérieur à G et égale à $f(x) + I(x)$ pour x dans $G - F$, forme une fonction hol. et unif. en dehors de l'ensemble $F \cdot G + M$. En outre la fonction $\psi(x)$ présente dans G les mêmes singularités que $f(x)$, c, à. d. que la différence $\psi(x) - f(x)$ forme une fonction holomorphe et uniforme dans G.*

Pour la démonstration, remarquons d'abord que $I(x)$, qui est holomorphe en dehors de L, est prolongeable analytiquement de l'extérieur de G à travers les arcs de L dans un certain voisinage de chaque point non extrême[1] de L. On obtient ainsi (comme il sera précisé plus loin) une nouvelle détermination $I_1(x)$ pour des points x appartenant à ces voisinages et situés dans G:

$$I_1(x) = I(x) + f(x). \tag{5}$$

Dès lors, on voit que les valeurs de la fonction $\psi(x)$ du lemme, définie d'abord à l'intérieur et à l'extérieur de G, coïncident dans un certain voisinage de chaque point non extrême de L avec une fonction holomorphe et uniforme dans ce voisinage, notamment avec le prolongement $I_1(x)$ de $I(x)$. Ainsi, les points non extrèmes de L appartiendront au domaine h. u. de $\psi(x)$ (étendue de manière à être une fonction hol. et. unif., comp. remarque II du § 1). Par conséquent, l'ensemble singulier de $\psi(x)$ ne contiendra aucun point à l'extérieur de G (où $\psi(x) = I(x)$), sur la frontière de G n'aura que des points de l'ensemble $M = \mathfrak{F}(G) - L$ et ses points limites (c. à. d. les extrémités des arcs de L) et enfin dans G (où $\psi(x) = I(x) + f(x)$) il ne possédera que les points de F qui s'y trouvent. Donc l'ensemble singulier de $\psi(x)$ est bien compris dans $\bar{M} + F\ G$ (même, en général, il lui est égal).

La deuxième partie du lemme s'obtient immédiatement de la définition de $\psi(x)$ dans G, car $\psi(x) - f(x) = I(x)$ y est holomorphe et uniforme.

[1] Nous appellerons ainsi un point de L qui n'est une extrémité d'aucun arc de L.

Il nous reste encore à démontrer la possibilité du prolongement de $I(x)$ à travers L et l'équation (5).

A cet effet, prenons pour chaque arc (ou courbe fermée) $L_\varkappa$ de L deux arcs $L'_\varkappa$ et $L''_\varkappa$ aux mêmes extrémités que $L_\varkappa$, rectifiables, compris dans le domaine h. u. de $f(x)$, l'un passant à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de G, et formant ensemble la frontière d'un domaine borné $D_\varkappa$ contenant tous les points non extrêmes de $L_\varkappa$ et ne contenant aucun point singulier de $f(x)$. Si $L_\varkappa$ est une courbe fermée, $L'_\varkappa$ et $L''_\varkappa$ seront également des courbes fermées rectifiables, passant dans le domaine h. u. de $f(x)$ l'une à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de G, et formant la frontière d'une couronne $D_\varkappa$ contenant $L_\varkappa$ et ne contenant aucun point singulier de $f(x)$.[1] Nous pouvons aussi supposer que tous les $L'_\varkappa$ et $L''_\varkappa$ sont deux à deux disjoints.

Les domaines $D_\varkappa$ forment un ensemble ouvert D qui est divisé par les arcs et courbes de L en deux parties D' et D'', l'une extérieure à G et l'autre dans G. La frontière de D' est formée par L et $L' = \Sigma L'_\varkappa$. D'après la formule de Cauchy,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int\limits_{L} \frac{f(z)}{z-x}\,dz\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + I(x) \tag{6}$$

pour x dans D' et, pour x dans D'',

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{L'} + \int\limits_{L}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z-x} + I(x). \tag{7}$$

D'après (6) on a pour x dans D'

$$I(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz. \tag{8}$$

Les deux termes du membre droit de (8) sont holomorphes dans D. Par conséquent $I(x)$ est prolongeable (à travers L) d'une manière holomorphe et uniforme dans tout l'ensemble D. La relation (8) reste valable pour tous les points de D, en particulier pour D'', où elle donne la valeur $I_1(x)$. Mais pour x dans D'' on a d'après (7)

[1] La possibilité de la construction des $L'_\varkappa$ et $L''_\varkappa$ suffit pour la valabilité de nos considérations. Même pour les ensembles G possédant des frontieres beaucoup plus compliquées que celles envisagées dans le texte nos considérations restent valables pourvu que les $L'_\varkappa$ et $L''_\varkappa$ existent.

$$I(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

et en appliquant ceci dans la relation (8) (où on aura préalablement remplacé $I(x)$ par $I_1(x)$) on obtient

$$I_1(x) = f(x) + I(x), \quad \text{c. q. f. d}$$

Nous pouvons maintenant passer à la

Démonstration du théorème A.

La marche de la démonstration sera la suivante: à l'aide du lemme précédent nous construirons une suite de fonctions $\psi_n(z)$ dont les ensembles singuliers F'_n tout en contenant F_1 n'en différeront que par des ensembles compris dans des voisinages U_n de l'ensemble $F_1 \cdot F_2$, ces voisinages décroissant jusqu'à se rétrécir, pour $n \to \infty$, vers $F_1 \cdot F_2$. En outre chaque $\psi_n(z)$ présentera aux points de $F_1 - F_2$ les mêmes singularités que $f(z)$, c à d. que $\psi_n(z) - f(z)$, définie d'abord en dehors de $F + F'_n$, pourra être définie (étendue) aux points de $F_1 - F_2$ de manière à y être holomorphe.

Les $\psi_n(z)$ ne convergeront pas en général en dehors de F_1 (dans le sens généralisé, comp. la rem. V, § 1). Pour les rendre convergentes on prendra des termes correctifs $\tau_n(z)$ de manière que

$$(9) \qquad |\tau_n(z) - \psi_n(z) + \psi_{n+1}(z)| < \varepsilon_n \quad \text{pour } z \text{ extérieur à } U_n,$$

les ε_n formant une suite de nombres positifs avec

$$(10) \qquad \sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty.$$

L'ensemble singulier de la différence $\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) = (\psi_n - f) - (\psi_{n+1} - f)$ étant compris dans U_n on pourra même prendre $\tau_n(z)$ rationnel ayant pour pôles des points de $F_1 \cdot F_2$.

Ceci prouvera que les ensembles singuliers des fonctions $\varphi_n(z)$ définies comme suit

$$(11) \qquad \varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_n = \psi_1 + \sum_{\varkappa=1}^{n-1}(\psi_{\varkappa+1} - \psi_\varkappa + \tau_\varkappa) = \psi_n + \sum_{\varkappa=1}^{n-1}\tau_\varkappa,$$

se rétrécissent pour $n \to \infty$ vers F_1 (ou bien vers un sousensemble de F_1 contenant $F_1 - F_2$). D'autre part de (9) et (10) résultera d'après (11) la convergence uniforme (au sens généralisé) des $\varphi_n(z)$, en dehors de F_1, vers une fonction $\varphi(z)$ ainsi que la convergence uniforme des $f(z) - \varphi_n(z)$, en dehors de F_2, vers $f(z) - - \varphi(z)$.[1] La fonction $\varphi(z)$ sera hol. et unif. avec un ensemble singulier compris dans F_1, et elle présentera aux points de $F_1 - F_2$ les mêmes singularités que $f(z)$. Pour définir enfin les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ (qui doivent avoir exactement les ensembles F_1 et F_2 pour ensembles singuliers) nous emploierons l'artifice suivant: nous choisirons arbitrairement une fonction $\sigma(z)$ parmi celles ayant exactement pour ensemble singulier l'ensemble $F_1 \cdot F_2$. Après quoi nous prendrons une constante α telle que les fontions

$$f_1 = \varphi + \alpha\sigma \quad \text{et} \quad f_2 = f - \varphi - \alpha\sigma$$

aient des ensembles singuliers égaux respectivement à F_1 et F_2.

Une telle valeur α existe. En effet pour tout α, vu les propriétés de φ et σ, les fonctions f_1 et f_2 ont des ensembles singuliers tels que l'un est compris dans F_1 et contient $F_1 - F_2$ tandis que l'autre est compris dans F et comprend $F_2 - F_1$. Il ne s'agit donc que des points de $F_1 \cdot F_2$. Si pour un α, la fonction $f_1 = \varphi + \alpha\sigma$ est holomorphe sur une partie de $F_1 \cdot F_2$, elle sera aussi holomorphe dans un cercle rationnel (de centre et rayon rationnels) renfermant des points de $F_1 \cdot F_2$. Mais, dans un tel cercle, f_1 peut être holomorphe pour au plus une valeur de α, car autrement $(\varphi + \alpha_1\sigma) - (\varphi + \alpha_2\sigma) = (\alpha_1 - \alpha_2)\sigma$ y serait aussi holomorphe, ce qui est contraire aux propriétés de $\sigma(z)$. Etant donné qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable des cercles rationnels, il n'y aura donc qu'une suite au plus dénombrable de valeurs de α pour lesquelles $f_1 = \varphi + \alpha\sigma$ est holomorphe sur une partie de $F_1 \cdot F_2$. De même, on démontre qu'il n'y a qu'un ensemble au plus dénombrable de α pour lesquels $f_2 = f - \varphi - \alpha\sigma$ est holomorphe sur une partie de $F_1 \cdot F_2$. Donc pour tous les α, à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable, f_1 et f_2 ont exactement F_1 et F_2 pour ensembles singuliers.

Passons maintenant aux détails de la démonstration.

On peut toujours supposer l'ensemble F borné, car autrement, par la transformation $z^0 = \frac{1}{z - a}$, où a est pris en dehors de F, on change F, F_1 et F_2 en

[1] Remarquons que de la convergence des φ_n vers φ en dehors de F_1, ne résulte en général que la convergence uniforme des $f - \varphi_n$ en dehors de $F_2 + F_1 = F$. Il faut donc démontrer que dans notre cas les fonctions $f - \varphi_n$ sont convergentes même sur $F_1 - F_2$.

F^0, F_1^0 et F_2^0 qui sont bornés. $f(z)$ devient $f^0(z^0) = f\left(a + \frac{1}{z^0}\right)$. Ensuite, la décomposition $f^0(z^0) = f_1^0(z^0) + f_2^0(z^0)$ obtenue, on posera $f_\varkappa(z) = f_\varkappa^0\left(\frac{1}{z-a}\right)$, $\varkappa = 1, 2$.

Ceci posé, nous allons régler d'abord un cas simple, quand les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints, donc $F_1 \cdot F_2 = 0$. Nous ne ferons dans ce cas que suivre la méthode employée par M. Fréchet dans un cas analogue.[1]

Entourons chaque point de F_1 d'un cercle ne contenant ni à l'intérieur ni sur sa circonférence aucun point de F_2. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, on trouvera un nombre fini de ces cercles (ouverts) couvrant tout l'ensemble F_1 (celui-ci étant fermé et borné). On peut évidemment les choisir de manière qu'il n'y ait aucune paire de ces cercles qui soient tangents (p. ex. en augmentant légèrement leurs rayons).

La somme de ces cercles ouverts (en nombre fini) forme un ensemble ouvert G contenant F_1. L'ensemble F_2 est totalement à l'extérieur de G. On voit immédiatement (vu les propriétés géométriques des cercles composant G) que la frontière $\mathfrak{F}(G)$ de G est formée d'un nombre fini de courbes simples fermées, disjointes et rectifiables. En outre, $\mathfrak{F}(G)$ ne contient aucun point ni de F_1 ni de F_2, donc elle passe entièrement dans le domaine h. u. de $f(z)$. En posant donc dans le lemme précédent $L = \mathfrak{F}(G)$, $M = 0$ et $F \cdot G = F_1$ nous en obtiendrons que la fonction $\psi(x)$ y définie a pour ensemble singulier $F_1 < G$, tandis que $f(x) - \psi(x)$ est singulière seulement aux points de F_2. On peut donc poser $f_1(x) = \psi(x)$ et $f_2(x) = f(x) - \psi(x)$.

Considérons maintenant le cas général, quand $F_1 \cdot F_2 \neq 0$. On peut évidemment supposer que $F_1 - F_2 \neq 0 \neq F_2 - F_1$.

Couvrons $F_1 \cdot F_2$ par un nombre fini $\varkappa_1$ de cercles ouverts $C(p_1^1)$, $C(p_2^1)$, ..., $C(p_{\varkappa_1}^1)$, non-tangents deux à deux, aux centres p_m^1 appartenant à $F_1 \cdot F_2$, et aux rayons < 1.

Ces cercles seront choisis assez petits pour que leurs somme U_1 ne renferme pas entièrement l'ensemble F_1. Les voisinages U_n de $F_1 \cdot F_2$ seront formés d'une manière analogue par un nombre fini $\varkappa_n$ des cercles ouverts $C(p_m^n)$ $m = 1, 2, \ldots, \varkappa_n$, non-tangents deux à deux, aux centres p_m^n pris dans $F_1 \cdot F_2$ et aux rayons $< \frac{1}{n}$.

[1] Comp. M. Fréchet, l. c., p. 43.

Les $C(p_m^n)$ devront être assez petits pour que $U_n = \sum_{m=1}^{\varkappa_n} C(p_m^n)$ soit compris avec sa frontière dans U_{n-1}. Pour chaque U_n nous définirons un voisinage V_n de F_1 de manière suivante. L'ensemble

$$F_2 - U_n < F_2 - F_1$$

étant fermé et disjoint de F_1, nous pouvons couvrir ce dernier par un nombre fini de cercles ouverts non-tangents deux à deux, et ne contenant ni dans leur intérieur, ni sur leur frontière aucun point de $F_2 - U_n$. La somme de ces cercles formera V_n. On a donc

$$(F_2 - U_n) \cdot V_n = 0. \tag{12}$$

On peut aussi choisir les cercles formant V_n de manière qu'ils ne soient tangents à aucun cercle $C(p_m^n)$, qu'ils ne se coupent mutuellement en aucun point appartenant à la frontière $\mathfrak{F}(U_n)$ et enfin que la frontière $\mathfrak{F}(V_n)$ ne soit pas entièrement comprise dans $\overline{U}_n$ (ceci est possible car déjà U_1 ne contient pas l'ensemble F_1 entier). On aura donc

$$\mathfrak{F}(V_n) - U_n \neq 0.$$

La frontière $\mathfrak{F}(V_n)$ se compose (vu la construction de V_n) d'un nombre fini de courbes simples fermées, rectifiables et disjointes deux à deux. On obtient ensuite que l'ensemble

$$L_n = \mathfrak{F}(V_n) - U_n$$

n'est pas vide et se décompose en un nombre fini de courbes fermées et d'arcs simples, les extrémités de ceux-ci étant sur $\mathfrak{F}(U_n) = \overline{U}_n - U_n$. En posant $M_n = \mathfrak{F}(V_n) - L_n$ on en obtient facilement

$$\overline{M}_n < \overline{U}_n, \text{ pour } n = 2, 3, \ldots. \tag{13}$$

En appliquant donc notre lemme pour $G = V_n$ et $L = L_n$ et en désignant $\psi_{n-1}(x)$ la fonction $\psi(x)$ y définie, on a pour l'ensemble singulier F'_{n-1} de $\psi_{n-1}(x)$

$$F'_{n-1} < F \cdot V_n + \overline{M}_n.$$

Mais d'après (12) $F \cdot V < V_n[F_1 + U_n + (F_2 - U_n)] < F_1 + U_n$ et d'après (13) $\overline{M}_n < \overline{U}_n$, donc

$$F'_{n-1} < F_1 + U_n + \overline{U}_n = F_1 + \overline{U}_n < F_1 + U_{n-1}. \tag{14}$$

D'autre part, la fonction $\psi_{n-1}(x)$ présentant dans V_n les mêmes singularités que $f(x)$, elle présente les mêmes singularités que $f(x)$ aux points de $F_1 < V_n$ et à plus forte raison aux points de $F_1 - F_2$. On obtient ainsi

$$F_1 < F'_{n-1}. \tag{15}$$

Toutes les propriétés annoncées de ψ_n et de U_n sont ainsi prouvées.

Considérons maintenant la différence $\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z)$. Son ensemble singulier est manifestement compris d'après (14), dans

$$F'_n + F'_{n+1} < F_1 + \overline{U}_{n+1}.$$

Mais d'autre part l'équation $\psi_n - \psi_{n+1} = (\psi_n - f) - (\psi_{n+1} - f)$, où chaque terme du membre droit est holomorphe sur F_1, montre que l'ensemble singulier de $\psi_n - \psi_{n+1}$ ne contient pas F_1. Par conséquent cet ensemble singulier est compris dans $\overline{U}_{n+1}$.

Dès lors on peut trouver les termes correctifs $\tau_n(z)$ par une méthode classique due à P. Appel.[1]

En effet, d'après la remarque VI du § 1 on a pour x à l'extérieur d'un ensemble U'_n, obtenu en augmentant légèrement les rayons des cercles $C(p_m^{n+1})$ de manière que leur somme $= U'_n$ satisfasse à $\overline{U}_{n+1} < U'_n < \overline{U}'_n < U_n$,

$$\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{F}(U'_n)} \frac{\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z)}{z - x}\, dz.$$

Ceci est vrai, étant donné que $\psi_n - \psi_{n+1}$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de U_{n+1} donc sur $\mathfrak{F}(U'_n)$ et que $\psi_n - \psi_{n+1}$ s'annule à l'infini (comp. la définition de $\psi(x)$ dans le lemme).

La frontière $\mathfrak{F}(U'_n)$ se décompose en $\varkappa_n$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{\varkappa_n}$, chacun de ceux-ci étant formé d'un nombre fini d'arcs appartenant à la circonférence du même cercle de centre p_m^{n+1}. Par conséquent

[1] D'ailleurs l'existence de $\tau_n(z)$ ressort directement du théoreme de Runge dans la forme que nous lui donnons dans le § suivant

$$(16) \qquad \psi_n(x) - \psi_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\varkappa_n} \int\limits_{A_m} \frac{\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z)}{z - x} dz = \sum_{m=1}^{\varkappa_n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\gamma_{m,\nu}}{(x - p_m^{n+1})^\nu},$$

où $\gamma_{m,\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_m} (\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z))(z - p_m^{n+1})^{\nu-1} dz$ et les séries du dernier membre convergent uniformément à l'extérieur et sur la frontière de $U_n > \overline{U}'_n$. Si l'on choisit donc les ε_n conformément à (10), on pourra trouver un nombre fini de termes de la série double de (16) de manière que le reste de cette série soit en valeur absolue $< \varepsilon_n$ pour x extérieur à U_n. En désignant la somme de ces termes choisis par $\tau_n(x)$ on obtient ainsi l'inégalité (9), et $\tau_n(x)$ est bien une fonction rationelle dont les pôles p_m^n, $m = 1, 2, \ldots, \varkappa_n$ sont tous compris dans $F_1 \cdot F_2$.

Considérons maintenant les ensembles singuliers des fonctions $\varphi_n(z)$ (définies par (11)) et des fonctions $f(z) - \varphi_n(z)$. Les premiers, d'après l'équation $\varphi_n = \psi_n + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \tau_\varkappa$, sont compris dans $F'_n + F_1 \cdot F_2 < F_1 + U_n$ (comp. (14)), tandis que les seconds, d'après $f - \varphi_n = (f - \psi_n) - \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \tau_\varkappa$, sont compris dans $[(F + F'_n) - F_1] + F_1 \cdot F_2 < F_2 + U_n$.[1]

Nous allons démontrer la convergence uniforme (au sens généralisé) des $\varphi_n(z)$ en dehors de F_1. Prenons donc un ensemble fermé D disjoint de F_1. D sera donc, à partir d'un indice n_0, disjoint de $F_1 + U_n$ (car U_n se rétrécit vers $F_1 \cdot F_2 < F_1$), et il sera en même temps compris dans le domaine h. u. de $\varphi_n(z)$. Les fonctions $\varphi_n(z)$ pour $n > n_0$ et z dans D pourront donc être représentées d'après (11) par

$$\varphi_n(z) = \varphi_{n_0}(z) + \sum_{\varkappa=n_0}^{n-1} (\varphi_{\varkappa+1}(z) - \varphi_\varkappa(z)) = \varphi_{n_0} + \sum_{\varkappa=n_0}^{n-1} (\tau_\varkappa - \psi_\varkappa + \psi_{\varkappa+1}),$$

d'où il résulte immédiatement, d'après (9) et (10), la convergence uniforme des $\varphi_n(z)$ sur D, c. q. f. d.

S'il s'agit maintenant de la convergence des différences $f - \varphi_n$ en dehors de F_2, on pourra procéder comme pour les φ_n. Ainsi, si D est fermé et disjoint de F_2, il sera pour $n \geq n_0$ (pour un certain n_0) disjoint de $F_2 + U_n$ et pour z dans D et $n > n_0$ on aura la représentation

[1] Car $f - \psi_n$ est holomorphe sur F_1, comp. plus haut p. 20 les propriétés de ψ_n.

$$f(z) - \varphi_n(z) = (f - \varphi_{n_0}) - \sum_{\varkappa=n_0}^{n-1} (\tau_\varkappa - \psi_\varkappa + \psi_{\varkappa+1}),$$

d'où résulte tout le reste.

La fonction $\varphi(z)$ = limite des $\varphi_n(z)$, possède ainsi toutes les propriétés annoncées plus haut. Notre démonstration est donc terminée.

Remarque III: Nous avons démontré le théorème **A** pour les fonctions satisfaisant à nos conditions du § I, c. à. d. les fonctions définies dans un ensemble formant leur domaine h. u. Mais, de ce théorème résulte immédiatement un théorème analogue pour les fonctions définies et holomorphes dans un ensemble ouvert qui n'est pas leur domaine h. u. On trouve notamment un théorème suivant:

Théorème A′: *Soit $f(z)$ une fonction définie, holomorphe et uniforme dans un ensemble ouvert G. A chaque décomposition de l'ensemble »singulier» $F = P_z - G$*

$$F = F_1 + F_2$$

en deux ensembles fermés F_1 et F_2 correspond au moins une décomposition

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

valable dans G, où $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions définies, holomorphes et uniformes respectivement en dehors de F_1 et F_2.

En effet, la fonction $f(z)$ peut être étendue jusqu'à ce qu'elle dévient une fonction conforme à nos conditions.

Son ensemble singulier devient alors un ensemble F' plus petit que F. La décomposition $F = F_1 + F_2$ implique une décomposition $F' = F'F_1 + F'F_2$. A celle-ci correspond une décomposition de la fonction $f(z)$ étendue. En ne considérant les fonctions composantes qu'en dehors des ensembles F_1 et F_2 respectivement, on voit immédiatement qu'elles peuvent être prises pour $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

Compléments au théorème A.

Complément I. *Partie principale d'une fonction et décomposition propre de son ensemble singulier.*

Il résulte immédiatement du théorème **A** que la fonction $f_1(z)$ présente les mêmes singularités aux points de $F_1 - F_2$ que $f(z)$. Mais en général, aux points de $F_1 \cdot F_2$, elle peut présenter des singularités quelconques. On pourrait donc se demander, s'il n'y pas lieu à considérer $f_1(z)$ comme la partie principale de $f(z)$ correspondant à $F_1 - F_2$. Une telle partie principale doit, dans tous les cas, être singulière en tout point limite de $F_1 - F_2$, même s'il n'appartient pas à $F_1 - F_2$, et il serait tout à fait naturel d'exiger qu'elle n'ait pas d'autres points singuliers. Pour que $f_1(z)$ satisfasse à cette condition il faut et il suffit que tout point de F_1 appartienne à $F_1 - F_2$ ou bien soit un point limite de $F_1 - F_2$. On obtient une propriété analogue pour F_2 si l'on veut que $f_2(z)$ puisse être considérée comme partie principale de $f(z)$ correspondant à $F_2 - F_1$. Les deux conditions peuvent s'écrire comme suit

$$F_1 = \overline{F_1 - F_2}, \quad F_2 = \overline{F_2 - F_1}. \tag{17}$$

Une décomposition $F = F_1 + F_2$ sera appelée propre si elle satisfait aux conditions (17). Dans le cas contraire, elle est impropre.

Pour une décomposition $F = F_1 + F_2$ impropre, on peut toujours trouver une autre $F = F_1' + F_2'$, propre celle-ci et telle que $F_1' < F_1$ et $F_2' < F_2$. P. ex. on peut poser

$$F_1' = F_1 - F_2, \quad F_2' = F_2 - (\overline{F_1 - F_2}).$$

Nous aurons à faire le plus souvent avec des décompositions propres de l'ensemble singulier de $f(z)$.

Dans le cas d'une décomposition propre $F = F_1 + F_2$, aucune des fonctions correspondantes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ne peut être holomorphe en un point de $F_1 \cdot F_2$. Dans ce cas les formules

$$f_1(z) = f_1^0(z) + \sigma(z), \quad f_2(z) = f_2^0(z) - \sigma(z)$$

donnent toutes les décompositions $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ conformes au théorème **A**, si f_1^0 et f_2^0 en forment une et si $\sigma(z)$ est une fonction arbitraire avec un ensemble singulier compris dans $F_1 \cdot F_2$. Ceci forme l'inverse de ce qui a été dit dans la remarque II du § présent.

Remarquons encore que dans le cas d'une décomposition propre, on n'a besoin dans la démonstration du théor. **A** de recourir à aucun artifice pour définir les fonctions f_1 et f_2 à l'aide de la fonction φ. On les obtient directement:

$$f_1 = \varphi \quad \text{et} \quad f_2 = f - \varphi.$$

Complément II. *Calcul effectif de $f_1(z)$ et $f_2(z)$.*

Il est important de pouvoir trouver effectivement la décomposition de la fonction $f(z)$, au moins dans les cas qui se rencontrent dans les applications. Nous parviendrons à ce resultat en utilisant les *séparateurs*.

Deux ensembles M et N (non nécessairement fermés) sont dits *séparés*, s'il sont disjoints et si aucun d'eux ne renferme de points limites de l'autre, c. à d. si $M \cdot \overline{N} + \overline{M} \cdot N = 0$.[1] P. ex. les ensembles $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$ sont séparés.

Un ensemble fermé S est appelé *séparateur*[2] entre les deux ensembles séparés M et N, quand il est disjoint de ces deux ensembles et quand de plus, tout continu reliant un point de M avec un point de N passe nécessairement par S. Ceci est équivalent au fait qu'aucun domaine connexe déterminé par S dans le plan ne renferme simultanément des points de M et de N. En désignant par G la somme des domaines déterminés par S et contenant des points de M et par H la somme de tous les autres domaines déterminés par S dans le plan, on obtient une décomposition de l'ensemble complémentaire de S en deux ensembles ouverts et disjoints G et H dont un renferme M et l'autre N.

Le séparateur S contient toujours tous les points de $\overline{M} \cdot \overline{N}$.

S est un séparateur *irréductible* entre M et N s'il ne contient aucun autre séparateur entre M et N plus petit que lui. Un séparateur irréductible est nécessairement à la fois la frontière de G et celle de H (ensembles introduits plus haut).

Enfin le séparateur S est *régulier* quand il est irréductible et quand pour au moins une suite de voisinages U_n de l'ensemble $\overline{M} \cdot \overline{N}$ se rétrécissant vers celui-ci, les ensembles $S - U_n$ se composent chacun d'un nombre fini d'arcs ou courbes simples fermées disjoints deux à deux et rectifiables.[3]

On démontre que dans ce cas tous les arcs de $S - U_n$ ont leurs extrémités sur la frontière de U_n (autrement S ne serait pas irréductible).

On démontre en outre que tout voisinage U de $\overline{M} \cdot \overline{N}$ peut être augmenté (ou diminué) aussi peu que l'on veut de manière qu'il possède la même propriété que les U_n.

[1] Mais leurs fermetures peuvent avoir des points communs, $\overline{M} \cdot \overline{N} \neq 0$.

[2] La théorie générale des séparateurs a été développée par M. Kuratowski dans Fund. Math. XII p. 217. Nous nous éloignons un peu, dans quelques details sans importance, des définitions primitives de M. Kuratowski.

[3] Si $\overline{M} \cdot \overline{N} = 0$, la régularité de S consiste en ce qu'il se décompose (tout entier) en un nombre fini de courbes simples fermées, disjointes et rectifiables.

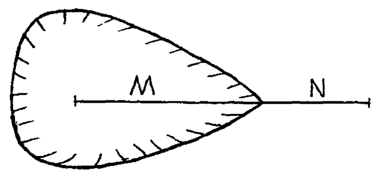


Fig. 1

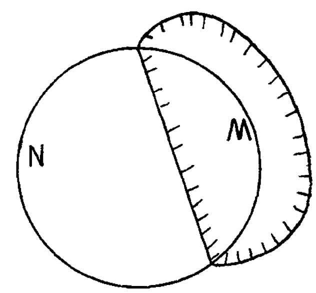


Fig. 2

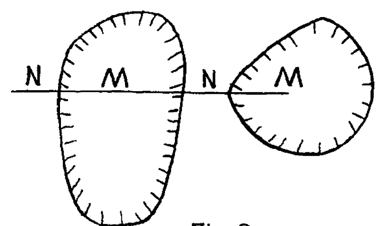


Fig. 3

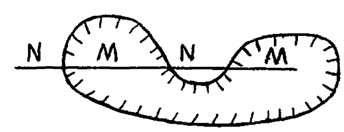


Fig. 3^1

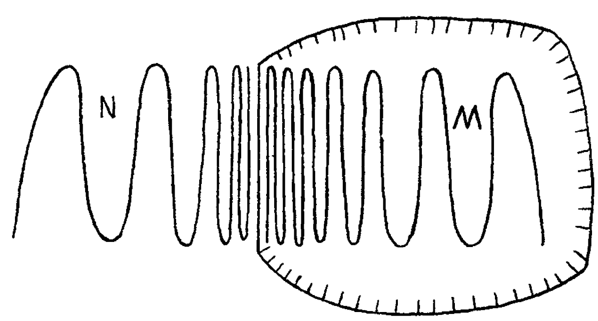


Fig. 4

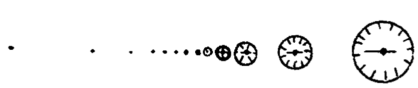


Fig. 5

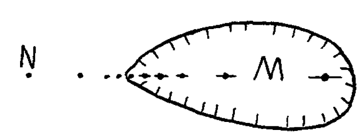


Fig. 5^1

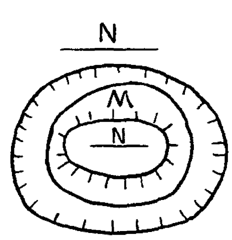


Fig. 6

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un séparateur S irréductible soit régulier est que l'ensemble $S - \overline{M} \cdot \overline{N}$ se décompose en un nombre fini ou dénombrable d'arcs ouverts[1] ou courbes simples fermées, disjoints deux à deux, ayant une longueur finie dans un voisinage assez petit de chacun de leurs points et ne s'accumulant qu'aux points de $\overline{M} \cdot \overline{N}$.

Nous précisons une fois pour toutes que *tous les séparateurs considérés dans la suite seront réguliers.*

M. Kuratowski, dans le mémoire cité, a démontré l'existence des séparateurs pour toute paire d'ensembles séparés M et N. Ces séparateurs peuvent être choisis aussi près que l'on veut de l'un ou de l'autre des ensembles M et N.

Nous donnons à la page 25 quelques figures montrant des séparateurs dans certains cas typiques.

Les hachures distinguent les séparateurs (entre les ensembles M et N) et montrent le côté où se trouvent les points de M.

Passons maintenant à l'application annoncée des séparateurs.

Considérons une décomposition propre (pour simplifier) $F = F_1 + F_2$ et prenons un séparateur S entre $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$ (donc les ensembles M et N précédents seront maintenant les ensembles $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$). Dans le cas présent on aura

$$(18) \qquad F_1 \cdot F_2 = \overline{F_1 - F_2} \cdot \overline{F_2 - F_1} < S.$$

Nous désignerons l'ensemble $S - F_1 \cdot F_2$ par L et l'appellerons *séparateur ouvert.*

Considérons les voisinages U_n (comp. plus haut la définition des séparateurs réguliers). Evidemment ils peuvent être choisis de manière que

$$(19) \qquad U_{n+1} < U_n.$$

Comme nous le savons d'ailleurs, les U_n peuvent être choisis d'une infinité de manières. Posons $L_n = L - U_n$. Par conséquent

$$(20) \qquad L_n < L_{n+1}, \; S - L_n = (F_1 \cdot F_2 + L) - L_n < U_n,$$

et les U_n se rétrécissant vers $F_1 \cdot F_2$, on a

[1] c. à d. des ensembles homéomorphes avec une droite illimitée dans les deux directions.

(21) $$L = \sum_{1}^{\infty} L_n.$$

Considérons maintenant la somme G de tous les domaines connexes déterminés dans le plan par S et contenant des points de $F_1 - F_2$. Nous savons que S formera la frontière de cet ensemble ouvert.

D'après notre lemme, on sait que la fonction $\psi_n(x)$ définie comme suit

(22) $$\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+1}} \frac{f(z)}{z-x} dz \quad \textit{pour } x \textit{ à l'extérieur de } G$$

et

(22') $$\psi_n(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+1}} \frac{f(z)}{z-x} dz \quad \textit{pour } x \textit{ dans } G$$

est holomorphe et uniforme en dehors de l'ensemble

$$F \cdot G + \overline{M} = F_1 - F_2 + (\overline{S - L_{n+1}}) = F_1 + (\overline{L - L_{n+1}}) < F_1 + \overline{U}_{n+1} < F_1 + U_n$$

et présente dans G c. à d. aux points de $F_1 - F_2$ les mêmes singularités que $f(z)$.[1] Donc on a, pour l'ensemble singulier F'_n de ψ_n,

$$F_1 < F'_n < F_1 + U_n.$$

On voit donc que les fonctions $\psi_n(x)$ sont de la même nature que celles construites dans la démonstration du théor. **A**. On peut donc procéder avec elles comme dans cette démonstration pour obtenir enfin les fonctions f_1 et f_2.

Tout se simplifie notablement quand on n'a pas besoin des termes correctifs τ_n. Ceci se présente notamment quand les fonctions

$$\psi_{n'}(x) - \psi_{n''}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n'+1} - L_{n''+1}} \frac{f(z)}{z-x} dz, \ n' > n'',$$

dont les ensembles singuliers $\overline{L_{n'+1} - L_{n''+1}} < \overline{U}_{n'+1} < U_{n'}$ s'approchent de plus en plus vers $F_1 \cdot F_2$ quand n' et n'' tendent simultanément vers l'infini, sont telles

[1] Dans le cas général il faut se rapporter à la note sous texte p. 15. Mais le plus souvent le séparateur sera formé d'un nombre fini de courbes fermées et alors le lemme s'appliquera dans son énoncé du texte.

qu'elles convergent uniformément vers o sur tout ensemble fermé situé en dehors de $F_1 \cdot F_2$ quand simultanément $n' \to \infty$ et $n'' \to \infty$ En effet, les $\psi_n(x)$ tendent alors uniformément sur tout ensemble fermé en dehors de F_1 vers une fonction $\varphi(x)$ et on pourra poser ($F = F_1 + F_2$ formant une décomposition propre!)

$$(23) \qquad f_1(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f(z)}{z-x} dz, \; f_2(x) = f(x) - \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

pour x à l'extérieur de G, et

$$(23') \qquad f_1(x) = f(x) + \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f(z)}{z-x} dz, \; f_2(x) = -\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

pour x dans G.

La décomposition donnée par les formules (23) et (23') peut dépendre du choix des L_n.[1] On peut démontrer que pour que les limites dans ces formules existent indépendamment du choix des L_n pour un x à l'extérieur ou à l'intérieur de G, il faut et il suffit que la fonction $\dfrac{f(z)}{z-x}$ soit absolument sommable sur le séparateur ouvert L. Ceci est équivalent aux conditions

$$(24) \qquad \int\limits_L |f(z)|\,|dz| < \infty \quad \textit{ou} \quad \int\limits_L \left|\frac{f(z)}{z-a}\right| |dz| < \infty \; \textit{pour un } a \textit{ en dehors de } \bar{L}$$

suivant que le séparateur est borné ou non borné.

Dans le cas où la condition (24) est remplie on peut poser dans (23) et (23')

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

et la décomposition donnée par ces formules ne dépend plus du choix des L_n.

Nous avons défini ainsi une classe remarquable de fonctions — celles satisfaisant à (24) sur un séparateur ouvert L — pour lesquelles nous pouvons établir une formule donnant la décomposition correspondante.

[1] Remarquons ici qu'il n'est pas du tout nécessaire de choisir $L_n = L - U_n$. Tout marche rait aussi bien, si seulement les formules (20) et (21) restaient valables et si les L_n se composaient chacun d'un nombre fini d'arcs ou courbes fermées.

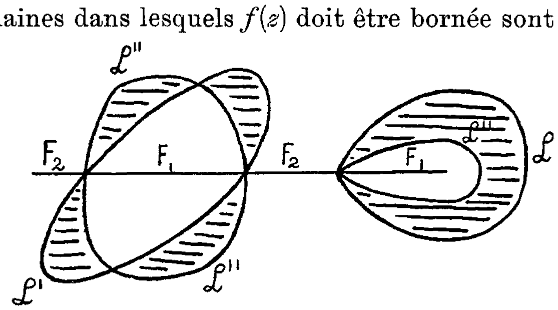
Supposons maintenant que l'on a deux séparateurs ouverts L' et L'' correspondant à la même décomposition $F = F_1 + F_2$, et supposons en plus que la fonction satisfait à (24) sur les deux. Est ce que les décompositions données par (23) et (23') avec les deux séparateurs sont identiques?

Nous verrons sur un exemple (v. p. 44) que ceci n'est pas toujours vrai. Mais on peut démontrer que si l'ensemble $F_1 \cdot F_2$ est de mesure linéaire nulle[1] et si la fonction $f(z)$ remplit la condition (24) pour chacun de ces deux séparateurs L' et L'' et est bornée entre L' et L'', alors la décomposition obtenue à l'aide de L' est la même que celle obtenue avec L''.[2] Nous disons ici que la fonction $f(z)$ est bornée entre L' et L'' quand elle est bornée sur l'ensemble D obtenu avec les ensembles ouverts G' et G'' correspondant à L' et L'' de manière suivante

$$D = (G' + G'') - G' \cdot G'' = (G' - G'') + (G'' - G').$$

Dans les cas simples, avec lesquels d'ailleurs nous aurons à faire le plus souvent, l'ensemble $F_1 \cdot F_2$ est formé par un nombre fini de points (comp. les figures 1, 2 et 3 où on remplacera M et N par $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$; $F_1 \cdot F_2$ y est formé par les points séparant M de N) et le séparateur fermé entre $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$ est formé par un nombre fini de courbes simples fermées.

L'ensemble $F_1 \cdot F_2$ est alors évidemment de mesure linéaire nulle, et la propriété de $f(z)$ d'être bornée entre L' et L'' se traduit par ceci: $f(z)$ est bornée sur l'ensemble des domaines déterminés dans le plan par les deux séparateurs fermés et ne contenant aucun point de F dans leur intérieur. On voit cela sur la figure cidessous où les domaines dans lesquels $f(z)$ doit être bornée sont munis des hachures.



[1] C. à d. qu'il peut être couvert par des cercles avec des rayons formant une somme aussi petite que l'on veut.

[2] Ceci reste vrai si l'on suppose $F_1 \cdot F_2$ composé d'un nombre fini de points et si l'on prend pour $f(z)$ les conditions plus larges suivantes pour z situe entre L' et L'' on a $|f(z)| < m(\varrho(z))$, où $\varrho(z)$ est la plus courte distance entre z et $F_1 \cdot F_2$, et $m(\varrho)$ est une fonction positive pour $\varrho > 0$, telle que $\lim\limits_{\varrho=0} \varrho\, m(\varrho) = 0$. P ex. $m(\varrho) = \varrho^{\alpha}\left(\log \frac{c}{\varrho}\right)^{\beta}$ avec $\alpha > -1$. Comp. la note I à la fin du mémoire.

On peut, dans ces cas, facilement démontrer l'identité des décompositions (23) et (23') pour L' et L''. En effet, en enlevant des domaines munis des hachures des petits cercles entourant les points de $F_1 \cdot F_2$ et en prenant l'intégrale de Cauchy sur les frontières des domaines restants pour x extérieur à $G' + G''$ ou intérieur à $G' \cdot G''$, on s'aperçoit que cette intégrale, d'une part, est identiquement nulle et, d'autre part, tend vers l'intégrale prise sur toute la frontière des domaines munis des hachures quand les cercles enlevés ont des rayons tendant vers 0. Mais cette dernière integrale, c'est tout simplement[1]

$$\int\limits_{L'} - \int\limits_{L''} = f_1'(x) - f_1''(x)$$

ce qui donne $f_1' = f_1''$ et de même $f_2' = f_2''$, c. q. f. d.

Il arrive souvent que la fonction $f(z)$ ne satisfait pas à (24) sur L et il est difficile ou même impossible de trouver un autre séparateur sur lequel la fonction remplisse (24). Nous donnerons ici deux méthodes qui permettrons, dans beaucoup de cas, d'arriver quand même à une représentation effective de la décomposition.

Première méthode — par soustraction.

Supposons qu'il existe une fonction $g(z)$ n'ayant de singularités qu'aux points de l'ensemble $F_1 \cdot F_2$ ou à l'intérieur de l'ensemble ouvert G correspondant au séparateur L, et telle que $f(z) - g(z)$ satisfasse à la condition (24) sur L. Il est clair que le séparateur L détermine une décomposition de l'ensemble singulier de $f - g$ en deux parties

$$F' = F_1' + F_2'$$

dont l'une F_1' est comprise dans $G + F_1 \cdot F_2$ et l'autre est égale à F_2. Par hypothèse on pourra appliquer les formules (23) et (23') qui nous donnerons p. ex. une fonction $u_1(x)$ holomorphe à l'extérieur de G et sur L et telle que $f(x) - g(x) - u_1(x)$ est holomorphe dans G. Il en résulte que l'on peut prendre pour $f_1(x)$ la fonction $u_1(x) + g(x)$, donc pour $f_2(x)$ la fonction $f(x) - g(x) - u_1(x)$. Comme formule on obtient p. ex. pour x à l'extérieur de G,

$$f_1(x) = g(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z) - g(z)}{z - x} dz.$$

[1] Si l'on choisit seulement un sens convenable sur la frontière de chaque domaine en question.

Deuxième méthode — par division.[1]

Supposons maintenant qu'il existe une fonction $h(z)$ holomorphe et uniforme partout en dehors de $F_1 \cdot F_2$ et telle que le quotient $\frac{f(z)}{h(z)}$ satisfasse à (24) sur L.

L'ensemble singulier de $\frac{f(z)}{h(z)}$ contient sûrement F mais il peut renfermer en dehors de F encore des pôles provenant des zéros de $h(z)$. Mais à cause de (24) ces pôles ne se trouvent sûrement pas sur L et celui-ci détermine une décomposition de l'ensemble singulier de $\frac{f(z)}{h(z)}$ en deux ensembles dont un contient F_1 et de points intérieurs à G et l'autre — F_2 et de points extérieurs à G. Par les formules (23) et (23') on obtient une décomposition correspondante de $\frac{f(x)}{h(x)}$ en deux fonctions, dont une, $v_1(x)$, est holomorphe à l'extérieur de G et sur L et l'autre, v_2, est holomorphe dans G et sur L. De $\frac{f(x)}{h(x)} = v_1(x) + v_2(x)$ on obtient $f(x) = h(x)\, v_1(x) + h(x)\, v_2(x)$ et il est clair d'après nos hypothèses sur $h(x)$ qu'on peut poser $f_1 = h \cdot v_1$, $f_2 = h \cdot v_2$.

Comme formule on obtient p. ex. pour x à l'extérieur de G

$$f_1(x) = \frac{h(x)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)\, dz}{h(z)(z-x)} \,.$$

Pour pouvoir appliquer les deux méthodes que nous venons d'indiquer il faut évidemment savoir trouver une fonction $g(z)$ ou $h(z)$ convenable pour la fonction $f(z)$ et le séparateur L en question. Dans les cas usuels ce ne sera pas difficile (comp. les exemples dans § 4) et on pourra former facilement une fonction $g(z)$ ou $h(z)$ appropriée en utilisant la définition et les propriétés de la fonction et du séparateur. Néanmoins, pour trancher la question en principe, nous allons démontrer dans le § suivant que dans des cas assez généraux il existe toujours des fonctions $g(x)$ et $h(x)$ convenables. Par conséquent les deux méthodes sont, dans ces cas, toujours applicables.

[1] Cette méthode a été déja utilisée par Poincaré dans Am. Journ. of Math. t. 14, 1892, p. 213 dans un cas simple où l'ensemble singulier F était l'axe réel et $F_1 = [-1;\ +1]$, $F_2 = [-\infty;\ -1] + [1,\ +\infty]$.

§ 3. Approximations des fonctions, extension du théorème de Runge. Applications aux décompositions des fonctions.

Le calcul effectif d'une décomposition et le problème d'approximations.

A la fin du § précédent nous avons donné deux méthodes pour calculer effectivement les fonctions formant une décomposition de la fonction $f(z)$ correspondant à la décomposition de l'ensemble singulier $F = F_1 + F_2$.

Nous allons établir dans le § présent que dans des cas très étendus les deux méthodes sont applicables.

Considérons la première méthode. Pour l'appliquer avec un séparateur ouvert donné L, il faut trouver une fonction $g(z)$ n'ayant de singularités que dans $F_1 \cdot F_2$[1] de manière que la différence $f(z) - g(z)$ soit assez petite sur L pour que la condition (24) du § précédent soit vérifiée.

Mais, étant donné que presque toujours nous n'aurons affaire qu'à des séparateurs de longueur finie (rappelons que nous pouvons nous limiter à la considération des ensembles singuliers bornés, donc aussi des séparateurs bornés), la dite condition sera remplie si seulement la différence $f(z) - g(z)$ est bornée sur L, c. à d. $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ pour un certain ε positif fini, quand z se trouve sur L.

Désignons par B l'ensemble complémentaire (par rapport au plan) du séparateur fermé $S = L + F_1 \cdot F_2$. C'est donc la somme de deux ensembles ouverts G et H déterminés par L et dont un contient $F_1 - F_2$ et l'autre $F_2 - F_1$. Il est évident que tout point de l'ensemble singulier F est situé ou bien dans B ou bien sur la frontière $\mathfrak{F}(B) = S = L + F_1 \cdot F_2$.

Le problème de la recherche de la fonction $g(z)$ peut être maintenant énoncé de manière suivante: *trouver une approximation de $f(z)$ en dehors de B*[2] (c. à d. sur $S = L + F_1 \cdot F_2$) *à un ε fini près, par une fonction $g(z)$ n'ayant de singularités que dans $F_1 \cdot F_2$.*

En principe, il faudrait considérer ici l'approximation comme valable en dehors de B quand elle y est valable partout où la différence $f(z) - g(z)$ est définie (dans notre cas — sur L).

[1] Remarquons que dans l'exposé de la méthode, on admettait pour $g(z)$ des points singuliers dans G aussi, mais nous allons voir que $g(z)$ peut être choisie de manière qu'elle n'en ait que dans $F_1 \cdot F_2$.

[2] Fixons une fois pour toutes que l'expression »en dehors de E» veut dire dans l'ensemble complémentaire de E (par rapport au plan), tandis que »à l'extérieur de E» signifie dans l'ensemble complémentaire de la *fermeture* $\bar{E}$ de l'ensemble E.

Mais nous démontrerons que la fonction $g(z)$ existe même si l'on considère des approximations à ε près, en dehors de B, dans le sens plus précis que voici: *la différence* $f(z) - g(z)$ *peut être étendue* (prolongée) *d'une manière continue* (mais non nécessairement analytique!) *partout en dehors de* B (dans notre cas — même sur $F_1 \cdot F_2$!) *et y vérifie alors partout l'inégalité* $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$.

Le théorème de Runge et le théorème B.

Nous sommes ramenés ainsi à un problème d'approximations. Il est donc tout naturel que pour le résoudre nous ferons usage du théorème classique de Runge, concernant l'approximation des fonctions analytiques uniformes par des fonctions rationnelles. Voici son énoncé:[1]

Théorème de Runge: *Soit B un ensemble ouvert dont la frontière est composée d'un nombre fini de courbes simples fermées disjointes. Sur chaque composant*[2] *de l'ensemble D complémentaire de B, soit définie une fonction holomorphe et uniforme en tout point de ce composant. Il existe alors une fonction rationnelle $g(z)$ approchant dans chaque composant de D la fonction qui y est définie, à un ε quelconque près. Les pôles de $g(z)$ peuvent être choisis dans B tout à fait arbitrairement, pourvu qu'on en ait au moins un dans chaque domaine composant de B (dont il y a un nombre fini seulement).*

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ hol. et. unif. dans notre sens avec un ensemble singulier F. Si l'ensemble ouvert B, envisagé dans le théorème de Runge, contient F, l'ensemble D (complémentaire de B) sera compris dans le domaine h. u. de $f(z)$ et tout composant de D sera situé dans une seule region connexe du domaine h. u. de $f(z)$. Mais dans chacune de ces regions la fonctiou $f(z)$ coïncide avec une seule fonction analytique. Nous pouvons donc énoncer le théor. de Runge de la manière suivante que nous utiliserons dans la suite:

Si l'ensemble ouvert B, formé par un nombre fini de domaines-composants,[3] *contient l'ensemble singulier F de la fonction hol. et. unif. $f(z)$, on peut approcher $f(z)$ en dehors de B, à un ε quelconque près, par une fonction rationnelle $g(z)$.*

---

[1] Notre énoncé est, à quelque chose près, le même que celui qu'on trouve dans le mémoire de Runge, Acta math., 6, 1885.

[2] Rappelons ici qu'un composant d'un ensemble E est un sous-ensemble connexe de E tel qu'il n'existe aucun autre sous-ensemble de E, plus grand, qui soit également connexe.

[3] Cette petite généralisation par rapport à l'énoncé précédent se justifie par le fait que l'ensemble F (voir la suite de l'énoncé) peut être enfermé dans un ensemble $B_1 < B$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé précédent et on pourra chercher l'approximation en dehors de B_1.

Les pôles de $g(z)$ peuvent être choisis dans B tout à fait arbitrairement pourvu qu'on en ait au moins un dans chaque domaine-composant de B.

On voit maintenant que pour résoudre notre problème des approximations il faut étendre le théorème de Runge au cas où certains points singuliers de $f(z)$ se trouvent sur la frontière de B et les autres à l'intérieur de B. Il est évident que l'approximation à un ε quelconque près en dehors de B ne pourra plus être fournie en général par une fonction rationnelle $g(z)$ avec des pôles compris dans B. La fonction $g(z)$ sera maintenant en général singulière aux points de F situés sur la frontière de B.

Nous admettrons maintenant des ensembles ouverts B un peu plus généraux que ceux du premier énoncé du théor. de Runge, mais moins généraux que ceux du second énoncé. Notamment, nous admettrons les hypothèses suivantes.

Hypothèses: *Les courbes simples fermées (en nombre fini) limitant B pourront désormais avoir des points communs — mais en nombre fini, et tous ces points communs devrons faire partie de l'ensemble singulier F de $f(z)$.* En outre, *nous n'admettrons qu'un nombre fini de points de F sur la frontière de B, mais ces points devront être répartis de manière que $\mathfrak{F}(B)$ ne renferme aucune courbe simple fermée sans points communs avec F.*

Toutes ces hypothèses, qui semblent être un peu arbitraires au premier abord, sont toujours vérifiées quand B est l'ensemble complémentaire d'un séparateur $S = L + F_1 \cdot F_2$ composé d'un nombre fini de courbes simples fermées, le nombre de points dans $F_1 \cdot F_2$ étant également fini et le séparateur ouvert L ne contenant aucune courbe fermée. Ceci présente un cas encore assez général et, dans tous les cas, suffisant pour nos applications, vu que tout en restreignant la nature de la décomposition $F = F_1 + F_2$ et du séparateur S aux cas simples, nous ne limitons aucunement la généralité de la fonction $f(z)$.

Nous allons démontrer un théorème qui nous permettra, dans des cas assez étendus, de résoudre notre problème des approximations.

Théorème B: *L'ensemble singulier F de $f(z)$ et la frontière $\mathfrak{F}(B)$ d'un ensemble ouvert B satisfaisant aux hypothèses énumérées ci-dessus, on peut approcher $f(z)$ en dehors de B, à un ε quelconque près, par une fonction $g(z)$ ne présentant de singularités que dans l'ensemble $P = F \cdot \mathfrak{F}(B)$ composé d'un nombre fini de points.*

Remarquons que la thèse du théorème $\boldsymbol{B}$ pourrait être démontrée avec des hypothèses beaucoup moins restrictives sur la nature de B et de F. Il suffirait notamment de supposer que *l'ensemble $B + P$* (où $P = F \cdot \mathfrak{F}(B)$) *est localement connexe*[1]

[1] L'ensemble A est appelé localement connexe, s'il contient pour chacun de ses points des voisinages (relatifs à A) connexes et aussi petits que l'on veut.

et que l'ensemble B est formé par un nombre fini de domaines connexes dont chacun possède sur sa frontière des points de P.

Quand $\mathfrak{F}(B)$ se compose d'un nombre fini de courbes simples fermées n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de points communs, l'hypothèse ci-dessus est remplie pour tout ensemble F possédant des points sur chacune des courbes composant $\mathfrak{F}(B)$.

Démonstration du théorème B.

Soient $p_1, \ldots, p_k$ les points de l'ensemble $P = F \cdot \mathfrak{F}(B)$. Prenons des cercles aux centres p_m, $m = 1, 2, \ldots, k$, et au rayon ϱ assez petit pour que ces cercles soient extérieurs deux à deux. La partie commune des intérieurs de ces cercles avec l'ensemble B se décompose en domaines connexes dont on prendra ceux qui ont le point correspondant p_m sur leur frontière. La somme de ces domaines choisis formera l'ensemble ouvert U_1.

Nos hypothèses sur la nature de la frontière $\mathfrak{F}(B)$ (qui se décompose en nombre fini de courbes simples fermées qui n'ont de points communs que parmi les p_m) entraînent le fait, que ces domaines choisis existent en effet, qu'ils sont en nombre fini, et que tout point de B assez rapproché de l'un des p_m appartient nécessairement à l'un des ces domaines, donc à U_1.

En effectuant la même opération avec des cercles de rayon $\frac{\varrho}{n}$ on obtiendra l'ensemble ouvert U_n, au sujet duquel on fera les mêmes remarques que pour U_1.

On établit sans peine les propriétés suivantes de la suite $\{U_n\}$:

(1) $$P < \overline{U}_n.$$

(2) $$B \cdot \overline{U}_{n+1} = U_{n+1} + B \cdot \mathfrak{F}(U_{n+1}) < U_n.$$[1]

(3) *Les ensembles $\overline{U}_n$ se rétrécissent vers P pour $n \to \infty$.*

(4) *Chaque domaine-composant de U_n en contient au moins un de U_{n+1}.*

Ceci fait, posons

(5) $$U_0 = B, \quad F_0^0 = F \cdot \overline{U}_0 = F \quad \text{et en général} \quad F_n^0 = F \cdot \overline{U}_n.$$

(6) $$F_1 = \overline{F_0^0 - F_1^0} = \overline{F - F \cdot \overline{U}_1} \quad \text{et en général} \quad F_n = \overline{F_{n-1}^0 - F_n^0}.$$

Les définitions (5) et (6) avec les propriétés (1) et (2) des U_n et notre hypothèse que $F < B + P$ entraînent, comme on le démontre facilement, les relations suivantes:

[1] Il est évident que la relation $\overline{U}_{n+1} < U_n$ n'est pas vraie.

(7) $$P < F^0_{n+1} < U_n + P \quad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(8) $$F^0_n = F_{n+1} + F^0_{n+1} \quad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(9) $$F_{n+1} < B \cdot \overline{U}_n < U_{n-1} \ \textit{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

en posant dans la dernière relation (pour $n = 0$) $U_{-1} = U_0 = B$.

Sur l'image ci-dessous nous montrons la formation des ensembles U_n, F^0_n et F_n dans le cas où l'ensemble P ne contient qu'un seul point p et la frontière de B est formée par deux courbes simples fermées avec le point commun p.

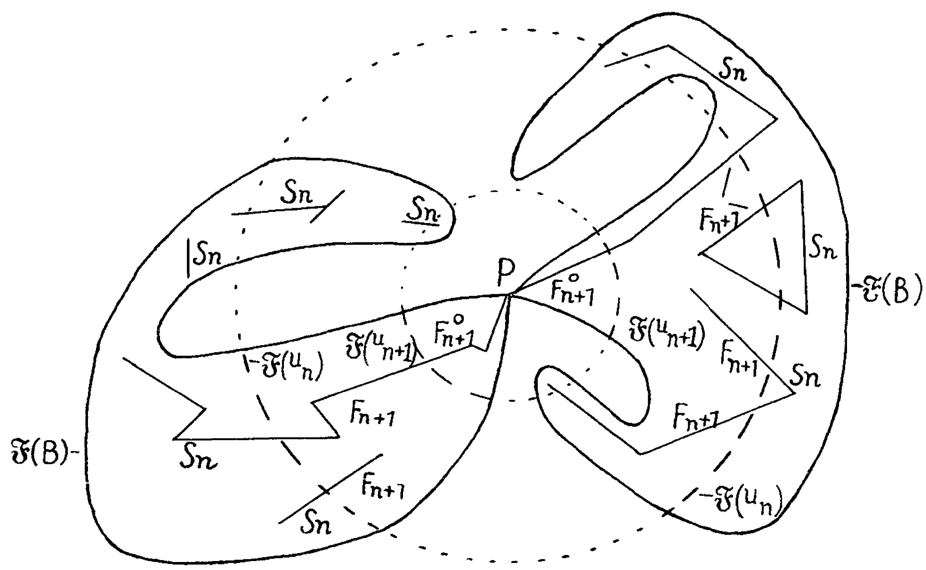


Fig. 8

Les segments et les lignes polygonales représentent l'ensemble singulier F. L'ensemble $F - F^0_n$ est désigné par S_n. Les lignes continues désignées par $\mathfrak{F}(B)$ forment les deux courbes frontières de B. Par lignes pointillées ou traits coupés sont représentés les deux cercles servant à former respectivement U_n et U_{n+1}. En particulier par traits coupés (désignés par $\mathfrak{F}(U_n)$ ou $\mathfrak{F}(U_{n+1})$) sont indiqués les arcs de ces cercles appartenant à la frontière de U_n respectivement U_{n+1} (le reste de ces frontières étant formé des arcs de $\mathfrak{F}(B)$).

Pour les décompositions $F = F^0_0 = F_1 + F^0_1$, et en général $F^0_n = F_{n+1} + F^0_{n+1}$, prenons des décompositions correspondantes d'après le théorème **A**:

$$f(z) = f_1(z) + f^0_1(z), \text{ et en général } f^0_n(z) = f_{n+1}(z) + f^0_{n+1}(z),$$

en passant successivement de n à $n + 1$. Remarquons que plusieurs des ensembles

F_n (mais pas F_n^0) peuvent être vides; alors les fonctions f_n correspondantes seront identiquement $= 0$.

Appliquons maintenant le théorème de Runge!

A son aide nous trouverons de proche en proche des fonctions rationnelles $g_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ telles que les pôles de la n-ème se trouvent dans U_n et que pour $n = 2, 3, \ldots$

$$(10) \qquad |f_n(z) + g_{n-1}(z) - g_n(z)| < 2^{-n}\varepsilon, \textit{ pour tout } z \textit{ en dehors de } U_{n-2}.$$

Pour $n = 1$, $g_1(z)$ formera une approximation de $f_1(z)$ telle que

$$(10') \qquad |f_1(z) - g_1(z)| < 2^{-1}\varepsilon, \textit{ pour tout } z \textit{ en dehors de } U_{-1} = B,$$

ce qui est bien possible car l'ensemble singulier de $f_1(z)$ est F_1 qui est compris dans B d'après (9). On choisira dans chaque composant de $U_{-1} = B$ comme pôles de $g_1(z)$ des points appartenant à un composant correspondant de U_1 (on s'appuie ici sur (4) qui est valable évidemment aussi pour $n = -1$ et 0). Ceci, avec la relation (9) pour $n = 1$, donne que l'ensemble singulier de $f_2(z) + g_1(z)$ est compris dans U_0.

Si la fonction rationnelle $g_{n-1}(z)$ est déjà déterminée de manière qu'elle possède tous ses pôles dans $U_{n-1} < U_{n-2}$, la somme $f_n(z) + g_{n-1}(z)$ aura ses singularités dans U_{n-2} (comp. (9)) et on pourra trouver une fonction rationnelle $g_n(z)$ satisfaisant à (10). Mais $g_n(z)$ devra avoir des pôles dans chaque composant de U_{n-2} (il n'y en a qu'un nombre fini). D'après (4) chaque composant de U_{n-2} en contient un de U_{n-1} qui, à son tour, en contient un de U_n. Par conséquent, on peut choisir les pôles de $g_n(z)$ dans U_n.

Ainsi l'induction marche et les $g_n(z)$ peuvent être considérés comme déterminés pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Considérons maintenant les fonctions

$$(11) \qquad \varphi_m(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (f_n + g_{n-1} - g_n).$$ [1]

La série (11) est, d'après (10) et (10'), uniformément convergente en dehors de U_{m-1} et on en déduit en plus, pour $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$(12) \qquad |\varphi_m(z)| < 2^{-m}\varepsilon.$$

[1] Pour $m = 0$ le premier terme de la série sera $(f_1 - g_1)$.

De plus $\varphi_m(z)$ est continue en *dehors* de U_{m-1} et holomorphe à *l'extérieur* de U_{m-1}.

La fonction

$$\varphi_0(z) = (f_1 - g_1) + \sum_{n=2}^{\infty}(f_n + g_{n-1} - g_n) = \varphi_m(z) + \sum_{n=1}^{m} f_n - g_m =$$

$$= \varphi_m(z) + (f(z) - f_n^0(z)) - g_m(z)^{1}$$

a donc son ensemble singulier compris dans

$$\overline{U}_{m-1} + F + U_m = F + \overline{\overline{U}}_{m-1},\ \textit{pour}\ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où vient, d'après (3), que cet ensemble singulier est nécessairement compris dans F.

D'autre part la fonction

$$g(z) = f(z) - \varphi_0(z) = \left(f - \sum_{n=1}^{m} f_n\right) + g_m - \varphi_m = f_m^0 + g_m - \varphi_m$$

a d'après (7) son ensemble singulier dans

$$(U_{m-1} + P) + U_m + \overline{\overline{U}}_{m-1} < P + \overline{\overline{U}}_{m-1},\ \textit{pour}\ m = 1, 2, 3,$$

donc, d'après (3) cet ensemble singulier est contenu dans P.

Enfin, la différence $f(z) - g(z) = \varphi_0(z)$ est continue en dehors de $U_{-1} = B$ et y satisfait, d'après (12), à l'inégalité

$$|f(z) - g(z)| < 2^0 \varepsilon = \varepsilon,$$

c. q. f. d.

Application du théorème B à la décomposition des fonctions.

Méthode I — par soustraction.

Considérons une décomposition propre $F = F_1 + F_2$ de l'ensemble singulier F de $f(z)$ en deux ensembles F_1 et F_2 tels que $F_1 \cdot F_2$ se compose d'un nombre fini de points. Considérons un séparateur $S = L + F_1 \cdot F_2$ entre $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$, composé d'un nombre fini de courbes simples fermées, toutes de longueur finie.

Rejetons maintenant (s'il y en a) les courbes simples fermées de S qui ne

[1] On utilise ici les relations $f = f_1 + f_1^0$, $f_n^0 = f_{n+1} + f_{n+1}^0$ qui entraînent:

$$f = (f_1 + f_2 + \cdots + f_m) + f_m^0.$$

contiennent aucun point de $F_1 \cdot F_2$ (ces courbes sont comprises dans le séparateur ouvert L). Désignons par S_1 le reste de l'ensemble S. L'ensemble S_1 ne peut être vide que s'il en est de même de $F_1 \cdot F_2$ (au moins dans le cas d'une décomposition *propre*). Nous pouvons rejeter ce cas, car alors la décomposition s'obtient facilement (comp. la démonstration du théor. **A**). En désignant par B l'ensemble complémentaire de S_1, on trouvera d'après le théor. **B** une fonction $g(z)$ dont les points singuliers appartiennent à $F_1 \cdot F_2$ et telle que sur S_1 la différence $f(z) - g(z)$ soit continue et satisfasse à $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$. Ainsi, la longueur totale de S étant finie, $f(z) - g(z)$ satisfera sur les arcs de $S_1 - F_1 \cdot F_2 < L$ à la condition (24) du § 2. Mais, vu que sur les courbes rejetées de S (qui appartiennent complètement au domaine h. u. de $f(z) - g(z)$), cette différence satisfait d'elle-même à la condition (24) du § 2, elle satisfait à cette condition sur la totalité du séparateur ouvert L, ce qui suffit pour que l'on puisse appliquer la méthode I du complément II au théorème **A**.

Remarque I: Dans certains cas on peut appliquer la méthode I même avec un séparateur de longueur infinie. P. ex. supposons pour simplifier que $F_1 \cdot F_2$ ne contient qu'un seul point a et que S est formé d'une seule courbe, contenant a. Supposons maintenant qu'il existe une fonction $m(z)$ ayant pour seul point singulier le point a et n'ayant aucun zéro dans tout le plan (on peut donc écrire $m(z) = e^{m_1\left(\frac{1}{z-a}\right)}$, où $m_1(t)$ est une fonction entière) et telle que la longueur $S(z)$ de l'arc de $L = S - (a)$ compris entre un point fixe z_0 de L et un point mobile z de L soit constamment $< |m(z)|$.

L'ensemble singulier de $f(z)[m(z)]^2$ étant (à l'exception du point a) en dehors de S, on peut appliquer le théorème **B** et trouver $g(z)$ avec le seul point singulier en a de manière que pour z zur S: $|f(z)[m(z)]^2 - g(z)| < \varepsilon$, d'où $\left|f(z) - \frac{g(z)}{[m(z)]^2}\right| < \frac{\varepsilon}{|m(z)|^2}$. En désignant $f(z) - \frac{g(z)}{[m(z)]^2}$ par $t(z)$ on en obtient

$$\int_L |t(z)|\,|dz| < \int_L \frac{\varepsilon}{|m(z)|^2}|dz| < 2\left[\int_0^1 \frac{\varepsilon}{m^2}dS + \int_1^\infty \frac{\varepsilon}{S^2}dS\right] = 2\varepsilon\left(1 + \frac{1}{m^2}\right),$$

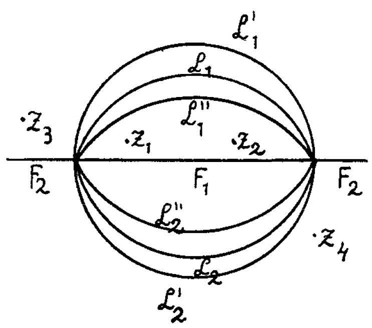
où m est le minimum de $|m(z)|$ sur L et le coefficient 2 provient du fait que L se compose de deux arcs commençant en z_0 et allant vers a. L'inégalité que nous venons d'obtenir prouve que la différence $f(z) - \frac{g(z)}{[m(z)]^2}$ satisfait à la condition (24) du § 2, ce qui permet l'application de la première méthode.

Méthode II — par division.

Reprenons les hypothèses admises plus haut pour l'application de la première méthode et ajoutons y encore la suivante: le séparateur S ne passe par aucun zéro de $f(z)$.

Rejetons comme plus haut les courbes de S ne contenant aucun point de $F_1 \cdot F_2$ (donc comprises dans L). L'ensemble S_1 restant divise le plan en nombre fini de domaines connexes $D_1, D_2, \ldots, D_\varkappa$ dont la somme forme l'ensemble B.

Considérons la fonction $\log f(z)$. Elle est holomorphe partout en dehors de l'ensemble $F + Z$ — où Z est l'ensemble des zéros de $f(z)$ — mais elle n'y est pas toujours uniforme.



Les z_n désignent les zéros de $f(z)$.

Fig. 9

Pour vaincre cette difficulté nous nous y prendrons de manière suivante: l'ensemble $S_1 - F_1 \cdot F_2$ se décompose en arcs ouverts (appartenant à L) aux extrémités dans $F_1 \cdot F_2$. Chacun d'eux, soit p. ex. L_m, peut être enfermé dans une bande limitée par deux arcs L_m' et L_m'', aux mêmes extrémités que L_m et ne renfermant aucun point de F ni de Z, comme on le voit sur le schema ci-dessus.

Ces bandes peuvent être évidemment choisies de manière qu'elles soient deux à deux disjointes. On s'aperçoit immédiatement qu'à l'intérieur de ces bandes $\log f(z)$ est holomorphe et *uniforme*. Par conséquent en posant $\varphi(z) = \log f(z)$ à l'intérieur de ces bandes, et $\varphi(z) = 0$ à leur extérieur, on obtient une fonction $\varphi(z)$ hol. et unif. avec un ensemble singulier formé par les arcs L_m' et L_m'' — les arcs frontières des bandes. Ces arcs appartenant à B, sauf leurs extrémités qui appartiennent à $F_1 \cdot F_2$ et sont sur $S_1 = \mathfrak{F}(B)$, on peut trouver une approximation $g(z)$ ayant tous ses points singuliers dans $F_1 \cdot F_2$ et telle que $|\varphi(z) - g(z)| < \varepsilon$ pour z sur S_1. Mais $\varphi(z)$ coïncidant sur S_1 (au moins sur les arcs L_m sur lesquels elle est définie) avec $\log f(z)$ on en obtient

$$|\log f(z) - g(z)| < \varepsilon \textit{ pour } z \textit{ sur } S_1.$$

En posant $h(z) = e^{g(z)}$ on en obtient pour ε assez petit

$$1 - 2\varepsilon < \left|\frac{f(z)}{h(z)}\right| < 1 + 2\varepsilon \textit{ pour } z \textit{ sur } S_1.$$

Les courbes rejetées de S étant complètement dans les domaines h. u. de $f(z)$ et de $\frac{1}{h(z)} = e^{-g(z)}$, le rapport $\frac{f(z)}{h(z)}$ est borné sur ces courbes, ce qui donne (avec l'inégalité pour z sur S_1, obtenue à l'instant) la preuve de la sommabilité absolue de $\frac{f(z)}{h(z)}$ sur $L = S - F_1 \cdot F_2$. Ceci suffit déjà pour pouvoir poursuivre la deuxième méthode du complément II au théor. **A**.

Remarque: Relevons ici une conséquence intéressante du théorème **B**. Considérons un domaine D limité, pour simplifier, par une courbe simple fermée n'ayant qu'un seul point a en commun avec l'ensemble singulier F d'une fonction uniforme $f(z)$. Supposons en plus que l'intérieur de D ne contient aucun point de F. Dans ces conditions l'allure de la fonction $f(z)$ quand z s'approche vers a de l'intérieur de D est à un ε quelconque près égale à l'allure d'une fonction entière en $\frac{1}{z-a}$. En effet, dans le domaine D et sur sa frontière (le point a y compris!) on pourra approcher la fonction $f(z)$ à ε près par une fonction $g(z)$ dont la seule singularité sera en a.

On peut même obtenir plus: si l'ensemble singulier F, dans le voisinage de a, divise localement le plan en un nombre fini de domaines ayant le point a sur leurs frontières, et si dans chacun de ces domaines on forme un domaine D satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, on pourra approcher la fonction $f(z)$ à ε près par une fonction $g(z)$ entière en $\frac{1}{z-a}$ simultanément dans tous les domaines D. Ceci reste vrai même si dans chacun des domaines D la fonction $f(z)$ représente une autre fonction analytique.

§ 4. Exemples des décompositions.

Nous allons montrer, dans le § présent, la technique des décompositions dans différents cas. Nous allons appliquer les méthodes effectives, données dans le complément II au théor. **A**. Pour certaines classes de fonctions, pour lesquelles les décompositions cherchées sont faciles à trouver directement, nous montrerons que nos méthodes effectives peuvent donner les mêmes résultats (si l'on choisit la méthode convenable). Ceci tendrait à prouver que, par ces méthodes, on obtient les décompositions les plus naturelles.

I. Ensembles F_1 et F_2 disjoints.

C'est le cas simple, réglé tout d'abord dans la démonstration du théor. **A**. Un séparateur entre F_1 et F_2 sera ici composé d'un nombre fini de courbes simples fermées sans points communs avec $F = F_1 + F_2$. On peut donc prendre ici l'intégrale de Cauchy sur un tel séparateur et obtenir les composantes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de $f(x)$ comme dans la démonstration du théor. **A**. Quand F_1 se réduit à un seul point a, qui est alors un point singulier isolé de $f(z)$, la composante $f_1(z)$ devient la partie principale de $f(z)$ par rapport au point a.

II. L'ensemble singulier F est la circonférence $|z| = 1$.

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ égale pour $|z| < 1$ à une fonction $u(z)$ et pour $|z| > 1$ à une fonction $v(z)$, où $u(z)$ et $v(z)$ sont régulières, l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle $|z| = 1$. Nous supposerons que $v(z)$ n'est pas un prolongement de $u(z)$, de manière que la circonférence $|z| = 1$ forme l'ensemble singulier F de $f(z)$.

Décomposons maintenant la circonférence $|z| = 1$ en deux arcs F_1 et F_2 n'ayant que leurs extrémités $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ en commun. Si nous voulons trouver une décomposition correspondante $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ il faudra prendre un séparateur entre $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$. Un tel séparateur est fourni par deux arcs simples de longueur finie L_1 et L_2, aux extrémités en $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ et dont l'un est à l'intérieur du cercle-unité et l'autre à l'extérieur du même cercle (sauf leurs extrémités, bien entendu). La région du plan (finie ou infinie) délimitée par les arcs L_1 et L_2 et contenant $F_1 - F_2$ formera l'ensemble ouvert G.

Si maintenant les fonctions $u(z)$ et $v(z)$ sont sommables, l'une sur L_1 et l'autre sur L_2, la fonction $f_1(x)$ pourra être donnée pour x en dehors de $\overline{G}$ par les integrales (comp. (23) et (23'), § 2)

$$(1) \qquad f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{u(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{v(z)}{z-x}\,dz.$$

Et alors, encore pour x en dehors de $\overline{G}$, on posera $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$.

La même formule (1), si l'on y change le signe des intégrales, donnera la valeur de $f_2(x)$, pour x dans G.

Prenons maintenant pour simplifier $v(z) = 0$. Dans la formule (1) la seconde intégrale disparaît. Dans ce cas la décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ a déjà été utilisée pour certaines classes spéciales de fonctions.[1]

Considérons le développement de Mac-Laurin de $u(z)$

$$(2) \qquad u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Si la série (2) converge uniformément sur l'arc L_1 entier, on pourra obtenir immédiatement d'après (1) le développement de Mac-Laurin pour $f_1(x)$:

$$(3) \quad f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{dz}{z-x} \sum a_n z^n = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^\varkappa \frac{1}{2\pi i}\left(a_\varkappa(\beta-\alpha)i + \sum_{n \neq \varkappa} a_n \frac{e^{i(n-\varkappa)\beta} - e^{i(n-\varkappa)\alpha}}{n-\varkappa}\right).$$

On peut encore transformer la formule (1) de manière suivante:

$$(4) \qquad f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{u(z)-u(x)}{z-x}\,dz + \frac{u(x)}{2\pi i}\log\frac{e^{i\beta}-x}{e^{i\alpha}-x},$$

d'où

$$(5) \qquad f_1(x) = \frac{u(x)}{2\pi i}\log\frac{e^{i\beta}-x}{e^{i\alpha}-x} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^\varkappa \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=\varkappa+1}^{\infty} a_\varkappa \frac{e^{(n-\varkappa)\beta} - e^{(n-\varkappa)\alpha}}{n-\varkappa}.$$

Il est à peine nécessaire de remarquer qu'on prend ici dans le cercle-unité la branche uniforme de $\log\frac{e^{i\beta}-x}{e^{i\alpha}-x}$ qui donne pour $x = 0$ la valeur $i(\beta-\alpha)$.

[1] Comp., p. ex., J. Hadamard, Thèse, Paris, 1892, la troisieme partie surtout.

Dans le cas général, même si les développements (3) ou (5) ont un sens, ces séries ne donnent pas une fonction holomorphe en dehors de l'arc F_1.

Si l'on prend maintenant deux arcs rectifiables L_1 et L_1^0 unissant $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ à l'intérieur du cercle-unité et si $f(x)$ est absolument sommable sur L_1 et L_1^0 la formule (1) donnera deux fonctions $f_1(x)$ et $f_1^0(x)$ définies par (1) pour les x parcourant un domaine qui renferme sûrement l'extérieur du cercle-unité. Nous savons d'après le complément II au théor. **A** du § 2 que $f_1(x) = f_1^0(x)$, si $u(z)$ est borné entre L_1 et L_1^0. Mais en général les fonctions f_1 et f_1^0 ne sont pas égales, comme le montre l'exemple suivant:

Posons $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ donc $e^{i\alpha} = 1$, $e^{i\beta} = -1$; ensuite, $F_1 =$ l'arc supérieur de la circonférence $|z| = 1$, $u(z) = u_1(z) + e^{\frac{1}{1-z}}$, où $u_1(z)$ est une fonction bornée pour $|z| < 1$, et considérons deux arcs L_1 et L_1^0 disjoints et tangents au cercle au point 1 d'un coté et de l'autre coté de l'axe réel, de manière que le rapport $\frac{1-s}{t^2}$, pour $z = s + it$ tendant vers 1 le long de L_1 et L_1^0, soit borné.

On vérifie facilement que $e^{\frac{1}{1-z}}$ est borné le long de L_1 et L_1^0 mais ne l'est plus entre L_1 et L_1^0. D'après (1), on obtient pour $|x| > 1$

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{u_1(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z-x}\,dz$$

et pareillement pour $f_1^0(x)$. Les premières intégrales dans $f_1(x)$ et $f_1^0(x)$ sont égales, étant donné que $u_1(z)$ est borné entre L_1 et L_1^0. Il en résulte

$$f_1(x) - f_1^0(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_1} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z-x}\,dz - \int\limits_{L_1^0} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z-x}\,dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z-x}\,dz,$$

où C est la courbe fermée formée par L_1 et L_1^0, qui est parcourue dans le sens positif par rapport à son intérieur.

Si l'on remplace dans C un petit arc contenant 1 par un petit arc passant à l'extérieur de C, on obtient une courbe C_1 renfermant 1 dans son domaine intérieur.

En changeant dans la dernière intégrale la courbe C en C_1, on fait subir à cette intégrale une variation qui tend sûrement vers 0 quand les deux petits arcs, par lesquels diffèrent les courbes C et C_1, tendent vers le point 1. Cette dernière propriété résulte du fait que $e^{\frac{1}{1-z}}$ est borné à l'extérieur de C.

$e^{\frac{1}{1-z}}$ étant régulier dans le domaine extérieur de C_1 (le point à l'infini y compris) et sur C_1, on a, d'après le théorème de Cauchy,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z-x}\, dz = e^{\frac{1}{1-x}} - 1$$

pour x à l'extérieur de C_1 (comp. la remarque VI du § 1), et ceci pour toutes les courbes C_1. Il en résulte immédiatement

$$f_1(x) - f_1^0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} = \lim \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}.$$

On vérifie ici que $f_1(x)$ et $f_1^0(x)$ ne diffèrent que d'une fonction dont l'ensemble singulier est compris dans $F_1 \cdot F_2$.

Considérons maintenant le cas où $u(z)$ n'est pas sommable sur L_1, mais où p. ex. $u(z) - A\,(z - e^{i\alpha})^{\mu}$, A et μ constantes ($\Re\mu < 0$), est borné sur L_1. Prenons un point a situé entre L_1 et F_1 et unissons le avec $e^{i\alpha}$ par un arc M compris entièrement (sauf $e^{i\alpha}$) entre L_1 et F_1. La fonction

$$A\left(\frac{z - e^{i\alpha}}{z - a}\right)^{\mu}$$

a toutes ses branches uniformes et régulières dans le plan muni de la coupure M. Désignons maintenant, dans le developpement de Taylor de $(z - a)^{\mu}$ suivant les puissances de $(z - e^{i\alpha})$, la somme des premiers $p = 1 + E(-\Re\mu)$[1] termes par $S_p(z)$. Alors la différence

$$\frac{S_p(z)\,(z - e^{i\alpha})^{\mu}}{(z - a)^{\mu}} - (z - e^{i\alpha})^{\mu} = \left(\frac{z - e^{i\alpha}}{z - a}\right)^{\mu} [S_p(z) - (z - a)^{\mu}]$$

est évidemment bornée sur L_1. Il y en aura de même de $u(z) - A\,S_p(z)\left(\frac{z - e^{i\alpha}}{z - a}\right)^{\mu}$. On peut donc appliquer la première méthode (par soustraction) du complément II au théor. **A** avec $g(z) = A\,S_p(z)\left(\frac{z - e^{i\alpha}}{z - a}\right)$ ce qui donnera pour les x à l'extérieur du domaine borné compris entre L_1 et F_1

[1] $E(x)$ désigne pour x réel le plus grand entier $\leq x$.

$$f_1(x) = A\,S_p(x)\left(\frac{x - e^{i\alpha}}{x - a}\right)^{\mu} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[u(z) - A\,S_p(z)\left(\frac{z - e^{i\alpha}}{z - a}\right)^{\mu}\right]\frac{dz}{z - x}$$

(pour les x dans le domaine entre L_1 et F_1 comp. les formules du § 2).

Si l'on savait seulement que $u(z)(z - e^{i\alpha})^n$ est borné sur L_1 pour un n entier, on pourrait prendre, d'après la seconde méthode donnée dans le complément cité,

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i(z - e^{i\alpha})^n}\int\limits_{L_1}\frac{u(z)(z - e^{i\alpha})^n}{z - x}\,dz,$$

pour les mêmes x que plus haut.

Dans le cas le plus général on pourrait appliquer (au moins théoriquement) le théorème **B** duquel résulte l'existence des deux fonctions entières $g_1(z)$ et $g_2(z)$ telles que $u(z) - g_1\left(\frac{1}{z - e^{i\alpha}}\right) - g_2\left(\frac{1}{z - e^{i\beta}}\right)$ est borné sur L_1, ce qui permet d'appliquer la première méthode de la remarque VII § 2.

III. Les fractions de Borel.

Considérons maintenant les fonctions données par une série de fractions simples, étudiées depuis longtemps par plusieurs mathématiciens et particulièrement par M. Borel à qui elles ont servi, entre autres, pour donner les premiers exemples du prolongement quasi-analytique.

Prenons donc

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{z - \alpha_n}, \tag{6}$$

les α_n formant une suite de points différents ($\alpha_n \neq \alpha_m$) dense dans un ensemble fermé F non dense dans le plan, et la série $\Sigma|A_n|$ étant convergente. L'ensemble F (qui peut décomposer le plan en plusieurs parties) sera l'ensemble singulier de $f(z)$ et on démontre facilement que la série (6) converge uniformément sur tout ensemble fermé disjoint de F.

Si l'on décompose F en deux ensembles fermés F_1 et F_2, on peut trouver directement une décomposition correspondante $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ en posant

$$f_1(z) = \sum\frac{A_{n'}}{z - \alpha_{n'}},\quad f_2(z) = \sum\frac{A_{n''}}{z - \alpha_{n''}}, \tag{7}$$

où les indices n' resp. n'' correspondent aux points α_n se trouvant respectivement dans F_1 ou F_2. Pour les α_n compris dans $F_1 \cdot F_2$ les termes correspondants de la somme (6) peuvent être laissés ou bien à $f_1(z)$, ou bien à $f_2(z)$, ou enfin ils peuvent être décomposés en deux parties $\left(\text{p. ex. } \frac{A_n}{z-\alpha_n} = \frac{A'_n}{z-\alpha_n} + \frac{A''_n}{z-\alpha_n}\right)$, une ajoutée à $f_1(z)$ et l'autre à $f_2(z)$.

Il est intéressant de comparer la décomposition obtenue de cette manière directe avec celle obtenue par notre méthode générale.

Nous nous limiterons, pour simplifier, au cas où F est égal au segment $[0; 1]$ de l'axe réel, les α_n formant une suite quelconque dense dans l'intervalle $[0; 1]$.

Décomposons F en deux intervalles: $F_1 = [0; \beta]$ et $F_2 = [\beta; 1]$. L'ensemble $F_1 \cdot F_2$ est formé par le point β seul. Le séparateur L sera formé ici par une courbe simple fermée coupant l'intervalle $[0; 1]$ en un seul point — le point β — et contenant dans son domaine intérieur l'intervalle $[0; \beta]$ diminué du point β.

Considérons d'abord le cas où β est différent de tous les α_n. Si la série (6) est uniformément convergente sur la courbe $\overline{L}$ entière (le point β y compris), on pourra poser, pour x à l'extérieur de la courbe $\overline{L}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(z-x)(z-\alpha_n)}$$

et une simple application de la formule de Cauchy nous donnera

$$f_1(x) = \sum \frac{A_{n'}}{x-\alpha_{n'}} \quad \text{et} \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x) = \sum \frac{A_{n''}}{x-\alpha_{n''}},$$

où les indices n' et n'' ont une signification donnée plus haut.

Quand (6) ne converge pas uniformément, on peut chercher à obtenir $f_1(x)$ comme une limite (comp. la formule (23) du § 2)

$$f_1(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_m} \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

où les L_m forment une suite croissante d'arcs $a_m b_m$ de L ayant pour limite le séparateur fermé $\overline{L}$. Les points a_m et b_m doivent donc tendre vers β le long de la courbe $\overline{L}$ de deux côtés de l'axe réel.

On obtient par un simple calcul

$$(8) \quad \int\limits_{L_m} \frac{f(z)}{z-x} dz = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_{L_m} \frac{dz}{(z-x)(z-\alpha_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x-\alpha_n}\left[\lg\frac{b_m - x}{a_m - x} - \lg\frac{b_m-\alpha_n}{a_m-\alpha_n}\right].$$

Pour x égal à un α_n (qui est pris dans ce cas dans $[\beta;\ 1]$), le terme correspondant de la dernière série doit être remplacé par

$$A_n \frac{b_m - a_m}{(a_m-\alpha_n)(b_m-\alpha_n)}.$$

Considérons d'abord les termes de la dernière série avec α_n assez approchés de x (qui est maintenu fixe à l'extérieur de la courbe $\bar{L}$) p. ex. $|\alpha_n - x| < \frac{1}{3}|\beta - x|$, donc $|\alpha_n - x| < \frac{1}{2}|\alpha_n - \beta|$. On voit facilement que pour ces termes on obtient

$$\frac{A_n}{x-\alpha_n}\left[\lg\frac{b_m - x}{a_m - x} - \lg\frac{b_m-\alpha_n}{a_m-\alpha_n}\right] = \frac{A_n}{x-\alpha_n}\left[\lg\frac{b_m - x}{b_m - \alpha_n} - \lg\frac{a_m-x}{a_m-\alpha_n}\right] =$$
$$= \frac{A_n}{x-\alpha_n}\left[\lg\left(1+\frac{\alpha_n - x}{b_m-\alpha_n}\right) - \lg\left(1+\frac{\alpha_n-x}{a_m-\alpha_n}\right)\right] = A_n M,$$

où $|M|$ possède une borne supérieure finie indépendante de a_m, b_m et α_n. Ces termes forment donc une série uniformément convergente pour tous les a_m et b_m. Mais chacun de ces termes tendant vers 0 quand a_m et b_m tendent vers β, on voit que la somme de tous ces termes tend vers 0.

On peut donc considérer dans la série (8) seulement les termes où $|x - \alpha_n| > \varrho > 0$ pour un certain ϱ. Désignons la série étendue sur les indices correspondants par Σ'. On aura

$$(9) \quad \sum{}' \frac{A_n}{x-\alpha_n}\left[\lg\frac{b_m - x}{a_m - x} - \lg\frac{b_m-\alpha_n}{a_m-\alpha_n}\right] = \sum{}' \frac{A_n}{(x-\alpha_n)}\lg\frac{b_m-x}{a_m-x} -$$
$$- \sum{}' \frac{A_n}{x-\alpha_n}\lg\left|\frac{b_m-\alpha_n}{a_m-\alpha_n}\right| + \sum{}' \frac{A_n}{x-\alpha_n}\varphi_m^{(n)} i,$$

où $\varphi_m^{(n)}$ est la valeur absolue de celui des deux angles $\widehat{b_m \alpha_n a_m}$ qui renferme la direction négative de l'axe réel.

La première série du membre droit de (9) est évidemment convergente et tend vers 0 quand a_m et b_m tendent vers β. La troisième série converge uniformément pour tous les a_m et b_m. Vu la signification des $\varphi_m^{(n)}$, les termes de cette série correspondant aux indices n' tendent vers $\frac{2\pi i A_{n'}}{x - \alpha_{n'}}$ pour $a_m \to \beta$ et $b_m \to \beta$, tandis que les termes aux indices n'' tendent vers 0. On obtient donc de cette série pour $m \to \infty$ la série (7) pour $f_1(x)$.

Il en résulte que pour que notre procédé fonctionne et donne la décomposition (7), il faut et il suffit que la deuxième série tende vers 0 quand a_m et b_m tendent vers β. Mais, chacun de ses termes tendant vers 0 avec $|a_m - \beta|$ et $|b_m - \beta|$ il suffirait que cette série converge uniformément dans les a_m et b_m. Ceci est toujours possible à obtenir en prenant le séparateur L symétrique par rapport à l'axe réel et les a_m conjugués à b_m pour chaque m. Dans ce cas notre procédé donne la décomposition (7).

Mais il faut remarquer que pour certains choix des a_m et b_m, la limite des intégrales sur les arcs L_m n'existe pas.

Considérons maintenant le cas où β coïncide avec un certain $\alpha_\varkappa$. On peut écrire ici

$$f(z) = \frac{A_\varkappa}{z - \alpha_\varkappa} + \sum_{n \neq \varkappa} \frac{A_n}{z - \alpha_n}.$$

Comme précédemment on essaiera le procédé par limite

$$(10) \qquad f_1(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_m} \frac{f(z)}{z - x} dz = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_m} \frac{A_\varkappa dz}{(z - x)(z - \alpha_\varkappa)} + $$
$$+ \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_m} \left(\sum_{n \neq \varkappa} \frac{A_n}{z - \alpha_n} \right) \frac{dz}{z - x}.$$

Nous choisirons un séparateur A symétrique par rapport à l'axe réel et possédant deux demi-tangentes au point β qui forment avec l'axe réel négatif deux angles, égaux en valeur absolue à φ. En outre nous prendrons a_m conjugué à b_m. En vertu de nos développements précédents la deuxième limite dans le membre droit de (10) existe et est égale à

$$\sum \frac{A_{n'}}{x - \alpha_{n'}}$$

Il reste à étudier la première limite. On a d'abord

$$\int\limits_{L_m} \frac{A_\varkappa dz}{(z - x)(z - \alpha_\varkappa)} = \frac{A_\varkappa}{x - \alpha_\varkappa} \left[\lg \frac{b_m - x}{a_m - x} - \lg \frac{b_m - \alpha_\varkappa}{a_m - \alpha_\varkappa} \right].$$

Le premier terme entre les crochets tend évidemment vers o pour $a_m \to \beta$ et $b_m \to \beta$, tandis que le seconde terme

$$\lg \frac{b_m - \alpha_\varkappa}{a_m - \alpha_\varkappa} = \lg \frac{b_m - \beta}{a_m - \beta} = i \cdot \arg \frac{b_m - \beta}{a_m - \beta}$$

tend vers $-2\varphi i$ quand $a_m \to \beta$ et $b_m \to \beta$.

On obtient ainsi

$$f_1(x) = \sum \frac{A_{n'}}{x - \alpha_{n'}} + \frac{\varphi}{\pi} \frac{A_\varkappa}{x - \alpha_\varkappa}; \quad f_2(x) = \sum \frac{A_{n''}}{x - \alpha_{n''}} + \frac{\pi - \varphi}{\pi} \frac{A_\varkappa}{x - \alpha_\varkappa}$$

et alors la décomposition dépend du séparateur.

On pourrait développer les mêmes raisonnements dans des cas plus généraux. Des complications surgiraient seulement si l'on prenait l'ensemble F assez irrégulier, p. ex., non rectifiable, admettant des points inaccessibles etc.

IV. Séries de fractions (autres que les précédentes).

Considérons maintenant des séries de fractions qui ne se prètent pas à une décomposition aussi immédiate que les séries étudiées plus haut.

Prenons donc la série suivante:

$$(11) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z - \alpha_n)(z - \beta_n)},$$

où les A_n forment une série absolument convergente et les α_n et β_n sont différents deux à deux.

En décomposant chaque terme de (11) en deux fractions simples, on obtiendra de (11) une série analogue à la série (6), mais qui ne sera pas en général convergente si la borne inférieure des $|\alpha_n - \beta_n| = 0$.

La série (11) converge dans tous les cas uniformément sur tout ensemble fermé disjoint de l'ensemble F — la fermeture de l'ensemble de tous les α_n et β_n.

Considérons le cas où F est l'ensemble singulier de $f(z)$ $\left(\text{il pourrait ne pas être ainsi comme p. ex. pour } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{n}\right)\left(z - \frac{1}{n+1}\right)}\right)$.

Considérons maintenant une courbe simple fermée C de longueur finie et coupant l'ensemble F en un nombre fini de points $u_1, u_2, \ldots, u_\varkappa$. Nous supposerons en plus que si un point z parcourt la courbe C, alors (en désignant, comme d'habitude, par $\varrho(z, F)$ la distance minimum de z à F)

$$\frac{\varrho(z, F)}{|z-u_m|} > \tau > 0, \tag{12}$$

où on prend le point u_m le plus approché de z et où τ ne dépend ni de m ni du point z sur C.

La dernière condition est un peu plus faible que la suivante: en chaque point u_m les cotingents (au sens de M. Bouligand) de F et de C n'ont aucune direction commune.

Posons: $F_1 =$ l'ensemble des points de F situés dans le domaine intérieur de C ou sur C et $F_2 =$ l'ensemble des points de F extérieurs à C ou sur C.

Cherchons la décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ correspondant à la décomposition $F = F_1 + F_2$. Pour ne pas distinguer les différents cas qui peuvent se présenter ici, nous emploierons la deuxième méthode du complément II au théor. **A**.

A cet effet posons

$$\varphi(z) = \prod_{m=1}^{\varkappa} (z-u_m)$$

et remarquons que d'après (11) et (12) on a pour z sur C

$$|f(z)\,\varphi(z)^2| < \frac{M}{\tau^2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|, \tag{13}$$

avec un M constant. On peut prendre $M = \delta^{2\varkappa-2}$ ($\delta =$ le diamètre de C), vu que

$$\left|\frac{A_\varkappa (z-u_1)^2 (z-u_2)^2 \cdots (z-u_\varkappa)^2}{(z-\alpha_n)(z-\beta_n)}\right| \leq \tag{14}$$

$$\leq \left|\frac{A_\varkappa (z-u_1)^2 \cdots (z-u_{m-1})^2 (z-u_m)^2 (z-u_{m+1})^2 \cdots (z-u_\varkappa)^2}{\varrho(z, F)^2}\right| < \frac{\delta^{2\varkappa-2}}{\tau^2} |A_n|.$$

En prenant donc pour séparateur la courbe C on voit d'après (13) que la seconde méthode (par division) peut être appliquée avec la fonction auxiliaire $h(x) = \frac{1}{\varphi(x)^2}$. On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i\,\varphi(x)^2} \int_C \frac{f(z)\,\varphi(z)^2}{z-x}\,dz.$$

D'après (14), la serie

$$\frac{f(z)\,\varphi(z)^2}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n\,\varphi(z)^2}{(z-\alpha_n)(z-\beta_n)(z-x)}$$

est uniformément convergente sur C, donc on peut l'intégrer terme à terme suivant C ce qui donne

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\varphi(x)^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(z)^2\,dz}{(z-\alpha_n)(z-\beta_n)(z-x)}\,.$$

Les dernières intégrales se trouvent facilement par le calcul des résidus. Nous omettons ici de donner la représentation définitive de $f_1(x)$, qui est assez complexe. Remarquons seulement qu'avec d'autres fonctions $h(x)$ $\left(\text{p. ex.} = \sum_{m=1}^{\varkappa} \frac{1}{(x-u_m)^2}\right)$ on pourrait obtenir des décompositions moins compliquées d'un certain point de vue.

V. Fonctions continues dans tout le plan.

On a dernièrement beaucoup étudié des fonctions uniformes, continues et bornées dans tout le plan et admettant pour ensemble singulier une coupure essentielle (c. à d. au delà de laquelle elles ne peuvent être prolongées). M. Denjoy[1] en a défini récemment une classe très intéressante dont il a poussé l'étude jusqu'à une grande perfection.

En relation avec nos recherches, on arrive immédiatement dans ce domaine à se poser la question suivante: si l'on décompose l'ensemble singulier d'une telle fonction $f(z)$ en deux parties $F = F_1 + F_2$ telles que $F_1 \cdot F_2$ soit de mesure linéaire finie (le plus souvent $F_1 \cdot F_2$ sera formé par un seul point) et si l'on cherche la décomposition correspondante $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, est-il toujours possible d'obtenir que les deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ soient de la même nature que $f(z)$, c. à d. qu'elles soient continues et bornées dans le plan entier?

Cette question me paraît assez difficile dans le cas général, mais pour les classes de fonctions de cette nature, établies jusqu'à maintenant, la réponse est affirmative comme on le démontre facilement.

Remarquons que s'il existe une décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ avec les f_1 et f_2 continues et bornées dans tout le plan, une telle décomposition est unique.

[1] Comp. Bull. Soc. Math., t. LX, 1932.

En effet, s'il y en avait une autre $f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, l'ensemble singulier de $f_1(z) - \varphi_1(z)$ devrait être compris dans $F_1 \cdot F_2$ (comp. remarque II, § 2) et il serait par conséquent de mesure linéaire finie. Mais la fonction $f_1 - \varphi_1$ étant continue et bornée dans le plan entier (comme f_1 et φ_1), son ensemble singulier ne peut pas avoir une mesure linéaire finie.[1]

On pourrait essayer d'obtenir la décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ satisfaisant aux conditions demandées, à l'aide de l'intégrale

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - x}\,dz,$$

où L est un séparateur approprié.

En effet, nous obtiendrons toujours une décomposition par cette voie, si seulement le séparateur L est de longueur finie, $f(z)$ étant bornée sur L. Plus encore, on est sûr (comp. le complément II du § 2) qu'on obtiendra ici la même fonction $f_1(x)$ pour tout séparateur L rectifiable, la mesure linéaire de $F_1 \cdot F_2$ étant supposée nulle.

Je ne sais pas si dans le cas général on obtient ainsi une décomposition conforme aux conditions posées. Mais pour les fonctions étudiées par M. Denjoy dans la deuxième partie de son mémoire, ceci est très facile à vérifier. Les fonctions de M. Denjoy font partie d'une classe plus étendue de fonctions qui peuvent être mises sous la forme d'une intégrale de Stieltjes

$$f(z) = \int_\alpha^\beta \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi) - z}, \tag{15}$$

où la fonction $\zeta(\xi)$ fait correspondre d'une manière biunivoque et continue les points ζ d'un arc simple F aux points ξ de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, et la fonction $\omega(\xi)$ est réelle, positive, continue et croissante. $\zeta(\xi)$ et $\omega(\xi)$ sont telles que

$$\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} \frac{d\,\omega(\xi)}{|\zeta(\xi) - z|} < \delta(\varepsilon), \tag{16}$$

où $\delta(\varepsilon)$ ne dépend ni de z (pris en dehors de F) ni de γ (pris entre α et $\beta - \varepsilon$) et tend vers 0 avec ε.

[1] Dans le cas d'un arc simple rectifiable ceci a déjà été démontré par Painlevé (voir la démonstration p. ex. dans le mémoire cité de M. Denjoy, p. 34—35). Dans le cas d'un ensemble quelconque de mesure linéaire finie on le démontre d'une manière analogue.

On démontre à l'aide de (16) que $f(z)$ est uniformément continue en dehors de F, et ceci suffit pour que $f(z)$ puisse être prolongée d'une manière continue (mais non holomorphe) sur F. D'autre part, il est facile de voir que $f(z)$ est holomorphe en dehors de F, nulle à l'infini et non-constante pour des grandes valeurs de z. Il en résulte que $f(z)$ est continue et bornée dans tout le plan et que son ensemble singulier est contenu dans F et possède une mesure linéaire infinie.

Il en sera de même pour toute fonction donnée par l'intégrale (15) étendue sur un intervalle $[\alpha_1; \beta_1]$ quelconque compris dans $[\alpha; \beta]$. Ceci montre que l'ensemble singulier de $f(z)$ est égal à F. D'autre part, ceci nous permet d'obtenir directement la décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ correspondant à une décomposition de l'ensemble singulier, $F = F_1 + F_2$. En effet aux ensembles F_1 et F_2 correspondent dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$ deux ensembles fermés A_1 et A_2. L'ensemble $A_1 - A_2$ est la somme d'une suite au plus dénombrable d'intervalles et la fonction

$$f_1(z) = \int\limits_{A_1 - A_2} \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi) - z},$$

où l'intégration est étendue à tous les intervalles de $A_1 - A_2$, est continue dans tout le plan et possède pour ensemble singulier l'ensemble $F_1 = \overline{F_1 - F_2}$ (on se limite ici aux décompositions propres). $f_1(z)$ avec la fonction $f_2(z) = f(z) - f_1(z)$ forment la décomposition cherchée de $f(z)$.

Voyons maintenant quelle est la forme de la décomposition obtenue à l'aide de nos méthodes. Nous nous limiterons au cas le plus simple: quand F_1 et F_2 sont deux arcs ayant un seul point commun t et quand il existe un séparateur correspondant L de longueur finie (hypothèse qui est remplie toujours par les courbes singulières des fonctions de M. Denjoy).

On voit aisément que L est ici nécessairement une courbe simple fermée ayant le seul point t en commun avec F et on peut supposer qu'elle contient dans son domaine intérieur l'ensemble $F_1 - F_2$. Soit τ le point de l'intervalle $[\alpha; \beta]$ qui correspond à t. On sait d'après (16) que la suite des fonctions

$$\varphi_n(z) = \int\limits_{\alpha}^{\tau - \varepsilon_n} \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi) - z} + \int\limits_{\tau + \varepsilon_n}^{\beta} \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi) - z}, \quad \text{où } \varepsilon_n > 0 \text{ et } \varepsilon_n \to 0$$

converge uniformément vers la fonction $f(z)$. Il en résulte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_n(z)}{z-x}\,dz.$$

Mais en intervertissant l'ordre d'intégration on a pour x dans le domaine extérieur de L

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_n(z)}{z-x}\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\tau-\varepsilon_n} \frac{d\,\omega(\xi)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{(\zeta(\xi)-z)(z-x)} + \int\limits_{\tau+\varepsilon_n}^{\beta} \frac{d\,\omega(\xi)}{2\pi i}\int \frac{dz}{(\zeta(\xi)-z)(z-x)},$$

d'où, en supposant que c'est l'intervalle $[\alpha;\tau]$ qui correspond à F_1, on obtient que la seconde intégrale est o et que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_n(z)}{z-x}\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\tau-\varepsilon_n} \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi)-x}.$$

Ceci nous donne enfin

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \lim_{n=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_n(z)}{z-x}\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{d\,\omega(\xi)}{\zeta(\xi)-x},$$

la même fonction que celle qu'on obtiendrait dans ce cas par la méthode directe.

VI. Décomposition des fonctions multiformes.

Comme derniers exemples donnons la décomposition de deux fonctions multiformes les plus simples.

Prenons d'abord la fonction $f(z) = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$. Conformément à nos conventions rendons-la uniforme par une coupure, p. ex. le segment $[a;b]$. Ce segment formera l'ensemble singulier de $f(z)$. Décomposons-le par un point intermédiaire c en deux segments $[a;c]$ et $[c;b]$ et cherchons la décomposition correspondante de $f(z)$. On la trouve directement

$$\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \log\left(\frac{z-a}{z-c}\right) + \log\left(\frac{z-c}{z-b}\right).$$

Par nos méthodes on l'obtient aussi facilement:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\frac{dz}{z-x},$$

où L est une courbe simple fermée entourant a et coupant le segment $[a; b]$ en c. La fonction $f_1(x)$ ne dépendant pas du choix de la courbe L (pourvu qu'elle soit rectifiable), on peut prendre pour L un rectangle dont deux cotés très petits sont perpendiculaires à $[a; b]$, un passant par c, l'autre — au voisinage de a, tandis que les deux autres sont parallèles à $[a; c]$. Les intégrales prises sur les cotés perpendiculaires tendant vers 0 avec la longueur de ces cotés, et les intégrales sur les deux cotés restant tendant vers les intégrales prises sur le segment $[a; c]$, parcouru dans les deux directions et pour les deux déterminations du $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ sur ce segment, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^c \frac{dz}{z-x}\left[\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) - \log_1\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right],$$

où $\log_1$ désigne la seconde détermination du log sur $[a; c]$. Vu que $\log - \log_1 = -2\pi i$, on en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^c \frac{dz}{z-x}\cdot(-2\pi i) = -\log\frac{c-x}{a-x} = \log\left(\frac{x-a}{x-c}\right),$$

donc la même fonction que par la voie directe.

Prenons comme second exemple $f(x) = \sqrt{x}$. Comme coupure nous admettrons le demi-axe réel positif et nous considérerons la détermination de $\sqrt{x}$ pour laquelle $\sqrt{-1} = +i$.

Décomposons la coupure par un point a $(a > 0)$ en deux parties: le segment $[0; a]$ et la demi-droite $[a; +\infty]$. La décomposition correspondante de $f(z)$ n'est plus très commode à trouver directement. Cherchons-la par notre méthode. Comme plus haut pour le $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$, on voit tout de suite que le séparateur peut être pris infiniment voisin de deux cotés du segment $[0; a]$ et que par conséquent la fonction $f_1(x)$ est donnée par la formule

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^a \frac{\sqrt{z}\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^a \frac{-\sqrt{z}\,dz}{z-x} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^a \frac{\sqrt{z}\,dz}{z-x},$$

où $\sqrt{z}$ est positif sur le segment $[0; a]$.

Par des transformations élémentaires on arrive à

$$f_1(x) = \frac{2\sqrt{a}}{\pi i} + \frac{\sqrt{x}}{\pi i} \log \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}, \quad \sqrt{a} > 0.$$

Dans le membre droit de cette égalité on a une fonction multiforme. On obtient $f_1(x)$ de cette fonction multiforme en la prolongeant p. ex. à partir de l'élément au centre $x = -a$ et pour lequel $f_1(-a) = \frac{2\sqrt{a}}{\pi i} - \frac{\sqrt{a}}{2i}$, séparément dans le demi-plan supérieur ($\Im x > 0$) et le demi-plan inférieur ($\Im x < 0$). On s'aperçoit immédiatement que les valeurs obtenues de ces deux manières pour les valeurs de x sur les deux demi-droites $[-\infty; 0]$ et $[a; +\infty]$, s'accordent parfaitement, tandis que dans le segment $[0; a]$ les deux déterminations diffèrent de $-2\sqrt{x}$. On en déduit qu'en effet l'ensemble singulier de $f_1(x)$ est le segment $[0; a]$ et que la fonction

$$f_2(x) = \sqrt{x} - f_1(x)$$

a pour ensemble singulier la demi-droite $[a; +\infty]$.

II^ème^ Partie.

Applications.

§ 1. Les décompositions de M. Fréchet.

Comme première application de nos théorèmes généraux de la I^ere^ partie de ce mémoire, nous allons considérer les décompositions obtenues par M. Fréchet dans son mémoire des Acta math., 54, cité plus haut, qui a été le point de départ de nos développements.

Dans ce mémoire, M. Fréchet s'occupe de certains cas particuliers du problème suivant: *étant donnée une fonction analytique $f(z)$, holomorphe et uniforme dans tout le plan en dehors d'un certain ensemble singulier F, la décomposer en somme de deux fonctions analytiques $f_1(z)$ et $f_2(z)$, holomorphes et uniformes dans tout le plan en dehors des ensembles F_1 et F_2 respectivement, les ensembles F_1 et F_2 étant compris dans F et plus simples que F.*[1]

[1] C'est sous cette forme genérale que le probleme m'a ete posé par M. Fréchet.

Pour que le problème ainsi énoncé ne comporte pas d'équivoque, il est nécessaire d'y préciser quels ensembles F_1 et F_2 seront considérés comme plus simples que F. Ce n'est qu'après avoir établi, d'une manière ou d'une autre, la définition correspondante, qu'on peut passer à la solution du problème. Celle ci se décompose alors en deux parties:

1°. Prouver que l'ensemble singulier d'une fonction analytique uniforme quelconque (celà peut être un ensemble fermé quelconque!) est toujours décomposable en deux parties »simples»;

2°. Démontrer qu'à la décomposition de l'ensemble singulier F de la fonction $f(z)$ en deux parties »simples» F_1 et F_2 correspond au moins une décomposition de la fonction $f(z)$ en somme de deux fonctions analytiques $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ayant pour ensembles singuliers les ensembles F_1 ou F_2 respectivement.

Supposons pour l'instant que la première partie de la solution est déjà établie. Pour résoudre alors la seconde partie, on est tout naturellement amené à appliquer le théorème **A**. Pour ceci il faut d'abord supposer que les ensembles F_1 et F_2 sont fermés[1], ce qui sera toujours admis, autrement F_1 et F_2 ne pourraient pas être ensembles singuliers des $f_1(z)$ et $f_2(z)$. Après, il ne resterait qu'à appliquer directement le théorème **A**, si l'on parlait dans le problème des fonctions hol. et unif. dans notre sens (comp. § 1 de la I^re^ partie), car le théorème **A** ne s'occupe que de telles fonctions.

Mais, si l'on considère des fonctions analytiques, holomorphes et uniformes dans leur domaine d'existence (qui peut ne pas être leur domaine h. u. dans notre sens) il n'y a qu'à appliquer le théorème **A'** (comp. I^re^ partie, § 2, remarque III) pour obtenir le même résultat.

On voit ainsi que notre théorème **A'** réduit le problème de M. Fréchet à sa première partie. Mais le problème ainsi réduit devient un problème de la théorie des ensembles. Plus exactement, si dans la définition d'ensembles »simples» n'entrent que des notions topologiques, le problème réduit ressortira à la *topologie ensembliste*[2], tandis que si l'on y emploie également (ou rien que) des notions métriques ou géométriques, il appartiendra à la *géométrie ensembliste*.[2]

Il est bien clair qu'il y a une infinité de manières de définir les ensembles »simples». Le choix dépendra du but que l'on se pose et du point de vue où l'on se place.

[1] Rappelons que nous considérons constamment l infini comme appartenant au plan, donc un ensemble fermé non borné renferme toujours l'infini.

[2] Je traduis ainsi les termes allemands »Mengentheoretische Topologie» et »Mengentheoretische Geometrie», ce dernier introduit par M. Menger.

En général la »simplicité» des ensembles F_1 et F_2 par rapport à F consistera en ce que les deux premiers appartiendront à deux classes d'ensembles fermés, l'un à $\mathfrak{R}_1$ et l'autre à $\mathfrak{R}_2$, *aucune de ces deux classes ne renfermant tous les ensembles fermés*, tandis que l'ensemble F peut parcourir tous les ensembles fermés.[1]

Dans les exemples que nous allons donner, nous procéderons de la manière suivante: nous considérerons une certaine propriété (P) des ensembles E. A l'aide de cette propriété, nous définirons les classes $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ comme suit:

(1) *La classe $\mathfrak{R}_1$ est formée des ensembles fermés K_1, tels que la somme S_1 de tous les ensembles E possédant la propriété (P) et contenus dans K_1 est partout dense dans K_1 (c. à d. $K_1 = \overline{S}_1$).*

(2) *La classe $\mathfrak{R}_2$ est formée des ensembles fermés K_2, tels que la somme S_2 de tous les ensembles E possédant la propriété (P) et contenus dans K_2 est non-dense dans K_2 (c. à d. $K_2 = \overline{K_2 - \overline{S}_2}$).*

La propriété (P) de l'ensemble E ne doit pas être nécessairement absolue (c. à d. dépendre uniquement de E), elle peut être aussi relative à un ensemble K_1 ou K_2 contenant E, p. ex., elle pourra renfermer la condition que E soit relativement ouvert dans K_1[2] ou K_2.

Dans ces conditions, on obtient immédiatement la décomposition d'un ensemble fermé quelconque F en deux ensembles fermés F_1 et F_2 appartenant respectivement à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$. Notamment, en posant

(3) $S =$ *la somme de tous les ensembles* $E < F$ *ayant la propriété* (P),

(4) $$F_1 = \overline{S};\ F_2 = \overline{F - F_1} = \overline{F - \overline{S}}.^3$$

On prouve facilement que F_1 et F_2 ainsi définis appartiennent d'après (1) et (2) respectivement à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$.[4]

---

[1] Quand F appartiendra à une de ces classes p. ex. à $\mathfrak{R}_1$, on pourra poser $F_1 = F$ et $F_2 = 0$. Il sera donc utile d'admettre que l'ensemble vide appartient à chacune de ces classes.

[2] C. à d. que E est l'ensemble commun de K_1 et d'un ensemble ouvert du plan, ou bien, ce qui revient au même, que $E \cdot \overline{K_1 - E} = 0$.

[3] Cette décomposition $F = F_1 + F_2$ est tout à fait analogue à celle utilisée par M. Fréchet dans des cas particuliers.

[4] Ceci est vrai sans exception pour les propriétés (P) absolues mais ne l'est plus pour certaines propriétés (P) relatives. Dans tous les cas, cela restera vrai pour les propriétés (P) relatives considérées dans la suite.

Passons maintenant aux exemples de décompositions $F = F_1 + F_2$, et d'abord à ceux qui n'utilisent que des notions topologiques.

1°. Prenons comme propriété (P) la propriété *d'être un ensemble parfait.* La classe $\mathfrak{R}_1$ sera alors composée de tous les ensembles parfaits, tandis que la classe $\mathfrak{R}_2$ contiendra tous les ensembles fermés K_2 dans lesquels leurs propres points isolés forment un ensemble partout dense. La décomposition $F = F_1 + F_2$ a la signification suivante: F_1 est le noyau parfait de Cantor de F et F_2 est la fermeture de l'ensemble des points isolés de F. Quand cette décomposition n'est pas propre (comp. § 2, complément I au théorème **A**), on peut remplacer F_1 par $F_1^0 = \overline{F_1 - F_2}$ et obtenir (on le prouve immédiatement) une décomposition propre $F = F_1^0 + F_2$ du même genre (c. à d. que F_1^0 appartiendra avec F_1 à la classe $\mathfrak{R}_1$).

La décomposition correspondante $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ a été obtenue par M. Fréchet[1] qui a remarqué qu'elle précise une décomposition classique de Mittag-Leffler.

Notamment, dans la décomposition de Mittag-Leffler, on est sûr seulement que $f_2^0(z)$ n'a des singularités que dans F_2 et qu'elle présente les mêmes singularités que $f(z)$ aux points singuliers isolés de celle-ci. De cette manière l'ensemble singulier de $f_1^0(z) = f(z) - f_2^0(z)$ peut être beaucoup plus grand que F_1; il peut être égal à l'ensemble de tous les points non isolés de F, et peut former un ensemble fermé le plus général. Ainsi, dans la décomposition de Mittag-Leffler, l'ensemble singulier de f_1^0 n'est pas toujours plus simple que celui de f, tandis que dans la décomposition de Fréchet, les deux ensembles F_1 et F_2 (si $F_1 \neq 0 \neq F_2$) sont toujours plus simples que F.

2°. $(P) \equiv$ *être un continu.*[2]

Un ensemble fermé K_1 appartient alors à la classe $\mathfrak{R}_1$, si la somme de ses sous-continus est dense en lui, ou bien, ce qui revient au même, si l'ensemble de ses points où il est de dimension au moins 1 (au sens de Urysohn-Menger) est dense en lui.

Un ensemble fermé K_2 appartient à $\mathfrak{R}_2$, s'il est la fermeture d'un ensemble discontinu rel. ouvert dans K_2, ou bien, ce qui est équivalent, si l'ensemble des points où K_2 est de dimension ≥ 1, est non-dense dans K_2.

[1] l. c., p. 75.

[2] Nous appelons continu un ensemble connexe et compact en soi qui ne se réduit pas à un seul point. L'ensemble composé d'un seul point sera parfois appelé continu dégénéré. Dans le plan complexe (avec le point à l'infini) les continus coïncident avec la classe des ensembles connexes et fermés.

Si la décomposition correspondante $F = F_1 + F_2$ n'est pas propre, on remplacera F_1 par $F_1^0 = \overline{F_1 - F_2}$ (comme plus haut) et on aura ainsi (comme on prouve facilement) une décomposition propre du même genre.

La décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ qui s'ensuit a été également obtenue par M. Fréchet.[1]

3°. (P) est une propriété relative de E par rapport à $K > E$ qui consisté en ceci: *E est un ensemble fermé sans composant isolé*[2], *et dont tous les composants sont en même temps des composants de K.*

Dans le cas présent, les classes $\mathfrak{K}_1$ et $\mathfrak{K}_2$ se définissent ainsi:

K_1 appartient à $\mathfrak{K}_1$, s'il ne contient aucun continu isolé.

K_2 appartient à $\mathfrak{K}_2$, si tout voisinage de chaque composant de K_2 contient des continus isolés de K_2.

La décomposition $F = F_1 + F_2$ s'obtient comme suit: F_1 est la somme de tous les composants de F tels que chacun de leurs voisinages renferme une infinité non-dénombrable des composants de F: F_2 est la somme de tous les composants de F dans chaque voisinage desquels il y a des continus isolés de F.

Cette décomposition (sous une forme un peu différente) a été également considérée par M. Fréchet.[3]

Dans les trois exemples que nous venons d'exposer on pourrait obtenir la décomposition correspondante $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ en n'utilisant que le cas particulier du théorème **A**, démontré déjà par M. Fréchet.[4]

Nous passons maintenant aux exemples où on aura besoin du théorème **A** (ou **A'**) dans toute sa généralité.

4°. $(P) \equiv$ *être un ensemble ouvert (dans le plan).*

La classe $\mathfrak{K}_1$ est formée par les fermetures des ensembles ouverts.

La classe $\mathfrak{K}_2$ est formée par les ensembles fermés sans points intérieurs (c. à d. non-denses dans le plan). On voit immédiatement, d'après (3) et (4), ce qu'est la décomposition $F = F_1 + F_2$.

---

[1] l. c., p. 77.

[2] D'apres la terminologie de M. Fréchet, isolé dans E veut dire fermé et relativement ouvert dans E.

[3] l. c., p. 72.

[4] Comp. Aronszajn, Comptes Rendus Ac. Sc. 193, 1931, p 1381.

La décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ sera la décomposition la plus »avantageuse» de $f(z)$ en une partie $f_1(z)$ eventuellement non conforme à nos conventions (comp. § 1, I^{re} partie) et une partie $f_2(z)$ conforme à ces conventions (car F_2 est non dense dans le plan). Elle est la plus »avantageuse» dans le sens que la partie $f_1(z)$ non conforme à nos conventions y possède l'ensemble singulier le plus petit possible.

Dans les exemples suivants la propriété (P) sera métrique.

5°. $(P) \equiv$ *être un continu de diamètre* $\geq \delta$.[1]

La classe $\mathfrak{R}_1$ est composée des ensembles fermés dont tous les composants sont de diamètre $\geq \delta$.

La classe $\mathfrak{R}_2$ est composée des ensembles fermés où l'ensemble des composants de diamètre $\geq \delta$ est non dense.

La décomposition $F = F_1 + F_2$ est définie comme suit: F_1 est la somme de tous les composants de F de diamètre $\geq \delta$ (cette somme est fermée, si l'on prend la convention de la note 1 de cette page, autrement il faudrait y adjoindre, le cas échéant, pour F non-borné, le point à l'infini); $F_2 = \overline{F - F_1}$. Quand cette décomposition n'est pas propre on peut la rendre telle en remplaçant F_1 par $F_1^0 = \overline{F_1 - F_2}$.

Si δ varie de 0 jusqu'à l'infini[2] l'ensemble F_1 diminue de F[3] jusqu'à 0, tandis que l'ensemble F_2 augmente de 0 à F.

Si l'on remplaçait dans la propriété (P) l'inégalité $\geq \delta$ par $> \delta$, il faudrait apporter quelques petits changements dans la définition des classes $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$. F_1 serait dans ce cas la fermeture de la somme des composants de F de diamètre $> \delta$, F_2 serait comme avant $\overline{F - F_1}$. Pour δ variant de 0 jusqu'à l'infini[2], la décomposition $F = F_1 + F_2$ commencerait par être (pour $\delta = 0$) la décomposition 2°. et finirait — le F_1 diminuant et le F_2 augmentant — par la décomposition $F_1 = 0$, $F_2 = F$.

6°. (P) est une propriété relative de E par rapport à $K > E$.

$(P) \equiv$ *E est ouvert dans K et de mesure superficielle* 0.[4]

Un ensemble fermé K_1 appartient à $\mathfrak{R}_1$, si K_1 est de mesure superficielle 0 à un ensemble non-dense dans K_1 près.

[1] On considérera le diamètre sur la sphère de Riemann.

[2] Ou plutot jusqu'à 2.

[3] Si l'on considere un point comme continu (degénéré).

[4] Nous prenons ici la mesure superficielle de Lebesgue. On pourrait obtenir des décompositions analogues à celle qui s'ensuit dans le texte en considérant la mesure linéaire ou, plus généralement les mesures des dimensions non-entieres de M. Hausdorff.

Ceci n'implique nullement que K_1 est lui-même de mesure superficielle o. Comme exemple on peut prendre un ensemble parfait discontinu P de mesure superficielle positive, auquel on aura adjoint un ensemble dénombrable N de points pris en dehors de P et tel que l'ensemble des points limites de N (l'ensemble dérivé de N) soit égal à P. L'ensemble $K_1 = P + N$ appartiendra à la classe $\mathfrak{R}_1$ (car P est non-dense dans K_1 et N est de mesure o) et sera de mesure superficielle positive.

Un ensemble fermé K_2 appartient à $\mathfrak{R}_2$, si l'ensemble de ses points où il est localement de mesure superficielle positive, y est partout dense.

L'ensemble K_2 est dit localement de mesure positive au point a, si, pour tout voisinage de a, la partie de K_2 contenue dans ce voisinage est de mesure positive.

L'ensemble F est décomposable d'une manière unique en deux ensembles F_1 et F_2 appartenant à $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ respectivement. La définition et les propriétés de F_1 et F_2 s'obtiennent facilement d'après (3) et (4).

Nous nous bornons à ces quelques exemples exposés plus haut. On voit clairement comment procéder dans d'autres cas qui pourraient se présenter. Toute la question se réduit à l'étude des propriétés des classes $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ et des décompositions $F = F_1 + F_2$ qui s'ensuivent.

§ 2. **Développements en séries de parties principales.**

Définition des parties principales généralisées d'une fonction.

Nous nous sommes déjà occupés en passant (dans le complément I au théor. **A**) des parties principales d'une fonction $f(z)$. Précisons ici cette notion.

Soit H un sous-ensemble de l'ensemble singulier F de $f(z)$. Quand on parle d'une partie principale $h(z)$ de $f(z)$ correspondant à l'ensemble H, on a tout de suite présente à l'esprit la condition suivante:

(1) *La différence $f(z) - h(z)$ est holom. et unif. sur H.*

On en déduit immédiatement que H appartient à l'ensemble singulier de $h(z)$. Si la différence $f(z) - h(z)$ était holomorphe en certains points de F en dehors de H, la fonction $h(z)$ serait partie principale correspondant à un ensemble plus grand que H. Si donc $h(z)$ correspond exactement à H, il est nécessaire que l'ensemble singulier de $f(z) - h(z)$ contienne au moins tous les points de $F - H$ et ne contienne aucun point de H. Ainsi $F - H$ est dans tous les cas l'ensemble commun à F et à l'ensemble singulier de $f(z) - h(z)$; il est donc fermé et, par conséquent,

(2) *L'ensemble H est relativement ouvert dans F.*

La condition (2) est donc nécessaire pour qu'il existe une partie principale correspondant à H. P. ex. H peut être un point isolé dans F — c'est le cas classique dans lequel on définissait habituellement la partie principale de $f(z)$ — ou bien H peut être un ensemble isolé dans F (car isolé $\equiv$ fermé et ouvert dans F) — c'est le cas considéré par M. Fréchet.[1]

Mais la condition (1) ne saurait encore suffire à caractériser une partie principale de $f(z)$. La partie principale $h(z)$, dans les cas considérés habituellement, remplit encore la condition qui vient tout naturellement à l'esprit que $h(z)$ n'est pas singulière en dehors de H. Ceci n'est possible à obtenir que quand H est fermé donc, vu (2), isolé dans F. Dans le cas plus général, permis par la condition (2), le plus de restriction qu'on puisse exiger est formulé par la condition

(3) *L'ensemble singulier de $h(z)$ est égal à $\bar{H}$.*

Les conditions (1) et (3) seront considérées comme caractérisant parfaitement une partie principale de $f(z)$ correspondant à l'ensemble H conforme à (2) (comp. la remarque I plus loin). A chaque ensemble H, ouvert dans F, correspond ainsi une infinité de parties principales, qui diffèrent deux à deux par des fonctions aux ensembles singuliers compris dans $\bar{H} - H$ (la frontière relative de H dans F) et d'ailleurs quelconques.[2]

A l'aide du théorème **A** on obtient facilement une partie principale correspondant à H. Notamment on prend la décomposition $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ correspondant à la décomposition $F = \bar{H} + (F - H)$. On voit immédiatement qu'on a dans $h(z) = f_1(z)$ une telle partie principale.

Soit $h(z)$ une partie princ. de $f(z)$ par rapport à l'ensemble H ouvert dans F et $h_1(z)$ une partie princ. de $h(z)$ par rapport à H_1 ouvert dans $\bar{H}$. $h_1(z)$ forme toujours une partie princ. de $f(z)$ pour le plus grand ensemble, ouvert dans

[1] Comp. Frechet, l. c., p. 42.

[2] Quand H est isolé dans F, $\bar{H} - H = 0$, et deux parties principales ne different que par une constante. On choisit d'habitude parmi ces parties principales celle qui s'annule à l'infini (quand H est borné). Cette convention, sans importance, distingue un point spécial dans le plan, ce qui n'est pas dans l'esprit de nos recherches générales. En principe nous ne la ferons pas.

F et compris dans H_1 (c'est donc l'ensemble des points intérieurs à H_1 relativement à F). Cet ensemble n'est pas toujours égal à H_1; il l'est quand H_1 est ouvert dans F et, en particulier, quand $H_1 < H$.

Remarque I: En réalité, la condition (2) pour H et les conditions (1) et (3) pour $h(z)$ ne sont pas tout à fait satisfaisantes. Dans certains cas elles peuvent donner une fonction $h(z)$ telle que $f(z) - h(z)$ soit holomorphe encore en certains points de $\bar{H} - H$, il existerait donc des parties principales correspondant à H qui correspondraient également à un ensemble plus grand que H. Ceci a lieu dans le cas (et seulement dans ce cas), où la décomposition $F = \bar{H} + (F - H)$ est impropre, c. à d. l'ensemble $F - H$ est plus grand que $\overline{F - \bar{H}}$. On pourra alors former des parties principales $h(z)$ correspondant à l'ensemble $H_1 = F - \overline{F - \bar{H}}$ plus grand que H, et dont la fermeture $\bar{H}_1$ est égale à $\bar{H}$. Ces parties princi pales correspondront en même temps à H. P. ex., si F est le segment fermé (avec extrémités) $[0; 1]$ et a un point intérieur de ce segment, on pourra prendre: $H =$ le segment ouvert $(0; a)$, $H_1 =$ le segment demi-ouvert $[0; a)$ — les deux sont ouverts dans $F = [0; 1]$ — et on aura $\bar{H}_1 = \bar{H} = [0; a]$.

Pour éviter un tel état de choses on peut imposer à H une condition supplémentaire

$$F - H = \overline{F - \bar{H}} \tag{2'}$$

qui assure la »propreté» de la décomposition $F = \bar{H} + (F - H)$. Nous appellerons *portions de* F les ensembles H satisfaisant à (2) et (2').

Pour des raisons de commodité, nous considérerons dans la suite les parties principales pour tout ensemble H ouvert dans F, quitte à distinguer celles qui correspondent aux portions de F en les nommant »propres».

Remarquons encore qu'à chaque ensemble H ouvert dans F correspond une et une seule portion H_1 telle que $\bar{H}_1 = \bar{H}$; c'est la portion définie plus haut: $H_1 = F - \overline{F - \bar{H}}$.

Séries de parties principales.

Prenons maintenant un nombre fini d'ensembles ouverts dans F: $H_1, H_2, \ldots$, deux à deux disjoints, avec les parties principales $h_1(z), h_2(z), \ldots$ La somme $H = \Sigma H_n$ est encore ouverte dans F et la somme $h(z) = \Sigma h_n(z)$ y forme évidemment une partie principale correspondante.

La fonction $r(z) = f(z) - h(z)$ aura alors pour ensemble singulier un sous-ensemble de $R = F - H$. Quand l'ensemble R est non-dense dans F nous dirons que F est décomposé en somme des H_n à un ensemble non-dense près. On peut alors énoncer le

Théorème I: *Si l'on décompose l'ensemble singulier F de $f(z)$, à un ensemble non-dense près, en somme d'un nombre fini d'ensembles ouverts dans F et deux à deux disjoints: $H_1, H_2, \ldots$, on peut choisir les parties principales $h_n(z)$ correspondant aux H_n de manière que l'on ait:*

$$f(z) = \Sigma h_n(z).$$

La démonstration est bien simple. Nous avons vu plus haut que pour un choix quelconque des parties principales, p. ex. $h_n^0(z)$ il y a en général un reste $r(z) = f(z) - h^0(z)$ (où $h^0(z) = \Sigma h_n^0(z)$) avec un ensemble singulier $R^0 < R = F - H \equiv F - \Sigma H_n$. L'ensemble R étant non-dense dans F, on a $\bar{H} = F$ et

$$R^0 < R\,(F - H)\bar{H} = \bar{H} - H = (\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \cdots) - (H_1 + H_2 + \cdots) < \Sigma(\bar{H}_n - H_n).$$

En posant donc $R_n^0 = R^0(\bar{H}_n - H_n)$ on trouve une décomposition $R^0 = \Sigma R_n^0$, à laquelle, par l'emploi répété du théor. **A**, on fera correspondre une décomposition $r(z) = \Sigma r_n(z)$, où $r_n(z)$ a l'ensemble singulier $R_n^0 < \bar{H}_n - H_n$. Par conséquent, $h_n(z) = h_n^0(z) + r_n(z)$ est encore une partie principale de $f(z)$ pour H_n et on a

$$f(z) = r(z) + \Sigma h_n^0(z) = \Sigma[r_n(z) + h_n^0(z)] = \Sigma h_n(z),$$

c. q. f. d.

Le théorème I est une généralisation de la décomposition classique d'une fonction à un nombre fini de points singuliers (dans ce cas, $R = 0$ et $r(z)$ est une constante qu'on départage entre différentes parties principales).

Quand le nombre des H_n est infini on obtient comme généralisation des décompositions obtenues par M. Fréchet (dans le cas des H_n isolés dans F) qui généralisent elles-mêmes les décompositions bien connues de Mittag-Leffler, le

Théorème II: *Soit $\{H_n\}$ une suite infinie d'ensembles ouverts dans F et deux à deux disjoints et soit L l'ensemble limite des H_n.*[1] *La fonction $f(z)$ est alors dé-*

[1] C. à d. l'ensemble des points limites de toutes les suites $\{x_n\}$ avec x_n appartenant à H_n.

veloppable en une série uniformément et absolument convergente dans chaque domaine fermé disjoint de F

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - g_n(z)],$$[1]

où $h(z)$ est une partie principale quelconque de $f(z)$ pour l'ensemble $H = F - \overline{\sum_1^{\infty} H_n}$ (quand $F = \overline{\Sigma H_n}$. c. à d. F = somme des H_n à un ensemble non-dense près, on peut prendre $h(z) = 0$), $h_n(z)$ — une partie principale (non quelconque!) de $f(z)$ pour H_n et les $g_n(z)$ sont des termes correctifs assurant la convergence de la série. Ces derniers sont, plus précisément, des fonctions rationnelles dont les pôles peuvent être choisis dans L.

En effet, remarquons d'abord que l'ensemble singulier de $f(z) - h(z) = f_1(z)$ est l'ensemble $\overline{\Sigma H_n} = F_1$, et que tout se réduit à obtenir le développement

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [h_n(z) - g_n(z)]. \tag{4}$$

Pour ceci posons

$$T_n = F_1 - \overline{\sum_1^n H_\varkappa}, \quad T_0 = F_1. \tag{5}$$

Il en résulte facilement (vu que les $H_\varkappa$ sont ouverts dans F et disjoints deux à deux)

$$T_n \supset \sum_{n+1}^{\infty} H_\varkappa; \quad \bar{T}_n = \overline{\sum_{n+1}^{\infty} H_\varkappa}, \tag{6}$$

$$T_{n+1} = T_n - H_{n+1}. \tag{7}$$

D'après (5) T_n est ouvert dans F_1, donc à plus forte raison dans $\bar{T}_{n-1}$. On peut donc définir de proche en proche les parties principales $h_n(z)$ et $t_n(z)$ de $f_1(z)$ correspondant à H_n et T_n (remarquons tout de suite que les $h_n(z)$ sont

---

Cet ensemble limite est donné par la formule: $L = \overline{\sum_1^{\infty} H_n} \cdot \overline{\sum_2^{\infty} H_n} \cdot \overline{\sum_3^{\infty} H_n} \cdots$. Il peut être encore défini par la propriété qu'il est le plus petit ensemble dont tout voisinage contient tous les H_n, à partir d'un certain rang n_0.

[1] Dans notre note des Comptes Rendus, 196, 1933, p. 521 la formule donnant la décomposition correspondante n'est pas exacte, il y manque de termes correctifs.

en même temps des parties princ. de $f(z)$ par rapport à H_n) de sorte que

$$t_{n-1}(z) = h_n(z) + t_n(z), \quad t_0(z) = f_1(z). \tag{8}$$

On s'appuie ici sur le fait que l'ensemble singulier de t_{n-1}, égal à $\bar{T}_{n-1}$, se décompose, d'après (6) et (7), en une somme de H_n et T_n, à un ensemble non-dense près, ce qui permet d'utiliser le théorème I.

D'après (6) et les propriétés de l'ensemble limite L (voir la note 1, p. 66), T_n — l'ensemble singulier de $t_n(z)$ — peut être enfermé dans un voisinage V_n de L se rétrécissant vers L pour $n \to \infty$. On peut évidemment supposer que chaque composant de V_n contient des points de L. Il contiendra alors également des points de $\bar{T}_n > L$ (car $L = \prod_1^\infty \bar{T}_n$ d'après (6) et la note 1, p. 66). D'après le théorème de Runge (comp. § 3, Ire partie) on trouvera une fonction rationnelle $g_n^0(z)$ aux pôles arbitrairement choisis dans V_n (mais au moins un dans chaque composant de V_n) de sorte que

$$|t_n(z) + g_n^0(z)| < \varepsilon_n \textit{ pour } z \textit{ en dehors de } V_n, \tag{9}$$

où $\varepsilon_n \to 0$. D'après (8) on peut maintenant écrire

$$f_1(z) = t_0(z) = \sum_1^n h_\varkappa + t_n = \sum_1^n [h_\varkappa - (g_\varkappa^0 - g_{\varkappa-1}^0)] + (t_n + g_n^0), \tag{10}$$

où l'on a posé $g_0^0(z) = 0$. En désignant $g_\varkappa^0(z) - g_{\varkappa-1}^0(z)$ par $g_\varkappa(z)$, on trouve d'après (9) et (10) que la formule (4) est juste et que la série qui s'y trouve est uniformément convergente même dans chaque domaine fermé disjoint de L (vu que les $V_\varkappa$ se rétrécissent vers L) si seulement on soustrait de cette série les termes (en nombre fini) qui y sont singuliers. En prenant les ε_n de sorte que $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$ on obtient même que cette série est absolument et uniformément convergente dans un tel domaine. En effet, on aura alors d'après (8) et (9), pour z dans le domaine considéré et n assez grand

$$|h_n - g_n| = |(t_{n-1} - t_n) - (g_n^0 - g_{n-1}^0)| \leq |t_{n-1} + g_{n-1}^0| + |t_n + g_n^0| < \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

ce qui prouve notre assertion.

Pour achever la démonstration il n'y a plus qu'à choisir les pôles des $g_n^0(z)$ dans L, ce qui est possible car nous avons choisi V_n de manière que chaque composant de V_n contient des points de L.

Remarque II: Il ressort de notre démonstration que les pôles des $g_n^0(z)$ peuvent être choisis à peu près arbitrairement pourvu qu'ils s'approchent de plus en plus et assez regulièrement de tous les points de L. Habituellement on les prend dans L, comme nous l'avons fait à la fin de la démonstration. Pourtant, dans certains cas (qui, précisément, ne sont pas classiques), on peut incorporer les pôles de la fonction $g_n^0(z)$ dans les singularités de la partie principale $h_n(z)$ de sorte que $h_n^0(z) = h_n(z) - [g_n^0(z) - g_{n-1}^0(z)]$ soit encore une partie principale de $f(z)$ par rapport à H_n. On aura alors

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^0(z).$$

Ceci s'obtient p. ex. dans le cas où les $\bar{H}_n$ sont des continus formant une *chaîne*, c. à d. tels que $\bar{H}_n \cdot \bar{H}_{n+1} = (\bar{H}_n - H_n) \cdot (\bar{H}_{n+1} - H_{n+1}) \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Les voisinages V_n peuvent être alors pris connexes et les pôles de g_n^0 choisis dans $\bar{H}_n \cdot \bar{H}_{n+1} < \bar{T}_n$. Ceci fait que les pôles de $g_n = g_n^0 - g_{n-1}^0$ se trouvent dans $\bar{H}_n \cdot \bar{H}_{n+1} + \bar{H}_n \cdot \bar{H}_{n-1} < \bar{H}_n - H_n$, ce qui prouve que $h_n^0 = h_n - g_n$ est une partie princ. pour H_n.

Les hypothèses sur H_n que nous venons d'émettre sont vérifiées p. ex. pour $F = [0; +\infty]$, $H_1 = [0; 1)$ et $H_n = (n-1; n)$ pour $n \geq 2$.

Remarque III: Dans certains cas, la convergence uniforme et absolue de la série de la formule (4) peut être assurée par d'autres termes correctifs que les g_n, plus simples que ceux-ci (p. ex. tous de degré borné). Mais, après le changement de termes correctifs, le membre droit de (4) peut cesser de représenter la fonction f_1. Il représentera alors une autre fonction $\bar{f}$ telle que les singularités de $\psi(z) = f_1(z) - \bar{f}(z)$ se trouvent toutes dans l'ensemble limite L. On obtiendra dans ce cas pour $f(z)$ une décomposition

$$f(z) = h(z) + \psi(z) + \sum_{1}^{\infty} (h_n(z) - \bar{g}_n(z)),$$

d'où, en posant $\varphi(z) = h(z) + \psi(z)$, on déduit une décomposition qui coïncide avec celle de Mittag-Leffler quand les H_n sont des points isolés. Cette décomposition est plus maniable que celle de notre théorème II (car on peut y disposer plus librement des termes correctifs), mais elle est moins précise vu que l'ensemble singulier de $h(z)$ est bien déterminé (il est égal à $\overline{F-\overline{\Sigma H_n}}$) tandis que pour celui de $\varphi(z)$ on sait seulement qu'il est compris entre $\overline{F-\overline{\Sigma H_n}}$ et $L+\overline{F-\overline{\Sigma H_n}}$.

Remarque IV: Si l'on veut décomposer la fonction $f(z)$ suivant des parties principales données d'avance, on est obligé d'en retrancher non seulement les termes correctifs $g_n(z)$ avec des pôles dans L mais aussi, en général, des termes $r_n(z)$ aux singularités dans $\bar{H}_n - H_n$ qui sont indispensables, comme on le voit d'après la démonstration du théorème I, même dans le cas d'un nombre fini de termes.

Si l'on connait la décomposition du théorème II on peut prendre $r_n(z) = h_n^0(z) - h_n(z)$, où les $h_n^0(z)$ sont les parties principales données d'avance et les $h_n(z)$ celles qui figurent dans le théorème.

La dernière remarque touche déjà à la question d'existence des fonctions à ensemble singulier et parties principales, correspondant aux divers ensembles ouverts dans cet ensemble singulier, donnés d'avance. Cette question peut être facilement résolue par une série analogue à celle de (4), où on aurait approché (toujours à l'aide du théorème de Runge) directement les parties princ. $h_n^0(z)$ données d'avance, par les termes correctifs $g_n(z)$ de manière à assurer la convergence uniforme et absolue de cette série. Les termes correctifs pourront être toujours choisis comme fonctions rationnelles ayant tous leurs pôles dans l'ensemble limite L des H_n.

Dans certains cas (p. ex. quand les H_n sont des continus formant une chaîne, comp. la remarque II — ou bien, plus généralement, quand tout composant de H_n a un point limite dans $\bar{H}_n - H_n$), on peut choisir les $g_n(z)$ avec tous leurs pôles compris dans l'ensemble $\bar{H}_n - H_n$ correspondant. On trouvera alors la fonction cherchée par une formule à la (4), où cette fonction apparaîtra comme développée en série de parties principales correspondant aux ensembles H_n, mais en général différentes des $h_n^0(z)$.

§ 3. Décompositions en produits.

Les points non-ordinaires.

On sait décomposer les fractions rationnelles en produits de leurs facteurs primaires — les binômes $(z - \alpha_n)$ et les inverses des binômes $(z - \beta_n)$ — correspondant aux zéros et aux pôles de la fraction considérée. On sait aussi décomposer, par la méthode de Weierstrass, une fonction méromorphe dans tout le plan (sauf à l'infini) en produit infini des facteurs primaires correspondant aux zéros et aux pôles de la fonction, ces facteurs étant munis des facteurs exponentiels correctifs assurant la convergence du produit.

Déjà ces deux exemples montrent que, pour une décomposition en produit, il faut tenir compte dans la même mesure des zéros et des pôles de la fonction.

Ce fait devient encore plus clair quand on ramène l'étude des décompositions en produit à celle des décompositions en somme, en considérant au lieu de la fonction $f(z)$ son logarithme $\log f(z)$ ou bien sa dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Les zéros et les pôles de $f(z)$ deviennent dans le premier cas des singularités logarithmiques (simples) et dans le second cas — des pôles simples.

Il s'avère ainsi comme nécessaire, dans l'étude que nous allons entreprendre maintenant, de considérer les zéros et les pôles de $f(z)$ comme appartenant (en quelque sorte) au même titre aux singularités de $f(z)$.

Il est peut-être utile de rappeler, pour les fonctions générales conformes à nos conventions, les définitions d'un zéro ou d'un pôle. Le point α est un zéro de $f(z)$, s'il appartient au domaine h. u. de $f(z)$ et si, dans un petit cercle autour de α sans aucun point singulier de $f(z)$, le développement de Taylor de $f(z)$ commence par un terme $a_m(z-\alpha)^m$ avec $m \geq 1$ ($m =$ degré ou ordre de multiplicité du zéro α). Le point β est un pôle de $f(z)$, s'il est un point singulier isolé de $f(z)$[1] et si, dans un petit cercle autour de β ne contenant aucun autre point singulier de $f(z)$, le développement de Laurent de $f(z)$ ne contient qu'un nombre fini de puissances négatives de $(z-\beta)$ et commence par un terme $b_{-m}(z-\beta)^{-m}$ avec $m \geq 1$ ($m =$ degré ou ordre de multiplicité du pôle β). Pour α ou β à l'infini, on change ces définitions de la manière habituelle.

[1] Donc si l'on prend p. ex. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$ et $f(z) = 1 + \frac{1}{1-z}$ pour $|z| > 1$, le point 1 ne sera pas un pôle pour $f(z)$, car il n'est pas isolé dans l'ensemble singulier de $f(z)$.

Nous supposerons constamment (pour simplifier les démonstrations) *que le point à l'infini n'est ni singulier, ni zéro pour* $f(z)$ $\left(\text{donc à l'extérieur d'un cercle assez grand on aura: } f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \text{ avec } a_0 \neq 0\right)$. Mais nos résultats s'appliqueront sans changements au cas général qu'on peut ramener toujours à notre cas par une transformation homographique convenable.

Nous distinguerons maintenant pour une fonction hol. et unif. $f(z)$, l'ensemble Z de ses zéros, l'ensemble P de ses pôles, et l'ensemble S de tous les autres points singuliers de $f(z)$. Nous poserons encore $\Phi = Z + P + S$.

On démontre immédiatement les faits suivants:

(1) Φ *et* S *sont des ensembles fermés.*

(2) Z *et* P *sont ouverts dans* Φ.

Nous dirons que la fonction $f(z)$ est *ordinaire en un point* a, si a n'appartient pas à Φ (c. à d. n'est ni singulier, ni zéro pour $f(z)$). Les points de Φ s'appelleront *les points non-ordinaires* de $f(z)$ et, par conséquence Φ sera *l'ensemble des points non-ordinaires* de $f(z)$.

Par analogie avec le théorème **A** posons nous la question suivante: est-il possible de trouver une décomposition en produit $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ correspondant à une décomposition $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ de manière que la fonction $f_\varkappa(z)$ admette comme ensemble des points non-ordinaires l'ensemble $\Phi_\varkappa$ pour $\varkappa = 1, 2$. On pourrait même demander plus, notamment que les ensembles $Z_\varkappa$, $P_\varkappa$ et $S_\varkappa$ de la fonction $f_\varkappa(z)$ s'obtiennent des Z, P et S correspondant à $f(z)$ par la décomposition résultant de celle de Φ, notamment

$$Z_\varkappa = Z \cdot \Phi_\varkappa, \quad P_\varkappa = P \cdot \Phi_\varkappa, \quad S_\varkappa = S \cdot \Phi_\varkappa. \tag{3}$$

Mais déjà les fractions rationnelles montrent que le problème posé ainsi n'a pas de solution en général. En effet, soit $f(z) = \dfrac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)}$ une fraction avec le même nombre de zéros que de pôles. On a ici $\Phi = Z + P$, et le point à l'infini est ordinaire. Si nous décomposons $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec $\Phi_1 = Z$ et $\Phi_2 = P$, la décomposition $f = f_1 \cdot f_2$ devrait donner une fonction n'ayant que de zéros et l'autre n'ayant que de pôles comme points non-ordinaires ce qui est impossible car, comme on sait, le nombre des zéros et le nombre des pôles (comptés avec leurs degrés de multiplicité) d'une fonction rationnelle, doivent être égaux. Et on s'aperçoit en réalité que la décomposition habituelle $f = f_1 \cdot f_2$ avec $f_1(z) = (z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$ et $f_2(z) = \frac{1}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)}$ introduit un point non-ordinaire non compris dans Φ, notamment le point à l'infini qui est pour f_1 un pôle d'ordre n et pour f_2 un zéro d'ordre n.

Par contre, on s'aperçoit facilement que pour une décomposition convenable $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec des ensembles $\Phi_\varkappa$ contenant le même nombre de zéros que de pôles, il existe sûrement une décomposition $f = f_1 \cdot f_2$ correspondant à notre problème, p. ex. quand $\Phi_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa, \beta_1, \ldots, \beta_\varkappa)$, $\Phi_2 = (\alpha_{\varkappa+1}, \ldots, \alpha_n, \beta_{\varkappa+1}, \ldots, \beta_n)$, on peut prendre

$$f_1(z) = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_\varkappa)}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_\varkappa)}, \quad f_2(z) = \frac{(z-\alpha_{\varkappa+1})\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_{\varkappa+1})\cdots(z-\beta_n)}.$$

Même dans le premier cas mentionné il est à relever qu'on pouvait y obtenir une décomposition en fonctions n'ayant comme points non-ordinaires en dehors des $\Phi_\varkappa$ correspondants qu'un seul et même point (l'infini).

Ce point peut être pris tout à fait arbitrairement, p. ex. dans le cas analysé on peut le prendre égal à γ et poser ensuite

$$f_1 = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\gamma)^n} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{(z-\gamma)^n}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)}.$$

Le théorème III.

Nous allons voir que pour les fonctions $f(z)$ les plus générales, conformes à nos conventions, et les décompositions $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ quelconques (pourvu que les $\Phi_\varkappa$ soient fermés) il se présente toujours un des deux cas, mis en évidence dans les exemples donnés plus haut.

Soit donc $f(z)$ la fonction à décomposer en produit. Considérons son logarithme.[1] Le $\log f(z)$ est prolongeable sur tout chemin ne passant par aucun point de Φ, mais il n'est pas en général uniforme et ses différentes déterminations en un point diffèrent par un multiple de $2\pi i$.

[1] On pourrait être tenté d'employer plutôt la dérivée logarithmique de $f(z)$: ceci présente pourtant l'inconvénient que la décomposition de cette dérivee log. en somme n'est déterminée qu'à une fonction près qui, en général, pourrait avoir une intégrale indéfinie avec des periodes non multiples de $2\pi i$ ce qui pourrait entrainer que les composantes de la dérivée log. de $f'(z)$ ne seraient pas des dérivées log. de fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ hol. et *uniformes*.

Pour rendre le $\log f(z)$ uniforme nous pouvons tracer des coupures L_n d'un genre spécial. Chaque L_n sera un segment rectiligne $[p_{2n-1}; p_{2n}]$ unissant deux points p_{2n-1} et p_{2n} de Φ. Les segments L_n seront deux à deux disjoints (sauf, peut être, leurs extrémités) et leurs longueurs tendront vers o avec $\frac{1}{n}\cdot$ En outre, les L_n n'auront que leurs extrémités en commun avec Φ.[1]

Dans les différentes régions du plan déterminées par l'ensemble $\Phi^0 = \Phi + \Sigma L_n$ (cet ensemble est fermé, car les propriétés des L_n indiquent que l'ensemble limite des L_n est compris dans Φ) le $\log f(z)$ est déjà uniforme, c. à d. qu'en choisissant dans chacune de ces régions un point et pour ce point un élément correspondant de la fonction $w = \log f(z)$, on pourra prolonger ces éléments sur tout chemin passant en dehors de Φ^0 sans tomber sur deux déterminations différentes du $\log f(z)$.

Par ce procédé nous obtenons à partir de $\log f(z)$ une fonction conforme à nos conventions que nous désignerons par $\varphi(z)$. L'ensemble singulier de $\varphi(z)$ sera égal à Φ^0. A la décomposition $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ nous ferons correspondre une décomposition $\Phi^0 = \Phi_1^0 + \Phi_2^0$ de sorte que $\Phi_1 < \Phi_1^0$ et $\Phi_2 < \Phi_2^0$. A cet effet il n'y a qu'à diviser la somme ΣL_n en deux parties et ajouter chacune d'elles à l'ensemble $\Phi_\varkappa$ correspondant. Nous le ferons ainsi: si le segment L_n a ses deux extrémités p_{2n-1} et p_{2n} dans le même ensemble $\Phi_\varkappa (\varkappa = 1, 2)$, sans qu'elles soient toutes les deux à la fois dans Φ_1 et Φ_2, on ajoutera L_n à cet ensemble $\Phi_\varkappa$; si les extrémités de L_n sont, toutes les deux, à la fois dans Φ_1 et dans Φ_2, on ajoutera L_n à Φ_1 (et à Φ_1 seulement); si les extrémités de L_n appartiennent, une à Φ_1 et l'autre à Φ_2 sans qu'aucune appartient à $\Phi_1 \cdot \Phi_2$, on divisera le segment L_n en deux segments égaux, dont un — qui a une extrémité appartenant à Φ_1 — sera ajouté à Φ_1, et l'autre — avec une extrémité dans Φ_2 — sera ajouté à Φ_2.

Les ensembles Φ_1^0 et Φ_2^0 ainsi obtenus sont fermés (on le démontre facilement). Leur produit $\Phi_1^0 \cdot \Phi_2^0 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 + Q$, où Q est l'ensemble des milieux de ces segments L_n qui ont des extrémités, une dans Φ_1 et l'autre dans Φ_2, sans qu'aucune soit dans $\Phi_1 \cdot \Phi_2$.

Nous pouvons maintenant décomposer la fonction $\varphi(z)$, d'après le théor. **A**,

[1] L'existence d'un tel système de coupures sera démontrée dans la note II à la fin du mémoire. Il nous suffirait évidemment pour nos buts d'utiliser des coupures d'un genre plus général. L'existence des coupures du genre décrit dans le texte, nous parait pourtant assez intéressante en soi-même pour valoir la peine d'être démontrée.

en correspondance avec la décomposition $\Phi^0 = \Phi_1^0 + \Phi_2^0$. On obtient ainsi $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, φ_1 et φ_2 ayant respectivement Φ_1^0 et Φ_2^0 comme ensembles singuliers.

Voyons maintenant quels sont les singularités de $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ en dehors de Φ_1 et Φ_2. Il suffit de considérer $\varphi_1(z)$; $\varphi_2(z)$ se comporte d'une manière tout à fait analogue.

Il s'agit donc des points de Φ_1^0 qui n'appartiennent pas à Φ_1. L'ensemble de ces points se divise en segments qui peuvent être égaux ou bien à un segment L_n entier (les extrémités non comptés) ou bien à la moitié d'un segment L_n (l'extrémité comprise dans Φ_1 non comptée). Ces segments sont donc de l'une de deux formes: $(p'; p'')$ ou $(p; q]$, où par la lettre p sont désignées les extrémités des segments L_n et par q — leurs milieux.

Prenons un tel segment L. Nous pouvons l'enfermer entre deux arcs simples L' et L'', ayant les mêmes extrémités que L, et limitant un voisinage V *simplement connexe* des points non-extrêmes de L, qui ne contient en dehors de ceux-ci aucun autre point de Φ^0. Il ne contient donc aucun point de Φ_2^0 et $\varphi_2(z)$ y est holomorphe. V est divisé par L en deux parties et dans chacune d'elles $\varphi(z)$ est égale à une autre détermination de $\log f(z)$. Chacune de ces deux déterminations peut être étendue par prolongement *analytique* d'une manière holomorphe et uniforme dans tout le voisinage V où elles diffèrent par un multiple constant de $2\pi i$, soit $2\pi i \varkappa$.

En vertu de l'équation $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2$ qui se maintient pendant le prolongement analytique, on obtient que φ_1 présente dans V le même caractère que φ, notamment que par prolongement analytique à partir de chacune des parties de V déterminées par L, $\varphi_1(z)$ peut être étendue d'une manière holomorphe et uniforme dans V entier, et les deux déterminations ainsi obtenues diffèrent par la même constante que les déterminations de $\varphi(z)$, c. à d. par $2\pi i \varkappa$.

Ainsi l'allure de $\varphi_1(z)$ est complètement éclaircie dans le voisinage de chaque point de L sauf le point q quand $L = (p; q]$. Voyons donc ce qui se passe dans ce cas dans un petit cercle C de centre q. Ce cercle peut être choisi de manière qu'il n'ait en commun avec Φ_1^0 que le rayon $[q; s)$ situé sur $L = [q; p)$. En dehors de ce rayon, la fonction $\varphi_1(z)$ est alors holomorphe dans C, tandis que sur ce rayon (sauf en q) elle est prolongeable, mais cesse d'être uniforme, et ses différentes déterminations y diffèrent — comme nous avons montré plus haut — par $2\pi i \varkappa$. On peut même supposer qu'on obtient cette différence de déterminations en tournant autour de q dans le sens positif, c. à d. que si l'on prolonge $\varphi_1(z)$ à partir d'un point x sur une courbe simple fermée entourant q et assez petite, on retourne à x, après un parcours complet dans le sens positif, avec une nouvelle valeur $\bar{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) + 2\pi i \varkappa$. Ceci montre clairement que $\varphi_1(z)$ présente en q un point critique logarithmique. Et, en effet, choisissons un point t quelconque à l'extérieur de $V + C$ et rendons la fonction $\varkappa \log \frac{z-q}{z-t}$ uniforme par une coupure formée par le segment $L = [q; p)$ et un arc simple unissant p à t en dehors du voisinage V et du cercle C.[1] La différence des déterminations de cette fonction quand on la prolonge à travers L en tournant autour de q dans le sens positif est $2\pi i \varkappa$ c. à d. la même que la différence correspondante pour $\varphi_1(z)$. Il en résulte que la fonction $\varphi_1(z) - \varkappa \log \frac{z-q}{z-t}$ est uniforme dans $V + C$ donc, étant holomorphe partout dans $V + C$ sauf peut être en q, sa partie principale relative à q est une fonction $s\left(\frac{1}{z-q}\right)$ entière en $\frac{1}{z-q}$.

Nous retiendrons de tout ceci le fait que, si l'on prend le logarithme sans y attacher une coupure pour le rendre uniforme, la fonction multiforme

$$\varphi_1(z) - \varkappa \log \frac{z-q}{z-t} - s\left(\frac{1}{z-q}\right)$$

possède des branches holomorphes sur le segment $L = [q; p)$ entier. Par conséquent, cette fonction, vu les propriétés de $\varphi_1(z)$, est prolongeable sur tout chemin passant en dehors de l'ensemble $\Phi_1 + Q$ diminué du point q mais augmenté du point t. Le point t est ici quelconque en dehors de L et on pourra en disposer.

Considérons d'abord le cas, où il n'existe qu'un nombre fini de segments L du genre $[q; p)$, soit

$$L^{(1)} = [q^{(1)}; p^{(1)}), \ldots, L^{(m)} = [q^{(m)}; p^{(m)}).$$

Soient encore $2\pi i \varkappa_1, \ldots, 2\pi i \varkappa_m$ les différences des déterminations de $\varphi_1(z)$ sur chacun de ces segments et $s_1\left(\frac{1}{z-q^{(1)}}\right), \ldots, s_m\left(\frac{1}{z-q^{(m)}}\right)$ les parties principales définies plus haut.

On voit tout de suite que, dans ces conditions, la fonction *multiforme*

$$\psi_1(z) = \varphi_1(z) - \sum_{\alpha=1}^{m} \varkappa_\alpha \log \frac{z-q^{(\alpha)}}{z-t} - \sum_{\alpha=1}^{m} s_\alpha\left(\frac{1}{z-q^{(\alpha)}}\right) \tag{4}$$

[1] Si t est choisi d'avance mais en dehors de tous les segments L en question, on pourra toujours choisir V assez étroit et C assez petit pour que t reste en dehors de V et C.

possède au moins une branche holomorphe sur $L^{(\alpha)}$ (pour chaque α), qu'elle est prolongeable sur tout chemin passant indifféremment à travers n'importe lesquels des segments L pourvu qu'il ne passe ni par Φ_1, *ni par le point* t, et que toutes les déterminations obtenues ainsi diffèrent mutuellement par un multiple de $2\pi i$.

Pour la fonction multiforme

$$\psi_2(z) = \varphi(z) - \psi_1(z) = [\varphi(z) - \varphi_1(z)] + \sum \varkappa_\alpha \log \frac{z - q^{(\alpha)}}{z - t} + \sum s_\alpha \left(\frac{1}{z - q^{(\alpha)}}\right)$$

on obtient, en regardant d'abord la première forme, qu'elle est prolongeable sur tout chemin en dehors de Φ et de t, et, d'après la seconde forme (où la différence dans le crochet est égale à $\varphi_2(z)$), qu'elle est prolongeable même en dehors de l'ensemble $\Phi_2 + (t)$. Toutes les déterminations de $\psi_2(z)$ ainsi obtenues diffèrent deux à deux par des multiples de $2\pi i$.

En posant

$$f_1(z) = e^{\psi_1(z)}, \quad f_2(z) = e^{\psi_2(z)}$$

on voit immédiatement que f_1 et f_2 sont holomorphes, ordinaires (donc $\neq 0$) et *uniformes* en dehors de $\Phi_1 + (t)$ ou $\Phi_2 + (t)$ respectivement.

D'autre part $\varphi(z)$ étant une branche de $\log f(z)$ on voit immédiatement que

$$f_1(z) \cdot f_2(z) = e^{\psi_1(z) + \psi_2(z)} = e^{\varphi(z)} = f(z).$$

Voyons encore quelle singularité présentent les fonctions f_1 et f_2 en t. Supposons t en dehors de Φ. D'après la formule pour $\psi_1(z)$ on voit que la fonction $u(z) = \psi_1(z) - \log(z - t) \sum_{\alpha=1}^{m} \varkappa_\alpha$ a toutes ses branches prolongeables dans un voisinage de t. Il en résulte que la fonction

$$e^{u(z)} = f_1(z) \cdot (z - t)^{-\Sigma \varkappa_\alpha}$$

est encore holomorphe et ordinaire en t. Par conséquent $f_1(z)$ présente en t un zéro ou un pôle d'ordre $= |\Sigma \varkappa_\alpha|$, le premier pour $\Sigma \varkappa_\alpha > 0$, le second pour $\Sigma \varkappa_\alpha < 0$.

Pour $f_2(z)$ ce sera le contraire, comme on démontre de la même manière.

Quand il y a des points communs à Φ_1 et Φ_2, on peut évidemment choisir t parmi ces points de manière à ne pas introduire dans f_1 et f_2 des singularités en dehors de Φ_1 et Φ_2.

Revenons maintenant au cas général où le nombre des segments $L^{(\alpha)} = [q^{(\alpha)}; p^{(\alpha)})$ est infini. On ne pourra pas alors transporter immédiatement le procédé que nous venons d'appliquer, car les séries qui entrent dans la formule (4) définissant $\psi_1(z)$ peuvent ne pas converger.

Pour les rendre convergentes on procèdera comme suit. Les $q^{(\alpha)}$ étant en nombre infini ils possèdent un ensemble limite E. Cet ensemble est en même temps l'ensemble limite des extrémités des segments L_n dans lesquels sont pris les points $q^{(\alpha)}$ (car les longueurs des L_n tendent vers 0). Parmi les extrémités des tels segments L_n une appartenant toujours à Φ_1 et l'autre à Φ_2, cet ensemble limite est compris dans $\Phi_1 \cdot \Phi_2$.

Dans ces conditions on choisira pour chaque segment $L^{(\alpha)}$ le point t (dont on n'a pas encore disposé) comme un des points de $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ les plus approchés de $q^{(\alpha)}$. Appelons ce point t_α. Choisissons maintenant une branche du $\log \dfrac{z - q^{(\alpha)}}{z - t_\alpha}$ dans le plan muni de la coupure $[q^{(\alpha)}; t_\alpha]$.

La fonction

$$\varkappa_\alpha \log \frac{z - q^{(\alpha)}}{z - t_\alpha} + s_\alpha\left(\frac{1}{z - q^{(\alpha)}}\right)$$

peut être alors approchée (d'après le théorème de Runge) en dehors d'un cercle C_α de centre t_α et de rayon $= \frac{3}{2}|t_\alpha - q^{(\alpha)}|$, à un ε_α près, par un polynôme en $\dfrac{1}{z - t_\alpha}$, soit $g_\alpha\left(\dfrac{1}{z - t_\alpha}\right)$.

En prenant les ε_α de sorte que $\sum_1^\infty \varepsilon_\alpha < \infty$ on voit que la série

$$h(z) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} h_\alpha(z) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[\varkappa_\alpha \log \frac{z - q^{(\alpha)}}{z - t_\alpha} + s_\alpha\left(\frac{1}{z - q^{(\alpha)}}\right) - g_\alpha\left(\frac{1}{z - t_\alpha}\right)\right]$$

est uniformément et absolument convergente pour z en dehors des cercles C_α et même pour z en dehors d'un voisinage quelconque de $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ si l'on retranche seulement de cette série un nombre fini de termes (car pour α assez grand C_α se trouve dans un voisinage quelconque de $\Phi_1 \cdot \Phi_2$). On obtient encore facilement que $h(z)$ est prolongeable sur tout chemin en dehors de $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ ne passant par aucun des points $q^{(\alpha)}$ et présente en $q^{(\alpha)}$ la même singularité que $h_\alpha(z)$. D'autre part, d'après les propriétés de l'entier $\varkappa_\alpha$ et de la fonction s_α, la fonction $\varphi_1(z) - h_\alpha(z)$ prolongée à travers la coupure $[q^{(\alpha)}; t_\alpha]$ et le segment $L^{(\alpha)}$ détermine au moins une branche holomorphe en $q^{(\alpha)}$. Il en résulte facilement (vu que toutes les déterminations de chaque fonction multiforme figurant dans nos raisonnements diffèrent deux à deux par un multiple de $2\pi i$) que la fonction

$$\psi_1(z) = \varphi_1(z) - h(z)$$

peut être prolongée sur tout chemin en dehors de Φ_1. De même on obtient pour la fonction $\psi_2(z) = \varphi(z) - \psi_1(z) = \varphi_2(z) + h(z)$ qu'elle est prolongeable partout en dehors de Φ_2. Les déterminations de $\psi_1(z)$ ainsi que de $\psi_2(z)$ différant mutuellement par des multiples de $2\pi i$ les fonctions

$$f_1(z) = e^{\psi_1(z)}, \quad f_2(z) = e^{\psi_2(z)}$$

sont holomorphes, ordinaires et uniformes en dehors de Φ_1 ou Φ_2 respectivement et elles satisfont à la relation

$$f_1(z) \cdot f_2(z) = e^{\psi_1 + \psi_2} = e^{\varphi} = f(z).$$

Nous avons ainsi démontré complètement le

Théorème III: *Soit Φ l'ensemble total de zéros, pôles et autres points singuliers (c. à d. l'ensemble des points non-ordinaires) de la fonction hol. et unif. $f(z)$. Pour chaque décomposition de Φ en somme de deux ensembles fermés Φ_1 et Φ_2, il existe une décomposition de $f(z)$ en produit, $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ où les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ont en général pour ensembles des points non-ordinaires respectivement Φ_1 et Φ_2.*

Une exception peut se présenter uniquement dans certains cas[1] *où Φ_1 et Φ_2 sont disjoints; les ensembles des points non-ordinaires de $f_1(z)$ et de $f_2(z)$ sont alors égaux respectivement à $\Phi_1 + (t)$ et $\Phi_2 + (t)$, où le point t peut être choisi arbitrairement. L'une des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ présente dans ce cas en t un zéro d'un certain ordre et l'autre — un pôle du même ordre.*

Complément I au théorème III.

Les cas exceptionnels.

Regardons de plus près les cas exceptionnels du théorème III. Il s'agit donc des décompositions $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec $\Phi_1 \cdot \Phi_2 = 0$. On peut alors séparer Φ_1 de Φ_2 par un nombre fini de courbes simples fermées rectifiables C_n, deux à

[1] L'analyse de ces cas exceptionnels sera donnée dans un instant.

deux disjointes. Les courbes C_n déterminent dans le plan deux ensembles ouverts disjoints G et H, dont un renferme Φ_1 et l'autre Φ_2.

La somme des intégrales

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \sum \int\limits_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

prises sur les C_n dans le sens positif par rapport à G, est égale à la somme

$$\frac{1}{2\pi i} \sum [\log f(z)]_{C_n},$$

le crochet $[\quad]_{C_n}$ désignant la différence de deux déterminations du $\log f(z)$, dont la première est déduite de la deuxième par un prolongement suivant C_n dans le sens positif par rapport à G, avec un seul parcours de C_n. La fonction $f(z)$ étant uniforme sur C_n, chacun des crochets donnera un multiple de $2\pi i$, donc σ *est un entier.*

Pour le calcul de σ il est souvent commode à utiliser la remarque qu'il est égal au quotient par 2π de la variation de l'argument de $f(z)$ pendant le parcours des C_n dans le sens positif par rapport à G.

Quand Φ_1 est composé d'un seul zéro ou d'un seul pôle, σ est respectivement positif ou négatif et sa valeur absolue indique l'ordre de multiplicité de ce zéro ou pôle.

Plus généralement, quand Φ_1 contient un nombre fini de zéros et pôles, σ est égal, d'après le théorème de Rouché, au nombre des zéros diminué du nombre des pôles (les zéros et les pôles étant comptés avec leurs ordres de multiplicité) σ mesure donc la prédominance dans Φ_1 des zéros sur les pôles ($\sigma > 0$) ou des pôles sur les zéros ($\sigma < 0$).

Il est donc naturel de dire quand $\sigma > 0$ que $f(z)$ *présente en* Φ_1, ou bien *dans l'ensemble ouvert* G, *le caractère d'un zéro d'ordre* σ, et pour $\sigma < 0$ — *le caractère d'un pôle d'ordre* $|\sigma| = -\sigma$. Dans tous les cas on appellera σ *le caractère de* $f(z)$ *en* Φ_1 ou *dans* G, et on le désignera par $\sigma(\Phi_1, f)$ ou $\sigma(G, f)$ indifféremment.

On obtient immédiatement les propriétés suivantes:

1°. $\sigma(H, f) = -\sigma(G, f)$, *où* H *est le complémentaire de* $\overline{G}$;

2°. *Si les courbes* C'_n, *du même genre que* C_n, *séparent également* Φ_1 *de* Φ_2 *et si l'ensemble ouvert* G' *est déterminé par* C'_n *comme* G *par* C_n *alors*

$$\sigma(G', f) = \sigma(G, f) = \sigma(\Phi_1, f);$$ [1]

3°. *Si* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, *où les* Φ_k *sont fermés et disjoints deux à deux, alors*

$$\sigma(\Phi_1 + \Phi_2, f) = \sigma(\Phi_1, f) + \sigma(\Phi_2, f);$$

4°. $$\sigma(0, f) = \sigma(\Phi, f) = 0;$$

5°. *Si* f_1 *et* f_2 *sont ordinaires sur les courbes* C_n *limitant l'ensemble ouvert* G, *alors*

$$\sigma(G, f_1 \cdot f_2) = \sigma(G, f_1) + \sigma(G, f_2).$$

D'après 4° et 5° la condition nécessaire pour qu'on puisse décomposer $f(z)$ en produit des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ne présentant comme points non-ordinaires que les points des ensembles Φ_1 ou Φ_2 respectivement, est que

$$\sigma(\Phi_1, f) = \sigma(\Phi_1, f_1) + \sigma(0, f_2) = 0. \tag{5}$$

Mais la condition (5) suffit aussi. En effet, on peut considérer la frontière de G, $\mathfrak{F}(G) = \Sigma C_n$ comme séparateur entre Φ_1 et Φ_2 et on peut décomposer la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ à l'ensemble singulier Φ, en somme de deux fonctions $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ aux ensembles singuliers Φ_1 et Φ_2 par les méthodes du § 2, I partie. P. ex. on aura

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{F}(G)} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)(z-x)}, \quad \text{pour } x \text{ à l'extérieur de } G$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{F}(G)} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)(z-x)}, \quad \text{pour } x \text{ dans } G.$$

On vérifie sans peine que les périodes de l'intégrale indéfinie $\int \varphi_1(z)\,dz$ sont égales à certaines périodes de $\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$. On a de même pour $\int \varphi_2(z)\,dz$.

Par conséquent toutes ces périodes sont des multiples de $2\pi i$, et les fonctions $f_k(z) = e^{\int^z \varphi_k(z)\,dz}$, $k = 1, 2$, sont uniformes, holomorphes et ordinaires partout en dehors de l'ensemble correspondant Φ_k, sauf peut-être à l'infini. Pour qu'elles soient encore ordinaires à l'infini il faut et il suffit que la condition (5) soit satisfaite.[2]

[1] Ceci justifie donc la désignation de σ indifféremment par $\sigma(\Phi_1, f)$ et $\sigma(G, f)$.

[2] On le vérifie par un simple calcul que nous omettons ici.

Si maintenant la condition (5) n'est pas satisfaite les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ que nous venons de définir présentent à l'infini un point non-ordinaire. Voyons quelle est sa nature. Parmi les deux ensembles G et H un est borné et l'autre non-borné. En choisissant convenablement les indices des Φ_1 et Φ_2 nous pouvons supposer que c'est G qui est borné. L'ensemble des points non-ordinaires de $f_1(z)$, compris dans G, est $= \Phi_1$, tandis que dans H il n'y en a que le seul point ∞. Pour $f_2(z)$ le premier ensemble est vide et le second $= \Phi_2 + (\infty)$.

On a alors, d'après les propriétés 1°, 2°, 4° et 5°

$$\sigma(G, f) = \sigma(\Phi_1, f) = \sigma(\Phi_1 . f_1) + \sigma(0, f_2) = - \sigma((\infty), f_1).$$

En appliquant ces propriétés à un cercle C (ouvert) assez grand pour contenir tout l'ensemble Φ, on obtient

$$0 = \sigma(C, f) = \sigma(C, f_1) + \sigma(C, f_2) = - \sigma((\infty), f_1) - \sigma((\infty), f_2).$$

Il en résulte, en désignant $\sigma(\Phi_1, f)$ par σ,

$$\sigma((\infty), f_1) = - \sigma; \quad \sigma((\infty), f_2) = \sigma.$$

Si l'on veut obtenir une décomposition $f = f_1 \cdot f_2$ correspondant à $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, avec un point non-ordinaire supplémentaire en t $(\neq \infty)$, on n'a qu'à multiplier les fonctions f_1 et f_2 précédentes, l'une par $(z-t)^{-\sigma}$, l'autre par $(z-t)^{\sigma}$.

Voyons maintenant sur deux exemples (avec des fonctions non-rationnelles) comment distinguer en pratique les deux cas.

I. Prenons $f(z) = z^m e^{z + \frac{1}{z}}$, m entier. Les seuls points non-ordinaires de $f(z)$ sont 0 et ∞ et ils sont des points singuliers essentiels. Supposons $m > 0$. $f(z)$ présente en 0 le caractère d'un zéro d'ordre m et en ∞ le caractère d'un pôle. Il est donc impossible de décomposer $f(z)$ en produit $f_1(z) \cdot f_2(z)$ correspondant à la décomposition $\Phi = (0) + (\infty)$, sans introduire des points non-ordinaires étrangers à Φ_1 resp. à Φ_2. Si l'on veut avoir comme un tel point l'infini on prendra $f_1 = z^m e^{\frac{1}{z}}$, $f_2 = e^z$. Si c'est l'origine qu'on veut avoir en supplément, on posera $f_1 = e^{\frac{1}{z}}$, $f_2 = z^m e^z$.

II. Prenons $f(z) = e^z - e^{\frac{1}{z}}$. Les seuls points non-ordinaires de $f(z)$ sont: les points singuliers essentiels 0 et ∞ et les zéros (tous d'ordre 1) ± 1, $\pm i(\pi k + \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})$ et $\pm i(\pi k - \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Cherchons ici les décompositions $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec $\Phi_1 \cdot \Phi_2 = 0$, auxquelles correspondent des décompositions $f = f_1 \cdot f_2$ n'introduisant pas de points non-ordinaires supplémentaires.

On voit tout d'abord que si un des ensembles Φ_1 et Φ_2 n'est composé que d'un nombre fini de zéros, soit p. ex. Φ_1 composé de n zéros, alors $\sigma(\Phi_1, f) = n = -\sigma(\Phi_2, f)$, donc la condition (5) n'est pas satisfaite.

Il en résulte que les décompositions $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ demandées sont nécessairement de telle espèce que l'un des Φ_k, soit Φ_1, contient l'origine et l'autre — Φ_2 — contient l'infini. Le premier renferme alors tous les zéros de $f(z)$ compris dans un petit cercle autour de l'origine et le second renferme tous les zéros de $f(z)$ en dehors d'un cercle assez grand.

Dans cette espèce de décompositions on trouve en effet des décompositions du genre demandé. P. ex. on peut prendre Φ_1 composé de: 0, -1 et $\pm i(\pi k - \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, et Φ_2 composé de: ∞, $+1$ et $\pm i(\pi k + \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Pour le vérifier, il n'y a qu'à calculer $\sigma(\Phi_1, f)$. On a, d'après les propriétés 1°, ..., 5°, en désignant par C le cercle $|z| < 1$

$$\sigma(\Phi_1, f) = 1 + \sigma(\Phi_1 - (-1), f)^{1} = 1 + \sigma\left(\Phi_1 - (-1), \frac{f(z)}{z^2 - 1}\right) = 1 + \sigma\left(C, \frac{f(z)}{z^2 - 1}\right).$$

Mais sur la circonférence $z = e^{i\varphi}$, on a: $f(z) = 2ie^{\cos\varphi} \sin\sin\varphi$, $z^2 - 1 = 2ie^{i\varphi}\sin\varphi$, donc $\dfrac{f(z)}{z^2 - 1} = e^{\cos\varphi}\dfrac{\sin\sin\varphi}{\sin\varphi}e^{-i\varphi}$ et la variation de l'argument de cette dernière fonction quand φ varie de 0 à 2π est égale à -2π. On obtient ainsi

$$\sigma\left(C, \frac{f(z)}{z^2 - 1}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \sigma(\Phi_1, f) = 1 - 1 = 0, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Outre la décomposition indiquée il y a encore une infinité d'autres du genre cherché par nous. Toutes s'obtiennent de la précédente par l'échange d'un nombre fini de zéros de $f(z)$, compris dans Φ_1, avec un nombre égal de zéros compris dans Φ_2.

S'il s'agit de la décomposition $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ correspondant à la décomposition de Φ indiquée plus haut, on peut la mettre sous la forme:

[1] $\Phi_1 - (-1)$ veut dire l'ensemble Φ_1 diminué de l'ensemble (-1) formé par un seul point -1.

$$f_1(z) = A_1 e^{\frac{\alpha_1}{z}} \left(\frac{1}{z} + 1\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\pi k - \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})^2}{z^2}\right), \quad A_1 \text{ et } \alpha_1 \text{ const.},$$

$$f_2(z) = A_2 e^{\alpha_2 z} (z - 1) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(\pi k + \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})^2}\right), \quad A_2 \text{ et } \alpha_2 \text{ const.}$$

Ceci résulte, d'après les théorèmes classiques de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières, du fait que la croissance de f_1 et f_2, pour z tendant vers leurs points singuliers respectifs, est équivalente à celle de f, et que, par conséquent, f_1 et f_2 sont des fonctions entières $\left(\text{une de } \frac{1}{z} \text{ l'autre de } z\right)$ d'ordre 1.

On trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, et pour A_1 et A_2 une relation

$$A_1 \cdot A_2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi k - \sqrt{\pi^2 k^2 - 1}}{2 \pi k}\right)^2.$$

Pour obtenir p. ex. que $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ on passera aux dérivées logarithmiques

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^z + \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}}}{e^z - e^{\frac{1}{z}}} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \alpha_2 + \frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + (\pi k + \sqrt{\pi^2 k^2 - 1})^2}$$

et on y prendra les limites pour z tendant vers l'infini suivant l'axe réel positif. La limite de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est 1, de $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ est 0 (car $f_1(z)$ est ordinaire à l'infini), de $\frac{1}{z-1}$ est encore 0, de même que pour un nombre fini quelconque de termes de la série du second membre de la dernière équation. Donc en désignant par $r_n(z)$ le reste de cette série à partir du terme d'indice $n + 1$, on trouve

$$\alpha_2 = 1 - \lim_{x=+\infty} r_n(x), \quad \text{pour tout } n.$$

D'autre part on trouve facilement pour $x > 0$, en posant $t_k = \pi k + \sqrt{\pi^2 k^2 - 1}$

$$\frac{2}{2\pi + \varepsilon_n} \int_{\frac{t_{n+1}}{x}}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2\pi + \varepsilon_n} \int_{t_{n+1}}^{\infty} \frac{2x\,dt}{x^2 + t^2} < r_n(x) < \frac{1}{2\pi} \int_{t_n}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + t^2}\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{t_n}{x}}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2},$$

où ε_n ne dépend pas de x et tend vers 0 avec $\frac{1}{n}\cdot$ On en déduit que $\lim\limits_{x=+\infty} r_n(x)$ est comprise entre $\frac{\pi}{2\pi+\varepsilon_n}$ et $\frac{1}{2}\cdot$ Comme cette limite est indépendante de n, elle est forcément $=\frac{1}{2}$, d'où $\alpha_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$ On procède de même pour α_1.

La relation entre A_1 et A_2 s'obtient en remplaçant dans l'équation $f(z) = f_1(z)\cdot f_2(z)$, f_1 et f_2 par leurs expressions avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\cdot$ Dans l'équation ainsi obtenue on divisera les deux membres par $z-1$ et on y posera $z=1$. On trouvera alors la relation cherchée après quelques transformations algébriques simples.

Complément II au théorème III. Quelques conséquences du th. III.

On peut faire pour le théorème III des remarques analogues à celles qui ont été faites pour le théorème **A**.

On voit tout d'abord que la décomposition $f=f_1\cdot f_2$ n'est déterminée qu'à une fonction multiplicative près dont tous les points non-ordinaires sont compris dans l'ensemble $\Phi_1\cdot\Phi_2$. Si $\Phi_1\cdot\Phi_2 = 0$ (comme c'était le cas pour les décompositions considérées dans le complément précédent), les fonctions f_1 et f_2 sont déterminé à un facteur constant près.

Il y a lieu maintenant à introduire la notion d'un facteur principal de $f(z)$ correspondant à un sous ensemble H ouvert dans Φ. Ce sera une fonction $h(z)$ ordinaire partout en dehors de $\bar{H}$ et telle que le quotient $\frac{f(z)}{h(z)}$ n'a comme points non-ordinaires que les points de l'ensemble $\Phi - H$. Il est évident d'après les développements du complément précédent que pour un H isolé, c. à d. $\bar{H}-H=0$[1], un facteur principal n'existe que dans le cas où $\sigma(H,f)=0$.

En relation avec celà il est indiqué de ne considérer que les décompositions propres de Φ; les fonctions f_1 et f_2 sont alors des facteurs principaux correspondant à $\Phi_1-\Phi_2$ et $\Phi_2-\Phi_1$. Il est à remarquer que dans ce cas l'ensemble Z (des zéros) et l'ensemble P (des pôles) de la fonction $f(z)$ se décomposent chacun en deux parties disjointes: $Z_k = Z\cdot\Phi_k$ respectivement $P_k = P\cdot\Phi_k$, et la fonction $f_k(z)$ a pour l'ensemble de zéros respectivement de pôles, les ensembles P_k et Z_k.

On peut obtenir pour les décompositions en produits des théorèmes tout à fait analogues à ceux qui ont été démontrés dans le § précédent pour les décompositions en somme. Ces décompositions comprendront comme cas très particulier les décompositions classiques des fonctions entières ou méromorphes en produits.

[1] Remarquons que $\bar{H}-H$ ne renferme jamais ni pôles, ni zéros de $f(z)$.

Les démonstrations sont semblables à celles du § précédent. On y utilise au lieu du théorème de Runge un théorème analogue qui s'énonce comme suit:

Soit $f(z)$ une fonction dont l'ensemble Φ est compris dans la somme de n domaines: $H_1, H_2, \ldots, H_n$, Pour un $\varepsilon > 0$ quelconque on peut trouver alors une fonction $h(z)$ telle que

$$\left|\frac{f(z)}{h(z)} - 1\right| < \varepsilon \textit{ pour } z \textit{ en dehors de } H = \sum_1^n H_n.$$

La fonction $h(z)$ peut être choisie de sorte qu'elle ait la forme: $h(z) = (z-a_1)^{\sigma_1}(z-a_2)^{\sigma_2}\cdots(z-a_n)^{\sigma_n} e^{p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)+p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right)+\cdots+p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)}$, où $\sigma_k = \sigma(H_k, f)$, $p_k(t)$ est un polynôme en t (de degré et coefficients dépendant de ε), et les a_k sont des points pris arbitrairement, chacun dans le H_k correspondant.

§ 4. Fonctions entières.

Les développements de la première partie de notre mémoire sont applicables à l'étude des fonctions entières de deux manières. Dans l'une, on se sert du théorème **A**, tandis que la seconde n'utilise que le théorème **B**. Les résultats obtenus par les deux méthodes, tout en se ressemblant d'un certain point de vue (ici et là on s'occupera des décompositions de la fonction entière en somme des fonctions entières) n'en sont pas moins essentiellement différents, les uns étant plus précis (on peut dire d'ordre quantitatifs) et les autres moins précis (plutôt qualitatifs) mais s'appliquant à toutes les fonctions entières (au moins en principe).

I. Application du théorème A.

Cette application réside essentiellement dans l'utilisation des transformations linéaires (appelées, d'un certain point de vue, transformations sommatoires) qui font correspondre une fonction entière à une fonction ayant des singularités à distance finie. La correspondance inverse transforme une fonction entière en une fonction ayant de singularités à distance finie.

Définition et propriétés des transformations employées.

Nous allons préciser la nature de ces transformations en nous limitant au cas qui, tout en étant relativement simple, n'en est pas moins assez général.[1]

[1] L'exposé que nous donnons ne renferme pas de résultats essentiellement nouveaux. C'est pourquoi nous avons cru inutile d'y préciser les démonstrations. Il diffère d'autres exposés sur un

Considérons une fonction positive $M(\alpha)$ de la variable $\alpha > 0$, décroissant assez rapidement vers 0 quand α tend vers $+\infty$ de manière que

$$\lim_{\alpha=\infty} M(\alpha)\,\alpha^n = 0, \text{ pour tout } n \text{ naturel.} \tag{1}$$

Pour $M(\alpha)$, on pourrait prendre p. ex. $e^{-\alpha}$, $e^{-\alpha^\varrho}$ avec ϱ constant positif, etc.

Considérons une fonction entière $\Phi(z)$ satisfaisant à la condition suivante:

Il existe un nombre positif k tel que pour chaque argument θ

$$\int_0^\infty M(\alpha)\,|\,\Phi(k\alpha e^{i\theta})\,|\,d\alpha < \infty. \tag{2}$$

A une telle fonction entière nous ferons correspondre la fonction

$$\varphi(z) = \int_0^\infty M(\alpha)\,\Phi(\alpha z)\,d\alpha. \tag{3}$$

D'après (2), $\varphi(z)$ est définie par (3) et holomorphe *au moins* à l'intérieur du cercle $|z| < k$.

$\varphi(z)$ est la transformée généralisée à la Borel, ou la B-transformée, de $\Phi(z)$.

La transformée généralisée à la Polya (ou la P-transformée de $\Phi(z)$) est donnée par

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\int_0^\infty M(\alpha)\,\Phi\left(\frac{\alpha}{z}\right)d\alpha. \tag{4}$$

Elle est déterminée par l'intégrale et holomorphe *au moins* pour les z avec $|z| > \frac{1}{k}$. Pour $z = \infty$, $f(z) = 0$.

Posons (ce qui est permis d'après (1))

$$\gamma_n = \int_0^\infty M(\alpha)\,\alpha^n\,d\alpha, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

$$\mathscr{E}(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\gamma_n}. \tag{6}$$

---

sujet semblable (comp. G. Valiron, Annali Scuola Norm. di Pisa, Série II, vol. II 1933 et Vl. Bernstein, Reale Accademia d'Italia, 1933, p. 339) surtout par la manière de présenter les choses que nous jugeons plus commode pour nos buts.

On démontre facilement à l'aide de (1) que $\mathscr{E}(x)$ est une fonction entière satisfaisant à (2) pour k quelconque < 1.

Les B- et P-transformées d'une fonction entière $\Phi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, ont les développements

$$(7') \qquad \varphi(z) = \sum_0^\infty \gamma_n a_n z^n,$$

$$(7'') \qquad f(z) = \sum_0^\infty \frac{\gamma_n a_n}{z^{n+1}}.$$

Les B- et P-transformées de $\mathscr{E}(z)$ sont égales respectivement à $\frac{1}{1-z}$ et $\frac{1}{z-1}$.

Une fonction entière $\Phi(z)$ peut être trouvée à l'aide de ses transformées par les formules

$$(8') \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{1}{t}\varphi(t)\,\mathscr{E}\left(\frac{z}{t}\right)dt,$$

$$(8'') \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} f(t)\,\mathscr{E}(zt)\,dt,$$

où C' (resp. C'') est une courbe simple fermée rectifiable, renfermant l'origine dans son intérieur et telle que $\varphi(z)$ (resp. $f(z)$) est holomorphe ou prolongeable dans tout son intérieur (resp. extérieur); les intégrales sur C' et C'' sont prises dans le sens direct (positif par rapport à leurs intérieurs).

Nous nous bornerons dès maintenant à la considération de la P-transformée, mais il est évident que tous les développements pourront être obtenus d'une manière analogue pour la B-transformée.[1]

Posons

$$(9) \qquad k(\theta, R) = \textit{borne inf. des } k > 0 \textit{ tels que } \frac{|\mathscr{E}(re^{i\theta})|}{\mathscr{E}(kr)} < 1 \textit{ pour } r \geq R.$$

Désignons ensuite par $D(1, R)$ l'intérieur de l'ensemble des points $z = \varrho e^{i\psi}$ avec $\varrho < \frac{1}{k(\psi, R)}$. $D(1, R)$ est un domaine étoilé centré en l'origine[2], renfermant l'intérieur du cercle unité et ne contenant jamais le point 1. On a pour $R < R' : D(1, R) < < D(1, R')$.

[1] Sauf certaines considérations particulières concernant la transformation obtenue avec $M(\alpha) = e^{-\alpha}$ et où la P-transformée se montre plus commode que la B-transformée.

[2] C. à d. qu'avec un point z, il renferme tout le segment demi-ouvert $(0; z]$.

Posons maintenant: $D(1) = \sum_{n=1}^{\infty} D(1, R_n)$ avec $\lim_{n=\infty} R_n = \infty$. $D(1)$ est encore un domaine étoilé centré en l'origine et l'équation de sa frontière peut être mise sous la forme

$$(10) \qquad \varrho = \frac{1}{k(\psi)}, \quad k(\psi + 2\pi) = k(\psi) \textit{ pour } 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

On aura toujours

$$(11) \qquad k(0) = 1, \quad k(\psi) \leq 1 \textit{ pour tout } \psi.$$

Entre $k(\psi)$ et $k(\theta, R)$ existe la relation suivante: $k(\psi) = \lim_{R=\infty} \bar{k}(\psi, R)$, où $\bar{k}(\psi, R) = \lim_{\varepsilon=0} [\text{borne supér.}_{\psi-\varepsilon<\theta<\psi+\varepsilon}\ k(\theta, R)]$.

Par $D(x)$ nous désignerons le domaine qui s'obtient de $D(1)$ par l'affinité $z' = xz$ qui ramène le point 1 à la position x.

Posons

$$(12) \qquad h(\psi) = \textit{borne inf. des } \varrho > 0 \textit{ tels que } f(z) \textit{ est holomorphe (ou prolongeable) dans tout l'extérieur de } D(\varrho e^{i\psi}).$$

$h(\psi)$ ne dépend ($M(\alpha)$ une fois fixée) que de la position des singularités de $f(z)$. Précisons cette relation.

La fonction $f(z)$ étant holomorphe à l'infini, marquons sur chaque rayon $\arg z = \psi$ le point le plus rapproché de l'origine parmi les points $\varrho e^{i\psi}$ pour lesquels $f(z)$ est holomorphe sur tout le rayon $re^{i\psi}$ avec $r > \varrho$. Désignons par $\sigma(\psi)$ la distance de ce point à l'origine. L'équation $\varrho = \sigma(\psi)$ est alors l'équation de la frontière de l'étoile d'holomorphie E de la fonction $f(z)$, centrée en ∞.[1]

Il est à remarquer que pour que l'équation $\varrho = \sigma(\psi)$ soit l'équation de la frontière d'une étoile E (centrée en ∞), il faut et il suffit que la fonction $\sigma(\psi)$ soit périodique de période 2π, non négative, et qu'elle soit semi continue supérieurement, c. à d. que $\overline{\lim}_{\psi=\psi_0} \sigma(\psi) \leq \sigma(\psi_0)$, *pour tout* ψ_0.

On démontre facilement la relation

$$(13) \qquad h(\psi) = \text{borne sup}_{\psi'}\ \sigma(\psi')\, k(\psi' - \psi).$$

Ainsi $h(\psi)$ est parfaitement déterminé par la fonction $\sigma(\psi)$. Mais la réciproque n'est pas vraie; il existe une infinité de fonctions $\sigma'(\psi)$ (définissant différentes étoiles E') auxquelles correspond la même fonction $h(\psi)$. Parmi ces fonctions $\sigma'(\psi)$ se

[1] En général: l'ensemble E est étoile centré en ∞, s'il renferme avec un point $\varrho e^{i\psi}$ toute la demi-droite $re^{i\psi}, r \geq \varrho$.

trouve une — la plus grande — que nous désignerons par $\sigma_0(\psi)$. On a donc $\sigma'(\psi) \leq \sigma_0(\psi)$. En outre

$$(14) \qquad \sigma_0(\psi) = \text{borne}\underset{\psi'}{} \text{ inf. } \frac{h(\psi')}{k(\psi - \psi')}.$$

Les formules (13) et (14) nous montrent que $\sigma_0(\psi)$ est parfaitement déterminée par $\sigma(\psi)$, donc par les singularités de $f(z)$. L'ensemble des points $z = \varrho e^{i\psi}$ avec $\varrho = \sigma_0(\psi)$ forme le *diagramme indicateur* de $f(z)$. Il est sur la frontière de l'ensemble commun de tous les domaines $D(x)$ à l'extérieur desquels $f(z)$ est holomorphe.[1] Il est aussi l'enveloppe (au sens généralisé) des frontières des domaines $D(h(\psi)e^{i\psi})$, $\theta \leq \psi \leq 2\pi$. Nous appellerons *sommet* un point s du diagramme auquel correspond un domaine $D(x)$ (avec $x = h(\psi)e^{i\psi}$) contenant tout le diagramme sauf le point s en question (qui est alors sur la frontière de $D(x)$). Les sommets du diagramme (sauf peut-être l'origine, si elle en forme un) sont tous des points singuliers de $f(z)$ et appartiennent à la frontière de l'étoile E de $f(z)$.

Introduisons encore l'indicatrice de croissance de $\Phi(z)$:

$$(15) \qquad h_\Phi(\theta) = \textit{borne inf. des } k > 0 \textit{ tels que } \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{|\Phi(re^{i\theta})|}{\mathscr{E}(kr)} < \infty.$$

On démontre (par la formule (8″)) le fait fondamental

$$(16) \qquad h_\Phi(\theta) \leq h(-\theta).$$

Supposons maintenant que $M(\alpha)$ est une fonction analytique, holomorphe dans un secteur contenant le demi-axe réel positif. Soit p. ex. $-\chi_1 < \chi < \chi_2$ le plus grand secteur dans lequel la fonction $M(x)$, $x = re^{i\chi}$, est holomorphe. Posons alors pour $-\chi_1 < \chi < \chi_2$

$$k_1(\chi, R) = \textit{borne sup. des } k > 0 \textit{ tels que } \frac{|M(re^{i\chi})|}{M(kr)} < 1 \textit{ pour } r \geq R;$$

pour les autres χ on posera $k_1(\chi, R) = 0$.

Désignons ici par $C(1, R)$ un domaine-composant de l'intérieur de l'ensemble des points $x = re^{i\chi}$ avec $r > \dfrac{1}{k_1(\chi, R)}$ et notamment le composant contenant des points du demi-axe réel positif (s'il n'y en a pas on posera $C(1, R) \equiv 0$). $C(1, R)$ sera un domaine étoilé centré en ∞.[2] Pour $R < R'$ on a $C(1, R) < C(1, R')$. On posera

[1] Cet ensemble commun peut n'être ni fermé, ni ouvert. La frontière d'un tel ensemble A est définie comme l'ensemble $\bar{A} \cdot \overline{P - A}$, où P désigne le plan entier.

[2] Remarquons que pour que le domaine $C(1, R)$ existe (c. à d. ne soit pas vide) il est nécessaire qu'il existe une constante ϱ telle que $\overline{\lim_{\alpha=\infty}}\, e^{\alpha\varrho} M(\alpha) > 0$.

donc $C(1) = \sum_{n=1}^{\infty} C(1, R_n)$ où $R_n \to \infty$. $C(1)$ est encore un domaine étoilé, centré en ∞ et dont la frontière a une équation qui peut être mise sous la forme

$$r = \frac{1}{k_1(\chi)}, \quad k_1(\chi + 2\pi) = k_1(\chi) \ pour \ 0 < \chi \leq 2\pi. \tag{17}$$

Les points $x = re^{i\chi}$ avec $r \leq \frac{1}{k_1(\chi)}$ forment un domaine fermé étoilé $\overline{D}_1(1)$ centré en l'origine.[1] Le domaine $\overline{D}_1(a)$ s'obtient de $\overline{D}_1(1)$ par l'affinité $x' = ax$ qui change 1 en a.

A l'aide des domaines (fermés) $\overline{D}_1(a)$ on définit la fonction $h_1(\chi)$ d'une manière analogue à celle qui a servi à définir $h(\psi)$ à l'aide des $D(a)$.

Entre h_1, k_1 et σ on a des relation analogues à celles établies plus haut pour h, k et σ. Comme analogon à la formule (16) on obtient ici une inégalité dans l'autre sens

$$h_{\Phi}(\theta) \geq h_1(-\theta). \tag{18}$$

Les cas les plus intéressants sont ceux, où $k_1(\theta) = k(\theta)$.[2] Alors les domaines fermés $\overline{D}(a)$ et $\overline{D}_1(a)$ coïncident et $h_1(\theta) = h(\theta)$ (ces fonctions sont dans ce cas continues).

Les inégalités (16) et (18) se transforment dans ce cas en égalité

$$h_{\Phi}(\theta) = h(-\theta)$$

et ceci pour n'importe quelle fonction entière $\Phi(z)$ satisfaisant à (2).

Les inégalitées (16) et (18) donnent déjà dans le cas général des conséquences intéressantes. P. ex., par la formule (7'') on trouve que la P-transformée de la dérivée $\Phi'(z)$ est égale à $(-zf(z) - z^2 f'(z))$; elle a donc la même étoile E que $f(z)$. Par conséquent, les indicatrices de croissance de $\Phi(z)$ et de $\Phi'(z)$ sont limitées par les mêmes fonctions $h(\theta)$ et $h_1(\theta)$. Dans le cas où $k(\theta) = k_1(\theta)$ ces deux indicatrices sont égales: $h_{\Phi}(\theta) = h_{\Phi'}(\theta)$ (des énoncés analogues ont été déjà obtenus dans différents cas par d'autres méthodes).

Il est à remarquer que pour *chaque* fonction entière transcendante $\Phi(z)$ on peut choisir la fonction $M(\alpha)$ de manière à satisfaire à (2). P. ex. on peut prendre l'inverse de $M(\alpha)$ égale à max $|\Phi(z)|$ pour $|z| = \alpha$.

---

[1] Remarquons que 1 peut se trouver à l'intérieur de $\overline{D}_1(1)$.

[2] Il est à remarquer qu'alors la fonction $k(\theta) = k_1(\theta)$ est continue, $k(\theta)$ et $k_1(\theta)$ étant sémi-continues, l'une supérieurement et l'autre inférieurement (car leurs inverses forment les équations des frontières des domaines étoilés $D(1)$ et $C(1)$, le premier centré en l'origine et le second centré en ∞).

Les transformations les plus employées sont celles qui correspondent à $M(\alpha) = \varrho \alpha^{\varrho-1} e^{-\alpha^\varrho}$ avec ϱ constant positif. Pour tout ϱ la condition $k(\theta) = k_1(\theta)$ est ici remplie.

La transformation la plus étudiée et la plus maniable est celle qu'on obtient pour $\varrho = 1$, donc $M(\alpha) = e^{-\alpha}$. Elle correspond à la méthode de sommation de Borel. On a ici: $\gamma_n = n!$, $\mathscr{E}(x) = e^x$, $k(\theta) = \cos\theta$ pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et $k(\theta) = 0$ pour $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$; le domaine $D(x)$ est formé par le demi-plan contenant l'origine et limité par la droite passant par x perpendiculairement au segment $[0; x]$. La condition (2) exprime que $\Phi(x)$ est au plus du type moyen d'ordre 1. Le diagramme indicateur est ici la frontière du plus petit domaine convexe et fermé renfermant toutes les singularités de $f(z)$ (c. à d. à l'extérieur duquel $f(z)$ est holomorphe). L'indicatrice $h(\theta)$ donne l'équation tangentielle du diagramme, ou, plus précisément, elle donne la distance à l'origine de la tangente (généralisée) au diagramme perpendiculaire à la direction $\arg z = \theta$. L'indicatrice $h_\Phi(\psi)$ mésure la croissance de $\Phi(z)$ dans la direction $\arg z = \psi$: $h_\Phi(\psi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} |\Phi(re^{i\psi})|}{r}$. On a

$$h_\Phi(\psi) = h(-\psi).$$

Dans le cas plus général $M(\alpha) = \varrho\alpha^{\varrho-1} e^{-\alpha^\varrho}$ (qui correspond à la sommation de Mittag-Leffler) on obtient: $\gamma_n = \Gamma\left(\frac{n}{\varrho} + 1\right)$, $\mathscr{E}(x) = \mathscr{E}_{\frac{1}{\varrho}}(x)$ — la fonction de Mittag-Leffler d'indice $\frac{1}{\varrho}$, $k(\theta) = (\cos\varrho\theta)^{\frac{1}{\varrho}}$ pour $|\theta| < \frac{\pi}{2\varrho}$ et $k(\theta) = 0$ pour $\frac{\pi}{2\varrho} \leq |\theta| \leq \pi$ (pour $\varrho < \frac{1}{2}$ le dernier cas ne se présente pas). Ceci détermine la forme des domaines $D(x)$. La condition (2) exprime ici que $\Phi(x)$ est au plus du type moyen d'ordre ϱ. Le diagramme indicateur forme la frontière de l'étoile $\Sigma_{\frac{\pi}{\varrho}}$ de Mittag-Leffler de la fonction $\varphi(z)$ (la B-transformée) transformée par l'inversion $z' = \frac{1}{z}$. La signification de l'indicatrice $h(\theta)$ en découle immédiatement. L'indicatrice $h_\Phi(\psi)$ est égale à $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} |\Phi(ze^{i\psi})|}{r^\varrho}$, et on a $h_\Phi(\psi) = h(-\psi)$.

Application des transformations générales.

Pour simplifier les énoncés, nous nous bornerons aux transformations où les fonctions $k(\theta)$ et $k_1(\theta)$ (voir plus haut) sont égales, donc aussi continues (voir la note 2 sous texte p. 91).[1]

---

[1] On ne sait pas encore s'il est possible que cette condition soit remplie sans que $k(\theta)$ coïncide avec une fonction $(\cos\varrho\theta)^{\frac{1}{\varrho}}$ pour un $\varrho > 0$.

Nous avons déjà vu qu'il y a une liaison assez étroite entre la croissance de $\Phi(z)$ caractérisée par l'indicatrice $h_\Phi(\psi)$ et les singularités de la transformée $f(z)$ de $\Phi(z)$. En effet, il n'y a qu'à construire à l'aide de $h(\theta) = h_\Phi(-\theta)$ le diagramme indicateur (qui est l'enveloppe au sens généralisé des frontières des domaines $D(h(\theta)e^{i\theta})$) pour savoir qu'à l'extérieur du diagramme, $f(z)$ est holomorphe et que tous les sommets du diagramme (sauf peut-être l'origine) sont des points singuliers de $f(z)$. La relation inverse est encore plus complète, car, connaissant les points singuliers de $f(z)$, on trouve facilement le diagramme indicateur et la fonction $h(\theta)$ ce qui détermine complètement l'indicatrice $h_\Phi(\psi)$.

A l'aide du théorème **A** nous allons pouvoir préciser encore plus la liaison entre $\Phi(z)$ et les singularités de $f(z)$ par les propriétés de certaines décompositions de $\Phi(z)$ en somme.

Nous allons à cet effet démontrer le

Théorème IV. *Si la fonction $f(z)$ possède une étoile E avec l'équation $\varrho = \sigma(\psi)$, alors, pour toute décomposition de l'angle plein autour de l'origine en un nombre fini (p. ex. $= n$) d'angles par les rayons $\arg z = \psi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, avec $\psi_0 < \psi_1 < \cdots < \psi_n = \psi_0 + 2\pi$, la fonction $\Phi(z)$ se laisse décomposer en n fonctions entières*

$$\Phi(z) = \sum_1^n \Phi_k(z)$$

telles que leurs indicatrices h_{Φ_k} sont données par l'équation suivante:

$$h_{\Phi_k}(\psi) = \underset{\psi_{k-1} < \psi' < \psi_k}{\text{borne sup}}\, \sigma(-\psi')\, k(\psi - \psi').$$

Démonstration: Transformons d'abord la fonction $f(z)$ en une fonction conforme à nos conditions, en posant à l'extérieur de E, $f(z) = 0$ (dans E $f(z)$ est déjà hol. et unif.). L'ensemble singulier de $f(z)$ ainsi étendue est égal à la frontière $\mathfrak{F}(E)$ de l'étoile E.

Les rayons $\arg z = -\psi_k$ décomposent cet ensemble singulier en n parties $F_1, F_2, \ldots, F_n$ tels que chaque F_k avec les deux rayons $\psi = -\psi_{k-1}$, $\varrho \leq \sigma(-\psi_{k-1})$ et $\psi = -\psi_k$, $\varrho \leq \sigma(-\psi_k)$ forme la frontière d'un secteur étoilé fermé: $-\psi_k \leq \psi \leq -\psi_{k-1}$, $\varrho \leq \sigma(\psi)$.

A la décomposition $\mathfrak{F}(E) = \sum_1^n F_k$ correspond, d'après le théorème **A**, une décomposition $f(z) = \sum_1^n f_k(z)$, où chaque fonction $f_k(z)$ a pour ensemble singulier exactement F_k, donc la frontière de son étoile d'holomorphie E_k (centré en ∞) a pour l'équation $\varrho = \sigma(\psi)$ pour $-\psi_k \leq \psi \leq -\psi_{k-1}$ et $\varrho = 0$ pour les autres ψ. Chacune des fonctions f_k est la P-transformée d'une fonction entière $\Phi_k(z)$ donnée d'après (8″) par

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} f_k(t)\,\mathscr{E}(zt)\,dt.$$

On a évidemment $\Phi(z) = \sum_1^n \Phi_k(z)$. D'autre part la fonction $h(\psi)$ correspondant à une fonction $f_k(z)$ est égale (d'après (13) et la propriété énoncé plus haut de l'étoile E_k de $f_k(z)$) à

$$\underset{-\psi_k \leq \psi' \leq -\psi_{k-1}}{\text{borne sup.}}\ \sigma(\psi')\,k(\psi' - \psi) = \underset{\psi_{k-1} \leq \psi' \leq \psi_k}{\text{borne sup.}}\ \sigma(-\psi')\,k(-\psi' - \psi),$$

d'où résulte immédiatement notre théorème (étant donné que $h_{\Phi_k}(\psi) = h(-\psi)$).

Pour pouvoir obtenir une sorte de réciproque du théorème IV nous soumettrons la fonction $k(\psi)$ (donc, indirectement, la transformation considérée) à la condition suivante:

$$(19) \qquad \begin{cases} k(\psi) = 0 \ \textit{dans un certain intervalle} \ \beta_1 \leq \psi \leq \beta_2,\ \beta_2 > \beta_1; \\ k(\psi) > 0 \ \textit{pour} \ \psi \ \textit{en dehors de l'intervalle} \ \beta_1 \leq \psi \leq \beta_2. \end{cases}$$

Parmi les transformations engendrées par les fonctions $M(a) = \varrho a^{\varrho-1} e^{-a^\varrho}$, celles pour lesquelles la condition (19) est satisfaite correspondent à $\varrho > \frac{1}{2}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème V: *Soit $\sigma(\psi)$ une fonction non-négative, périodique de période 2π, et semi-continue supérieurement. Si, pour chaque décomposition de l'angle plein autour de l'origine par les rayons $\arg z = \psi_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, avec $\psi_0 < \psi_1 < \cdots < \psi_n + 2\pi$, la fonction $\Phi(z)$ se laisse décomposer en une somme de n fonctions entières $\Phi(z) = \sum_1^n \Phi_k(z)$, telles que pour leurs indicatrices $h_{\Phi_k}(\psi)$ on a*

$$h_{\Phi_k}(\psi) \leq \underset{\psi_{k-1} \leq \psi' \leq \psi_k}{\text{borne sup.}}\ \sigma(-\psi')\,k(\psi - \psi'),$$

alors la P-transformée $f(z)$ de $\Phi(z)$ possède une étoile d'holomorphie E dont la frontière est donnée par une équation $\varrho = \sigma'(\psi)$ avec $\sigma'(\psi) \leq \sigma(\psi)$.

Démonstration: Considérons un argument θ quelconque. Nous allons démontrer que

$$\sigma'(\theta) \leq \sigma(\theta). \tag{20}$$

La fonction $\sigma(\psi)$ étant semi-continue supérieurement, on peut trouver un petit intervalle $-\psi_1 \leq \psi \leq -\psi_0$ avec $\psi_1 > \psi_0$ et $-\psi_1 < \theta < -\psi_0$ de manière que pour tout ψ dans cet intervalle on ait

$$\sigma(\psi) < \sigma(\theta) + \varepsilon, \tag{21}$$

pour un ε arbitrairement petit, choisi d'avance.

On peut supposer en plus que l'intervalle $[-\psi_1; -\psi_0]$ est plus court que l'intervalle $[\beta_1; \beta_2]$ figurant dans la condition (10). On peut alors faire suivre les deux arguments ψ_0 et ψ_1 par un nombre fini d'arguments ψ_k, $k=2, 3, \ldots, n$, de sorte que $\psi_0 < \psi_1 < \psi_2 < \cdots < \psi_n = \psi_0 + 2\pi$ et que

$$\psi_k - \psi_{k-1} < \beta_2 - \beta_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Considérons alors la décomposition correspondante

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(z). \tag{23}$$

La fonction $f_k(z)$ — la P-transformée de $\Phi_k(z)$ — aura une étoile d'holomorphie dont la frontière sera donnée par une équation $\varrho = \sigma_k'(\psi)$. On aura donc

$$h_{\Phi_k}(\psi) \leq \operatorname*{borne\ sup}_{\psi_{k-1} \leq \psi' \leq \psi_k} \sigma(-\psi') k(\psi - \psi'), \tag{24}$$

$$h_{\Phi_k}(\psi) = \operatorname*{borne\ sup}_{\psi'} \sigma_k'(-\psi') k(\psi - \psi'). \tag{25}$$

D'après (19), (22) et (24) on trouve immédiatement

$$h_{\Phi_k}(\psi) = 0 \ \text{ pour } \beta_1 + \psi_k \leq \psi \leq \beta_2 + \psi_{k-1}. \tag{26}$$

Supposons maintenant que pour un ψ' avec $\psi_k < \psi' < \psi_{k-1} + 2\pi$, $\sigma_k'(-\psi') > 0$. Cherchons un ψ commun aux deux intervalles

$$(27)\qquad \begin{gathered} 2\pi + \beta_1 + \psi_k \leq \psi \leq 2\pi + \beta_2 + \psi_{k-1}, \\ \beta_2 + \psi' < \psi < 2\pi + \beta_1 + \psi'. \end{gathered}$$

Il est facile à vérifier que quand ψ' varie entre ψ_k et $\psi_{k-1} + 2\pi$ ces deux intervalles possèdent toujours tout un intervalle en commun. Pour un argument ψ satisfaisant à (27) on aura alors d'après (26)

$$(28)\qquad h_{\Phi_k}(\psi) = h_{\Phi_k}(\psi - 2\pi) = 0.$$

D'autre part, d'après (25), on obtient pour le même ψ,

$$(29)\qquad h_{\Phi_k}(\psi) \geq \sigma_k'(-\psi')k(\psi - \psi').$$

Mais de (27) on tire: $\beta_2 < \psi - \psi' < 2\pi + \beta_1$, ce qui donne d'après (19) que $k(\psi - \psi') > 0$. A l'aide de (29) on en déduit que $h_{\Phi_k}(\psi) > 0$ contrairement à (28).

Tout ceci nous prouve que $\sigma_k'(-\psi) = 0$ pour $\psi_k < \psi < \psi_{k-1} + 2\pi$, donc

$$(30)\qquad \sigma_k'(\theta) = 0, \text{ pour } k = 2, 3, \ldots, n.$$

La relation (23) entraine

$$(31)\qquad f(z) = \sum_1^n f_k(z).$$

L'équation (31) implique le fait que l'étoile E de $f(z)$ contient l'ensemble commun des étoiles E_k des $f_k(z)$. Ceci signifie pour les fonctions $\sigma_k'(\psi)$ et $\sigma'(\psi)$:

$$(32)\qquad \sigma'(\psi) \leq \max_k \sigma_k'(\psi).$$

Les formules (32), (30), (25), (24), (11) et (21) nous donnent

$$\sigma'(\theta) \leq \max_k \sigma_k'(\theta) = \sigma_1'(\theta) \leq h_{\Phi_1}(-\theta) \leq \operatorname*{borne\ sup}_{\psi_0 \leq \psi' \leq \psi_1} \sigma(-\psi')\,k(-\theta - \psi') < \sigma(\theta) + \varepsilon.$$

Mais ε étant arbitraire on en obtient l'inégalité (20), c. q. f. d.

Remarque: On pourrait être tenté d'essayer de démontrer le théorème réciproque au théorème IV au sens exact de ce mot. On obtient un énoncé correspondant en remplaçant dans l'énoncé du théorème V l'inégalité pour $h_{\Phi_k}(\psi)$ par l'égalité

$$h_{\Phi_k}(\psi) = \operatorname*{borne\ sup.}_{\psi_{k-1} \leq \psi' \leq \psi_k} \sigma(-\psi')k(\psi - \psi')$$

et l'inégalité $\sigma'(\psi) \leq \sigma(\psi)$ par $\sigma'(\psi) = \sigma(\psi)$.

Mais des exemples très simples (même dans le cas de la transformation engendrée par $M(\alpha) = e^{-\alpha}$) montrent qu'un tel énoncé n'est pas vrai.

Application de la transformation (sommation) de Borel.

Nous allons maintenant considérer plus particulièrement la transformation engendrée par $M(\alpha) = e^{-\alpha}$, qui forme le procédé de sommation de Borel.

La propriété fondamentale de la fonction exponentielle: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, entraine ici des relations beaucoup plus profondes entre la structure d'une fonction entière $\Phi(z)$ du type convenable et les singularités de sa transformée $f(z)$.

On obtient donc tout d'abord que la P-transformée de $e^{az}\Phi(z)$ est $f(z-a)$ (le plus simplement en appliquant la formule (8'')). Ceci entraine des conséquences importantes. On peut notamment remplacer les fonctions $k(\psi)$, $\sigma(\psi)$, $h_\Phi(\psi)$ et les domaines $D(x)$, par des fonctions $K(\psi)$, $\Sigma(\psi)$, $H_\Phi(\psi)$ et des domaines $\Delta(r, \psi)$ donnant des relations plus précises entre la croissance de $\Phi(z)$ et les singularités de $f(z)$.

On a ici $K(\psi) = \cos\psi$ pour tout ψ, donc $k(\psi) = \frac{1}{2}[|K(\psi)| + K(\psi)]$. Pour définir $\Sigma(\psi)$ on considérera toute la droite $z = \varrho e^{i\psi}$ pour $-\infty < \varrho < +\infty$. La plus grande valeur ϱ (positive ou négative) telle que le point $\varrho e^{i\psi}$ soit singulier pour $f(z)$ sera désignée par $\Sigma(\psi)$; plus précisément $\Sigma(\psi)$ est la borne inférieure des R tels que $f(z)$ est prolongeable à partir de l'infini sur toute la demi-droite $R \leq \varrho \leq +\infty$.

On a $-\infty \leq \Sigma(\psi) < \infty$; d'autre part $\sigma(\psi) = \frac{1}{2}[|\Sigma(\psi)| + \Sigma(\psi)]$.

On obtient $H_\Phi(\psi)$ par la même définition que $h_\Phi(\psi)$ (comp. (15)) si l'on y laisse k prendre toutes les valeurs réelles (et non seulement positives).

Le domaine $\Delta(r, \psi)$ est le demi-plan limité par une droite qui passe par $re^{i\psi}$ (r réel quelconque) perpendiculairement à la direction $\arg z = \psi$, et renfermant la demi-droite $z = \varrho e^{i\psi}$ avec $\varrho < r$. Pour $r > 0$, $\Delta(r, \psi) = D(re^{i\psi})$.

On a la relation

$$H_\Phi(\psi) = \underset{|\psi'+\psi|<\frac{\pi}{2}}{\text{borne sup.}} \Sigma(\psi') \cos(\psi' + \psi). \tag{33}$$

Les droites $\xi\cos\psi + \eta\sin\psi = H_\Phi(-\psi)$ $(\xi + i\eta = z)$ enveloppent le diagramme indicateur I de Polya.

L'équation de ce diagramme en coordonnées polaires $z = \varrho e^{i\psi}$ est donnée par

$$\varrho = \Sigma_0(\psi) = \underset{|\psi'+\psi|<\frac{\pi}{2}}{\text{borne inf.}} \frac{H_\Phi(\psi')}{\cos(\psi'+\psi)}. \tag{34}$$

Le diagramme I forme la frontière du plus petit ensemble convexe en dehors duquel $f(z)$ est holomorphe. Nous désignerons cet ensemble (fermé) par D.

L'ensemble D correspondant à la fonction $f(z + a)$ s'obtient de celui correspondant à $f(z)$ par la translation qui transforme le point a en l'origine. La fonction $H_\Phi(-\psi)$ — qui donne la distance de la tangente (normale à la direction $\arg z = \psi$) à l'origine — se transforme alors en $H_\Phi(-\psi) - |a| \cos(\psi - \psi_0)$, où $a = |a| e^{i\psi_0}$. On obtient la même transformation de $H_\Phi(-\psi)$ en partant de sa définition comme indicatrice de croissance (dans la direction $\arg z = -\psi$) de la fonction $\Phi(z)$ — celle-ci se changeant alors en $e^{-az}\Phi(z)$.

Il en résulte immédiatement que si l'ensemble D peut être enfermé dans un cercle de centre a et de rayon ε, la fonction $\Phi(z)$ peut être présentée sous la forme $e^{az}\Phi_1(z)$, avec $|H_{\Phi_1}(\psi)| \leq \varepsilon$. Quand D se réduit au seul point a, $f(z)$ devient une fonction entière en $\dfrac{1}{z-a}$ et $\Phi(z)$ peut être présentée sous la forme $\Phi(z) = e^{az}\Phi_1(z)$, où $\Phi_1(z)$ est au plus du type minimum d'ordre 1.

En général, pour que l'ensemble D de la fonction $f_1(z)$ soit compris dans celui de $f(z)$, il faut et il suffit qu'on ait pour les indicatrices correspondantes H_{Φ_1} et H_Φ l'inégalité: $H_{\Phi_1} \leq H_\Phi$.

Nous considérerons désormais la fonction $f(z)$ — transformée de $\Phi(z)$ — comme une fonction conforme à nos conventions. A cet effet, nous prendrons un domaine G saturé par rapport aux propriétés suivantes[1]: 1° il renferme le domaine complémentaire à l'ensemble D, et 2° $f(z)$ est prolongeable dans tout G d'une manière holomorphe et uniforme. Dans G on prendra pour $f(z)$ les valeurs données par le prolongement analytique et, s'il y a encore des points extérieurs à G on y posera $f(z) = 0$ (ou bien $f(z)$ égale à une fonction quelconque holomorphe et uniforme dans tout domaine extérieur à G). Il est évident que pour la liaison entre $f(z)$ et $\Phi(z)$ les valeurs de $f(z)$ en dehors de G n'auront aucune importance.

Le domaine G n'est déterminé d'une manière unique que dans le cas, où par prolongement analytique de $f(z)$ par tous les chemins on obtient une fonction uniforme (à moins que l'ensemble D ne contienne aucun point intérieur).

L'ensemble singulier F de $f(z)$ est certainement compris dans D. Certains points de F se trouvent même sur le diagramme I (notamment tous les sommets de I appartiennent à F).

Couvrons maintenant F par un nombre fini des cercles fermés $C_1, C_2, \ldots, C_n$, des rayons ε et centrés aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ appartenant à F.

En posant $F_m = F \cdot C_m$ on obtient une décomposition $F = \sum_1^n F_m$ à laquelle

[1] c. à. d. tel qu'il n'existe aucun domaine plus grand satisfaisant aux mêmes conditions.

correspond une décomposition $f(z) = \sum_1^n f_m(z)$. A chacune des fonctions $f_m(z)$ correspond une fonction entière $\Phi_m(z)$ et on a $\Phi(z) = \sum_1^n \Phi_m(z)$. Les indicatrices $H_\Phi(\psi)$ et $H_{\Phi_m}(\psi)$ sont liées par la relation

$$H_\Phi(\psi) = \max_m .\ H_{\Phi_m}(\psi), \tag{35}$$

car premièrement, de $F_m \subset F$ résulte que l'ensemble D correspondant à $f_m(z)$ est compris dans celui de $f(z)$, d'où $H_{\Phi_m}(\psi) \leq H_\Phi(\psi)$. Secondement il est évident que l'indicatrice de croissance de la somme $\sum_1^n \Phi_m(z)$ ne peut pas dépasser les indicatrices de toutes les composantes. Ainsi (35) est entièrement prouvé.

D'autre part chaque $\Phi_m(z)$ peut être mise sous la forme $\Phi_m(z) = e^{a_m z}\Psi_m(z)$, avec $|H_{\Psi_m}(\theta)| \leq \varepsilon$, car l'ensemble F_m, donc aussi l'ensemble D correspondant, sont compris dans le cercle C_m. Entre H_{Φ_m} et H_{Ψ_m} on a la relation (en posant $a_m = |a_m| e^{i\lambda_m}$)

$$H_{\Phi_m}(\theta) = H_{\Psi_m}(\theta) + |a_m| \cos(\theta + \lambda_m).$$

En résumé, on a obtenu l'énoncé suivant:

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de points a_m dans l'ensemble singulier de $f(z)$ — la transformée de $\Phi(z)$ — *de manière que la fonction $\Phi(z)$ puisse être représentée sous la forme*

$$\Phi(z) = \sum_1^n e^{a_m z}\Psi_m(z), \quad \textit{avec } |H_{\Psi_m}(\theta)| \leq \varepsilon, \tag{36}$$

c. à d. comme somme de fonctions entières dont la croissance diffère aussi peu que l'on veut de la croissance d'une exponentielle simple.

L'indicatrice de croissance de $\Phi(z)$ est liée à celles des Ψ_m par la formule (où $a_m = |a_m| e^{i\lambda_m}$)

$$H_\Phi(\theta) = \max_m [H_{\Psi_m}(\theta) + |a_m| \cos(\theta + \lambda_m)]. \tag{37}$$

Les points a_m peuvent être choisis dans F tout à fait arbitrairement pourvu que les cercles décrits autour d'eux avec le rayon ε couvrent entièrement F.

Quand $f(z)$ ne présente qu'un nombre fini de points singuliers isolés, on peut les prendre pour les points a_m et choisir un ε arbitrairement petit. Dans la décomposition (36) les fonctions Ψ_m seront d'ordre < 1 ou bien du type minimum d'ordre 1 au plus. Si le point a_m est un pôle d'ordre ν, la fonction Ψ_m sera un polynôme de degré $\nu - 1$.

Par des raisonnements analogues on obtient des décompositions en séries infinies. P. ex. si F se compose d'une suite infinie des points singuliers isolés a_m et de leur unique point limite a, on sait (le théorème de Mittag-Leffler, comp. § 2) que $f(z)$ peut être présentée sous la forme

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \left[g_m\left(\frac{1}{z - a_m}\right) - p_m\left(\frac{1}{z - a}\right) \right],$$

où $g_m(t)$ est une fonction entière (donnant la partie principale de $f(z)$ en a_m) et $p_m(t)$ un polynôme assurant la convergence. Il en résulte pour $\Phi(z)$ une décomposition

$$\Phi(z) = \Sigma \left[e^{a_m z} \Psi_m(z) - e^{a z} P_m(z) \right]$$

avec des Ψ_m du type minimum de l'ordre 1 au plus et des polynômes P_m.[1]

Le fait que nous venons d'énoncer met déjà en évidence la liaison qui existe entre les points singuliers de $f(z)$ et les décompositions de $\Phi(z)$ en somme. Nous allons maintenant préciser encore plus cette liaison en démontrant ce qui suit:

Pour que la fonction $f(z)$ soit prolongeable analytiquement suivant un arc simple L unissant l'infini à un point à distance finie, il faut et il suffit que pour un ε assez petit on puisse trouver une décomposition (36) *avec des a_m ayant tous une distance de L supérieure à ε.*

La condition est nécessaire. En effet, l'arc simple L peut être entouré d'une bande simplement connexe, dans laquelle $f(z)$ est partout prolongeable à partir de son élément initial à l'infini. Cette bande ouverte — désignons la par B — renferme L; elle renferme donc également un voisinage du point à l'infini, c. à d. l'extérieur d'un cercle: $|z| > R$. La fonction $f(z)$ y étant prolongeable sur tout chemin, son prolongement détermine dans B (qui est simplement connexe) une fonction holomorphe et uniforme $f_0(z)$ qui, à l'extérieur d'un cercle assez grand (cet extérieur étant compris dans B), coïncide avec $f(z)$. Pour rendre $f_0(z)$ con-

[1] On utilise ici le fait que si les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers $f(z)$ en dehors d'un cercle, les fonctions $\Phi_n(z)$ correspondant à $f_n(z)$ tendent uniformément dans tout domaine borné, vers la fonction $\Phi(z)$ correspondant à $f(z)$.

forme à nos conditions nous la définirons encore à l'extérieur de B comme égale à $f(z)$ là où cette dernière est déterminée. La fonction $f_0(z)$ ainsi définie aura son ensemble singulier F_0 compris dans celui de $f(z)$ augmenté de la frontière $\mathfrak{F}(B)$ qui est bornée. La distance minimum entre les points de l'arc L et la frontière $\mathfrak{F}(B)$ étant positive, prenons un ε positif et plus petit que la moitié de cette distance minimum. Couvrons F_0 par un nombre fini de cercles fermés C_m des centres a_m (pris dans F_0) et de rayon ε. Comme plus haut on obtiendra les décompositions $F_0 = \Sigma F_0\, C_m \equiv \Sigma F_m$ et $f_0(z) = \Sigma f_m(z)$. En dehors d'un cercle assez grand (autour de l'origine) les fonctions f_0 et f_m sont toutes holomorphes et $f_0(z)$ y coïncide avec $f(z)$. Par conséquent, en prenant dans la formule (8″) (où on aura remplacé $\mathscr{E}(x)$ par e^x) pour C'' une circonférence $|t| = R$ avec R assez grand, on obtiendra pour $f_0(z)$ la même fonction entière $\Phi(z)$ que pour $f(z)$. Les fonctions $\Phi_m(z)$ correspondant à $f_m(z)$ formeront alors une décomposition dans le genre de (36) de $\Phi(z)$, car on aura $\Phi_m(z) = e^{a_m z}\,\Psi_m(z)$, avec $|H_{\Psi_m}(\theta)| < \varepsilon$. D'autre part tout point a_m se trouve à une distance de L plus grande que ε (même $\geq 2\varepsilon$), car autrement il se trouverait à l'intérieur de B, où il n'y a pourtant pas de points singuliers de $f_0(z)$.

Remarquons encore que la formule (37) ne sera ici valable que si l'ensemble singulier de $f_0(z)$ est compris dans l'ensemble D de $f(z)$, ce qui n'est possible que si les parties de la frontière de B situées en dehors de D ne séparent pas différentes déterminations de $f(z)$.

La condition est suffisante. Ceci provient simplement du fait que les fonctions $f_m(z)$ — les transformées des $\Phi_m(z) = e^{a_m z}\Psi_m(z)$ satisfaisant à (36) — ont leurs ensembles D, donc également leurs ensembles singuliers, compris dans les cercles C_m des centres a_m et des rayons ε. Ces ensembles singuliers n'ont donc aucun point commun avec L. Il en sera de même pour leur somme qui renferme l'ensemble singulier de la somme $f_0(z) = \Sigma f_m(z)$. Ainsi la fonction $f_0(z)$ est holomorphe sur l'arc L. Mais la formule (4) (où on aura remplacé $M(\alpha)$ par $e^{-\alpha}$) qui nous donne les $f_m(z)$ à l'aide des $\Phi_m(z) = e^{a_m z}\,\Psi_m(z)$ est sûrement valable pour chacune de ces fonctions quand les z sont extérieurs à un cercle assez grand (renfermant tous les C_m). Ceci nous montre que pour ces z la somme $f_0(z) = \Sigma f_m(z)$ est égale à la fonction $f(z)$ obtenue par la même formule à l'aide de $\Phi(z) = \Sigma \Phi_m(z)$. Ainsi on voit que $f(z)$ et $f_0(z)$ coïncident dans le voisinage de l'infini et que $f_0(z)$ est holomorphe sur tout l'arc L (commençant à l'infini). Par conséquent $f(z)$ est prolongeable sur l'arc L, c. q. f. d.

Occupons nous maintenant des singularités de $f(z)$ sur le diagramme indicateur I. On sait que dans notre cas actuel, ce diagramme présente plusieurs propriétés intéressantes. En général il forme une courbe simple fermée convexe (dans certains cas cette courbe peut dégénérer en un segment rectiligne ou un point, mais nous ne considérerons que le cas général et il sera bien aisé à voir quels changements il faut apporter dans les raisonnements pour les cas dégénéres).

Chaque droite $x \cos \theta + y \sin \theta = H_\Phi(-\theta)$ (où x et y sont des coordonnées rectangulaires) porte un seul point $p(\theta)$ ou un seul segment $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$ du diagramme I. Nous désignerons cette droite par $T(\theta)$ et l'appellerons la tangente au diagramme I normale à la direction $\arg z = \theta$, ou correspondant à θ.

En désignant la fonction $H_\Phi(-\theta)$ par $h(\theta)$ on peut énoncer les propriétés suivantes: $h(\theta)$ est continue et possède partout une dérivée continue $h'(\theta)$ sauf en un ensemble au plus dénombrable des arguments θ. Pour chaque θ de ce dernier ensemble, $h(\theta)$ possède une dérivée gauche $h'_-(\theta)$ et une dérivée droite $h'_+(\theta)$.

Le point $p(\theta)$ où la tangente $T(\theta)$ touche le diagramme I, est donné par la formule

$$p(\theta) = e^{i\theta}[h(\theta) + i h'(\theta)]; \tag{38}$$

les arguments θ auxquels correspond tout un segment $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$ sont justement ceux, où $h'_-(\theta) \neq h'_+(\theta)$ et on trouve les points $p'(\theta)$ et $p''(\theta)$ par la même formule (38) en y remplaçant $h'(\theta)$ par $h'_-(\theta)$ resp. $h'_+(\theta)$.

Pour chaque point p du diagramme I et même, plus généralement, de l'ensemble D, on a

$$h(\theta) \geq \Re(p e^{-i\theta}) = |p| \cos(\lambda - \theta), \quad \textit{où} \ p = |p|\, e^{i\lambda}; \tag{39}$$

cette inégalité se transforme en égalité uniquement dans le cas où p se trouve sur la tangente $T(\theta)$.

Cependant, si l'on prend sur la droite $T(\theta)$ deux points p'_1 et p''_1 tels que le segment ouvert $(p'_1;\ p''_1)$ renferme le point $p(\theta)$ ou bien le segment entier $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$, alors pour un η assez petit on aura

$$h(\theta') < \Re(p'_1 e^{-i\theta'}) \quad \textit{pour} \ \theta - \eta < \theta' < \theta \tag{40}$$

$$h(\theta') < \Re(p''_1 e^{-i\theta'}) \quad \textit{pour} \ \theta < \theta' < \theta + \eta. \tag{41}$$

Il y a encore à distinguer dans le diagramme I les points anguleux. Ce sont les points p correspondant à deux tangentes différentes $T(\theta')$ et $T(\theta'')$, c. à d. que $p = p(\theta') = p(\theta'')$. Un tel point p se trouve alors sur une infinité de tangentes $T(\theta)$ correspondant aux arguments θ formant un intervalle $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Les valeurs de $h(\theta)$ dans un tel intervalle sont données par

$$h(\theta) = \Re(p e^{-i\theta}). \tag{42}$$

Inversement, si dans un intervalle $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ la formule (42) subsiste avec un point p constant, aux arguments θ dans cet intervalle correspondent des points $p(\theta) = p$.

Après ces préliminaires nous pouvons passer aux singularités de $f(z)$ sur le diagramme I (pour le prolongement de $f(z)$ partant de l'extérieur de I).

Nous avons déjà indiqué dans le cas général que tous les sommets du diagramme indicateur sont des points singuliers de $f(z)$. Dans notre cas actuel les sommets de I ce sont les points $p(\theta)$. D'autre part on vérifie facilement que les points $p'(\theta)$ et $p''(\theta)$ — les extrémités des segments situés sur I — sont ou bien des points $p(\theta')$ pour un autre argument θ' (alors ce sont des points anguleux) ou bien des limites des points $p(\theta')$. Il en découle que les seuls points de I qui peuvent encore être réguliers, sont les points non-extrèmes des segments compris dans I.

Il se pose ainsi la question de savoir si un tel point p compris dans le segment $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$ est un point singulier pour $f(z)$ ou non. Nous allons la résoudre à l'aide de nos décompositions.

A cet effet supposons que $f(z)$ n'est pas singulière en p. Celui-ci n'appartient donc pas à l'ensemble singulier F de $f(z)$[1]. Considérons la droite $\varDelta$ passant par p perpendiculairement à la droite $T(\theta)$ (qui contient le segment $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$). $\varDelta$ coupe l'ensemble singulier F en deux parties fermées F_1 et F_2 (pouvant avoir de points communs sur $\varDelta$) dont l'une contient $p'(\theta)$ et l'autre $p''(\theta)$.

A la décomposition $F = F_1 + F_2$ correspond celle de $f(z)$: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Les ensembles D de f_1 et f_2 sont contenus évidemment dans les deux parties auxquelles est divisé l'ensemble D de $f(z)$ par $\varDelta$. D'autre part ils ne contiennent pas — ni l'un, ni l'autre — le point p. Leurs frontières I_1 et I_2 — les diagrammes indicateurs de $f_1(z)$ et de $f_2(z)$ — n'auront sur la droite $T(\theta)$ que le point $p'(\theta)$ ou un segment $[p'(\theta);\ p_1]$ respectivement le point $p''(\theta)$ ou un segment $[p_2;\ p''(\theta)]$. Les deux segments éventuels sont compris dans $[p'(\theta);\ p''(\theta)]$ mais ne contiennent pas le point p. Il y a donc deux points p_0' et p_0'' sur $T(\theta)$ de deux cotés de p, et à distance ε de p assez petite, qui n'appartiennent ni à

[1] ou, plus précisément, on peut définir $f(z)$ a l'intérieur de son ensemble D conformément à nos conventions, de maniere que p n'appartienne pas à l'ensemble singulier de $f(z)$. Dans les cas dégénérés, quand I forme un seul segment rectiligne il faut pour cela admettre pour $f(z)$ des coupures sortant de l'ensemble D de $f(z)$, ce qui entraine quelques petits changements dans les raisonnements.

I_1, ni à I_2. On a alors $p'_0 = p - \varepsilon i e^{i\theta}$, $p''_0 = p + \varepsilon i e^{i\theta}$ et, d'après les formules (40) et (41) appliquées aux fonctions $h'(\theta)$ et $h''(\theta)$ correspondant aux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$, on obtient

$$(43)\qquad \begin{aligned} h'(\theta') &< \Re(p'_0 e^{-i\theta'}) = \Re(p e^{-i\theta'}) - \varepsilon \sin(\theta' - \theta) \text{ pour } \theta < \theta' < \theta + \eta, \\ h''(\theta') &< \Re(p''_0 e^{-i\theta'}) = \Re(p e^{-i\theta'}) - \varepsilon \sin(\theta - \theta') \text{ pour } \theta - \eta < \theta' < \theta, \end{aligned}$$

pour un η suffisamment petit.

D'autre part on obtient facilement (en utilisant l'inégalité (39)) que si les fonctions $h'(\theta)$ et $h''(\theta)$ correspondant à $f_1(z)$ et $f_2(z)$ satisfont à (43), les ensembles D de ces dernières fonctions ne contiennent pas le point p et, par conséquent, leur somme est prolongeable jusqu'à p à partir de l'extérieur de son ensemble D.

Tout ceci, traduit par des propriétés des fonctions entières $\Phi(z)$, $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ correspondant à $f(z)$, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ nous donne le théorème suivant:

Pour que le point p appartenant au segment $[p'(\theta); p''(\theta)]$ du diagramme indicateur I soit régulier pour la fonction $f(z)$ (ou pour le prolongement de $f(z)$ partant de l'infini), il faut et il suffit que la fonction entière $\Phi(z)$ puisse être décomposée en somme de deux fonctions entières $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$, avec des indicatrices de croissance satisfaisant à

$$\begin{aligned} H_{\Phi_1}(\theta') &< \Re(p e^{i\theta'}) + \varepsilon \sin(\theta' + \theta) \text{ pour } -\theta - \eta < \theta' < -\theta \\ H_{\Phi_2}(\theta') &< \Re(p e^{i\theta'}) - \varepsilon \sin(\theta' + \theta) \text{ pour } -\theta < \theta' < -\theta + \eta \end{aligned}$$

avec un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ convenablement choisis.

D'une manière analogue, on obtient l'énoncé suivant:

Pour que tous les points non-extrêmes du segment $[p'(\theta); p''(\theta)]$ soient réguliers pour $f(z)$, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ telle que

$$\begin{aligned} H_{\Phi_1}(\theta') &< \Re(p'(\theta) e^{i\theta'}) - \varepsilon \sin(\theta' + \theta) \text{ pour } -\theta - \eta < \theta' < -\theta \\ H_{\Phi_2}(\theta') &< \Re(p''(\theta) e^{i\theta'}) + \varepsilon \sin(\theta' + \theta) \text{ pour } -\theta < \theta' < -\theta + \eta \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et pour un $\eta > 0$ convenablement choisi.

En effet, il n'y a qu'à remarquer que les points $p'(\theta)$ et $p''(\theta)$ sont ici des sommets des diagrammes I_1 et I_2 correspondant à $f_1(z)$ et $f_2(z)$, et appliquer ensuite convenablement les inégalités (40) et (41).

Si la fonction $f(z)$ est prolongeable dans tout un triangle compris dans D et ayant pour base le segment $[p'(\theta); p''(\theta)]$, sauf, bien entendu, aux extrémités $p'(\theta)$ et $p''(\theta)$, alors ces deux extrémités deviennent des points anguleux, l'une pour le diagramme I_1 et l'autre pour I_2. La formule (42) donne alors une condition nécessaire et suffisante pour que ce fait subsiste, notamment l'existence d'une décomposition $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec

$$H_{\Phi_1}(\theta') = \Re[p'(\theta)e^{i\theta'}] \quad pour \ -\theta - \eta < \theta' < -\theta$$
$$H_{\Phi_2}(\theta') = \Re[p''(\theta)e^{i\theta''}] \quad pour \ -\theta < \theta' < -\theta + \eta$$

avec un $\eta > 0$ convenable.[1]

Avant de finir ce paragraphe remarquons encore qu'en utilisant certaines recherches de Haar (dans Math. Ann. 96, 1927, p. 69) on peut obtenir des relations entre la croissance de la fonction $\Phi(z)$ ou bien de ses composantes dans une décomposition convenable $\Phi = \Sigma\Phi_k$, et l'allure de la fonction $f(z)$ quand z s'approche d'un point singulier de $f(z)$.

Nous ne développerons pas ce sujet, car celà nous entrainerait trop loin.

II. Application du théorème B.

L'idée fondamentale.

L'application du théorème **B** reposera sur l'idée suivante:

Soit $\Phi(z)$ une fonction entière. Imaginons un nombre fini (soit n) de courbes simples fermées non-bornées (donc passant par ∞) qui n'ont deux à deux que le point à l'infini en commun. Ces courbes, diminuées du point à l'infini, seront désignées par $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Les courbes entières sont donc $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$.

Les courbes $\bar{C}_\varkappa$ déterminent exactement $n + 1$ domaines s'étendant tous jusqu'à l'infini. On forme alors une fonction $\varphi(z)$ en posant dans certains de ces domaines $\varphi(z) = \Phi(z)$ et dans les autres, $\varphi(z) = 0$. La fonction $\varphi(z)$ est ainsi conforme à nos conventions et son ensemble singulier est égal à $\sum_1^n \bar{C}_\varkappa$ (car on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de courbes $C_\varkappa$ superflues, ne séparant pas des déterminations différentes de $\varphi(z)$).

Enfermons maintenant chaque courbe $C_\varkappa$ dans une bande $B_\varkappa$[2] assez étroite

[1] Dans notre note des Comptes Rendus, 196, 1933, p. 673 nous avons donné par inadvertance cette dernière condition comme répondant au problème résolu dans l'énoncé précédent.

[2] Nous appellerons ici bande (infinie) un domaine simplement connexe s'étendant jusqu'à l'infini avec une frontière composée d'une ou deux courbes simples fermées passant par l'infini. Nous ne considérerons que des bandes suffisamment étroites dans ce sens que la distance d'un point z de cette bande à la frontiere de celle-ci est bornée, ou même tend vers 0, quand z s'éloigne vers l'infini.

(limitée par deux courbes $C'_\varkappa$ et $C''_\varkappa$) de manière que les bandes fermées $\overline{B}_\varkappa$ n'aient deux à deux en commun que le point à l'infini.

On vérifie facilement que l'ensemble ouvert $B = \sum_1^n B_\varkappa$ remplit par rapport à la fonction $\varphi(z)$ les hypothèses du théorème **B**. Il en résulte qu'il existe une fonction entière $g(z)$ approchant $\varphi(z)$ en dehors de B à un ε quelconque près.

La fonction $g(z)$ possède des propriétés fondamentales pour la suite: dans les domaines déterminés par les $\overline{C}_\varkappa$, où $\varphi(z) = \Phi(z)$, $g(z)$ approche $\Phi(z)$ à un ε près, tandis que dans les autres domaines $|g(z)| < \varepsilon$, tout ceci bien entendu en dehors des bandes $B_\varkappa$ (qui peuvent être d'ailleurs choisies aussi étroites que l'on veut).

On voit aussitôt que la fonction $\Phi(z) - g(z)$ possède des propriétés analogues, mais qu'elle approche $\Phi(z)$ là où $g(z)$ approchait 0 et vice versa.

Allure d'une fonction entière dans un domaine, partie principale (à une bande près) correspondant à un domaine.

Le procédé décrit va nous conduire à divers énoncés. Pour présenter ceux-ci plus facilement et pour les rendre plus intuitifs nous allons introduire quelques notions auxilliaires.

Ces notions ne sont pas essentiellement nouvelles et elles ont été introduites à plusieurs reprises et sous différentes formes, par divers mathématiciens, comme p. ex. Boutroux, Iversen, Gross.

Rappelons d'abord les théorèmes classiques de Liouville et Weierstrass, d'après lesquels, si une fonction $f(z)$ est holomorphe et uniforme autour d'un point x et si elle n'est pas holomorphe en x, alors $f(z)$ n'est pas bornée au voisinage de x; si, de plus, $f(z)$ présente une singularité transcendante (c. à d. non polaire) en x, elle ne tend vers aucune limite déterminée (finie ou infinie) quand z tend vers x d'une manière quelconque. On sait même, d'après le théorème de Picard, que $f(z)$ prend toute valeur finie — sauf une au plus — dans tout voisinage de x.

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes:

Nous dirons que la fonction entière $\Phi(z)$ présente dans un domaine D, s'étendant jusqu'à l'infini, *une allure régulière*, si pour toute suite de points z_n, $n = 1, 2, \ldots$, pris dans D et s'éloignant vers l'infini, la limite $\lim\limits_{n=\infty} \Phi(z_n)$ existe et est finie (elle ne dépend pas alors du choix des z_n).

Si $\lim\limits_{n=\infty} \Phi(z_n)$ est infinie pour tout choix des z_n dans D (avec $z_n \to \infty$), nous dirons que l'allure de $\Phi(z)$ dans D est *polaire.*

Enfin, si, pour une suite $\{z_n\}$ prise dans D (avec $z_n \to \infty$), $\Phi(z_n)$ ne tend vers aucune limite, finie ou infinie, l'allure de $\Phi(z)$ dans D sera dite *transcendante.*

Les allures polaire et transcendante seront considérées comme des allures *singulières.*

Nous dirons encore que deux fonctions entières $\Phi_1(z)$ présentent la même allure dans D, si leur différence $\Phi_1(z) - \Phi_2(z)$ y est d'allure régulière.

Pour abréger, nous dirons que $\Phi(z)$ présente une certaine allure dans le domaine D *à une bande* B *(ou à des bandes* $B_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$, *formant une somme* B*) près,* si $\Phi(z)$ a cette allure dans le domaine $D_1 = D - \overline{B}$, B étant situé assez près de la frontière de D (touchant à celle-ci) de sorte que D_1 soit un domaine s'étendant jusqu'à l'infini.

Le procédé exposé plus haut permet de prouver immédiatement le théorème suivant:

Théorème VI: *Soit* $\Phi(z)$ *une fonction entière et* D *un domaine limité par un uombre fini de courbes simples fermées possédant un seul point commun — le point à l'infini. Il existe une fonction entière* $\Phi_1(z)$ *présentant dans* D *(ou — dans* D *à des bandes près, aussi étroites que l'on veut) la même allure que* $\Phi(z)$ *et, à l'extérieur de* D *à des bandes quelconques près (ou — à l'extérieur de* D*), une allure régulière.*

Pour la démonstration, prenons des courbes $C_\varkappa^0$ à l'extérieur de D (ou — à l'intérieur de D), aussi près de la frontière de D qu'il le faut, et formant avec cette frontière un nombre fini de bandes $B_\varkappa^0$ (autant qu'il y a de courbes dans la frontière de D). Dans chaque bande $B_\varkappa^0$ on peut évidemment trouver une courbe $C_\varkappa$ de manière que l'ensemble de ces courbes détermine dans le plan un domaine D^0 avec $D < D^0 < \overline{D} + \Sigma B_\varkappa^0$ (ou: $D - \Sigma B_\varkappa^0 < D^0 < D$).

Dans le procédé mentionné on prendra alors des bandes $B_\varkappa$ contenues dans $B_\varkappa^0$, pour fonction entière — la fonction $z\,\Phi(z)$, et on posera $\varphi(z) = z\,\Phi(z)$ dans D^0 et $\varphi(z) = 0$ à l'extérieur de D^0. D'après les propriétés de la fonction $g(z)$ correspondante, on trouve facilement que la fonction entière $\Phi_1(z) = \frac{1}{z}(g(z) - g(0))$ a une allure régulière (même, tend vers 0) en dehors de $\overline{D} + \Sigma B_\varkappa^0$

(ou, en dehors de D), tandis que la différence $\Phi(z) - \Phi_1(z) = \frac{1}{z}[z\,\Phi(z) - g(z) + g(0)]$ a une allure régulière dans D (ou, dans $D - \Sigma B^0_\varkappa$). Mais ceci est justement la thèse de notre théorème.

Remarquons que le théorème est vrai pour des domaines beaucoup plus généraux que ceux dont on y parle. P. ex., en utilisant la généralisation du théorème **B** (comp. I partie § 3, p. 34) on démontre immédiatement que le théorème VI est valable pour les domaines dont la frontière est localement connexe et ne determine dans le plan aucun domaine borné (le nombre de domaines déterminés par cette frontière peut être infini).

Tous les domaines de la classe que nous venons de définir sont nécessairement simplement connexes. Quand on a un domaine D multiplement connexe on peut lui ajouter tous ses domaines complémentaires bornés. On obtient ainsi un domaine D_1 simplement connexe. Dans beaucoup de cas l'allure de la fonction dans D détermine son allure dans D_1. Quand le nombre de domaines bornés, complémentaires à D est fini il est évident que l'allure dans D est la même que dans D_1. Si les domaines complémentaires en question sont en nombre infini et *s'ils n'ont aucun point limite à distance fini,* l'allure régulière dans D implique la même allure dans D_1, mais l'allure polaire dans D n'entraine pas nécessairement la même dans D_1; dans D_1 l'allure peut alors être ou bien polaire ou bien *transcendante totale* dans le sens que la fonction prend dans D_1 (et notamment dans l'ensemble des domaines ajoutés) une infinité de fois chaque valeur finie *(sans exception).*

La fonction $\Phi_1(z)$ déterminée dans le théorème VI est telle que, à l'exception de bandes éventuelles, les fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi(z) - \Phi_1(z)$, l'une à l'extérieur de D et l'autre dans D, sont non seulement régulières, mais elles tendent en plus vers 0 quand z s'éloigne vers l'infini. On pourrait appeler $\Phi_1(z)$ la partie principale en quelque sorte de $\Phi(z)$ correspondant au domaine D. Mais pour ceci $\Phi_1(z)$ présente encore quelques désavantages sur lesquels nous reviendrons dans la suite.

L'allure d'une fonction entière sur un chemin.

Nous appelerons ici chemin un arc simple unissant un point à distance finie à l'infini.

L'allure d'une fonction $\Phi(z)$ sur un chemin L (pour z s'éloignant vers l'infini tout en restant sur L) peut présenter les mêmes caractères que dans un domaine D. En calquant les définitions données pour un domaine, on trouve la définition, dans le cas d'un chemin, de l'allure régulière, polaire, et transcendante (cette dernière peut être encore subdivisée en plusieurs nuances).

Si l'allure de $\Phi(z)$ sur le chemin L est régulière, la limite de $\Phi(z)$ quand z tend vers l'infini tout en restant sur L, est ce qu'on appelle la valeur asymptotique finie de $\Phi(z)$ sur L. La valeur asymptotique est infinie lorsque l'allure de $\Phi(z)$ sur L est polaire.

D'après la notion de points singuliers des fonctions analytiques multiformes donnée par M. Bieberbach,[1] les valeurs asymptotiques de $\Phi(z)$ forment les points singuliers de la fonction $z = \psi(w)$ inverse à $w = \Phi(z)$. Si la fonction $\Phi(z)$ présente la même valeur asymptotique sur deux chemins L_1 et L_2, les points singuliers correspondants sont considérés comme coïncidants s'il existe une suite d'arcs $\widehat{a_n b_n}$ s'éloignant vers l'infini, unissant un point a_n de L_1 avec un point b_n de L_2 et tels que la fonction $\Phi(z)$ prend sur $\widehat{a_n b_n}$ des valeurs tendant uniformément vers une limite pour $n \to \infty$ (cette limite est alors évidemment égale à la valeur asymptotique de $\Phi(z)$ sur L_1 et L_2).

Rappellons ici quelques théorèmes dûs essentiellement à Lindelöf.

Soit un domaine D limité par deux chemins L_1 et L_2 (qui forment alors une courbe simple fermée).

Si la fonction $\Phi(z)$ est d'allure regulière sur L_1 et L_2 et bornée dans D, elle est régulière dans D et ses valeurs asymptotiques sur L_1 et L_2 sont égales.

Si la fonction $\Phi(z)$ est d'allure régulière sur L_1 et L_2 sans qu'elle le soit dans D, elle prend dans D toutes les valeurs finies sauf une au plus (c. à d. elle est dans D d'allure transcendante totale eventuellemant à une valeur près).

Des théorèmes analogues s'obtiennent dans le cas où $\Phi(z)$ est d'allure polaire sur L_1 et L_2.

On démontre immédiatement que pour chaque chemin L existe un domaine D le contenant (p. ex. une bande entourant L) et pour chaque domaine D — un chemin L y contenu, de sorte que l'allure de la fonction $\Phi(z)$ sur L et dans D a le même caractère.

On peut même choisir D, respectivement L, de manière que l'ensemble des limites, vers lesquelles s'approchent les valeurs de $\Phi(z)$, soit le même quand z tend vers l'infini en passant par les points de L ou bien quand z s'éloigne vers l'infini en restant dans D.

Le théorème VI, appliqué à une bande B assez étroite entourant L, nous donne l'énoncé suivant:

[1] Comp. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1931, p. 278. Cette définition provient des idées de Hurwitz, Iversen et Gross.

Il existe une fonction entière $\Phi_1(z)$ régulière à l'extérieur de B et ayant dans B la même allure que $\Phi(z)$, tout ceci à l'exception d'une bande B_1, aussi étroite que l'on veut, disjointe de L et pouvant être choisi soit dans B, soit à l'extérieur de B.

La fonction $\Phi_1(z)$ pourrait être appelée partie principale de $\Phi(z)$ correspondant au chemin L.

Chemins rectilignes, directions singulières.

Dans l'étude de l'allure d'une fonction sur différents chemins, on se borne très souvent à la considération de chemins rectilignes, c. à d. de demi-droites.

Ce choix qui est en verité un peu arbitraire quand on étudie les fonctions entières en général, donne tout de même, dans beaucoup de cas, des énoncés assez précis, surtout quand on se limite aux fonctions ayant un certain mode de croissance (p. ex. les fonctions d'ordre fini).

On pourrait être tenté de considérer les directions $\arg z = \psi$ où l'allure de la fonction $\Phi(z)$ est singulière, comme déterminant l'allure de la fonction dans tout le plan. Ceci présente, comme on sait, deux inconvenients: 1° le caractère de l'allure de $\Phi(z)$ ne dépend pas seulement de la direction (c. à d. de l'angle ψ) mais aussi de la position, (du commencement) de la demi-droite, et 2° une fonction entière peut présenter une allure régulière sur toute demi-droite sans qu'elle soit pour cela régulière à l'infini. On obtiendra un exemple du cas 1° en prenant une fonction d'allure singulière sur une demi-droite Δ (p. ex. e^z sur $\Delta = [0; +\infty]$). On entourera Δ par une bande B limitée par deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 parallèles à Δ (dans le même sens) et par le segment unissant les commencements des Δ_1 et Δ_2, ce segment étant supposé en dehors de Δ.

La fonction cherchée sera une partie principale $\Phi_1(z)$ de $\Phi(z)$, correspondant à Δ, d'allure régulière à l'extérieur de B et ayant la même allure que $\Phi(z)$ dans la bande B diminuée d'une bande fermée $\bar{B}_1$ assez étroite, comprise dans $\bar{B}$ et disjointe de Δ. On en déduit que $\Phi_1(z)$ a sur Δ la même allure que $\Phi(z)$, donc singulière, tandis que sur chaque droite Δ' parallèle à Δ mais extérieure à B, $\Phi_1(z)$ aura une allure régulière.

Pour avoir un exemple du second phénomène, nous prendrons une fonction entière quelconque (non-constante) $\Phi(z)$ et un chemin L sur lequel la fonction $\Phi(z)$ est d'allure singulière et tel que toute droite le coupe en un nombre fini de points au plus.

On peut toujours trouver un tel chemin pour une fonction $\Phi(z)$ donnée. P. ex., on prendra des points a_n, $n = 1, 2, \ldots$, avec $\Phi(a_n) \to \infty$ et tels qu'aucuns trois entre eux ne sont situés sur une droite. De la suite $\{a_n\}$ on pourra certainement extraire une seconde $\{a'_n\}$ de manière que les segments $[a'_n; a'_{n+1}]$ forment une ligne brisée convexe. Le chemin L formé par cette ligne brisée est alors un chemin du genre considéré, comme il est facile à vérifier.

Considérons le chemin L. Il est loisible d'admettre qu'il ne passe pas par l'origine. Entourons chaque point x de ce chemin par un cercle de rayon $\frac{1}{|x|}$. La somme de tous ces cercles forme un domaine U renfermant L et tel qu'au plus une seule droite peut avoir avec lui un ensemble commun non borné (on le prouve facilement, par des considérations géométriques élémentaires).

On entourera alors le chemin L d'une bande B assez étroite pour qu'elle soit comprise dans le domaine U et qu'elle n'ait qu'un ensemble borné en commun avec la droite (si celle-ci existe) qui coupe U en un ensemble non-borné (ceci est possible car cette droite ne coupe L qu'en un nombre fini de points). Il en résultera que *l'ensemble commun de la bande B avec une demi-droite quelconque est borné*. Si l'on prend donc, d'après le théorème VI, la fonction $\Phi_1(z)$ d'allure régulière (même tendant vers 0) à l'extérieur de B et présentant la même allure que $\Phi(z)$ dans B (diminuée éventuellement d'une bande fermée $\bar{B}_1$ disjointe de L), cette fonction sera d'allure régulière $\left(\text{tendra vers 0 avec } \frac{1}{z}\right)$ sur toute demi-droite et présentera la même allure singulière sur un chemin L qu'une fonction $\Phi(z)$ choisie arbitrairement.

Les exemples que nous venons de former[1] montrent que les demi-droites sur lesquelles la fonction a une allure singulière (et à plus forte raison — les demi-droites issues de l'origine) ne sauront suffire dans aucun sens à la recherche de l'allure d'une fonction entière générale.

Nous définirons donc la direction singulière d'une fonction entière $\Phi(z)$ sans attacher une importance spéciale à l'allure de la fonction sur une demi-droite correspondante. Voici comment nous la définissons.[2]

[1] Les premiers exemples de ce genre sont connus depuis les travaux de Mittag-Leffler datant de 1904. Des classes plus générales de tels exemples ont été construites par H. Bohr comp. Comptes Rend Ac. Sc., t. 189, 1929, p. 826.

[2] Des définitions du même genre ont été introduites et étudiées par M. Valiron.

1° *La direction arg* $z = \psi$ *est régulière pour la fonction* $\Phi(z)$, *si cette fonction est d'allure régulière dans un angle ouvert* $\psi_1 < \arg z < \psi_2$ *renfermant la direction arg* $z = \psi$.

2° *Si la direction arg* $z = \psi$ *n'est pas régulière pour* $\Phi(z)$, *elle sera appelée singulière;* a) *une direction singulière est polaire quand elle peut être enfermée dans un angle où l'allure de* $\Phi(z)$ *est polaire;* b) *une direction singulière non polaire est transcendante.*

Pour les directions singulières ainsi définies disparaissent les deux inconvenients qui amoindrissent l'importance des demi-droites où la fonction est d'allure singulière. En effet, on vérifie facilement que les directions singulières ne dépendent pas de l'origine (car pour deux demi-droites parallèles dans le même sens, un angle renfermant une de ces demi-droites, contient totalement, ou à une partie bornée près, un autre angle renfermant l'autre demi-droite).

D'autre part, toute fonction entière possède sûrement des directions singulières. Notamment, pour un polynôme, toutes les directions sont polaires, tandis que pour une fonction entière transcendante il y a toujours des directions transcendantes. Comme telle, on peut prendre une direction de Julia de la fonction donnée, c. à d. une direction telle que dans chaque angle qui l'enferme la fonction prend une infinité de fois toute valeur finie sauf une au plus (c'est donc une direction transcendante *totale*, éventuellement à une valeur exceptionnelle près).

Nous désignerons une direction par l'angle ψ qu'elle fait avec le demi-axe réel positif. Comme conséquence directe des définitions données ci-dessus on obtient les propriétés suivantes:

I) *Les directions régulières (respectivement polaires) forment un ensemble ouvert se décomposant en une suite au plus dénombrable d'angles ouverts* $(\psi_n' < \psi < \psi_n'')$. *Dans chacun de ces angles la fonction est d'allure régulière (respectivement polaire).*

II) *Les directions singulières forment un ensemble fermé, de même que les directions transcendantes.*

En utilisant la théorie des familles normales on obtient encore:

III) *Les cotés des angles ouverts en lesquels se décompose l'ensemble des directions régulières (respectivement polaires) sont des directions de Julia.*

Si l'on considère la classe des fonctions qui sont d'allure régulière sur toute demi-droite, on trouve immédiatement, d'après les théorèmes mentionnés plus haut (comp. p. 109), que toute direction singulière d'une telle fonction est une direction de Julia. Dans l'exemple d'une telle fonction que nous avons donné plus haut il n'y a qu'une seule direction singulière (donc aussi une seule direction de Julia). En utilisant une généralisation convenable du théorème **B**, on pourrait trouver de telles fonctions dont les directions de Julia forment un ensemble fermé non-dense quelconque, donné d'avance.

Il est à remarquer que les directions singulières d'une fonction de la classe considérée forment toujours un ensemble fermé non-dense.

Si l'on prend une classe plus grande de fonctions d'allure régulière sur un ensemble de demi-droites $\arg z = \text{const.}$, dense dans l'ensemble de toutes les demi-droites de ce genre, on pourra déjà y trouver (en utilisant la même généralisation du théorème **B**) une fonction admettant toute direction pour direction de Julia.

Désignons par Ψ l'ensemble des directions singulières de la fonction $\Phi(z)$. On peut se poser tout naturellement la question à savoir, s'il existe ici un théorème analogue au théorème **A**. Plus précisément: est-ce qu'on peut toujours *trouver une décomposition* $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ *de la fonction* $\Phi(z)$ *en une* somme de deux fonctions entières $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ correspondant à une décomposition donnée $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, où Ψ_1 et Ψ_2 sont deux ensembles fermés de directions, sous-ensembles de Ψ, donnés d'avance.

Nous allons établir un théorème concernant cette question, présentant dans une certaine mesure l'analogie demandée.

Considérons d'abord la décomposition $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Les ensembles $\Psi_1 - \Psi_2$ et $\Psi_2 - \Psi_1$ étant séparés (c. à d. qu'aucun d'eux ne contient pas des directions limites de l'autre) on peut trouver un ensemble de directions Γ fermé, séparant ces deux ensembles (c. à d. que tout angle contenant une direction de $\Psi_1 - \Psi_2$ et une de $\Psi_2 - \Psi_1$ en contient une de Γ également). Il en résulte que chaque angle complémentaire à l'ensemble Γ ne contient que les directions d'un seul des ensembles $\Psi_1 - \Psi_2$ et $\Psi_2 - \Psi_1$. Nous ne considérerons que des séparateurs Γ irréductibles entre $\Psi_1 - \Psi_2$ et $\Psi_2 - \Psi_1$, c'est à dire tels qu'aucun ensemble plus petit que Γ ne sépare plus entre $\Psi_1 - \Psi_2$ et $\Psi_2 - \Psi_1$.

Γ peut contenir des directions communes à Ψ_1 et Ψ_2 mais nous n'admettrons dans Γ aucune direction ni de $\Psi_1 - \Psi_2$, ni de $\Psi_2 - \Psi_1$.

Nous considérerons principalement des décompositions $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ auxquelles on peut faire correspondre un séparateur ne contenant qu'un nombre fini de directions.

Théorème VII: *Soit* Ψ *l'ensemble des directions singulières de la fonction entière* $\Phi(z)$, $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ *une décomposition de cet ensemble en deux ensembles fer-*

més n'ayant qu'un nombre fini de directions communes et soit encore Γ un séparateur correspondant composé de n directions $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Il existe dans ces conditions une décomposition $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ où les fonctions entières $\Phi_1(z)$ et *$\Phi_2(z)$ ont des directions singulières formant respectivement les ensembles Ψ_1 et Ψ_2 augmentés éventuellement de quelques directions γ_k.*

Démonstration: Considérons les n angles ouverts formés par les directions γ_k (que nous supposerons numérotées dans leur ordre cyclique). Chacun d'eux contient des directions d'un et d'un seul ensemble $\Psi_1 - \Psi_2$ ou $\Psi_2 - \Psi_1$ (s'il y avait un de ces angles ne contenant aucune de ces directions, Γ ne serait pas irréductible).

Choisissons les angles contenant des directions de $\Psi_2 - \Psi_1$. S'il n'y en a pas, alors $\Psi_2 - \Psi_1 = 0$ et $\Psi_1 = \Psi$; on posera alors $\Phi_0(z) = \Phi(z)$. Si par contre, ces angles existent, soient $\gamma_{k_i} < \psi < \gamma_{k_i+1}$, $i = 1, \ldots, m$, ces angles successifs (où on aura posé, le cas échéant, $\gamma_{n+1} = \gamma_1 + 2\pi$). On menera alors dans chacun de ces angles une courbe simple fermée (passant par l'infini), provenant de la jonction de deux chemins qui s'approchent asymptotiquement l'un d'un coté et l'autre de l'autre coté de l'angle. Ces courbes, ensemble, forment la frontière d'un domaine D contenant entièrement l'ensemble extérieur aux angles $\gamma_{k_i} < \psi < \gamma_{k_i+1}$.

Nous prendrons alors pour $\Phi_0(z)$ une partie principale de $\Phi(z)$ correspondant au domaine D (comp. le thèor. VI) avec des bandes exceptionnelles extérieures à D, donc comprises chacune dans un angle $\gamma_{k_i} < \psi < \gamma_{k_i+1}$ et assez étroites pour se décomposer chacune en deux branches s'approchant asymptotiquement une vers un coté et l'autre vers l'autre coté de l'angle en question.

De cette manière, on est assuré que toute direction comprise dans les angles choisis $\gamma_{k_i} < \psi < \gamma_{k_i+1}$ est régulière pour $\Phi_0(z)$, tandis que dans les autres angles $\Phi_0(z)$ a la même allure que $\Phi(z)$. Seulement le caractère des directions γ_k n'est pas déterminé. Il en résulte que dans la décomposition $\Phi(z) = \Phi_0(z) + [\Phi(z) - - \Phi_0(z)]$ la première des composantes a son ensemble de directions singulières compris entre $\Psi_1 - \Psi_2$ et $\Psi_1 + \Gamma$ et la seconde — entre $\Psi_2 - \Psi_1$ et $\Psi_2 + \Gamma$. En ajoutant à l'une et retranchant de l'autre une fonction entière appropriée (comp. le point correspondant dans la démonstration du théor. **A**), ayant pour seules directions singulières les directions communes à Ψ_1 et Ψ_2 (il y en a un nombre fini par hypothèse et on forme de telles fonctions facilement à l'aide des exemples donnés plus haut), on obtiendra enfin les composantes cherchées $\Phi_1(z)$ et

$\Phi_2(z)$ dont les directions singulières forment des ensembles compris pour l'une entre Ψ_1 et $\Psi_1 + \Gamma$ et pour l'autre entre Ψ_2 et $\Psi_2 + \Gamma$.

En employant le théorème **B** convenablement généralisé, on pourrait démontrer le théorème VII sans aucune restriction sur le nombre de directions de l'ensemble $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ et du séparateur Γ.

Au sujet du théorème VII, on peut faire les remarques suivantes:

1) Les fonctions $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2$, qu'on y obtient peuvent avoir pour directions singulières, en plus de celles appartenant à l'ensemble correspondant Ψ_k, encore quelques directions du séparateur Γ. Ces directions supplémentaires sont alors en dehors de $\Psi_1 \cdot \Psi_2$, donc également en dehors de Ψ (car le séparateur ne contient aucune direction de $\Psi - \Psi_1 \cdot \Psi_2 = (\Psi_1 - \Psi_2) + (\Psi_2 - \Psi_1)$). On ne sera sûr d'avoir une décomposition sans directions singulières supplémentaires que dans le cas où le séparateur peut être choisi dans l'ensemble $\Psi_1 \cdot \Psi_2$. P. ex. quand toutes les directions sont singulières pour $\Phi(z)$, le séparateur est nécessairement compris dans $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ et alors la thèse du théorème VII revêt une forme tout à fait analogue à celle du théorème **A**.

2) Pour la fonction $\Phi_k(z)$ $(k = 1, 2)$, toutes les directions en dehors de $\Psi_k + \Gamma$ sont régulières. Mais si l'on considère l'allure de $\Phi_k(z)$ sur les demi-droites issues de l'origine, on trouve facilement que cette allure est régulière encore sur les demi-droites issues dans les directions appartenant à $\Gamma - \Psi_k$ (c. à d. dans les directions singulières supplémentaires). On peut même admettre que sur les demi-droites comprises dans les angles $\gamma_{k_i} < \arg z < \gamma_{k_i+1}$ (sauf les directions de Ψ_1) la fonction $\Phi_1(z)$ tend vers 0 assez rapidement avec $\frac{1}{z}$, de manière que $z\,\Phi_1(z)$ reste borné. Il en est de même pour la fonction $\Phi_2(z)$ dans les angles complémentaires aux précédents (et en dehors de Ψ_2). Tout ceci résulte du fait que pour $\Phi_0(z)$ resp. $\Phi(z) - \Phi_0(z)$ ces propriétés sont vraies par construction (comp. la démonstration du théor. VI) et la fonction corrective éventuelle (qu'on ajoute à $\Phi_0(z)$ resp. soustrait de $\Phi(z) - \Phi_0(z)$ pour avoir $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$) peut toujours être choisie de manière à conserver cette propriété.

3) Chaque décomposition de l'ensemble de toutes les directions singulières de la fonction donnée entraine une décomposition de l'ensemble des directions transcendantes ainsi que de l'ensemble des droites de Julia de cette fonction.

Dans la décomposition correspondante $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ le caractère des directions de $\Psi_1 - \Psi_2$ ou $\Psi_2 - \Psi_1$ pour $\Phi_1(z)$ resp. $\Phi_2(z)$ est le même que pour

$\Phi(z)$. Les directions singulières supplémentaires provenant de Γ (s'il y en a) sont toutes des directions de Julia pour les deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ ainsi qu'en général toutes les directions de $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ sauf celles qui sont intérieures soit à Ψ_1 soit à Ψ_2.

4) La décomposition $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ n'est déterminée qu'à une fonction entière près dont toutes les directions singulières sont comprises dans $\Psi_1 \cdot \Psi_2 + \Gamma$.

5) La présence éventuelle des directions qui étaient régulières pour la fonction $\Phi(z)$ et qui sont devenues singulières pour les fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$, forme évidemment un défaut du théorème VII. On ne sais pas encore. si ce défaut est dans la nature des choses, ou s'il est dû à un défaut du raisonnement. Nous verrons dans la suite que dans certains cas on peut trouver des décompositions ne présentant pas des directions singulières supplémentaires Dans ces cas l'analogie avec le théorème **A** sera tout à fait parfaite.

Les parties principales au sens précis, calcul effectif.

Revenons encore aux parties principales d'une fonction entière $\Phi(z)$ correspondant à un domaine D limité par une courbe simple fermée C passant par l'infini.

L'existence de ces parties principales a été établie dans le théorème VI à l'aide du théorème **B**.

Toutefois les bandes exceptionnelles qui figurent dans l'énoncé du théorème VI présentent un double désavantage: *premièrement*, l'existence d'une telle bande ne permet pas de considérer la fonction $\Phi_1(z)$ qu'on obtient dans le théorème en question, comme une vraie partie principale, dans le sens précis de ce mot; *deuxièmement*, nous ne savons rien sur l'allure de la fonction $\Phi_1(z)$ dans une telle bande, même pas si cette allure est régulière ou singulière (il est seulement sûr que $\Phi_1(z)$ peut être choisie de manière que cette allure soit singulière).

Pour la *première objection* il est à remarquer qu'elle ne peut pas être évitée dans le cas général. En effet une partie principale $\Phi_1(z)$ de $\Phi(z)$ correspondant au domaine D dans le sens précis devrait être régulière dans *tout* l'extérieur de D, donc également sur la courbe frontière C et, sur les deux chemins qui forment cette courbe (les deux branches de celle-ci), la limite de $\Phi(z)$ pour $z \to \infty$ devrait être la même. D'autre part, $\Phi_1(z)$ devrait avoir la même allure que $\Phi(z)$ dans *tout* l'intérieur de D, donc également sur C. Il en résulte que *la condition nécessaire pour qu'il existe une partie principale au sens précis de la fonction $\Phi(z)$ pour le domaine D, est que $\Phi(z)$ soit d'allure régulière sur les deux branches de la courbe C et y tende vers la même limite pour z s'éloignant vers l'infini.*[1]

Considérons maintenant la *seconde objection.* Remarquons tout de suite qu'elle provient de l'application du théorème **B** qui n'est qu'un théorème d'existence, ne donnant presque aucun renseignement sur la nature de la fonction entière dont il affirme l'existence. La difficulté sera donc aplanie, si nous trouvons une méthode effective pour calculer cette fonction qui forme la partie principale cherchée, et si cette méthode nous permet d'étudier l'allure de la fonction.

Des remarques analogues peuvent être faites dans le cas d'un domaine un peu plus compliqué, limité par un nombre fini de courbes.

Revenons au domaine D. Pour pouvoir calculer effectivement une partie principale, nous admettrons que $\Phi(z)$ tend vers o avec $\frac{1}{z}$ le long de deux branches de C et assez vite, de manière que

$$(\alpha) \qquad \int_C \frac{|\Phi(z)|}{|z|}|dz| < \infty.$$

Dans ces conditions l'intégrale

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-x}\,dz,$$

où C est parcourue dans le sens négatif par rapport à D, a toujours un sens pour x en dehors de C. D'après les développements du § 2, I^re^ partie, (comp. complément II au théor. **A**), en posant

$$\Phi_1(x) = I(x) \quad \textit{pour } x \textit{ extérieur à } D,$$
$$\Phi_1(x) = I(x) + \Phi(x) \quad \textit{pour } x \textit{ dans } D,$$

on obtient une seule fonction analytique holomorphe à l'extérieur de D, présentant dans D les mêmes singularités que $\Phi(x)$ (donc aucune), et n'étant singulière sur C qu'aux points où $\Phi(x)$ l'est (donc à l'infini). Il en résulte que *$\Phi_1(x)$ est une fonction entière.* Pour connaitre l'allure de $\Phi_1(x)$ il n'y a donc qu'à étudier celle de $I(x)$ qui est holomorphe dans D et à l'extérieur de D. Déjà dans le

[1] La question, si cette condition est aussi suffisante, n'est pas encore résolue.

cas général on peut démontrer que $\Phi_1(x)$ forme une partie principale de $\Phi(z)$ dans D, au moins dans un certain sens.[1] Mais nous voulons obtenir une partie principale au sens précis. A cet effet, nous allons ajouter aux hypothèses déjà admises encore les suivantes:

(β) Le domaine D est un angle aux cotés: $\arg z = \alpha_1$, $\arg z = \alpha_2$.

(γ) Les directions α_1 et α_2 sont régulières pour $\Phi(z)$.

La courbe C se compose ici de deux cotés L_1 et L_2. En vertu de (γ), chacun de ceux-ci est la bissectrice d'un angle d'ouverture 2η où $\Phi(z)$ est d'allure régulière. Admettons que pour toute direction ψ dans chacun de ces angles subsiste

$$(\alpha') \qquad \int_1^\infty \frac{|\Phi(\varrho e^{i\psi})|}{\varrho} d\varrho < \infty \ \textit{pour}\ |\psi - \alpha_1| < \eta \ \textit{ou}\ |\psi - \alpha_2| < \eta.$$[2]

Posons maintenant pour $r > 1$

$$\mu(r) = \int_1^r \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_1})| + |\Phi(\varrho e^{i\alpha_2})|}{\varrho} d\varrho, \quad \mu = \lim_{r=\infty} \mu(r),$$

et prenons un $x = re^{i\psi}$ avec $|\psi - \alpha_1| > \varepsilon$ et $|\psi - \alpha_2| > \varepsilon$ et $r > 4$ c. à d. que x est en dehors du cercle $|x| \leq 4$ et en dehors de deux angles arbitrairement petits entourant les cotés de l'angle D. On aura alors

$$|I(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-x} dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\left[\left|\int_{e^{i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_2}} \frac{\Phi(z)}{z-x} dz\right| + \int_1^\infty \left(\frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_1})|}{|\varrho e^{i\alpha_1} - re^{i\psi}|} + \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_2})|}{|\varrho e^{i\alpha_2} - re^{i\psi}|}\right) d\varrho\right].$$

Décomposons la dernière intégrale:

$$\int_1^\infty = \int_1^{\sqrt{r}} + \int_{\sqrt{r}}^\infty = I_1 + I_2.$$

---

[1] Notamment $\Phi_1(z)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{z}$ à l'extérieur de D et possède la même allure que $\Phi(z)$ dans D, à l'exception d'un voisinage angulaire quelconque de C. Pour cette dernière notion, comp. la note I où se trouvent des développements en rapport direct avec ceux que nous faisons maintenant.

[2] En vertu de (α) et (γ), on peut démontrer qu'il existe un $\eta > 0$ pour lequel (α') est vrai.

Etant donné que, d'une part, $|\varrho e^{i\alpha_\varkappa} - re^{i\psi}| > |r - \varrho|$ et d'autre part, $|\varrho e^{i\alpha_\varkappa} - re^{i\psi}| > \varrho \sin \varepsilon$, on en déduit que

$$I_1 < \int_1^{\sqrt{r}} \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_1})| + |\Phi(\varrho e^{i\alpha_2})|}{r - \varrho} d\varrho < \int_1^{\sqrt{r}} \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_1})| + |\Phi(\varrho e^{i\alpha_2})|}{\varrho(\sqrt{r} - 1)} d\varrho$$

donc $I_1 < \dfrac{\mu(\sqrt{r})}{\sqrt{r} - 1} < \dfrac{\mu}{\sqrt{r} - 1}$;

$$I_2 < \int_{\sqrt{r}}^{\infty} \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_1})| + |\Phi(\varrho e^{i\alpha_2})|}{\varrho \sin \varepsilon} d\varrho = \frac{\mu - \mu(\sqrt{r})}{\sin \varepsilon}.$$

La formule pour $|I(x)|$ avec les inégalités pour I_1 et I_2 indiquent clairement que $I(x)$ tend vers 0 quand x s'éloigne vers l'infini d'une manière quelconque en dehors du ε-voisinage angulaire des cotés de l'angle D.

Prenons maintenant un angle D^0 compris dans D dont les cotés $\arg z = \alpha_1^0$ et $\arg z = \alpha_2^0$ sont dans les angles d'ouvertures 2η dans lesquels l'inégalité (α') a lieu. On a donc

$$0 < \alpha_1^0 - \alpha_1 < \eta, \quad 0 < \alpha_2 - \alpha_2^0 < \eta.$$

Pour l'angle D^0 on peut procéder comme pour D et obtenir une intégrale

$$I^0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^0} \frac{\Phi(z)}{z - x} dz,$$

où C^0 désigne le contour de l'angle D^0. On obtiendra ici également une fonction entière $\Phi_1^0(x)$.

Mais $\Phi_1^0(x) = \Phi_1(x)$!

En effet, prenons un point x extérieur à D donc aussi à D^0. En ce point, on aura

$$\Phi_1(x) - \Phi_1^0(x) = I(x) - I^0(x) = \lim_{R=\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C(R)} \frac{\Phi(z)}{z - x} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C^0(R)} \frac{\Phi(z)}{z - x} dz\right],$$

où $C(R)$ et $C^0(R)$ sont les parties de C et C^0 comprises dans le cercle $|z| < R$. En désignant par S_1 et S_2 les contours de deux secteurs du cercle $|z| < R$ provenant de deux angles $\alpha_1 \leq \psi \leq \alpha_1^0$ et $\alpha_2^0 \leq \psi \leq \alpha_2$, et par A_1 et A_2 les arcs de ce cercle appartenant à S_1 et S_2, on trouve immédiatement que l'expression entre les crochets n'est rien d'autre que

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{S_1}\frac{\Phi(z)}{z-x}dz+\int\limits_{S_2}\frac{\Phi(z)}{z-x}dz+\int\limits_{A_1}\frac{\Phi(z)}{z-x}dz+\int\limits_{A_2}\frac{\Phi(z)}{z-x}dz\right],$$

où on intègre sur S_1, S_2, A_1 et A_2 dans un sens convenable.

Les deux premières intégrales disparaissent, d'après le théorème de Cauchy. Les deux dernières se transforment comme suit:

$$\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_1^0}\frac{\Phi(Re^{i\psi})Rie^{i\psi}}{Re^{i\psi}-x}d\psi+\int\limits_{\alpha_2^0}^{\alpha_2}\frac{\Phi(Re^{i\psi})Rie^{i\psi}}{Re^{i\psi}-x}d\psi.$$

Mais la fonction $\Phi(z)$ convergeant uniformément vers o avec $\frac{1}{z}$ dans les angles $\alpha_1\leq\psi\leq\alpha_1^0$ et $\alpha_2^0\leq\psi\leq\alpha_2$ (d'après (γ) et (α')), il en résulte que la limite de ces intégrales pour $R\to\infty$ est également o. Ainsi $\Phi_1(x)=\Phi_1^0(x)$ à l'extérieur de D, donc partout (les deux fonctions étant entières).

Comme pour $I(x)$, on démontre aussi pour l'intégrale $I^0(x)$ qu'elle converge uniformément vers o en dehors de deux angles, d'ouvertures aussi petites que l'on veut, entourant les deux cotés de l'angle D^0. Entourons donc les cotés α_1 et α_2 de D et les cotés α_1^0 et α_2^0 de D^0 par des petits angles deux à deux disjoints, soit par des angles Δ_1, Δ_2 et Δ_1^0 et Δ_2^0.

On a $\Phi_1(x)=\Phi_1^0(x)=I^0(x)$ en dehors de $D^0+\Delta_1^0+\Delta_2^0\subset D$ et on sait que $\Phi_1(x)$ y converge uniformément vers o avec $\frac{1}{z}\cdot$ D'autre part, on a $\Phi_1(x)=I(x)+$ $+\Phi(x)$ dans D et en plus, dans $D-(\Delta_1+\Delta_2)\supset D^0+\Delta_1^0+\Delta_2^0$ la différence $\Phi_1(x)-\Phi(x)=I(x)$ converge uniformément vers o.

Il en résulte que $\Phi_1(z)$ est une partie principale de $\Phi(z)$ correspondant à D[1] *dans le sens le plus précis.* Une telle partie principale est *unique* quand on la soumet à la condition de tendre vers o avec $\frac{1}{z}$ en dehors de D (si l'on ne prend pas cette condition, $\Phi_1(z)$ sera parfaitement déterminée à une constante près), car la différence de deux fonctions de ce genre, soit $\Phi_1(z)-\Phi_1^0(z)$, convergerait

[1] Ainsi qu'à $D^0+\Delta_1^0+\Delta_2^0$ et en général à tous les angles entre D^0 et D, car ils ne diffèrent deux à deux que par des angles où $\Phi(z)$ est d'allure regulière.

vers o avec $\frac{1}{z}$ en dehors de D et dans D (ceci ressort de $\Phi_1(z) - \Phi_1^0(z) = [\Phi_1(z) - - \Phi(z)] - [\Phi_1^0(z) - \Phi(z)]$), ce qui n'est possible que quand $\Phi_1 - \Phi_1^0 \equiv 0$.

Si l'on considère la décomposition de l'ensemble Ψ des directions singulières de $\Phi(z)$ en deux parties $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, Ψ_1 désignant l'ensemble des directions singulières comprises dans l'angle D et $\Psi_2 = \Psi - \Psi_1$, la décomposition correspondante de $\Phi(z)$, *au sens précis* sera $\Phi(z) = \Phi_1(z) + [\Phi(z) - \Phi_2(z)]$, car $\Phi_1(z)$ n'a de directions singulières que dans Ψ_1 et $\Phi - \Phi_1$ n'en a que dans Ψ_2. On peut généraliser ceci et obtenir l'énoncé suivant:

Soit Φ une fonction entière quelconque et Ψ son ensemble de directions singulières. Soit en plus $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ une décomposition de Ψ en deux ensembles de directions, fermés et disjoints. Si dans les angles séparant Ψ_1 de Ψ_2[1]*, la fonction $\Phi(z)$ tend assez vite vers o de manière que pour les directions ψ intérieures à ces angles l'intégrale*

$$\int_1^\infty \frac{|\Phi(\varrho e^{i\psi})|}{\varrho} d\varrho$$

est finie, on peut décomposer $\Phi(z)$ en somme de deux fonctions entières $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ qui possèdent pour ensembles de directions singulières respectivement Ψ_1 et Ψ_2.

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ des directions quelconques, choisies dans l'intérieur des angles successifs séparant Ψ_1 de Ψ_2 (le nombre de ces angles étant $2n$). On peut les numéroter de manière que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{2n} < \alpha_1 + 2\pi$ et que les angles $\alpha_{2\varkappa-1} < \psi < \alpha_{2\varkappa}$, $\varkappa = 1, \ldots, n$, ne contiennent aucune direction de Ψ_2. En prenant alors pour chacun de ces angles la partie principale de $\Phi(z)$ qui lui correspond et en désignant par $\Phi_1(z)$ la somme de ces n parties principales et par $\Phi_2(z)$ la différence $\Phi(z) - \Phi_1(z)$ on aura la décomposition cherchée.

On peut généraliser cet énoncé au cas, où la fonction $\Phi(z)$ tend dans chacun des angles séparant Ψ_1 de Ψ_2 vers des valeurs asymptotiques différentes (non nécessairement égales à o), soit p. ex. dans l'angle contenant la direction α_m (en reprenant les notations ci-dessus) vers la valeur v_m. Alors, si $\Phi(z)$ s'approche de ces valeurs assez vite, de manière que

[1] c. à d. les angles ouverts qui ne renferment que des directions régulières pour $\Phi(z)$ et qui ont un coté dans Ψ_1 et l'autre dans Ψ_2. On voit immédiatement qu'il n'y a qu'un nombre fini et pair de tels angles (autrement Ψ_1 et Ψ_2 auraient une direction commune) et que les angles complémentaires de ceux-là ne renferment alternativement (dans l'ordre circulaire) aucun point de Ψ_1 ou de Ψ_2.

$$\int_1^\infty \frac{|\Phi(\varrho e^{i\alpha_m}) - v_m|}{\varrho} d\varrho < \infty,$$

il existe une décomposition correspondante $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, pourvu que

$$(\delta) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} v_{2\varkappa-1} = \sum_{\varkappa=1}^{n} v_{2\varkappa}.$$

En effet, on trouve alors que la limite

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r=\infty} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^m \int_0^r \frac{\Phi(\varrho e^{i\alpha_m})}{\varrho e^{i\alpha_m} - x} e^{i\alpha_m} d\varrho$$

existe pour tout x en dehors des demi-droites $\arg x = \alpha_m$ (malgré qu'elle peut ne pas exister pour les termes de la série pris séparément) et que la fonction $\Phi_1(x)$, égale à $I(x) + \Phi(x)$ pour x dans les angles $\alpha_{2\varkappa-1} < \psi < \alpha_{2\varkappa}$ et à $I(x)$ dans les angles complémentaires, avec la fonction $\Phi_2(x) = \Phi(x) - \Phi_1(x)$ donnent la décomposition cherchée.

Il est à remarquer que la condition (δ) est nécessaire pour qu'il existe une telle décomposition. Car $\Phi_2(z)$ est d'allure régulière dans l'angle $\alpha_{2\varkappa-1} \leq \psi \leq \alpha_{2\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n$) où elle tend vers la valeur asymptotique $v''_\varkappa$, tandis que $\Phi_1(z)$ est d'allure régulière dans les angles $\alpha_{2\varkappa} \leq \psi \leq \alpha_{2\varkappa+1}$ (pour $\varkappa = 1, \ldots, n$, avec $\alpha_{2n+1} = \alpha_1 + 2\pi$) où elle tend vers $v'_\varkappa$. En considérant alors la relation $\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ sur les rayons issus de l'origine dans la direction α_m, on trouve

$$v_{2\varkappa-1} = v'_{\varkappa-1} + v''_\varkappa, \quad v_{2\varkappa} = v'_\varkappa + v''_\varkappa,$$

où on a posé $v'_0 = v'_n$. Mais ceci donne immédiatement (δ).

Avant de finir ce paragraphe remarquons encore que l'on peut étudier l'allure d'une fonction non entière, holomorphe dans un angle ayant l'origine pour sommet, d'une manière tout à fait analogue à celle poursuivie plus haut pour les fonctions entières. On peut alors définir une partie principale d'une telle fonction pour un angle intérieur à l'angle où la fonction est définie. Cette partie principale sera, comme plus haut, une fonction *entière*, d'allure régulière dans tout angle extérieur à celui auquel elle correspond. La méthode effective s'applique ici également et dans les mêmes conditions que pour les fonctions entières. Il faut seulement le cas échéant, quand la fonction n'est pas holomorphe à l'origine, prendre l'intégrale $I(x)$ non pas sur le chemin formé par les deux cotés de l'angle en question (comme plus haut), mais sur le chemin formant le contour de la partie de cet angle, se trouvant à l'extérieur d'un cercle $|z| < r$ avec un rayon $r > 0$ quelconque.

De telles parties principales ont été établies — je pense, pour la première fois — par Mittag-Leffler. Notamment les fonctions $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler ne sont rien d'autre que les parties principales exactes des fonctions $\frac{1}{\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$ $(0 < \alpha < 2)$ correspondant à l'angle $-\beta < \psi < \beta$, avec β compris entre $\frac{\alpha\pi}{2}$ et $\frac{3\alpha\pi}{2}$ (les limites exclues). On rend ici l'exponentielle en question uniforme, en prenant, le cas échéant, le demi-axe réel négatif comme coupure. La méthode effective peut être appliquée ici, car dans les directions $-\beta$ et β avec $\frac{\alpha\pi}{2} < \beta < \frac{3\alpha\pi}{2}$, la fonction $\frac{1}{\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$ tend vers 0 comme $\frac{1}{\alpha} e^{\varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\beta}{\alpha}}$, quand $z = \varrho\, e^{\pm i\beta}$ et ϱ tend vers ∞.

Nos développements permettent de trouver l'allure exacte de la fonction $E_\alpha(x)$ dans toute direction. On retrouve ainsi les faits connus que

$$\text{pour } |\psi| \leq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad E_\alpha(r e^{i\psi}) \sim \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}}$$

$$\text{pour } \frac{\alpha\pi}{2} < |\psi| \leq \pi, \quad \lim_{r=\infty} E_\alpha(r e^{i\psi}) = 0.$$

On obtient également pour ces dernières directions ψ le développement asymptotique de $E_\alpha(x)$:

$$E_\alpha(r\, e^{i\psi}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha-\alpha n)} e^{-i\psi(n+1)} \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Tout recemment, M. Valiron[1] a considéré les parties principales (sous un autre nom) des fonctions entières en relation avec des procédés sommatoires généraux.

[1] Dans une note parue dans Proc. Nat. Ac., t. 20, 1934, p. 211.

§ 5. Extension du théorème A aux fonctions harmoniques, p-harmoniques et aux classes de fonctions plus générales.

Généralités sur l'extension du théorème A.

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes occupés exclusivement des fonctions analytiques d'une variable complexe. Pourtant le théorème **A**, et avec lui beaucoup de développements que nous avons obtenus au cours de l'étude présente, peuvent être étendus — les uns totalement, les autres partiellement — aux autres classes de fonctions d'une ou plusieurs variables, réelles ou complexes.

Il est évident qu'avant de parler d'une telle extension du théoréme **A**, il faut expliquer d'abord la signification, pour les fonctions d'une classe donnée, des notions figurant dans l'énoncé du théorème **A** comme p. ex. la notion de régularité ou singularité d'une fonction en un point.

Il est possible de définir ces notions d'une manière convenable pour une grande catégorie de classes de fonctions, renfermant des classes de fonctions de natures très différentes.

On pourrait définir de telles classes de fonctions d'une manière axiomatique. A cet effet, on envisagerait une propriété (P) d'une fonction $f(X)$ (où X représente un point dans l'espace euclidien de n variables réelles ou complexes, $f(X)$ étant également réelle ou complexe) définie et uniforme (mais non nécessairement analytique) dans un ensemble ouvert G, celui-ci étant situé dans le domaine fondamental D pour la propriété (P), cette dernière n'ayant de sens que dans le domaine D.

P. ex., on pourrait considérer la propriété (P_c) que la fonction $f(X)$ est continue dans G (le domaine fondamental D_c étant l'espace entier, le point à l'infini y inclu), ou la propriété (P_d) que $f(X)$ a dans G toutes les dérivées partielles jusqu'à un certain ordre (on prendra pour domaine fondamental D_d l'espace entier sans point à l'infini), ou encore la propriété (P_E) que $f(X)$ satisfait dans G à une équation aux dérivées partielles $E = 0$ (le domaine fondamental D_E sera alors le domaine où cette équation a un sens c. à d. où tous ses coefficients sont définis), et ainsi de suite.

En revenant à la propriété générale (P), on pourra considérer la classe des fonctions $f(X)$ possédant la propriété (P) dans un certain ensemble ouvert G (compris dans D). On dira que $f(X)$ est *P-régulière* (ou *régulière* tout court quand il n'y aura aucun malentendu à craindre) aux points de cet ensemble ouvert G.

Soit maintenant Y un point frontière de G, appartenant à D (il faut considérer ici le domaine D comme formant notre espace *entier*). S'il existe un voisinage ouvert V de Y tel que la fonction $f(X)$ peut être étendue dans tout l'ensemble $G + V$ de manière à y satisfaire à (P) tout en maintenant ses valeurs dans G, on considérera $f(X)$ comme *P-régulière* en Y et on dira qu'elle est *P-prolongeable* dans tout le voisinage V de Y. Les points Y de la frontière de G, où ceci n'a pas lieu, seront dits *P-singuliers* (ou *singuliers* tout court) pour $f(X)$; leur ensemble est évidemment fermé (relativement à D).

On pourra prolonger la fonction $f(X)$ de proche en proche aux ensembles de plus en plus grands de manière à obtenir à la limite un ensemble $G_1 \supset G$ à la frontière duquel la fonction $f(X)$ prolongée ne présentera que des points singuliers. Ceci pourra être atteint toujours quand la propriété (P) est *locale* c. à d. quand, pour qu'elle soit satisfaite dans un ensemble ouvert, il faut et il suffit qu'elle le soit dans un voisinage de chaque point de cet ensemble.

Pour les propriétés (P) les plus intéressantes on pourra alors définir encore $f(X)$ à l'extérieur de G_1 relativement à D (c. à d. dans $D - \overline{G}_1$) de manière à avoir une fonction $f(X)$ *définie dans un ensemble ouvert* G_0 *partout dense dans* D, *satisfaisant dans* G_0 *à la propriété* (P) *et P-singulière en tout point frontière de* G_0 (*situé dans* D).

On appellera de telles fonctions[1] *P-régulières*; l'ensemble G_0 qui leur est attaché — leur *ensemble de régularité*, et son complémentaire par rapport à D (c. à d. $D - G_0$) — leur *ensemble singulier*. Celui-ci est toujours fermé relativement à D.

Dès lors le théorème **A** a déjà un sens pour les fonctions P-régulières. Mais ceci ne veut pas dire qu'il est toujours vrai. Pour qu'il en soit ainsi, il faut encore que la propriété (P) satisfasse à plusieurs conditions.[2] P. ex. pour les propriétés ayant un certain caractère analytique il est nécessaire qu'elles subsistent pour la combinaison linéaire $a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X)$ (a_1 et a_2 constants) dès qu'elles sont vraies pour $f_1(X)$ et $f_2(X)$ (dans le même ensemble P). D'un seul coup il ne nous reste alors parmi les propriétés (P_E) (v. plus haut) que celles qui correspondent aux équations aux dérivées partielles $E = 0$ linéaires et homogènes. Parmi ces dernières propriétés il y en a qui admettent et il y en a qui n'admettent pas le théorème **A**. Probablement celles qui correspondent à une équation $E = 0$ du second ordre du type hyperbolique n'admettent pas en général le théorème **A** (au moins dans sa forme actuelle). Par contre, pour les équations $E = 0$ du type elliptique, il est très propable que le théorème **A** subsiste (au moins si les coefficients de E sont analytiques).

Il est à remarquer que pour la propriété (P_c) (continuité) le théorème **A** est vrai et bien facile à démontrer. Mais pour les propriétés (P_d) — la dérivabilité jusqu'à un certain ordre (même jusqu'à l'ordre 1) — la question reste entièrement ouverte. Elle se rattache à un problème concernant la possibilité du prolongement dans un domaine H_1 donné d'avance d'une fonction $f(X)$ définie et dérivable jusqu'à l'ordre k dans un domaine $H \subset H_1$, de manière à maintenir la dérivabilité jusqu'à l'ordre k.

Remarquons encore que les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes n'admettent pas le théor. **A**, déjà pour la raison que leur ensemble singulier ne peut pas être borné.

---

[1] Comp. nos conventions sur les fonctions holom. et unif. dans § 1 de la I^re partie.

[2] Les conditions nécessaires et suffisantes sont loin d'être connues.

Définition des fonctions harmoniques d'ordre p, $p = 1, 2, \ldots, \infty$.

Nous nous bornerons ici à démontrer le théorème **A** pour les fonctions harmoniques, p-harmoniques et pour les fonctions encore plus générales que nous appellerons harmoniques d'ordre ∞.

Considérons à cet effet l'espace de n variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (le point à l'infini en est *exclu*) et dans un ensemble ouvert G de cet espace une fonction réelle $u(X) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ qui, en chaque point $X \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ de cet ensemble, possède des dérivées partielles finies de tous les ordres. Formons alors les expressions appelées *les laplaciens*:

$$\Delta u(X) = \Delta^1 u(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_k^2} \tag{1}$$

$$\Delta^{p+1} u(X) = \Delta[\Delta^p u(X)], \quad \text{pour } p = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

On dit que $u(X)$ est dans G harmonique d'ordre p ou p-harmonique, si, pour tout X de G, $\Delta^p u(X) = 0$. Les fonctions 1-harmoniques sont harmoniques tout court.

Nous dirons que $u(X)$ est *harmonique d'ordre infini* dans G, si dans tout G

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p^2} \sqrt[p]{|\Delta^p u(X)|} = 0, \quad \lim_{p=\infty} \frac{1}{p^2} \sqrt[p]{\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p u(X)\right|} = 0 \textit{ pour } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

la convergence étant uniforme sur tout ensemble fermé et borné compris dans G.

La propriété d'une fonction d'être harmonique d'un certain ordre est dans le genre des propriétés générales (P) considérées plus haut (pour un ordre fini c'est une propriété (P_E)). C'est même une propriété locale et on peut appliquer les notions d'un point régulier et d'un point singulier à une fonction harmonique d'un certain ordre. Le domaine fondamental — donc l'espace de nos considérations — sera ici l'espace entier de n variables réelles avec l'exclusion du point à l'infini.[1] Il y aura donc à distinguer entre les ensembles fermés bornés et non-bornés. Toutefois, on pourra introduire parfois le point à l'infini (par raison de commodité) en le considérant comme un point singulier de toutes les fonctions harmoniques d'ordre quelconque.

[1] Moyennant certaines conventions, on pourrait ajouter le point à l'infini au domaine fondamental dans le cas d'un ordre fini, mais ceci ne présente pour nous aucune importance.

Propriétés des fonctions p-harmoniques.

Donnons maintenant quelques propriétés des fonctions harmoniques d'ordre p.

Une fonction harmonique d'ordre p (dans un ensemble ouvert G) est aussi harmonique de tout ordre p' avec $p \leq p' \leq \infty$.

Tout polynôme en n variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré $\leq 2p - 1$ est harmonique d'ordre p dans l'espace entier.

Toute fonction entière des variables $x_1, \ldots, x_u$ est harmonique d'ordre infini dans l'espace entier.[1]

Bornons nous, pour simplifier les calculs, au cas d'un espace à un nombre impair de dimensions

$$n = 2n_1 + 1.\text{[2]} \tag{4}$$

On peut considérer les points X comme représentant les vecteurs commençant en l'origine o et finissant en X. Dans ce sens, on peut introduire la combinaison linéaire $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ de deux *vecteurs* quelconques X_1 et X_2 avec α_1 et α_2 réels quelconques. La distance de deux points X et Y sera alors la longueur du vecteur $X - Y$. Désignons la par

$$r(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{\sum_1^n (x_k - y_k)^2}. \tag{5}$$

L'expression

$$|X - Y|^{2p-n}, \tag{6}$$

considérée comme fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$, est p-harmonique et possède comme seul point singulier le point Y. On peut développer (6) suivant les puissances des $y_1, y_2, \ldots, y_n$. On obtient alors

$$|X - Y|^{2p-n} = \sum \Gamma^{(p)}_{m_1, \ldots, m_n}(X)\, y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}, \tag{7}$$

---

[1] Ceci résulte du fait général que pour une fonction analytique $f(Z)$ de n variables complexes $z_1, \ldots, z_n$, régulière au point $Z = X$, on a $|\Delta^p f(X)| \leq (2p)!\, n^p \dfrac{M(r)}{(2\pi)^n r^{2p}}$, où $M(r)$ désigne le maximum du module de $f(Z)$ dans le polycylindre (de l'espace complexe): $|z_n - x_n| \leq r$.

[2] Dans le cas de n pair on aurait, dans les développements qui vont suivre, des termes (à partir d'un certain indice) renfermant des logarithmes, ce qui allongerait les formules et les rendrait dissymétriques (sans toutefois compliquer essentiellement les raisonnements).

où la série est étendue à tous les systèmes de nombres entiers non-négatifs $m_1, \ldots, m_n$. Comme coefficients dans ce développement entrent les fonctions

$$\Gamma^{(p)}_{m_1, \ldots, m_n}(X) = |X|^{2p-n-(m_1+\cdots+m_n)} V^{(-2p+1)}_{m_1, \ldots, m_n}\left(\frac{x_1}{|X|}, \ldots, \frac{x_n}{|X|}\right)^{1} \tag{8}$$

qui sont toutes p-harmoniques.

Le développement (7) converge absolument vers $|X - Y|^{2p-n}$ pour toute paire de points X et Y pour lesquels on a $|Y| < \frac{1}{2}|X|$.

Il converge *uniformément* pour toutes les paires (X, Y) avec $|Y| < \frac{1}{2+\varepsilon}|X|$ et $|X|^{2p-n} < M$ pour un ε et un M positifs quelconques.

Les dérivées partielles (de même nature) des termes successifs de la série (7), par rapport aux variables x_k et y_k, forment une série convergente dans les mêmes conditions que la série (7), vers la dérivée correspondante de $|X - Y|^{2p-n}$. Ceci est également vrai pour les opérateurs différentiels Δ^p.

En effectuant la transformation par des rayons réciproques (inversion)

$$X' = \frac{X}{|X|^2}, \quad Y' = \frac{Y}{|Y|^2}, \tag{9}$$

on trouve

$$|X - Y|^{2p-n} = |X|^{2p-n} |Y|^{2p-n} |X' - Y'|^{2p-n}. \tag{10}$$

En remplaçant ici $|X' - Y'|^{2p-n}$ par son développement à la (7) et en y mettant ensuite au lieu de X' et Y' leurs expressions (9), on obtient (vu la formule (8))

$$|X - Y|^{2p-n} = \sum |X|^{2(m_1+\cdots+m_n)-(2p-n)} \Gamma^{(p)}_{m_1, \ldots, m_n}(X) \frac{y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}}{|Y|^{2(m_1+\cdots+m_n)-(2p-n)}}. \tag{11}$$

Comme coefficients dans ce développement (c. à d. les facteurs des termes successifs, qui ne renferment pas les variables y_k) figurent les fonctions

$$|X|^{2(m_1+\cdots+m_n)-(2p-n)} \Gamma^{(p)}_{m_1, \ldots, m_n}(X) = |X|^{m_1+\cdots+m_n} V^{(-2p+1)}_{m_1, \ldots, m_n}\left(\frac{x_1}{|X|}, \ldots, \frac{x_n}{|X|}\right) \tag{12}$$

qui sont, comme les fonctions (8), p-harmoniques.

---

[1] Pour les fonctions $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ comp. P. Appell et J. Kampé de Feriet, Fonct. hypergéométriques et hypersphériques, Paris, 1926, p. 249.

Le développement (11) converge absolument pour $|Y| > 2|X|$ et uniformément pour tous les X et Y avec $|Y| > (2+\varepsilon)|X|$ et $|Y|^{2p-n} < M$. On aura de même pour les séries formées par les dérivées partielles des termes de (11) ou bien par l'emploi de l'opérateur différentiel Δ^p.[1]

Dans les fonctions (8) et (12), nous avons déjà une multitude d'exemples de fonctions harmoniques d'ordre exactement p (c. à d. qui sont d'ordre p sans être d'ordre inférieur). Les fonctions (8) ont un seul point singulier, notamment l'origine 0, tandis que les fonctions (12) n'en ont aucun — ce sont des polynômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En transposant la méthode classique des sommes de fractions simples, on obtient facilement des fonctions harmoniques d'ordre exactement p possédant pour ensemble singulier un ensemble fermé F quelconque. P. ex., en prenant une suite de points $Y^{(k)}$ de F, partout dense dans F et en choisissant des constantes α_k tendant assez rapidement vers 0, on aura un exemple d'une telle fonction harmonique exactement d'ordre p fini, dans la série

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |X - Y^{(k)}|^{2p-n}.$$

Pour l'ordre p infini, une telle fonction sera donnée par une série

$$(14) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |X - Y^{(k)}|^{2k-n}.$$

Généralisation des formules de Green.

Nous aurons maintenant à employer des hypersurfaces S $(n-1)$-dimensionnelles (non nécessairement connexes) dans notre espace n-dimensionnel.

Nous supposerons qu'elles possèdent une normale Yn pour chacun de leurs points Y, cette normale dépendant d'une manière continue de son point d'attache Y, tout ceci sauf peut-être en un ensemble fermé de points Y, de mesure $(n-1)$-dimensionelle $= 0$.

En réalité nous n'aurons besoin que des hypersurfaces S composées d'un nombre fini de morceaux des hypersurfaces sphériques. Ceci permettra évidemment de considérer les intégrales étendues sur une telle surface et portant (entre

[1] C. à d. par la transformation d'une série Σu_n en la série $\Sigma \Delta^p u_n$.

autres) sur la dérivée $\frac{\partial u}{\partial n}$ d'une fonction $u(Y)$ suivant la normale Yn à la surface S.

On pourra par conséquent appliquer ici les formules de Green correspondant à un volume V limité par une surface S. Par l'emploi répété de la deuxième de ces formules, on obtient la formule générale:

$$(15)\quad \int_V (u\,\Delta^p v - v\,\Delta^p u)\,d\tau = -\sum_{k=0}^{p-1}\int_S \left(\Delta^k u \cdot \frac{\partial \Delta^{p-k-1} v}{\partial n} - \Delta^{p-k-1} v \frac{\partial \Delta^k u}{\partial n}\right) d\sigma,$$ [1]

où $u(Y)$ et $v(Y)$ sont deux fonctions ayant des dérivées partielles finies jusqu'à l'ordre $2p$ dans $V+S$, $d\tau$ désigne un élément-volume, $d\sigma$ un élément de la surface S entourant un point Y de S et $\frac{\partial f}{\partial n}$ désigne la dérivée en Y de $f(Y)$ dans la direction de la normale Yn *intérieure*, donc

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k} \cos \widehat{y_k Y n},$$

$\widehat{y_k Y n}$ désignant l'angle entre la direction positive de l'axe Oy_k et la direction de la normale intérieure.

En posant dans (15), $v(Y) = \frac{1}{\gamma_{p-1}} |Y - X|^{2p-n}$, où

$$(16)\quad \gamma_{p-1} = 2^{p-1}(p-1)!\,(4-n)(6-n)\ldots(2p-n),$$

et en tenant compte de la formule

$$(17)\quad \Delta^k |Y-X|^{2p-n} = \frac{\gamma_{p-1}}{\gamma_{p-k-1}} |Y-X|^{2p-2k-n}$$

on trouve que l'expression (où on a mis $r = |Y - X|$)

$$(18)\quad \varphi(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\gamma_k} \int_S \left(\Delta^k u \frac{\partial r^{2k+2-n}}{\partial n} - r^{2k+2-n} \frac{\partial \Delta^k u}{\partial n}\right) d\sigma - \frac{1}{\gamma_{p-1}} \int_V r^{2p-n} \Delta^p u \, d\tau$$

est égale à 0 pour X extérieur à V et à $2(n-2)\pi_n u(X)$ pour X intérieur à V.[2] $2\pi_n$ désigne ici la mesure de la surface de la sphère n-dimensionnelle de

[1] On pose ici $\Delta^0 f = f$.

[2] Ce dernier fait s'obtient par le procédé classique en excluant de V une petite sphere de centre X et en faisant tendre son rayon vers 0.

rayon 1; elle est donnée par la formule

$$\pi_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{19}$$

Pour une fonction $u(Y)$ *harmonique d'ordre infini dans un ensemble ouvert G contenant* $V+S$, on obtient, d'après (3) et (16), en faisant tendre dans (18) p vers l'infini, la formule fondamentale pour la suite

(20′) pour X dans $V: u(X) =$

$$= \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \int_S \left(\Delta^k u \frac{\partial r^{2k+2-n}}{\partial n} - r^{2k+2-n} \frac{\partial \Delta^k u}{\partial n} \right) d\sigma,$$

(20″) pour X extérieur à $V: 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \int_S \left(\Delta^k u \frac{\partial r^{2k+2-n}}{\partial n} - r^{2k+2-n} \frac{\partial \Delta^k u}{\partial n} \right) d\sigma.$

La série figurant dans (20′) on (20″) est, d'après (3) et (16), absolument convergente (elle reste convergente, même si l'on remplace tous les termes sous les intégrales par leurs valeurs absolues) pour tout X non situé sur S et uniformément convergente sur tout ensemble fermé et borné disjoint de S. Le k-ème terme de cette série est une fonction $(k+1)$-harmonique.

Les mêmes propriétés subsistent quand on étend les intégrales de cette série non sur la surface S entière, mais sur une partie S_1 de S seulement. La somme de la série ainsi obtenue définit une fonction $u_1(X)$ dans tout l'ensemble complémentaire de S_1 (par rapport à l'espace entier). Cette fonction $u_1(X)$ est toujours harmonique d'ordre infini comme on trouve sans difficulté en utilisant les formules (3) et (16) et en remarquant que $\Delta^p u_1$ s'obtient en remplaçant dans la série définissant u_1 la fonction u par $\Delta^p u$.

La formule (20′) nous donne encore des renseignements précieux sur les fonctions harmoniques d'ordre infini. Elle prouve qu'une telle fonction est *localement analytique* c. à d. admet un développement de Taylor en $(x_1 - x_1^0), \ldots, (x_n - x_n^0)$, autour de chacun de ses points réguliers X^0. Il en résulte qu'une fonction harmonique d'ordre infini (et, à plus forte raison, d'ordre fini) n'admet qu'un seul prolongement au plus sur un chemin donné.

Les termes de la série (20′) nous donnent une décomposition de la fonction

$u(X)$ en somme des fonctions $(k+1)$-harmoniques, valable dans l'ensemble V. Si $u(X)$ elle-même est p-harmonique, ces termes à partir du p-ème disparaissent.

Relevons encore une propriété résultant de (20′) notamment qu'avec $u(X)$ toutes ses dérivées partielles sont des fonctions harmoniques d'ordre infini.

Démonstration du théorème **A** pour les fonctions p-harmoniques.

L'ensemble des formules et propriétés obtenues plus haut va nous permettre de prouver le théorème **A** pour les fonctions harmoniques d'ordre quelconque.[1] Il suffira de l'obtenir pour l'ordre infini, car la même démonstration sera valable pour tout ordre fini.

A partir de maintenant, jusqu'à la fin de la démonstration, nous ne considérerons que des fonctions harmoniques d'ordre infini. On admettra des conventions analogues à celles faites dans le § 1 de la Ire partie pour les fonctions holomorphes, notamment que nos fonctions possèdent un ensemble singulier non-dense.

La démonstration sera identique au point de vue du raisonnement, à celle du § 2 de la Ire partie. L'intégrale de Cauchy sera ici remplacée par la série d'intégrales de (20′). Le lemme du § 2 s'obtient d'une manière tout à fait analogue en vertu de (20′) et (20″). Son énoncé complet revêt la forme suivante

Lemme: *Soit V un ensemble ouvert limité par une hypersurface S*[2] *bornée et soit S_1 une hypersurface (le contour non compté) avec un contour C tels que $\bar{S}_1 = S_1 + C \subset S$ et que $\bar{S}_1$ est comprise dans l'ensemble de régularité de $u(X)$. Posons*

$$I(X) = \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \int\limits_{S_1} \left(\varDelta^k u \frac{\partial r^{2k+2-n}}{\partial n} - r^{2k+2-n} \frac{\partial \varDelta^k u}{\partial n} \right) d\sigma,$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivation suivant la normale extérieure par rapport à V, et posons encore

---

[1] Remarquons que pour les fonctions harmoniques habituelles, les parties principales et les décompositions dans le cas des points singuliers isolés, ont été déjà envisagées par P. Appell, Mémorial Sc. Math., t. XXXVI p. 32.

[2] Comme nous avons déjà remarqué, nous n'utiliserons que des hypersurfaces composées d'un nombre fini de morceaux des hypersurfaces sphériques. Nous supposerons que les contours de ces morceaux sont également formés par un nombre fini des hypersurfaces sphériques $(n-2)$-dimensionnelles. Dans ces conditions nous pourrons facilement trouver par des constructions géométriques toutes les hypersurfaces auxiliaires nécessaires pour la démonstration.

$$v(X) = I(X) \textit{ pour } X \textit{ à l'extérieur de } V$$

$$v(X) = I(X) + u(X) \textit{ pour } X \textit{ à la fois dans } V \textit{ et dans l'ensemble de régularité de } u(X).$$

Dans ces conditions, la fonction $v(X)$ est régulière à l'extérieur de V et sur S_1, présente dans V les mêmes singularités que $u(X)$ (c. à d. $v(X) - u(X)$ y est régulière) et possède ainsi un ensemble singulier compris dans $VF + (S - S_1)$, F désignant l'ensemble singulier de $u(X)$.

Précisons maintenant ce que devient dans le cas actuel l'énoncé du théorème **A**:

Théorème A: *Soit $u(X)$ une fonction avec un ensemble singulier F. Pour chaque décomposition $F = F_1 + F_2$ de l'ensemble F en deux ensembles fermés, il existe une décomposition $u(X) = u_1(X) + u_2(X)$ de la fonction $u(X)$ en deux fonctions $u_1(X)$ et $u_2(X)$ ayant respectivement F_1 et F_2 pour ensembles singuliers.*

La démonstration, nous l'avons déjà dit, sera tout à fait analogue à celle du § 2 de la I^re^ partie. Il y aura seulement à considérer au lieu des cercles — des hypersphères, au lieu des courbes respectivement arcs simples — des hypersurfaces. Les fonctions $f(z)$, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ seront remplacées par $u(X)$, $u_1(X)$ et $u_2(X)$. Pour maintenir l'analogie et avoir à faire avec des ensembles singuliers compacts en soi, nons conviendrons de considérer le point à l'infini comme appartenant à tous les ensembles singuliers F, F_1 et F_2. Nous sommes ainsi dans le deuxième cas (général) de la démonstration du § 2. Nous conviendrons encore d'appeler sphère de centre infini et de rayon ϱ — l'extérieur d'une sphère centrée en l'origine et de rayon $\frac{1}{\varrho}$.

Les voisinages U_m de $F_1 \cdot F_2$ seront définis comme somme d'un nombre fini de sphères centrées aux points $P^{(k,m)}$ de $F_1 \cdot F_2$ (parmi les $P^{(k,m)}$ se trouve certainement le point à l'infini) de rayons tendant vers 0 avec $\frac{1}{m}$ et choisies de manière qu'en augmentant trois fois les rayons de ces sphères on obtient des sphères encore comprises dans U_{m-1}.[1]

Pour la construction et les propriétés des V_m il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit dans le § 2. L_m sera maintenant une hypersurface avec son contour. On peut aussi introduire les $M_m = \mathfrak{F}(V_m) - L_m$. Le lemme nous assure, ici

[1] Ceci est imposé à cause des conditions de convergence des séries (7) et (11).

comme là, de l'existence des fonctions $\psi_{m-1}(X)$ (on y met V_m au lieu de V, L_m au lieu de S_1 et $\psi_{m-1}(X)$ au lieu de $v(X)$) avec des propriétés analogues.

Maintenant, il faut trouver des termes correctifs convenables pour les différences $\psi_m - \psi_{m+1}$. Ceci présente une difficulté qu'on n'a pas rencontrée dans le cas des fonctions holomorphes. En effet, il ne suffit pas ici de choisir les τ_m de manière que la série

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} [\psi_{m+1}(X) - \psi_m(X) + \tau_m(X)] \tag{21}$$

converge uniformément en dehors de U_{m_0}, car ceci n'entraine pas encore le fait que cette série forme une fonction harmonique d'ordre infini.

Pour déterminer les τ_m d'une manière convenable, remarquons d'abord que l'ensemble singulier de $\psi_m - \psi_{m+1}$ est compris dans $\overline{U}_{m+1}$ (comp. (14) du § 2, Ire partie).

En augmentant les rayons des hypersphères formant U_{m+1} dans le rapport $1 : \frac{5}{4}$ et en désignant la somme des hypersphères ainsi obtenues par U'_m, on s'aperçoit qu'en vertu des précautions que nous avons ajoutées ici pendant la construction de U_m

$$U_{m+1} \subset U'_m \subset \overline{U}'_m \subset U_m \tag{22}$$

et, ce qui sera important, même en augmentant dans le rapport $1 : \frac{9}{4}$ les rayons des hypersphères de U'_m, on ne sortira pas de l'ensemble U_m.

Dès lors, $\psi_m - \psi_{m+1}$ étant régulière en dehors de U'_m (donc sur sa frontière $\mathfrak{F}(U'_m)$ également), on peut appliquer la formule (20′) pour X extérieur à U'_m (rappelons que U'_m renferme le point à l'infini), en y plaçant $\psi_m - \psi_{m+1}$ au lieu de u, et $\mathfrak{F}(U'_m)$ au lieu de S, ce qui donne

$$\psi_m(X) - \psi_{m+1}(X) = \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \int\limits_{\mathfrak{F}(U'_m)} . \tag{23}$$

La différence $\psi_m - \psi_{m+1}$ étant régulière sur $\mathfrak{F}(U'_m)$, il existe, d'après (3), un entier ν_m tel que pour $p > \nu_m$ et pour Y sur $\mathfrak{F}(U'_m)$

$$(24) \qquad |\Delta^p [\psi_m(Y) - \psi_{m+1}(Y)]| < C_1^{(m)} p^{2p} \varepsilon_m^p,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p [\psi_m(Y) - \psi_{m+1}(Y)] \right| < C_2^{(m)} p^{2p} \varepsilon_m^p \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n,$$

où $C_1^{(m)}$, $C_2^{(m)}$ et ε_m sont des constantes positives dont nous disposerons plus loin, en les choisissant pour chaque m d'une manière convenable.

Le k-ème terme de la série (23) est une fonction harmonique d'ordre $k + 1$ et il a la forme

$$(25) \qquad T_k^{(m)}(X) = \frac{1}{\gamma_k} \int\limits_{\mathfrak{F}(U'_m)} \left[\Delta^k (\psi_m - \psi_{m+1}) \frac{\partial r^{2k+2-n}}{\partial n} - r^{2k+2-n} \frac{\partial}{\partial n} \Delta^k (\psi_m - \psi_{m+1}) \right] d\sigma.$$

L'hypersurface $\mathfrak{F}(U'_m)$ est formé d'un nombre fini de morceaux A_i appartenant aux hypersurfaces sphériques centrées aux points $P^{(i, m+1)}$. L'intégrale de (25) se décompose en autant d'intégrales $\int\limits_{A_i}$. On décomposera ainsi les premiers ν_m termes $T_k^{(m)}$. Dans chacune des intégrales $\int\limits_{A_i}$ ainsi obtenue, on remplacera dans le cas où le centre $P^{(i, m+1)}$ est à distance finie, la fonction

$$r^{2k+2-n} = |Y - X|^{2k+2-n} = |(X - P^{(i, m+1)}) - (Y - P^{(i, m+1)})|^{2k+2-n}$$

par son développement (7), où on aura placé $X - P^{(i, m+1)}$ au lieu de X et $Y - P^{(i, m+1)}$ au lieu de Y.

Quand le centre $P^{(i, m+1)}$ se trouve à l'infini, on développera cette fonction en série (11).

Grace à nos précautions pendant la construction des U_m et U'_m, ces développements sont uniformément convergents pour X en dehors de U_m et Y sur la surface A_i correspondante. Il en résulte que dans chaque intégrale $\int\limits_{A_i}$ correspondant aux termes $T_k^{(m)}$ avec $k \leq \nu_m$, on peut intégrer les séries terme à terme et qu'on obtient ainsi chaque terme $T_k^{(m)}(X)$ sous la forme d'une somme d'un nombre fini de séries $\left(\text{provenant de chaque intégrale } \int\limits_{A_i}\right)$ de la forme

$$\sum \alpha^{(k,i)}_{m_1,\ldots m_n} \Gamma^{(k+1)}_{m_1,\ldots,m_n}(X - P^{(i,m+1)}),$$

uniformément convergentes (avec toutes leurs dérivées) pour X en dehors de U_m. La série correspondant au centre ∞ sera de la forme

$$\sum \beta^{(k)}_{m_1,\ldots,m_n} |X|^{2(m_1+\cdots+m_n)-(2k+2-n)} \Gamma^{(k+1)}_{m_1,\ldots,m_n}(X)$$

et convergera également uniformément en dehors de U_m.

Il est évident que, dans ces conditions, on peut choisir dans toutes ces séries, obtenues pour les $T_k^{(m)}$ avec $k \leq \nu_m$, un nombre fini de termes formant une somme $\tau_m(X)$, de manière que le reste $\sum_{k=1}^{\nu_m} T_k^{(m)}(X) - \tau_m(X) = R_m(X)$ soit avec tous ses laplaciens $\Delta^p R_m(X)$ et leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p R_m(X)$ pour $p \leq \nu_m$ et X en dehors de U_m, plus petit que η_m en valeur absolue. Les η_m seront choises de sorte que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \eta_m < \infty. \tag{26}$$

Mais, étant donné que les termes considérés $T_k^{(m)}(X)$ ainsi que la fonction $\tau_m(X)$ sont harmoniques d'ordre au plus $\nu_m + 1$, leurs laplaciens Δ^p pour $p \geq \nu_m + 1$ sont identiquement nuls. Il en résulte, vu la condition que doit remplir $\tau_m(X)$, que pour X en dehors de U_m

$$|\Delta^p R_m(X)| < \eta_m, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p R_m(X)\right| < \eta_m \textit{ pour tout } p. \tag{27}$$

Les τ_m n'ont qu'un nombre fini de points singuliers, notamment les $P^{(i,m+1)}$ qui sont tous dans $F_1 \cdot F_2$.

Nous serons donc dans un cas tout à fait analogue à celui traité dans le § 2, I$^{\text{re}}$ partie, si nous parvenons à obtenir des évaluations convenables pour

$$\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m).$$

On a pour X en dehors de U_m

$$\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m) = \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \Delta^p R_m + \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \sum_{k=\nu_m+1}^{\infty} \Delta^p T_k^{(m)}. \tag{28}$$

Evaluons les termes de la dernière série. D'après la formule (17) et la formule

$$\frac{\partial r^s}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} | Y - X |^s = - s | Y - X |^{s-1} \cos \widehat{X Y n},$$

on trouve immédiatement en vertu de (25)

$$| \varDelta^p T_k^{(m)} | \leq \frac{1}{|\gamma_{k-p}|} \int\limits_{\mathfrak{F}(U'_m)} r^{2k-2p+1-n} \left[| \varDelta^k (\psi_m - \psi_{m+1}) | \, | 2k - 2p + 2 - n | + \right.$$
$$\left. + r \left| \frac{\partial}{\partial n} \varDelta^k (\psi_m - \psi_{m+1}) \right| \right] d\sigma,$$

où il faut poser $\gamma_i = \infty$ pour i négatif.

D'après (24), on en déduit pour les termes de la série de (28)

$$(29) \qquad | \varDelta^p T_k^{(m)} | \leq \frac{1}{|\gamma_{k-p}|} k^{2k} \varepsilon_m^k \int\limits_{\mathfrak{F}(U'_m)} r^{2k-2p+1-n} \left[C_1^{(m)} | 2k - 2p + 2 - n | + \right.$$
$$\left. + C_2^{(m)} r \sqrt{n} \right] d\sigma.^1$$

Désignons par $d_{1,m}$ et $d_{2,m}$ la plus petite et la plus grande distance entre un point X extérieur à U_m et un point Y de $\mathfrak{F}(U'_m)$. Il est évident, d'après les propriétés de U_m et U'_m que ces deux distances sont positives et finies. En les utilisant dans (29), on trouve (vu que $\varDelta^p T_k^{(m)} = 0$ pour $p > k$)

$$(30) \qquad | \varDelta^p T_k^{(m)} | < \frac{k^{2k} \varepsilon_m^k}{|\gamma_{k-p}|} \frac{d_{2,m}^{2k-2p+1}}{d_{1,m}^n} \left[2 \, C_1^{(m)} | k - p | + | n - 2 | \, C_1^{(m)} + C_2^{(m)} d_{2,m} \sqrt{n} \right] \sigma_m,$$

où σ_m désigne la mesure $(n-1)$-dimensionelle de $\mathfrak{F}(U'_m)$, Pour les dérivées de $\varDelta^p T_k^{(m)}$ on obtient pareillement

$$(31) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \varDelta^p T_k^{(m)} \right| < \frac{k^{2k} \varepsilon_m^k}{|\gamma_{k-p}|} \frac{d_{2,m}^{2k-2p}}{d_{1,m}^n} \left[C_1^{(m)} | 2k - 2p + 2 - n | (| 2k - 2p - n | + 1) + \right.$$
$$\left. + C_2^{(m)} d_{2,m} \sqrt{n} \, | 2k - 2p + 2 - n | \right] \sigma_m.$$

Nous allons maintenant choisir les constantes $C_1^{(m)}$ et $C_2^{(m)}$ de manière à simplifier les expressions (30) et (31).

[1] Le radical $\sqrt{n}$ provient de l'inégalité: $\left| \frac{\partial f}{\partial n} \right| \leq \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2}$.

Nous les prendrons notamment si petits que les expressions entre les crochets, dans (30) et (31), multipliés dans (30) par le coefficient $\frac{d_{2,m}}{d_{1,m}^n}\sigma_m$ et dans (31) par $\frac{\sigma_m}{d_{1,m}^n}$, soient: dans le premier cas $< \frac{1}{m^2}(|k-p|+1)$, et dans le second cas $< \frac{1}{m^2}(|k-p|+1)^2$. Ceci fait — et il est évidemment possible de le faire — on obtient

$$(32) \qquad |\Delta^p T_k^{(m)}| < \frac{k^{2k}\,\varepsilon_m^k}{|\gamma_{k-p}|}\frac{d_{2,m}^{2(k-p)}}{m^2}(|k-p|+1);$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta^p T_k^{(m)}\right| < \frac{k^{2k}\,\varepsilon_m^k}{|\gamma_{k-p}|}\frac{d_{2,m}^{2(k-p)}}{m^2}(|k-p|+1)^2.$$

En posant maintenant $k = p + i$ et en remarquant que $\Delta^p T_k^{(m)}$ pour $k < p$ est nul, on obtient de (28) et (27)

$$(33) \qquad |\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m| < \frac{1}{2(n-2)\pi_n}\left[\eta_m + \frac{\varepsilon_m^p}{m^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(p+i)^{2(p+i)}(\varepsilon_m d_{2,m})^i}{|\gamma_i|}(i+1)\right],$$

$$(34) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m)\right| < \frac{1}{2(n-2)\pi_n}\left[\eta_m + \frac{\varepsilon_m^p}{m^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(p+i)^{2(p+i)}(\varepsilon_m d_{2,m})^i}{|\gamma_i|}(i+1)^2\right].$$

Remarquons maintenant que l'expression $\frac{(p+i)^2}{|\gamma_i|^{\frac{1}{p+i}}p^{\frac{2p}{p+i}}}$ possède une borne supérieure *finie* pour p et i naturels. Désignons cette borne par β. On a par conséquent,

$$(35) \qquad \frac{(p+i)^{2(p+i)}}{|\gamma_i|} \le p^{2p}\,\beta^{p+i},$$

et cette formule est valable même pour p ou $i = 0$, si l'on y prend seulement pour 0^0 la valeur 1.

En prenant ε_m (qui est encore à pourvoir) assez petit pour que

$$\beta\, d_{2,m}\,\varepsilon_m < \frac{1}{2} \text{ et } \beta\,\varepsilon_m < \frac{1}{m}$$

on obtient de (33) et (34), d'après (35).

$$(36)\qquad |\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m)| < \frac{1}{2(n-2)\pi_n}\left[\eta_m + \frac{4p^{2p}}{m^{2+p}}\right],$$

$$(37)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta^p(\psi_m - \psi_{m+1} - \tau_m)\right| < \frac{1}{2(n-2)\pi_n}\left[\eta_m + \frac{12p^{2p}}{m^{2+p}}\right],$$

ces évaluations étant vraies pour X en dehors de U_m.

Les $\tau_m(X)$ étant maintenant définitivement fixés (ils dépendaient du choix des v_m qui, à leur tour, dépendaient des $C_1^{(m)}$, $C_2^{(m)}$ et ε_m) on peut procéder tout comme dans le § 2, Ire partie. On définira donc les fonctions $\varphi_m(X)$

$$\varphi_m = \psi_1 + \sum_{k=1}^{m-1}(\psi_{k+1} - \psi_k + \tau_k) = \psi_m + \sum_{k=1}^{m-1}\tau_k$$

et leur limite $\varphi(X)$

$$(38)\qquad \varphi = \varphi_1 + \sum_{m=1}^{\infty}(\varphi_{m+1} - \varphi_m) = \varphi_{m_0} + \sum_{m=m_0}^{\infty}(\psi_{m+1} - \psi_m + \tau_m),$$

la convergence de cette dernière série étant assurée pour X en dehors de U_{m_0} par les évaluations (36) (pour $p = 0$) et la formule (26).

Ainsi (comme dans le § 2) $\varphi(X)$ est définie pour X en dehors de F_1 de même que

$$u(X) - \varphi(X) = (u - \varphi_{m_0}) - \sum_{m=m_0}^{\infty}(\psi_{m+1} - \psi_m + \tau_m)$$

est définie pour X en dehors de F_2.

Il faut encore démontrer que $\varphi(X)$ et $u(X) - \varphi(X)$ sont harmoniques d'ordre infini, l'une en dehors de F_1 et l'autre en dehors de F_2. Démontrons ceci pour $\varphi(X)$ (pour $u(X) - \varphi(X)$ la démonstration est tout à fait pareille).

Prenons donc un ensemble fermé et borné E en dehors de F_1 et montrons que les relations (3) sont vraies uniformément pour X dans E. L'ensemble E étant fermé, borné et disjoint de F_1, il est en dehors de tous les U_m à partir d'un indice m_0 (car les U_m se rétrécissent vers $F_1 \cdot F_2$). Pour $m_1 > m_0$ et pour X dans E on aura donc d'après (38) (vu également (36))

$$\Delta^p\varphi = \Delta^p\varphi_{m_1} + \sum_{m=m_1}^{\infty}\Delta^p(\psi_{m+1} - \psi_m + \tau_m).$$

La fonction φ_{m_1} étant régulière en dehors de $U_{m_1} + F_1$, donc sur E, elle doit satisfaire aux relations (3) uniformément sur E. Par conséquent, on peut trouver un nombre p_{m_1} tel que pour $p > p_{m_1}$,

$$|\varDelta^p \varphi_{m_1}| < p^{2p} \frac{1}{m_1^p}.$$

D'après les évaluations (36), il en résulte

$$|\varDelta^p \varphi| < p^{2p} \frac{1}{m_1^p} + \sum_{m=m_1}^{\infty} \frac{1}{2(n-2)\pi_n} \left[\eta_m + \frac{4p^{2p}}{m_1^p m^2}\right] < C_1 + C_2 \frac{p^{2p}}{m_1^p},$$

où les constantes C_1 et C_2 ne dépendent ni de p ni de m_1.

Cette inégalité, vraie pour X dans E et $p > p_{m_1}$ pour tous les m_1 assez grands prouve bien que

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p^2} \sqrt[p]{|\varDelta^p \varphi|} = 0$$

uniformément pour les X dans E.

De même, en employant les évaluations (37) on trouve

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p^2} \sqrt[p]{\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \varDelta^p \varphi\right|} = 0 \textit{ pour } k = 1, 2, \ldots, n$$

uniformément dans E.

Ainsi la démonstration s'achève comme dans le § 2 de la I^re partie.

Dans le cas des fonctions harmoniques d'ordre fini, p. ex. i-harmoniques la démonstration est beaucoup plus simple car on n'a pas besoin des évaluations (36) et (37). Il y suffit de prendre $\nu_m = i - 1$ et d'obtenir les inégalités (27), car alors $R_m(X) = \psi_m(X) - \psi_{m+1}(X) - \tau_m(X)$ étant donné que tous les termes $T_k^{(m)}$ avec $k > \nu_m = i - 1$ disparaissent.

Dans ce cas, la démonstration, même dans cette partie, ressemble tout à fait à celle du § 2 de la I^re partie.

Remarques.

Ayant démontré le théorème **A** pour les fonctions harmoniques d'ordre p $(1 \leq p \leq \infty)$, nous sommes en état de développer pour ces fonctions des considérations analogues à certaines de celles dont nous nous occupions dans les paragraphes précédents. Ainsi, on peut obtenir dans certains cas des décompositions effectives $u(X) = u_1(X) + u_2(X)$, correspondant à une décomposition $F = F_1 + F_2$ (comp. la deuxième partie du § 2, I^re partie); on utilisera pour cela des séparateurs dans l'espace n-dimensionnel.

On peut aussi obtenir pour les fonctions harmoniques d'ordre quelconque des théorèmes tout à fait analogues à celui de Runge et au théorème **B** (comp. § 3, I^re partie).

Les considérations sur les parties principales et la décomposition en séries de parties principales (comp. § 2, II^me partie) peuvent être également étendues aux fonctions harmoniques d'ordre quelconque.

Nous n'insisterons pas sur ces généralisations.

Avant d'achever ce paragraphe relevons encore quelques propriétés des fonctions harmoniques d'ordre infini et leurs relations avec la classe de toutes les fonctions analytiques de n variables réelles.

Nous avons déjà dit plus haut que toute fonction harmonique d'ordre infini est analytique (développable en série de Taylor) autour de chacun de ses points réguliers, et que d'autre part, toute fonction entière (en n variables) est nécessairement harmonique d'ordre infini. Mais il existe des fonctions analytiques avec un seul point singulier (à distance finie et dans l'espace réel) qui ne sont pas harmoniques d'ordre infini. Un tel exemple est donné par les fonctions

$$u(X) = |X - Y|^{\sigma}$$

qui, sauf pour $\sigma = 2p - n$ (comp. les fonctions (6)) et $\sigma = 2p$ avec p naturel, ne sont jamais harmoniques d'ordre infini.

Toutefois, les fonctions analytiques, d'après une remarque faite plus haut (comp. la note sous texte p. 127), satisfont à une condition analogue à (3) mais plus faible, notamment les expressions figurant sous les signes des limites dans (3) ne tendent pas nécessairement vers 0, mais sont bornées uniformément pour tout p et sur tout ensemble fermé et borné composé des points réguliers de la fonction.

Ce fait permet de généraliser la formule (20') aux fonctions analytiques quelconques. Mais cette formule ne sera valable que pour des volumes V assez petits, entourant un point régulier de la fonction, de sorte que les distances $r(X, Y) = |X - Y|$ figurant dans cette formule, soient assez petites pour que le reste

$$\frac{1}{\gamma_{p-1}} \int_V r^{2p-n} \Delta^p u \, d\tau$$

de la formule (18) (d'où vient (20')) tende vers 0 avec $\frac{1}{p}$ et la série de (20') soit convergente. Il en résulte le fait intéressant que toute fonction analytique peut être développée, dans un voisinage de chacun de ses points réguliers (de l'espace réel), en une série (20') c. à d. *en une série uniformément convergente de fonctions harmoniques d'ordre croissant jusqu'à l'infini.*

On trouve encore que *la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $u(X)$ soit analytique dans un domaine G est que sur chaque ensemble fermé et borné compris dans G, les expressions*

$$\frac{1}{p^2}\sqrt[p]{|\Delta^p u(X)|} \quad et \quad \frac{1}{p^2}\sqrt[p]{\left|\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta^p u(X)\right|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

existent pour $p = 1, 2, 3, \ldots$ et soient bornées par un même nombre M, indépendant de p.

Note I.

Sur les décompositions et les approximations pour certaines classes de fonctions.

Définition des cas considérés.

Nous allons nous occuper ici des fonctions $f(z)$ ayant une certaine allure sur des arcs ouverts aboutissant à certains de leurs points singuliers, notamment aux points de l'ensemble $F_1 \cdot F_2$, $F = F_1 + F_2$ étant une décomposition de l'ensemble singulier F de $f(z)$.

Pour ne pas nous perdre dans les généralités nous supposerons ici que $F_1 \cdot F_2$ se réduit à un seul point a à distance finie, que les arcs en question sont en nombre fini et forment un séparateur ouvert L entre $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_1$. Le séparateur fermé $S = L + (a)$ détermine dans le plan un nombre fini de domaines, et la somme de ceux d'entre eux qui contiennent des points de $F_1 - F_2$ sera désignée par G.

Nous considérerons des fonctions $f(z)$ qui, sur les arcs de L, satisfont à l'inégalité

(1) $$|f(z)| < m(r), \text{ où } r = |z - a|.$$

La fonction positive $m(r)$ sera, dans la suite, assujettie à quelques conditions. Comme cas particuliers, nous aurons surtout en vue les fonctions $m(r) = r^{\alpha}$, $\alpha > -1$, ou $m(r) = r^{\alpha}\left(\log \frac{1}{r}\right)^{\beta}$ etc.

Sur chacun des arcs ouverts composant L (leurs extrémités se confondent avec a) fixons le sens négatif par rapport à G comme sens de parcours, et choisissons un point b_{ν} ($\nu = 1, 2, \ldots, N$, N étant le nombre de ces arcs). Chacun de ces arcs pourra donc être représenté comme somme de deux arcs $\widehat{a\,b_{\nu}}$ et $\widehat{b_{\nu}\,a}$ le point a n'étant pas compté (comp. le dessin ci-dessous).

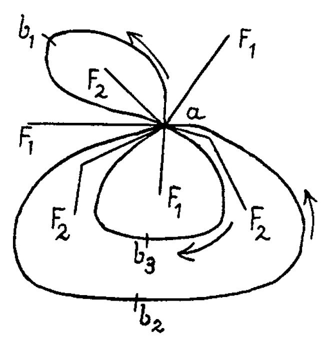


Fig. 10

Voisinage angulaire d'un séparateur.

Nous appellerons voisinage angulaire de L (ou bien d'un arc $\widehat{ab_{\nu}}$ ou $\widehat{b_{\nu}a}$) d'ouverture 2θ $\left(\theta < \frac{\pi}{2}\right)$, la somme de tous les cercles ouverts ayant leur centre z sur L (ou sur $\widehat{ab_{\nu}}$ ou $\widehat{b_{\nu}a}$) et un rayon $= |z - a| \sin \theta$. P. ex., si un arc coïncide aux environs de a avec un segment de droite, son voisinage angulaire se confond au voisinage de a avec un angle d'ouverture 2θ ayant le segment considéré pour bissectrice.

Un voisinage angulaire peut contenir un voisinage entier (un cercle) de a excepté le point a lui-même, et ceci même pour des arcs de longueur finie et pour une ouverture θ aussi petite que l'on veut $\left(\text{comme p. ex. pour la spirale } r = \frac{1}{\varphi^2}, \varphi \geq 2\pi\right)$. Mais ceci ne se présentera pas (au moins pour des ouvertures

2θ assez petites) dans les cas que nous considérerons. Notamment les séparateurs ouverts L (et, à plus forte raison, les arcs qui les composent) que nous étudierons, seront de longueur finie[1] et satisferont en outre à la condition suivante: si $s(r)$ désigne la longueur de la partie de L comprise dans le cercle $|z-a|<r$, alors pour tout r

$$s(r) \leq \gamma r, \quad \gamma \text{ — const.} \tag{2}$$

Quand L est formé par N arcs ouverts (donc $2N$ arcs $\widehat{ab_\nu}$ et $\widehat{b_\nu a}$), γ est nécessairement $\geq 2N$ (car alors $s(r) \geq 2Nr$ pour r assez petit)

Quand θ est assez petit, il y a des domaines extérieurs au voisinage correspondant de L aussi près de a que l'on veut (mais il peut ne pas y avoir de tels domaines s'étendant jusqu'au point a). On prouve ceci en remarquant que la surface couverte par le voisinage d'ouverture 2θ dans le cercle $|z-a|<r$ a une mesure $< \frac{2\gamma r^2 \sin\theta}{(1-\sin\theta)^2}$.[2]

Une condition pour que $f(z)$ soit sommable sur un séparateur L.

Passons maintenant à la fonction $f(z)$ qui satisfait à (1) et voyons quand est-ce qu'elle satisfait à la condition (24) du § 2. On trouve:

$$\int_L |f(z)|\,|dz| < \int_0^{r_0} m(\varrho)\,ds(\varrho), \tag{3}$$

où r_0 est un rayon assez grand pour que le cercle $|z-a|<r_0$ renferme tout le séparateur L. La seconde intégrale est prise dans le sens de Stieltjes. Nous supposerons la fonction $m(\varrho)$ *continue* et *monotone* pour $\varrho > 0$. En transformant le membre droit de (3) on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^{r_0} m(\varrho)\,ds(\varrho) = [m(r_0)\,s(r_0) - m(\varepsilon)\,s(\varepsilon)] - \int_\varepsilon^{r_0} s(\varrho)\,dm(\varrho)$$

et ceci est plus petit que

[1] Longueur de L = somme des longueurs de tous les arcs de L = mesure linéaire de L.

[2] On utilise pour cela le fait général que la surface couverte par des cercles de rayon ϱ et centrés aux points d'une courbe fermée de longueur l, est toujours $\leq 2l\varrho$. Pour un arc de longueur l on aura la même inégalité si l'on prend la partie de la surface, comprise dans un angle (quelconque) dont les cotés passent par les extrémités de l'arc.

$$m(r_0)\gamma r_0 + \int_{\varepsilon}^{r_0} \gamma\varrho\,|dm(\varrho)| \leq \gamma r_0\, m(r_0) + |\gamma r_0\, m(r_0) - \gamma\varepsilon m(\varepsilon)| + \gamma \int_{\varepsilon}^{r_0} m(\varrho)\,d\varrho.$$

On en déduit que pour que $f(z)$ soit absolument sommable sur L il suffit que

$$\int_0^{r_0} m(\varrho)\,d\varrho < \infty. \tag{4}$$ [1]

P. ex. quand $m(r) = r^{\alpha}\left(\log \frac{1}{r}\right)^{\beta}$, il suffit de prendre $\alpha > -1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta < -1$.

Evaluation de l'intégrale $I(x)$.

La condition (4) étant posée, nous pouvons passer maintenant aux décompositions $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ données par les formules (23) et (23′) du § 2, où on aura remplacé les limites par l'intégrale

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \tag{5}$$

où l'intégrale est prise suivant tous les arcs de L dans le sens choisi plus haut.

Nous allons maintenant étudier l'allure des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ quand x tend vers a (qui est un point singulier de ces deux fonctions). L'allure de $f(x)$ supposée connue, il nous suffira de rechercher celle de $I(x)$. Prenons x en dehors d'un voisinage de L d'ouverture 2θ suffisamment petite, donc

$$|z-x| \geq |z-a|\sin\theta \quad \textit{pour } z \textit{ sur } L. \tag{6}$$

Désignons $|x-a|$ par r et $|z-a|$ par ϱ. Séparons ensuite le chemin d'intégration dans (5) en deux parties L_1 et L_2, l'une en dehors et l'autre à l'intérieur du cercle $|z-a| < \frac{r}{2}\cdot$

On obtiendra par une méthode analogue à celle utilisée plus haut

[1] Pour la fonction monotone $m(\varrho)$ la condition (4) entraine: $\lim\limits_{\varepsilon=0} \varepsilon m(\varepsilon) = 0$.

$$\left|\int\limits_{L_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}\right| \leq \int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{m(\varrho)\,ds(\varrho)}{\varrho\sin\theta} = \left[\frac{m(\varrho)\,s(\varrho)}{\varrho\sin\theta}\right]_{\frac{r}{2}}^{r_0} - \int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{s(\varrho)}{\varrho\sin\theta}\,dm(\varrho) -$$

$$-\int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{1}{\sin\theta}\,s(\varrho)\,m(\varrho)\,d\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$< \frac{\gamma}{\sin\theta}m(r_0) + \frac{\gamma}{\sin\theta}\left|m(r_0) - m\left(\frac{r}{2}\right)\right| + \frac{\gamma}{\sin\theta}\int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{m(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho$$

$$< \frac{\gamma}{\sin\theta}\left(C_1 + m\left(\frac{r}{2}\right) + \int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{m(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho\right),\quad C_1 = 2\,m(r_0),$$

$$\left|\int\limits_{L_2}\frac{f(z)\,dz}{z-x}\right| \leq \frac{2}{r}\int\limits_0^{\frac{r}{2}} m(\varrho)\,ds(\varrho) \leq \frac{2}{r}\left[2\gamma\frac{r}{2}\,m\left(\frac{r}{2}\right) + \gamma\int\limits_0^{\frac{r}{2}} m(\varrho)\,d\varrho\right] =$$

$$= 2\gamma\left(m\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{r}\int\limits_0^{\frac{r}{2}} m(\varrho)\,d\varrho\right).$$

Il en résulte

$$(7)\qquad |I(x)| < C_2 + C_3\,m\left(\frac{r}{2}\right) + C_4\frac{1}{r}\int\limits_0^{\frac{r}{2}} m(\varrho)\,d\varrho + C_5\int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{m(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho = M(r),$$

où les $C_\varkappa$ peuvent varier avec θ, mais ne dépendent pas de r.

Pour la n-ème dérivée de $I(x)$, on obtient de même

$$(8)\qquad |I^{(n)}(x)| < C_2^{(n)} + C_3^{(n)}\frac{1}{r^n}\,m\left(\frac{r}{2}\right) + C_4^{(n)}\frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_0^{\frac{r}{2}} m(\varrho)\,d\varrho +$$

$$+ C_5^{(n)}\int\limits_{\frac{r}{2}}^{r_0}\frac{m(\varrho)}{\varrho^{n+1}}\,d\varrho = M_n(r).$$

Pour l'instant, les majorations (7) et (8) ne sont valables que pour x en dehors d'un voisinage de L.

Croissance des fonctions-composantes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ dans le voisinage du point a.

Supposons maintenant qu'il existe encore un séparateur ouvert L^0 du genre considéré ici (c. à d. satisfaisant à (2)) et correspondant à la même décomposition $F = F_1 + F_2$. Supposons deuxièmement que les voisinages de L et L^0 aux ouvertures très petites sont disjoints. Nous dirons dans ce cas que L et L^0 sont à *écart angulaire positif*. L'ensemble ouvert D compris entre ces deux séparateurs sera appelé *domaine angulaire au sommet* a (ne pas confondre avec un voisinage angulaire!). Pour simplifier, supposons encore que L^0 se trouve dans l'ensemble G déterminé par L. Alors l'ensemble G^0 correspondant à L^0 sera compris dans G et on aura $D = G - \overline{G^0}$. Fixons les deux voisinages angulaires disjoints U et U^0 de L et L^0.

Admettons maintenant que $f(z)$ satisfait à (1) sur L^0 aussi. On peut donc former l'intégrale $I^0(x)$ analogue à $I(x)$ et obtenir avec $I^0(x)$ une nouvelle décomposition $f(x) = f_1^0(x) + f_2^0(x)$. Celle-ci sera identique avec la précédente à condition (nécessaire et suffisante) que

$$I(x) - I^0(x) = 0 \text{ pour } x \text{ à l'extérieur de } D.$$

Mais cette différence prolongée à l'intérieur de D doit y donner la fonction $I(x) - I^0(x) + f(x)$.[1] Il en résulte dans le cas où les deux décompositions de $f(z)$ sont identiques que pour x dans D: $f(x) = I^0(x) - I(x)$, et que, par conséquent, pour x dans $D - (U + U^0)$, $f(x)$ est majorée par une fonction $M(r)$ dans le genre de celle qui se trouve au membre droit de (7). Les ouvertures des voisinages U et U^0 pouvant être choisis aussi petites que l'on veut, l'ensemble $D - (U + U^0)$, où $f(x)$ est majorée par $M(r)$, peut approcher le domaine D d'aussi près que l'on veut.

Inversement, si $f(x)$ est majorée par $M(r)$ dans le domaine D entier, alors par un raisonnement indiqué dans le complément II au théor. **A** (comp. p. 30), on verra facilement que les deux décompositions obtenues avec les deux séparateurs L et L^0 sont identiques (car, en utilisant (4), on peut démontrer que $rM(r) \to 0$ quand $r \to 0$ et ceci suffit dans ce raisonnement).

Supposons maintenant que $f(z)$ satisfait à (1) dans tout le domaine D (c. à d.

[1] Car cette différence presente l'intégrale de Cauchy étendue sur les arcs de la frontiere $\mathfrak{F}(D)$ qui passent en dehors de l'ensemble singulier F de $f(z)$. La somme de ces arcs forme exactement $L + L^0$ et pour de tels arcs on peut généraliser le lemme du § 2, si seulement la fonction y est absolument sommable.

entre L et L^0). Elle y est à plus forte raison majorée par une fonction $M(r)$ $\left(\text{car } m(r) \text{ est monotone, donc ou bien bornée pour } r \to 0, \text{ ou bien } < m\left(\frac{r}{2}\right)\right)$ et, par conséquent, les deux décompositions de $f(x)$ sont identiques. La fonction $f_1(x)$ sera donc en dehors de $G^0 + U^0 \subset G^1$ exprimée par $I^0(x)$ et dans $G^0 + U^0$ par $I(x) + f(x)$. Il en résulte que:

1° *Si dans un domaine angulaire du genre considéré, la fonction $f(z)$ a une majorante $m(r)$ monotone, continue et telle que* $\int_0^{r_0} m(\varrho)\, d\varrho < \infty$, *alors il existe une décomposition $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ correspondant à la décomposition $F = F_1 + F_2$, et telle que $f_1(x)$ est majorée en dehors de G par une fonction du type $M(r)$ et dans G par $M(r) + |f(x)|$. Pour les dérivées $f_1^{(n)}(x)$ on a une majorante $M_n(r)$ (analogue au membre droit de (8)) en dehors de G et $M_n(r) + |f^{(n)}(x)|$ dans G. Pour $f_2(x)$ et ses dérivées il y a des majorantes analogues (si l'on remplace seulement l'intérieur de G par son extérieur et vice versa).*

2° **Théorème d'unicité:** *La décomposition $f = f_1 + f_2$ aux propriétés indiquées sous 1° est unique à une constante additive près ou, plus précisément, si à la décomposition $F = F_1 + F_2$ correspondent deux décompositions $f = f_1 + f_2$ et $f = \varphi_1 + \varphi_2$ telles que f_1 et φ_1 en dehors de G, et f_2 et φ_2 dans G, sont majorées par $M(r)$ alors $\psi = f_1 - \varphi_1 = -(f_2 - \varphi_2) = const.$ identiquement.*[2]

L'énoncé 2° est d'autant plus remarquable que dans le cas général nous ne savons pas distinguer une décomposition (qu'on pourrait appeller »principale») parmi toutes les décompositions possibles, celles-ci différant mutuellement par des fonctions aux singularités comprises dans $F_1 \cdot F_2 (= (a)$, dans notre cas) et d'ailleurs à peu près quelconques.

[1] Cette dernière relation provient du fait que $G^0 \subset G$ par hypothèse et que chaque composant de U^0 contient des points de L^0 intérieurs à G donc, s'il contenait encore de points en dehors de G, il devrait sûrement traverser L ce qui est impossible.

[2] Car, d'une part, ψ n'aurait que le seul point singulier a. D'autre part, $|\psi(x)| = |f_1(x) - \varphi_1(x)| < 2M(r)$ pour x à l'extérieur de G, et $|\psi(x)| = |f_2(x) - \varphi_2(x)| < 2M(r)$ pour x dans G, donc $|\psi(x)| < 2M(r)$ pour $x \neq a$. Mais d'après (4) et (7) on trouve facilement que $M(r) \cdot r$ tend vers 0 avec r, par conséquent $|x - a|\,|\psi(x)|$ tend vers 0 quand x s'approche de a d'une manière quelconque et a ne peut pas être un point singulier isolé de $\psi(x)$. Celle-ci n'ayant pas d'autres singularités, se réduit à une constante.

Cas particuliers.

Voyons maintenant quelle est la relation entre $m(r)$ et $M(r)$, quand $m(r) = Cr^{\alpha}\left(\log \frac{1}{r}\right)^{\beta}$, $C = \text{const.}$, $\alpha > -1$ ou $\alpha = -1$ et $\beta < -1$.

Par des calculs simples on obtient:

$$M(r) \sim m(r)^1 \text{ pour } -1 < \alpha < 0,$$

$$M(r) \sim m(r) \log \frac{1}{r} \text{ pour } \alpha = -1 \text{ ou } \alpha = 0 \text{ et } \beta \neq -1,$$

$$M(r) \sim \log \log \frac{1}{r} \text{ pour } \alpha = 0 \ \beta = -1,$$

$$M(r) \sim \text{const. pour } \alpha > 0.$$

Pour montrer que les majorations obtenues sont assez précises, prenons un exemple: $f(z) = \log \frac{z-1}{z}$. Comme ensemble singulier F considérons le segment $[0; 1]$. Pour un point a de ce segment prenons $F_1 = [0; a]$ et $F_2 = [a; 1]$. Autour de a notre fonction est bornée donc $m(r) = \text{const}$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Nous sommes ainsi dans le second cas du tableau ci-dessus, donc $M(r) \sim \log \frac{1}{r}$. En effet on trouve tout de suite la décomposition correspondante

$$\log \frac{z-1}{z} = \log \frac{z-a}{z} + \log \frac{z-1}{z-a}$$

et on voit que la majorante de ces deux fonctions au voisinage de a est effectivement de l'ordre de $\log \frac{1}{r}$. D'autre part nous savons qu'il ne peut y avoir aucune autre décomposition en fonctions de croissance moins rapide.

On peut calculer aussi l'ordre de croissance des majorantes $M_n(r)$ (membre droit de (8)) qui servent à délimiter la croissance de la n-ème dérivée de $f_1(x)$ et $f_2(x)$. On obtient qu'en général $M_n(r) \sim r^{-n} m(r)$, et seulement dans les cas exceptionnels $(\alpha = -1$ ou $\alpha = n)$ $M_n(r)$ atteint un ordre plus élevé équivalent à $r^{-n} m(r) \log \frac{1}{r}$ ou $r^{-n} m(r) \log \frac{1}{r} \log \log \frac{1}{r}$ au plus.

[1] L'équivalence $M(r) \sim m(r)$ veut dire que pour r voisin de 0, $0 < A < \frac{M(r)}{m(r)} < B < \infty$, avec A et B indépendants de r.

Calcul effectif d'une approximation d'une fonction.

Les méthodes développées plus haut vont nous permettre encore de trouver, pour certaines fonctions, des approximations à un ε fini près de ces fonctions, et ceci par des formules effectives.

Soit donc F l'ensemble singulier de $f(z)$ et E un ensemble, pour les points duquel on cherche une approximation $g(z)$ de $f(z)$. Supposons que E est disjoint de F, mais que sa fermeture $\overline{E}$ possède en commun avec F un seul point a. E pourrait être p. ex. un ensemble ouvert compris dans le domaine h. u. de $f(z)$ et tel que $\mathfrak{F}(E) \cdot F = (a)$, ou bien — une somme d'un certain nombre d'arcs ouverts formant un séparateur ouvert correspondant à une décomposition $F = F_1 + F_2$ avec $F_1 \cdot F_2 = (a)$.

Admettons maintenant qu'on peut trouver un séparateur (fermé) S entre E et $F - (a)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° Le séparateur ouvert $L = S - (a)$ est de longueur finie et remplit (2).

2° Il existe un voisinage angulaire U de L disjoint de E.

3° $|f(z)| < r^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $r = |z - a|$, quand z se trouve sur L.

En désignant par H la somme des domaines déterminés par L et renfermant les points de E et, en prenant sur L un sens d'intégration négatif par rapport à H, nous poserons

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - x}\, dz, \text{ pour } x \text{ extérieur à } H. \tag{9}$$

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - x}\, dz, \text{ pour } x \text{ dans } H. \tag{10}$$

Nous avons déjà indiqué plus haut que le lemme du § 2 peut être généralisé aux cas où les arcs de L sont compris dans le domaine h. u. de $f(z)$ sauf leurs extrémités qui appartiennent à F (comme dans notre cas présent). Il faut seulement, dans ces cas, supposer en plus que $f(z)$ est absolument sommable sur L et raisonner comme dans le complément II au théor. **A** (comp. p. 27 et 28). Il en résulte que la fonction $g(x)$ définie par (9) et (10) est holomorphe et uniforme partout en dehors de $H \cdot F + [\mathfrak{F}(H) - L]$.

Mais, dans H il n'y a pas de points de F et, d'autre part, $\mathfrak{F}(H) - L =$

$= S - L = (a)$. On voit donc que $g(x)$ a un seul point singulier a. Sur l'ensemble E situé dans H on a

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)}{z - x} dz = I(x).$$

On peut répéter ici le raisonnement qui a conduit plus haut à la formule (7). On en obtient, d'après nos conditions 2° et 3° (d'après cette dernière on peut prendre $m(r) = r^\alpha$ avec $\alpha > 0$, donc $M(r) = \text{const.}$), que pour x dans E

$$|f(x) - g(x)| = |I(x)| < C = \text{const.}$$

On obtient ici encore plus, notamment que la différence $f(x) - g(x) = -I(x)$ est continue en dehors du voisinage angulaire U de L. Pour ceci on considèrera deux points x_1 et x_2, avec $r_1 = |x_1 - a|$, $r_2 = |x_2 - a|$, $r_1 \leq r_2$. Soit 2θ l'ouverture de U et x_1, x_2 en dehors de U, donc $|x_1 - z| \geq |z - a| \sin\theta$ et $|x_2 - z| \geq |z - a| \sin\theta$ pour tout z sur L.

On calcule d'une manière analogue à celle qui a conduit à (7)

$$|I(x_1) - I(x_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_L \frac{f(z)(x_1 - x_2)}{(z - x_1)(z - x_2)} dz \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2\pi} \int\limits_L \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z - x_1|\,|z - x_2|} <$$

$$< \frac{|x_1 - x_2|}{2\pi} \left[\int\limits_{\frac{r_2}{2}}^{r_0} \frac{\varrho^\alpha ds(\varrho)}{\varrho^2 \sin^2\theta} + \int\limits_0^{\frac{r_2}{2}} \frac{\varrho^\alpha ds(\varrho)}{\varrho \sin\theta \cdot \frac{r_2}{2}} \right] < \frac{2 r_2}{2\pi} [(C_1 + C_2 r_2^{\alpha - 1}) + C_3 r_2^{\alpha-1}], [1]$$

où les $C_\varkappa$ ne dépendent ni de x_1 ni de x_2.

Ceci prouve que $|I(x_1) - I(x_2)|$ tend vers 0 quand x_1 et x_2 convergent, indépendamment l'un de l'autre, vers a.

Par conséquent, $I(x)$ converge vers une seule valeur (que l'on peut désigner par $I(a)$) quand x tend vers a en dehors d'un voisinage angulaire quelconque de L, donc $I(x)$ est continu même sur l'ensemble fermé $\bar{E}$.

Le cas où le point a est à l'infini.

Nos méthodes sont applicables aussi dans le cas où $a = \infty$. Les séparateurs ne seront plus de longueur finie. Dans (1) il faut comprendre $r = |z|$. On définira comme $s(r)$ la longueur de la partie du séparateur L comprise dans le

[1] Pour $\alpha = 1$, on aura $C_2 \log \frac{1}{r_2}$ au lieu de $C_2 r_2^{\alpha-1}$.

cercle de rayon r centré en l'origine (ou n'importe quel autre point fixe). On maintiendra la condition (2). Comme voisinage angulaire de L d'ouverture 2θ on considérera la somme des cercles $|x - z| < |z| \sin \theta$, z parcourant tout le séparateur L. La condition (4) restera sans changements si l'on y intègre de r_0 à ∞ On considérera, comme d'habitude, comme cercles centrés en ∞ les extérieurs des cercles centrés en l'origine. Dans la classe particulière des majorantes $m(r) = r^\alpha (\log r)^\beta$ il faudra poser maintenant $\alpha < -1$, ou $\alpha = -1$ et $\beta < -1$.

La majorante $M(r)$ de $I(x)$ en dehors d'un voisinage angulaire de L, est ici simplement Cr^{-1}. $I(x)$ tend vers 0 quand x s'éloigne indéfiniment en restant en dehors de ce voisinage de L.

La méthode pour trouver l'approximation $g(z)$ effectivement, exposée plus haut, est identique avec celle que nous utilisons à la fin du § 4 de la II^me partie, pour le calcul effectif d'une partie principale de la fonction $f(z)$ correspondant au domaine H déterminé par un séparateur L.

Note II.

Sur les coupures rectilignes rendant uniforme une fonction multiforme.

Nous allons démontrer dans cette note que pour toute fonction multiforme $\varphi(z)$, prolongeable sur tout chemin en dehors d'un ensemble fermé et borné Φ, on peut trouver un système de coupures L_n (en nombre fini ou infini) rendant $\varphi(z)$ uniforme et telles que: 1° L_n est un segment rectiligne $[p_{2n-1}; p_{2n}]$ n'ayant en commun avec Φ que ses extrémités; 2° Deux segments $L_{n'}$ et $L_{n''}$ n'ont en commun qu'au plus un point qui est alors une extrémité commune; 3° Les longueurs des L_n tendent vers 0.

A cet effet, considérons les courbes simples fermées C passant en dehors de Φ et telles que la fonction $\varphi(z)$, prolongée suivant C, n'est pas uniforme. Une telle courbe C détermine deux domaines dans le plan et dans chacun de ces domaines se trouvent nécessairement des points de Φ. Ainsi cette courbe divise Φ en deux parties non-vides, fermées et disjointes.

On formera une classe Γ avec toutes les courbes simples fermées passant en dehors de Φ et divisant Φ en mêmes parties qu'une courbe C fixée. On démontre facilement les faits suivants: 1° Chaque courbe d'une classe Γ est une courbe C (c. à d. que $\varphi(z)$ n'est pas uniforme sur elle); 2° Deux classes Γ

différentes ne renferment aucune courbe commune; 3° Chaque classe Γ renferme (au moins) un polygône simple aux sommets rationnels (c. à d. avec l'abscisse et l'ordonnée rationnelles).

Des propriétés 2° et 3° résulte immédiatement que les classes Γ forment une suite au plus dénombrable. Désignons par Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, les classes successives de cette suite.

Nous définirons les segments L_n par induction. Chacune des courbes de la classe Γ_1 divise l'ensemble Φ en deux parties non vides, les mêmes pour toute courbe de Γ_1. La plus courte distance entre ces deux parties de Φ est certainement atteinte pour au moins une paire de points — un de chacune de ces parties — soit pour les points p_1 et p_2. Le segment $L_1 = [p_1; p_2]$ ne contient évidemment de Φ que les points p_1 et p_2. D'autre part, il coupe toutes les courbes de Γ_1 (de manière que si on le considère comme une coupure, $\varphi(z)$ ne pourra plus être prolongée suivant les courbes de Γ_1).

Supposons maintenant que les segments $L_k = [p_{2k-1}; p_{2k}]$, pour $k \leq n-1$, sont déjà déterminés de manière à n'avoir en commun avec Φ que leurs extrémités.

Pour déterminer le segment L_n considérons les classes Γ_m qui renferment encore des courbes sans points communs avec les $L_k (k \leq n-1)$. S'il n'y en a aucune, on pourra s'arrêter là, et les segments L_k, $k \leq n-1$, formeront déjà des coupures suffisantes pour rendre $\varphi(z)$ uniforme (car elle n'était multiforme que sur les courbes simples fermées appartenant aux Γ_m). Dans le cas contraire prenons en celle qui a le plus petit indice, soit Γ_{m_n}. Chaque courbe de cette classe, sans points communs avec les L_k, divise l'ensemble Φ en deux parties non vides $\Phi = \Phi'_n + \Phi''_n$ (indépendantes de la courbe choisie). Chacune de ces parties renferme les deux extrémités d'un segment L_k, si elle en contient une (car autrement ce segment couperait toutes les courbes de Γ_{m_n}). La plus petite distance entre les deux parties Φ'_n et Φ''_n est atteinte sûrement pour au moins une paire de points — un de Φ'_n et l'autre de Φ''_n, soit pour les points p_{2n-1} et p_{2n}. Le segment $[p_{2n-1}; p_{2n}]$ sera pris comme L_n.

Les segments L_n sont ainsi parfaitement définis par induction. Par construction, ils n'ont de Φ que leurs extrémités. Deux à deux ils n'ont qu'au plus un point en commun, car autrement ils auraient tout un segment commun et un d'eux contiendrait une extrémité de l'autre comme point non-extrème, ce qui est impossible, vu que cette extrémité appartient à Φ.

Démontrons qu'ils n'ont deux à deux en commun qu'une de leurs extrémités au plus.

Supposons que ce n'est pas vrai et soit $L_{n'}$ *le premier segment renfermant des points non-extrèmes des segments précédents* L_k *avec* $k \leq n' - 1$. Il rencontre donc un ou plusieurs segments L_k, $k \leq n' - 1$, en points non-extrèmes. Soient L_{k_1} le premier et L_{k_2} le dernier segment parmi ces L_k dont on rencontre les points non-extrèmes sur $L_{n'} = [p_{2n'-1};\ p_{2n'}]$ en allant de $p_{2n'-1}$ vers $p_{2n'}$ (les segments L_{k_1} et L_{k_2} peuvent d'ailleurs se confondre quand il n'y a qu'un seul L_k du genre considéré) et soient q_1 et q_2 les points de rencontre correspondants. Au moins une des distances $|p_{2n'-1} - q_1|$ et $|p_{2n'} - q_2|$ est $\leq \frac{1}{2} |p_{2n'-1} - p_{2n'}|$. Supposons que c'est la première:

$$|p_{2n'-1} - q_1| \leq \frac{1}{2} |p_{2n'-1} - p_{2n'}|;$$

dans le cas contraire on procèderait d'une manière analogue.

Plaçons nous alors au moment de la définition de $L_{k_1} = [p_{2k_1-1};\ p_{2k_1}]$. Le point $p_{2n'-1}$ se trouve dans une des parties Φ'_{k_1} et Φ''_{k_1} en lesquelles est divisé Φ par les courbes de $\Gamma_{m_{k_1}}$. Nous pouvons toujours supposer que $p_{2n'-1}$ se trouve dans Φ'_{k_1}. Par définition de L_{k_1} on obtient

$$|p_{2n'-1} - p_{2k_1}| \geq |p_{2k_1-1} - p_{2k_1}| = |p_{2k_1-1} - q_1| + |q_1 - p_{2k_1}|,$$

d'où

$$|p_{2k_1-1} - q_1| \leq |p_{2n'-1} - p_{2k_1}| - |q_1 - p_{2k_1}| < |p_{2n'-1} - q_1|$$

l'égalité étant exclue, car $L_{n'}$ et L_{k_1} ne peuvent pas avoir tout un segment en commun.

Le segment $L_{n'}$, par définition, forme la plus courte distance entre les deux parties $\Phi'_{n'}$ et $\Phi''_{n'}$ auxquelles est divisé Φ par les courbes de $\Gamma_{m_{n'}}$. Distinguons deux cas:

1°. Le point p_{2k_1-1} appartient à $\Phi'_{n'}$. On obtient alors

$$|p_{2k_1-1} - p_{2n'}| < |p_{2k_1-1} - q_1| + |q_1 - p_{2n'}| < |p_{2n'-1} - q_1| + |q_1 - p_{2n'}| =$$
$$= |p_{2n'-1} - p_{2n'}|$$

en contradiction avec la définition de $L_{n'} = [p_{2n'-1};\ p_{2n'}]$ comme le plus court segment unissant un point de $\Phi'_{n'}$ avec un point de $\Phi''_{n'}$.

2°. Le point p_{2k_1-1} appartient à $\Phi''_{n'}$. Dans ce cas

$$|p_{2k_1-1} - p_{2n'-1}| < |p_{2k_1-1} - q_1| + |q_1 - p_{2n'-1}| < 2\,|q_1 - p_{2n'-1}| \leq |p_{2n'-1} - p_{2n'}|$$

encore en contradiction avec la définition de $L_{n'}$.

Ces contradictions prouvent que les L_n ne peuvent pas se rencontrer deux à deux en points non-extrèmes.

Remarquons ensuite que par sa construction même le segment $L_n = [p_{2n-1};\, p_{2n}]$ coupe toutes les courbes de la classe Γ_{m_n} (car p_{2n-1} et p_{2n} appartiennent aux différentes parties de Φ déterminées par les courbes de Γ_{m_n}), celle-ci étant la première parmi les classes Γ_m dont les courbes ne sont pas toutes coupées par les L_k précédents. Il en résulte immédiatement que la somme $\sum\limits_1^n L_\varkappa$ coupe toutes les courbes des Γ_k avec $k \leq n$. Par conséquent, $\sum\limits_1^\infty L_\varkappa$ coupe toutes les courbes C appartenant à n'importe quelle classe Γ_k et alors l'ensemble des segments L_n, considérés comme coupures, rend la fonction $\varphi(z)$ uniforme.

Il nous reste encore à prouver que les longueurs des L_n tendent vers o, d'où il résultera que *l'ensemble limite des L_n est compris dans Φ*, donc que *l'ensemble $\Phi + \sum\limits_1^\infty L_n$ est fermé.*

Supposons donc que les longueurs des L_n ne tendent pas vers o. On pourrait alors en choisir une infinité, de longueur $> \alpha > 0$. Parmi ces L_n il y aurait certainement deux, soit $L_{n'}$ et $L_{n''}$, $n' > n''$, de sorte que $|p_{2n'-1} - p_{2n''-1}| < \frac{\alpha}{2}$ et $|p_{2n'} - p_{2n''}| < \frac{\alpha}{2}$.[1] Au moment de la définition de $L_{n'}$, $L_{n''}$ existe déjà et ses deux extrémités appartiennent à la même partie de Φ déterminée par les courbes de $\Gamma_{m_{n'}}$. La même partie de Φ contient une (et seulement une) des extrémités de $L_{n'}$, soit $p_{2n'-1}$. La plus courte distance entre les deux parties de Φ serait donc $\leq |p_{2n'} - p_{2n''}| < \frac{\alpha}{2}$ donc plus petite que la longueur de $L_{n'}$ qui est $> \alpha$, en contradiction avec la définition de $L_{n'}$.

Ainsi la propriété des L_n que leurs longueurs tendent vers o, est aussi démontrée.

[1] Rappelons que l'ensemble Φ est supposé borné.

On peut démontrer encore que l'ensemble $\Phi + \sum_{1}^{\infty} L_n = \Phi_1$, qui est fermé, comme on l'a dit plus haut, détermine dans le plan autant de régions que l'ensemble Φ ou, plus précisément, que deux points a et b séparés par Φ_1 [1], sont toujours séparés également par Φ.

Ceci implique, dans le cas où Φ ne divise pas le plan, que Φ_1 ne le divise pas non plus.

[1] c. à d. situés dans deux régions différentes déterminées par Φ_1 dans le plan.