ASSADOLLAH ALEBOUYEH

Contribution à l'étude de la géométrie différentielle projective des réseaux plans

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__177__1_0>

Série A, 318
N° d'ordre :
342

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(SCIENCES MATHÉMATIQUES)

PAR

Assadollah ALEBOUYEH
Licencié ès sciences mathématiques

1re THÈSE. — Contribution a l'étude de la géométrie différentielle projective des réseaux plans.

2e THÈSE. — Les solutions périodiques des équations différentielles.

29 JANV 1936

Soutenues le février 1936, devant la Commission d'Examen.

MM. E. CARTAN, *Président.*
CHAZY, G. DARMOIS } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen.............. C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraire

H. LE CHATELIER.	Léon BRILLOUIN.	AUGER.
H. LEBESGUE.	GOURSAT.	BLAISE.
A. FERNBACH.	WALLERANT.	DANGEARD.
A. LEDUC.	GUILLET.	JANET.
Émile PICARD.	PECHARD.	LESPIEAU.
Rémy PERRIER.	FREUNDLER.	MARCHIS.
		VESSIOT.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN.......	T	Chimie générale.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.
E. CARTAN.......	T	Géométrie supérieure.
M. MOLLIARD.....	T	Physiologie végétale.
L. LAPICQUE.....	T	Physiologie générale.
A. COTTON.......	T	Recherches physiques.
J. DRACH.........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY...	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.
Léon BERTRAND..	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
P. PORTIER......	T	Physiologie comparée.
E. RABAUD......	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.
Paul MONTEL.. ..	T	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
P. WINTREBERT..	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
O. DUBOSCQ......	T	Biologie maritime.
G. JULIA.........	T	Application de l'analyse à la géométrie.
C. MAUGUIN......	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY..		Pétrographie.
H. BÉNARD.......	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY.......	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD.......	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH...	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT.......		Physique.
E. DARMOIS......		Physique.
A. DEBIERNE.....	T	Radioactivité.
A. DUFOUR.......	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER......		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique (P. C. B.).
M. JAVILLIER.....		Chimie biologique.
L. JOLEAUD.......		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY.....		Zoologie.
F. PICARD........		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB........	T	Géologie.
P. PASCAL.......	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET... ..	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON...	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.......	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH............		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER......		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE......	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN........		Optique appliquée.
P. JOB...........		Chimie générale.
LABROUSTE.......		Physique du Globe.
PRENANT...		Zoologie.
VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN............		Zoologie (P. C. B.)
COMBES..........		Botanique.
GARNIER.........		Calcul différentiel.
PÉRÈS......		Mécanique des fluides.
HACKSPILL.... .		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER...... ..		Physiologie générale.
TOUSSAINT.... ..		Technique Aéronautique.
M. CURIE..... ..		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.......	T	Hautes températures.
CHAZY............	T	Mécanique rationnelle.
GAULT...........		Chimie (P. C. B.).
CROZE.....		Physique.
DUPONT......	T	Théories chimiques.
LANQUINE........		Géologie.
VALIRON....... .		Mathématiques.
BARRABÉ.		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT..........		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN........		Théories physiques.
VAVON...........		Chimie organique.

Secrétaire........................ A. PACAUD.

Secrétaire honoraire............... D. TOMBECK.

A MON MAITRE

E. CARTAN

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DE LA

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

DES

RÉSEAUX PLANS

INTRODUCTION.

Beaucoup de géomètres se sont occupés des réseaux appartenant à un espace quelconque, et ont consacré de nombreux Mémoires et Notes à ce sujet. Mais très peu d'entre eux ont porté leur attention exclusivement sur les réseaux plans. MM. Fubini et Cěch [1] ont, pour la première fois, étudié ce sujet d'une manière assez détaillée. C'est M. Fubini [2] qui a introduit la notion de forme associée à une congruence. On lui doit encore la considération de l'élément linéaire projectif et le théorème fondamental sur la déformation projective des réseaux basé sur cet élément.

Le degré de généralité des réseaux projectivement applicables sur un réseau donné, a été obtenu par M. Cěch [3]. M. Borůvka [4], en étudiant la correspondance entre deux plans, a trouvé les degrés de généralité :

Des couples de réseaux non réglés projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce;

Des couples de réseaux doublement réglés projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce.

Le théorème sur la propriété géométrique des réseaux à invariants égaux est dû à G. Kœnigs [5]. Il a trouvé aussi la condition pour qu'un réseau soit asymptotique.

Nous nous sommes proposé d'étudier, en employant le système de référence mobile, les propriétés infinitésimales projectives des réseaux plans ; et nous avons surtout porté notre attention sur le problème de la déformation projective qui n'avait pas été encore entièrement résolu.

Nous avons consacré le premier chapitre à des généralités sur les réseaux plans. La considération des équations différentielles des deux familles de courbes d'un réseau nous a permis, après la première particularisation du système de référence mobile, de donner une interprétation géométrique simple de l'élément linéaire projectif. La notion de la forme associée à une congruence nous a servi à définir les réseaux à invariants égaux et à aboutir au théorème de G. Kœnigs.

Dans le Chapitre II, nous avons trouvé les invariants fondamentaux d'un réseau plan et ses équations différentielles réduites.

Les cinq derniers chapitres ont été consacrés à l'étude de la déformation projective des réseaux.

Ainsi, dans le Chapitre III, nous avons établi, en considérant avec M. Borůvka les caractéristiques d'une correspondance entre deux réseaux, les conditions d'applicabilité projective. De plus, nous avons donné une propriété intéressante des courbes de la déformation projective.

Dans le Chapitre IV, nous avons retrouvé le résultat obtenu par M. Čech sur la déformation projective des réseaux non réglés et nous l'avons complété en donnant le degré de généralité des réseaux projectivement applicables sur un réseau non réglé donné par une correspondance de la deuxième espèce. Le Mémoire de notre maître M. E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces* [7], nous a guidés dans la résolution du problème suivant :

Étant donnés deux réseaux non réglés, reconnaître s'ils sont projectivement applicables et, dans l'affirmative, trouver la correspondance qui réalise l'application. Nous avons obtenu aussi le degré de généralité des réseaux non réglés admettant un groupe à deux paramètres de déformations projectives.

Le même Mémoire nous a servi, dans le Chapitre V pour résoudre les problèmes posés sur les formes différentielles invariantes $\omega_1\omega_2$, $\omega_1^3+\omega_2^3$.

Les résultats du Chapitre VI sur la déformation projective des réseaux réglés sont, à part ceux de MM. Čech et Borůvka précédemment mentionnés, entièrement nouveaux.

Enfin, dans le dernier chapitre nous avons résolu le problème de la déformation projective des réseaux à invariants égaux, en le ramenant à celui des surfaces non développables.

Qu'il me soit permis, pour terminer, d'exprimer ici à mon Maître, M. E. Cartan, ma profonde gratitude pour les conseils précieux qu'il m'a prodigués.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉSEAUX PLANS. RÉSEAUX A INVARIANTS ÉGAUX.

1. Les équations de structure du groupe projectif [6]. — Considérons dans un plan, un système fixe de coordonnées projectives. Nous désignerons par une lettre majuscule telle que A le point analytique défini par l'ensemble de trois coordonnées; les symboles A et ρA, où ρ est un coefficient numérique, définiront deux points analytiques distincts, correspondant à un même point géométrique. Nous parlerons, pour abréger, du point A, entendant par là le point analytique représenté par la lettre A.

Cela posé, considérons un système mobile formé de trois points

$$A, \quad A_1, \quad A_2,$$

assujettis à la seule condition que le déterminant de leurs $(3)^2 = 9$ coordonnées soit égal à 1

$$[A A_1 A_2] = 1. \tag{1}$$

Un tel système peut être regardé comme un système de référence mobile, en ce sens que tout point M peut, d'une manière et d'une seule, être mis sous la forme

$$M = x_0 A + x_1 A_1 + x_2 A_2;$$

les nombres x_0, x_1, x_2 sont les coordonnées du point M et elles sont proportionnelles aux coordonnées du point ρM qui occupe la même position dans le plan. Le système mobile considéré dépend de $(3)^2 - 1 = 8$ paramètres, et, quand on donne à ces paramètres des accroissements infiniment petits, on a des formules de la forme

$$\left\{\begin{aligned} dA &= \omega_{00} A + \omega_{01} A_1 + \omega_{02} A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2, \\ dA_2 &= \omega_{20} A + \omega_{21} A_1 + \omega_{22} A_2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où les ω_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des huits paramètres et sont liées par la relation identique

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0 \tag{3}$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (1).

Exprimons que les covariants bilinéaires [8] des seconds membres des équations (2) sont nuls, nous obtenons les *équations de structure du groupe projectif*

$$\omega'_{ij} = \sum_{k=0}^{2} [\omega_{ik}\omega_{kj}] \qquad (i, j = 0, 1, 2). \tag{4}$$

Occasionnellement, il y a lieu de considérer, outre le repère ponctuel A, A_1, A_2, le repère *adjoint* a, a_1, a_2 formé des droites :

$$a = [A_1 A_2], \qquad a_1 = -[A A_2], \qquad a_2 = [A A_1], \tag{5}$$

on obtient alors le *système adjoint* à (2)

$$\left\{\begin{aligned} da &= -\omega_{00} a - \omega_{10} a_1 - \omega_{20} a_2, \\ da_1 &= -\omega_{01} a - \omega_{11} a_1 - \omega_{21} a_2, \\ da_2 &= -\omega_{02} a - \omega_{12} a_1 - \omega_{22} a_2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

2. Définitions. — Supposons que l'on ait, dans un plan ϖ, deux familles de courbes telles que, au moins dans une région de ce plan, par chaque point passe une courbe de chaque famille. On dit alors que ces deux familles de courbes forment un *réseau plan*. Analytiquement, on obtient un réseau plan en exprimant un point mobile M du plan ϖ (les coordonnées homogènes qu'il définit) en fonction de deux paramètres t_1, t_2; les deux familles de courbes du réseau s'obtiennent en ne faisant varier qu'un des deux paramètres t_1. t_2. Toutefois, pour avoir un véritable réseau, il faut que le déterminant $\left[M \frac{\partial M}{\partial t_1} \frac{\partial M}{\partial t_2}\right]$ ne soit pas identiquement nul, car autrement le point $M(t_1, t_2)$ ne décrirait qu'une courbe ou bien serait fixe. Nous représenterons un réseau plan par la lettre qui désigne son point générateur.

La figure corrélative d'un réseau plan est appelée *congruence plane*. On obtient une congruence plane en exprimant une droite mobile m du plan ϖ (les coordonnées homogènes qu'elle définit) en fonction de t_1, t_2; les courbes de la congruence sont enveloppées par la droite $m(t_1, t_2)$ lorqu'on fait varier un seul des paramètres t_1, t_2. La congruence serait dégénérée si $\left[m \frac{\partial m}{\partial t_1} \frac{\partial m}{\partial t_2}\right] = 0$. Nous représenterons une congruence par la lettre qui désigne sa droite génératrice. Les congruences

$$a_1(t_1, t_2) = -\left[M\frac{\partial M}{\partial t_2}\right], \qquad a_2 = \left[M\frac{\partial M}{\partial t_1}\right]$$

sont liées au réseau $M(t_1 . t_2)$ d'une manière intrinsèque. Les droites a_1, par exemple, sont les tangentesaux courbes $t_1 =$ const. du réseau $M(t_1, t_2)$; ces courbes forment donc une famille de courbes de la congruence a_1.

3. **Le système de référence mobile attaché à un réseau plan.** — Considérons maintenant un réseau plan et faisons correspondre à chaque point M de ce réseau un système de référence mobile dont le premier point A coïncide en position avec M. Ce système de référence mobile dépend, outre des paramètres *essentiels* t_1, t_2 qui définissent la position d'un point du réseau, de six autres paramètres *inessentiels* $u_1, u_2, \ldots, u_6$. Nous allons *normaliser* le système de référence mobile attaché au réseau A, c'est-à-dire, définir d'une manière *intrinsèque* et *invariante* les paramètres inessentiels en fonction de ceux essentiels, de façon à arriver à un *repère normal* ne dépendant que de deux paramètres t_1, t_2. Que le procédé qui suit soit *intrinsèque*, c'est évident, car nous n'emploierons jamais explicitement les paramètres t_1, t_2; qu'il soit *invariant* (par rapport au groupe projectif) cela résulte de ce que nous emploierons seulement les expressions ω_{ij} qui ne changent pas si l'on soumet les point A, A_1, A_2 à une substitution linéaire à coefficients constants.

Remarquons que, si l'on donne aux paramètres des accroissements infiniment petits annulant ω_{01}, ω_{02}, on obtient

$$dA = \omega_{00} A,$$

ce qui prouve que la position du point A ne change pas, autrement dit que les paramètres essentiels t_1, t_2 ne varient pas. *Les expressions de Pfaff* [13] ω_{01}, ω_{02} *sont donc deux expressions linéairement indépendantes par rapport aux différentielles de deux paramètres essentiels.*

Une particularisation du repère ne pouvant introduire aucune relation entre t_1 et t_2, les expressions ω_{01}, ω_{02} resteront indépendantes après la particularisation. Au contraire, après la normalisation, il ne reste que les deux expressions indépendantes ω_{01}, ω_{02} et toutes les autres formes ω_{ij} seront linéairement dépendantes de ω_{01}, ω_{02}.

On voit que les expressions ω_{01}. ω_{02} jouent un rôle distingué. Nous écrirons dorénavant, pour plus de commodité, ω_1, ω_2 au lieu de ω_{01}, ω_{02}.

Si on laisse t_1 et t_2 fixes et que l'on fasse varier les u, on change le système de référence attaché au point donné (t_1, t_2) du réseau. Nous désignerons par δ un symbole de différentiation obtenue en laissant t_1, t_2 fixes et en faisant varier les paramètres inessentiels u; le symbole d se rapporte à une variation quelconque de tous les paramètres. Nous désignerons, pour abréger, par e_{ij} ce qui devient ω_{ij} quand on emploie le symbole δ de différentiation, en gardant la notation ω_{ij} pour le symbole d. Nous avons manifestement

$$e_{00} + e_{11} + e_{22} = e_1 = e_2 = 0.$$

Nous particulariserons le système de référence, en prenant les points A_1, A_2 sur les tangentes en A aux courbes du réseau. Ce choix se traduit par les relations

$$e_{12} = e_{21} = 0,$$

d'où

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_{12} &= h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2, \\ \omega_{21} &= k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2. \end{aligned} \right.$$

Le système de référence mobile ne dépendra alors que de quatre paramètres inessentiels; nous les désignerons par $u_1, \ldots, u_4$.

4. Les deux suites des formes différentielles associées à un réseau plan [12]. — Prenons à chaque point A du réseau, un système de référence mobile ayant A comme origine et les tangentes $[AA_1]$, $[AA_2]$ aux courbes du réseau en ce point, comme axes des x et des y. Les équations différentielles des deux familles de courbes, supposées analytiques, du réseau par rapport à ce système peuvent être mises sous les formes

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} y' &= \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) + \ldots, \\ x' &= \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \ldots + \psi_p(x, y) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

φ_p, ψ_p étant des polynomes entiers et homogènes du degré p.

La substitution aux coordonnées x, y des expressions de Pfaff ω_1, ω_2 qui représentent les valeurs de ces coordonnées pour un point infiniment voisin de A, conduit aux suites des formes différentielles

$$\begin{array}{lllll} \varphi_1(\omega_1, \omega_2), & \varphi_2(\omega_1, \omega_2), & \ldots, & \varphi_p(\omega_1, \omega_2), & \ldots, \\ \psi_1(\omega_1, \omega_2), & \psi_2(\omega_1, \omega_2), & \ldots, & \psi_p(\omega_1, \omega_2), & \ldots. \end{array}$$

A chaque choix du système de référence mobile, sont donc associées deux suites des formes différentielles bien déterminées.

Pour avoir la loi de formation de ces suites, considérons un point fixe P et les tangentes aux courbes du réseau en ce point. Les coordonnées x, y de P et les coefficients angulaires y', x' des tangentes aux courbes du réseau passant par ce point, sont des fonctions de t_1, t_2; $u_1, \ldots, u_4$, satisfaisant à certaines équations de Pfaff faciles à former. Il suffit d'exprimer que le point

$$P = A + x A_1 + y A_2$$

et les droites

$$[PP'_x] = (y'x - y)a - y'a_1 + a_2,$$
$$[PP'_y] = (x - x'y)a - a_1 + x'a_2$$

sont fixes, ce qui donne

$$(9)\quad \begin{cases} dx + \omega_1 + x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21} - x(x\omega_{10} + y\omega_{20}) = 0, \\ dy + \omega_2 + x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00}) - y(x\omega_{10} + y\omega_{20}) = 0; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} dy' + \omega_{12} - y\omega_{10} + y'[(\omega_{22} - \omega_{11}) + x\omega_{10} - y\omega_{20} + y'(x\omega_{20} - \omega_{21})] = 0, \\ dx' + \omega_{21} - x\omega_{20} + x'[(\omega_{11} - \omega_{22}) + y\omega_{20} - x\omega_{10} + x'(y\omega_{10} - \omega_{12})] = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées $x.y$ et les coefficients angulaires y', x' satisfont d'autre part, quels que soient t_1, t_2; $u_1, \ldots, u_4$, à la relation (8). On en déduit par différentiation et utilisation des formules (9) et (10)

$$(11)\quad \begin{cases} \left(\sum \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)[\omega_1 + x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21} - x(x\omega_{10} + y\omega_{20})] \\ \quad + \left(\sum \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)[\omega_2 + x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00}) - y(x\omega_{10} + y\omega_{20})] \\ \quad = \omega_{12} - y\omega_{10} + (\Sigma\varphi_i) \\ \qquad \times [(\omega_{22} - \omega_{11}) + x\omega_{10} - y\omega_{20} + (\Sigma\varphi_i)(x\omega_{20} - \omega_{21})] + \Sigma(d\varphi_i), \\ \left(\sum \dfrac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)[\omega_1 + x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21} - x(x\omega_{10} + y\omega_{20})] \\ \quad + \left(\sum \dfrac{\partial\psi_i}{\partial y}\right)[\omega_2 + x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00}) - y(x\omega_{10} + y\omega_{20})] \\ \quad = \omega_{21} - x\omega_{20} + (\Sigma\psi_i) \\ \qquad \times [(\omega_{11} - \omega_{22}) + y\omega_{20} - x\omega_{10} + (\Sigma\psi_i)(y\omega_{10} - \omega_{12})] + \Sigma(d\psi_i). \end{cases}$$

$(d\varphi_i)$, $(d\psi_i)$ étant des termes provenant de la différentiation des coefficients des formes φ_i, ψ_i. Les relations (11) doivent avoir lieu quels que soient $t_1, \ldots, u_4$, mais aussi quel que soit le point fixe P du réseau. Ce sont donc des identités en x, y et $t_1, \ldots, u_4$. Nous pouvons donc égaler les termes des différents degrés en x, y dans les deux membres des identités (11). Nous trouvons alors, en posant

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{d\varphi_k} = (d\varphi_k) - \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x}[x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21}] - \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y}[x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00})], \\ \overline{d\psi_k} = (d\psi_k) - \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x}[x(\omega_{11} - \omega_{00}) + y\omega_{21}] - \dfrac{\partial\psi_k}{\partial y}[x\omega_{12} + y(\omega_{22} - \omega_{00})], \end{cases}$$

les identités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,\omega_2=\omega_{12},\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\,\omega_2=\overline{d\varphi_1}+\varphi_1(\omega_{22}-\omega_{11})-y\,\omega_{10},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial\varphi_{p+1}}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\varphi_{p+1}}{\partial y}\,\omega_2=\overline{d\varphi_p}+\varphi_p(\omega_{22}-\omega_{11})+\varphi_{p-1}[px\,\omega_{10}+(p-2)y\,\omega_{20}]\\
&\qquad\qquad-\omega_{21}\Sigma\,\varphi_s\varphi_{p-s}+x\,\omega_{20}\Sigma\,\varphi_s\varphi_{p-s-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\omega_2=\omega_{21},\\
&\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\,\omega_2=\overline{d\psi_1}+\psi_1(\omega_{11}-\omega_{22})-x\,\omega_{20},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial\psi_{p+1}}{\partial x}\,\omega_1+\frac{\partial\psi_{p+1}}{\partial y}\,\omega_2=\overline{d\psi_p}+\psi_p(\omega_{11}-\omega_{22})+\psi_{p-1}[(p-2)x\,\omega_{10}+py\,\omega_{20}]\\
&\qquad\qquad-\omega_{12}\Sigma\,\psi_s\psi_{p-s}+y\,\omega_{10}\Sigma\,\psi_s\psi_{p-s-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent d'elles-mêmes comment se modifient les φ_p, ψ_p par un changement infiniment petit du système de référence mobile. Elles fournissent donc tous les éléments nécessaires pour le calcul de ces formes et de leur normalisation.

Nous avons, d'après (13),

$$(14)\qquad \varphi_1=h_1x+h_2y,\qquad \psi_1=k_1x+k_2y.$$

5. Première particularisation du système de référence mobile. — Les relations (7) conduisent, en utilisant les formules (4), aux équations quadratiques extérieures

$$[(dh_1-3h_1\omega_{11}-h_2\omega_{12})\omega_1]+[(dh_2-h_2\overline{\omega_{11}-\omega_{00}}-h_1\omega_{21}-\omega_{10})\omega_2]=0,$$
$$[(dk_1-k_1\overline{\omega_{22}-\omega_{00}}-k_2\omega_{12}-\omega_{20})\omega_1]+[(dk_2-3k_2\omega_{22}-k_1\omega_{21})\omega_2]=0;$$

on en déduit

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\delta h_1=3e_{11}h_1, && \delta h_2=(e_{11}-e_{00})h_2+e_{10},\\
&\delta k_1=(e_{22}-e_{00})k_1+e_{20}, && \delta k_2=3e_{22}k_2;
\end{aligned}\right.$$

et des formules

$$\omega'_1=[\omega_1(\omega_{11}-\omega_{00})]+[\omega_2\omega_{21}],$$
$$\omega'_2=[\omega_1\omega_{12}]+[\omega_2(\omega_{22}-\omega_{00})]$$

on obtient

$$\delta\omega_1 = (e_{00} - e_{11})\omega_1, \qquad \delta\omega_2 = (e_{00} - e_{22})\omega_2.$$

On voit alors facilement que les équations

$$h_1\omega_1^3 + k_2\omega_2^3 = 0, \qquad h_1\omega_1^3 - k_2\omega_2^3 = 0$$

sont *invariantes*; elles définissent respectivement les courbes de Darboux et les courbes de Segre du réseau. De même, on peut constater que l'expression $\frac{h_1\omega_1^3 + k_2\omega_2^3}{\omega_1\omega_2}$ est un invariant *absolu*; nous l'appellerons, avec M. Fubini [1], *l'élément linéaire projectif du réseau.*

Les coefficients h_2 et k_1 subissent chacun, d'apres (15), quand on modifie le systeme de référence mobile, une substitution linéaire entière arbitraire; on peut donc les supposer nuls tous deux. On aura alors

$$\omega_{12} = h_1\omega_1, \qquad \omega_{21} = k_2\omega_2; \tag{16}$$

ces équations entraînent

$$\omega_{10} = 3\beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \qquad \omega_{20} = \lambda\omega_1 + 3\mu\omega_2, \tag{17}$$
$$e_{10} = e_{20} = 0,$$

d'où

$$\delta A_1 = e_{11}A_1, \qquad \delta A_2 = e_{22}A_2,$$

ce qui prouve que les positions des points A_1, A_2 ne changent pas quand on fait varier les parametres inessentiels. Les positions des points A_1, A_2 ne dépendent donc que de celle du point A. Or, on a

$$[A_2\, dA_2] = -k_2\omega_2[A_1A_2] - \omega_{20}[AA_2],$$

ce qui montre que, si l'on se déplace sur les courbes $\omega_2 = 0$ du réseau A, les courbes décrites par le point A_2 sont enveloppées par les droites $a_1 = -[AA_2]$; ces courbes constituent par conséquent la seconde famille de courbes de la congruence a_1, la première étant formée des courbes $\omega_1 = 0$ du réseau A.

Le point (réseau) A_2 est donc le second foyer (réseau focal) de la droite (congruence) $a_1 = -[AA_2]$ le premier étant le point (réseau) A.

Les points (réseaux) A_1, A sont évidemment liés de la même maniere à la droite (congruence) $a_2 = [AA_1]$. Les points (réseaux) A_1, A_2 sont dits les *transformés de Laplace* du point (réseau) A; et la droite (congruence) $a = [A_1A_2]$ est appelée la *droite* (congruence) *de Laplace* relative au même point (réseau).

Ainsi, au réseau A sont associés, d'une manière intrinsèque, les réseaux A_1. A_2 et les congruences

$$a = [A_1 A_2], \qquad a_1 = -[AA_2], \qquad a_2 = [AA_1].$$

Les points A_1 et A_2 étant les transformés de Laplace du point A nous appellerons A, A_1, A_2. le système de référence *semi-normal*; il dépend de deux paramètres inessentiels que nous pouvons désigner par u_1, u_2. Pour chaque valeur (t_1, t_2) il y a ∞^2 systèmes de référence semi-normaux; ils sont caractérisés par les équations (16).

6. **Interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif.** — Les équations différentielles des deux familles de courbes du réseau A, par rapport à un système de référence semi-normal A, A_1, A_2, sont :

$$(18) \qquad \begin{cases} y' = h_1 x + \varphi_2 + \ldots, \\ x' = k_2 y + \psi_2 + \ldots. \end{cases}$$

Soit

$$P = A + x A_1 + y A_2$$

un point infiniment voisin de A; les droites

$$[PP'_x] = (y'x - y)[A_1 A_2] + y'[AA_2] + [AA_1],$$
$$[PP'_y] = (x - x'y)[A_1 A_2] + [AA_2] + x'[AA_1],$$

tangentes aux courbes du réseau en ce point, coupent la droite $[AA_1]$ aux points

$$N_1 = y'A + (y'x - y)A_1, \qquad M_1 = A + (x - x'y)A_1,$$

et la droite $[AA_2]$ aux points

$$M_2 = A + (y - y'x)A_2, \qquad N_2 = x'A + (x'y - x)A_2,$$

d'où

$$(A, A_1, M_1, N_1) = \frac{x - x'y}{x - \dfrac{y}{y'}}.$$

En tenant compte de (17) et en supposant que P ne soit pas situé sur les axes $[AA_1]$, $[AA_2]$ de coordonnées, on obtient :

la partie principale de $\qquad (A, A_1, M_1, N_1) = -\dfrac{h_1 x^2}{y}$;

de même :

la partie principale de $\qquad (A, A_2, M_2, N_2) = -\dfrac{k_2 y^2}{x}$;

par conséquent :

la partie principale de

$$-[(A, A_1, M_1, N_1) + (A, A_2, M_2, N_2)] = \frac{h_1 x^3 + k_1 y^3}{xy} = \frac{h_1 \omega_1^3 + k_2 \omega_2^3}{\omega_1 \omega_2}.$$

7. **Réseaux à invariants égaux** [5]. — Si l'on forme les covariants bilinéaires des équations (17), on obtient des équations quadratiques extérieures qui donnent

$$\delta\gamma = -3e_{00}\gamma, \qquad \delta\lambda = -3e_{00}\lambda;$$

de même, des formules

$$\omega'_1 = [\omega_1(\omega_{11} - \omega_{00})], \qquad \omega'_2 = [\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})]$$

on déduit

$$\delta\omega_1 = (e_{00} - e_{11})\omega_1, \qquad \delta\omega_2 = (e_{00} - e_{22})\omega_2.$$

On voit alors que les formes différentielles

$$F = \gamma\omega_1\omega_2, \qquad G = \lambda\omega_1\omega_2 \tag{19}$$

sont *invariantes*. La signification géométrique de ces formes est simple. Considérons, en effet, sur la courbe $\omega_2 = 0$ du réseau A, le point A′ infiniment voisin de A; et sur la courbe $\omega_1 = 0$ du réseau A_1, le point A'_1 infiniment voisin de A_1. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, nous avons

$$A' = (1 + \omega_{00})A + \omega_1 A_1,$$
$$A'_1 = \gamma\omega_2 A + (1 + \omega_{11})A_1,$$

d'où

$$(A, A_1, A', A'_1) = \gamma\omega_1\omega_2.$$

C'est la signification géométrique cherchée de cette forme que nous appellerons *la force associée à la congruence* $a_2 = [AA_1]$. En échangeant ω_1 et ω_2 nous arrivons à la *forme* $G = \lambda\omega_1\omega_2$ *associée à la congruence* $a_1 = -[AA_2]$ [2].

On dit qu'un réseau est à *invariants égaux* quand les formes différentielles correspondantes F et G sont égales, c'est-à-dire quand

$$\gamma = \lambda \tag{20}$$

ou, ce qui revient au même, quand

$$\omega'_{00} = 0. \tag{21}$$

Les réseaux à invariants égaux possèdent une propriété géométrique particulière. Soit, en effet,

$$x_0^2 - \rho x_1 x_2 = 0 \tag{22}$$

une conique tangente en A_1 à $[AA_1]$ et en A_2 à $[AA_2]$; elle est tangente en A_1 à la courbe $\omega_1 = 0$ du réseau A_1, et en A_2 à la courbe $\omega_2 = 0$ du réseau A_2.

On peut évidemment déterminer ρ de manière que la conique ait un contact du second ordre avec l'une ou l'autre de ces courbes. On obtient ainsi deux coniques C_1, C_2 attachées, d'une manière intrinsèque et invariante au réseau A.

Considérons sur la courbe $\omega_1 = 0$ du réseau A_1 le point A'_1 voisin de A_1 et sur la courbe $\omega_2 = 0$ du réseau A_2 le point A'_2 voisin de A_2

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A + \ldots \\ &= [\gamma\omega_2 + (2)]A + [1 + (1)]A_1 + \left[\frac{1}{2}\gamma\omega_2^2 + (3)\right]A_2, \\ A'_2 &= [\lambda\omega_1 + (2)]A + \left[\frac{1}{2}\lambda\omega_1^2 + (3)\right]A_1 + [1 + (1)]A_2, \end{aligned}$$

où (n) est un infiniment petit au moins du $n^{\text{ième}}$ ordre. Nous avons donc :

pour A'_1 : $x_0 = \gamma\omega_2 + (2)$, $\quad x_1 = 1 + (1)$, $\quad x_2 = \frac{1}{2}\gamma\omega_2^2 + (3)$;

pour A'_2 : $x_0 = \lambda\omega_1 + (2)$, $\quad x_1 = \frac{1}{2}\lambda\omega_1^2 + (3)$, $\quad x_2 = 1 + (1)$.

Introduisons ces valeurs dans $x_0^2 - \rho x_1 x_2$, nous obtenons :

pour A'_1 : $$x_0^2 - \rho x_1 x_2 = \frac{1}{2}\gamma(2\gamma - \rho)\omega_2^2 + (3),$$

pour A'_2 : $$x_0^2 - \rho x_1 x_2 = \frac{1}{2}\lambda(2\lambda - \rho)\omega_1^2 + (3).$$

On aura donc la conique C_1 ayant un contact du second ordre avec la courbe $\omega_1 = 0$ du réseau A_1 en prenant $\rho = 2\gamma$

C_1 : $$x_0^2 - 2\gamma x_1 x_2 = 0,$$

et la conique C_2 ayant un contact du second ordre avec la courbe $\omega_2 = 0$ du réseau A_2 en prenant $\rho = 2\lambda$

C_2 : $$x_0^2 - 2\lambda x_1 x_2 = 0.$$

Nous avons ainsi les deux coniques attachées au réseau A. Il est évident qu'elles ne sont confondues que dans le cas où $\gamma = \lambda$. Nous avons supposé implicitement $\gamma\lambda \neq 0$. Nous avons démontré complètement le théorème suivant :

Théorème de Koenigs. — *Si le réseau* A *est à invariants égaux*, $\gamma = \lambda \neq 0$, *et seulement dans ce cas, il existe une conique ayant en* A_1 *un contact du second ordre avec la courbe* $\omega_1 = 0$ *du réseau* A_1, *et en* A_2 *un contact du second ordre avec la courbe* $\omega_2 = 0$ *du réseau* A_2.

8. Classification des réseaux plans. — Formons les covariants bilinéaires des équations (16), nous obtenons

$$[(dh_1 - 3h_1\omega_{11})\omega_1] - [\omega_{10}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{20}\omega_1] - [(dk_2 - 3k_2\omega_{22})\omega_2] = 0,$$

d'ou

$$(23) \qquad \delta h_1 = 3e_{11}h_1, \qquad \delta k_2 = 3e_{22}k_2.$$

Chacune des équations $h_1 = 0$, $k_2 = 0$ a donc une signification *invariante*. Or, la relation

$$\omega_{12} = 0$$

entraîne

$$dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1,$$

ce qui montre que, si l'on se déplace sur la courbe $\omega_2 = 0$, la droite $[AA_1]$ reste fixe. Cette relation caractérise donc la propriété des courbes $\omega_2 = 0$ du réseau d'être rectilignes. Il y a par suite trois cas à distinguer :

I. Aucun des coefficients h_1, k_2 n'est nul. Le réseau pour lequel ce cas se présente est *non réglé*; il sera désigné par la même lettre que son point générateur.

II. L'un seul des coefficients h_1, k_2 est nul; nous pouvons toujours supposer que c'est h_1. Les courbes $\omega_2 = 0$ du réseau sont alors des droites. Un tel réseau est *simplement réglé*; il sera désigné par la lettre qui représente son point générateur avec l'indice supérieur 1. Pour ce réseau, l'élément linéaire projectif est $\frac{k_2\omega_2^3}{\omega_1}$ et les courbes de Darboux ainsi que celles de Segre coïncident avec les droites $\omega_2 = 0$.

III. Les deux coefficients h_1, k_2 sont nuls. Les courbes $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ du réseau sont alors des droites. Un tel réseau est *doublement réglé*; il sera désigné par la lettre qui représente son point générateur avec l'indice supérieur 2. Pour ce réseau, l'élément linéaire projectif est identiquement nul et les courbes de Darboux ainsi que celles de Segre sont indéterminées.

CHAPITRE II.

LES INVARIANTS FONDAMENTAUX D'UN RÉSEAU PLAN.

I. — RÉSEAUX NON RÉGLÉS

9. Les systèmes de référence normaux; les équations différentielles réduites. — Le réseau étant non réglé, les formules (23) montrent qu'on peut supposer

$$h_1 = k_2 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \tag{24}$$

et l'on a

$$e_{11} = e_{22} = 0.$$

Nous voyons que toutes les expressions e_{ij} sont égales à zéro. Il n'y a plus de paramètres inessentiels; pour chaque valeur (t_1, t_2) le système de référence A, A_1, A_2 est parfaitement déterminé; nous l'appellerons le *système de référence normal*. Il est caractérisé par les équations (24). Or, les systèmes de référence

$$A, \quad \varepsilon A_1, \quad \varepsilon^2 A_2 \tag{25$_1$}$$

et

$$A, \quad \varepsilon A_2, \quad \varepsilon^2 A_1, \tag{25$_2$}$$

où ε désigne une racine cubique de l'unité, et ces systèmes seulement, conservent les équations (24). *Le nombre de tous les systèmes de référence normaux est donc six; il n'y en a que deux au point de vue réel.*

Les équations différentielles des deux familles de courbes du réseau prennent, par rapport à un système de référence normal, les formes

$$\left\{\begin{aligned} y' &= x + \dots, \\ x' &= y + \dots, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 1.

On voit que la normalisation de φ_1, ψ_1 entraîne celle de φ_p, ψ_p $(p = 2, 3, \dots)$ de sorte que φ_1, ψ_1 caractérisent complètement un réseau A.

Il est évident que seulement le changement de coordonnées x, y respectivement par

$$\varepsilon^2 x, \quad \varepsilon y$$

ou par

$$\varepsilon^2 y, \quad \varepsilon x,$$

c'est-à-dire seulement la substitution au système de référence normal A, A_1, A_2 du système de référence $(25)_1$ ou du système de référence $(25)_2$, conserve les équations différentielles (26). Nous les appellerons les *équations différentielles réduites du réseau* A. Les équations (24) conduisent aux équations quadratiques extérieures

$$3[\omega_{11}\omega_1] + [\omega_{10}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{20}\omega_1] + 3[\omega_{22}\omega_2] = 0;$$

on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} \omega_{11} &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \omega_{10} &= 3\beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \\ \omega_{20} &= \lambda\omega_1 + 3\mu\omega_2, & \omega_{22} &= \mu\omega_1 + \nu\omega_2, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

d'où, d'après (13),

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{2}(3\alpha x^2 + 6\beta xy + \overline{1+\gamma}\, y^2), \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2}(\overline{1+\lambda}\, x^2 + 6\mu xy + 3\nu y^2). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Les deux expressions de Pfaff ω_1, ω_2 et les quantités α, β, γ, λ, μ, ν sont les *invariants fondamentaux* du réseau A. On a du reste

$$\omega'_1 = (2\beta + \nu)[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = -(\alpha + 2\mu)[\omega_1\omega_2]. \tag{29}$$

Pour les systèmes de référence normaux $(25)_1$ les expressions analogues à

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

sont

$$\varepsilon^2\omega_1, \quad \varepsilon\omega_2, \quad \varepsilon\alpha, \quad \varepsilon^2\beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \varepsilon\mu, \quad \varepsilon^2\nu;$$

pour les systèmes de référence normaux $(25)_2$, elles sont

$$\varepsilon^2\omega_2, \quad \varepsilon\omega_1, \quad \varepsilon\nu, \quad \varepsilon^2\mu, \quad \lambda, \quad \gamma, \quad \varepsilon\beta, \quad \varepsilon^2\alpha.$$

Nous voyons que les expressions

$$\omega_1\omega_2,\quad \omega_1^3+\omega_2^3,\quad \alpha\nu,\quad \alpha^3+\nu^3,\quad \beta\mu,\quad \beta^3+\mu^3,\quad \gamma\lambda,\quad \gamma+\lambda$$

sont déterminées sans ambiguïté par le réseau A : ce sont les *invariants fondamentaux rationnels* de ce réseau.

Pour le réseau A, l'élément linéaire projectif est alors le rapport $\dfrac{\omega_1^3+\omega_2^3}{\omega_1\omega_2}$ des invariants fondamentaux rationnels $\omega_1\omega_2$, $\omega_1^3+\omega_2^3$. Les courbes de Darboux et les courbes de Segre sont données respectivement par les équations

$$\omega_1^3+\omega_2^3=0, \qquad \omega_1^3-\omega_2^3=0.$$

Si l'on connaît les invariants fondamentaux, on obtient, à des homographies près, le réseau A et les systèmes de référence normaux attachés à lui, en intégrant le système de Pfaff [(2), (3), (24), (27)] sous la condition initiale (1). Les invariants fondamentaux ne peuvent pas être choisis arbitrairement; ils doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité du système précédent qu'on obtient en formant les covariants bilinéaires des équations (27)

$$(30)\quad \begin{cases} [d\alpha\,\omega_1]+[d\beta\,\omega_2]+(\alpha\beta+\alpha\nu-2\beta\mu+\gamma-1)[\omega_1\omega_2]=0, \\ 3[d\beta\,\omega_1]+[d\gamma\,\omega_2]+3(4\beta^2+2\beta\nu-\alpha\gamma-\gamma\mu-\mu)[\omega_1\omega_2]=0, \\ [d\lambda\,\omega_1]+3[d\mu\,\omega_2]-3(4\mu^2+2\alpha\mu-\lambda\nu-\beta\lambda-\beta)[\omega_1\omega_2]=0, \\ [d\mu\,\omega_1]+[d\nu\,\omega_2]-(\mu\nu+\alpha\nu-2\beta\mu+\lambda-1)[\omega_1\omega_2]=0. \end{cases}$$

Remarque. — Le système de Pfaff [(2), (3), (24), (27)], où α, β, γ, λ, μ, ν sont considérées comme des inconnues, fournit tous les réseaux non réglés : ce sont les solutions à deux dimensions de ce système laissant indépendantes les expressions de Pfaff ω_1, ω_2 [9], [10] et [11].

Or, le système de Pfaff considéré est, d'après (30), en involution par rapport à ω_1, ω_2, et sa solution générale dépend de deux fonctions arbitraires de deux arguments. On voit, de plus, qu'il ne possède aucune *caractéristique*. Nous avons donc le résultat évident *a priori : Les réseaux non réglés dépendent de deux fonctions arbitraires de deux arguments.*

10. Les réseaux non réglés à invariants égaux. — Pour un réseau à invariants égaux nous devons avoir

$$\gamma=\lambda,$$

c'est-à-dire

$$(31)\quad \begin{cases} \omega_{11}=\alpha\omega_1+\beta\omega_2, & \omega_{10}=3\beta\omega_1+\gamma\omega_2, \\ \omega_{20}=\gamma\omega_1+3\mu\omega_2, & \omega_{22}=\mu\omega_1+\nu\omega_2. \end{cases}$$

En formant les covariants bilinéaires de ces équations, nous obtenons

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &[d\alpha\omega_1] + [d\beta\omega_2] + (\alpha\beta + \alpha\nu - 2\beta\mu + \gamma - 1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ 3&[d\beta\omega_1] + [d\gamma\omega_2] + 3(4\beta^2 + 2\beta\nu - \alpha\gamma - \gamma\mu - \mu)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &[d\gamma\omega_1] + 3[d\mu\omega_2] - 3(4\mu^2 + 2\alpha\mu - \gamma\nu - \beta\gamma - \beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ &[d\mu\omega_1] + [d\nu\omega_2] - (\mu\nu + \alpha\nu - 2\beta\mu + \gamma - 1)[\omega_1\omega_2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Le système Pfaff [(2), (3), (24), (31)], où α, β, γ, μ, ν sont considérées comme des inconnues, fournit tous les réseaux non réglés à invariants égaux. Les équations quadratiques extérieures (32) sont les conditions d'intégrabilité de ce système. Elles montrent que le système considéré est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et qu'il admet une solution dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. On voit, de plus, qu'il n'y a aucune *caractéristique*. *Les réseaux non réglés à invariants égaux dépendent donc d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

II. — RÉSEAUX SIMPLEMENT RÉGLÉS.

11. Deuxième particularisation du système de référence mobile. — Le réseau étant simplement réglé, h_1 est nul et nous pouvons, d'après (23), supposer

$$k_2 = 1;$$

nous avons alors

$$(33)\qquad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2$$

et

$$e_{22} = 0.$$

Le système de référence mobile ne dépend plus que d'un paramètre inessentiel que nous désignerons par u_1.

Les équations différentielles de la famille de droites et de la famille de courbes du réseau A^1, par rapport aux systèmes de référence mobiles satisfaisant aux équations (33), sont

$$(34)\qquad \left\{ \begin{aligned} y' &= 0 + \ldots, \\ x' &= y + \ldots, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 1.

Les équations (33) entraînent

$$[\omega_{10}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{20}\omega_1] + 3[\omega_{22}\omega_2] = 0,$$

d'où

$$(35)\qquad \begin{cases} \omega_{10} = \gamma\omega_2, \\ \omega_{20} = \lambda\omega_1 + 3\mu\omega_2, \qquad \omega_{22} = \mu\omega_1 + \nu\omega_2 ; \end{cases}$$

et les formules (13) donnent alors

$$(36)\qquad \varphi_2 = -\frac{1}{2}\gamma y^2, \qquad \psi_2 = -\frac{1}{2}(\lambda x^2 + 6\mu xy + 3\nu y^2).$$

Remarquons que le transformé de Laplace A_1 du point A est aussi un point focal de la droite de Laplace $a = [A_1 A_2]$ relative à ce point. Le point A_1 ne décrit d'ailleurs qu'une courbe qui est l'enveloppe des droites $a_2 = [AA_1]$.

12. Particularisation définitive du système de référence mobile. — Les équations (35) entraînent

$$[(d\gamma + 3\gamma\omega_{00})\omega_2] = 0.$$
$$[(d\lambda + 3\lambda\omega_{00})\omega_1] + 3[(d\mu + 2\mu\omega_{00})\omega_2] - 6\mu^2[\omega_1\omega_2] = 0,$$
$$[(d\mu + 2\mu\omega_{00})\omega_1] + [(d\nu + \nu\omega_{00})\omega_2] - (2\mu\nu + \lambda)[\omega_1\omega_2] = 0.$$

1° *Cas général* : $\lambda \neq 0$. — On peut choisir le système de référence de manière à rendre λ égal à 1. On a alors

$$(37)\qquad \begin{cases} \omega_{10} = \gamma\omega_2, & \omega_{20} = \omega_1 + 3\mu\omega_2, \\ \omega_{00} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \omega_{22} = \mu\omega_1 + \nu\omega_2, \end{cases}$$

$$(38)\qquad \omega'_1 = -(2\beta + \nu)[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = (\alpha - \mu)[\omega_1\omega_2].$$

Les expressions de Pfaff ω_1, ω_2 et les coefficients α, β, γ, μ, ν sont les *invariants fondamentaux* du réseau A^1 ; ils sont liés par les conditions d'intégrabilité

$$(39)\qquad \begin{cases} [d\gamma\omega_2] + 3\alpha\gamma[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\alpha\omega_1] + [d\beta\omega_2] - (\alpha\nu + \alpha\beta + \beta\mu + \gamma - 1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\mu\omega_2] + (2\alpha\mu - 2\mu^2 - \beta)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\mu\omega_1] + [d\nu\omega_2] + (\alpha\nu - 2\mu\beta - 2\mu\nu - 1)[\omega_1\omega_2] = 0. \end{cases}$$

du système de Pfaff [(2), (3), (33), (37)].

Les équations différentielles réduites du réseau A^1 sont

$$(40)\qquad \begin{cases} y' = -\frac{1}{2}\gamma y^2 + \ldots, \\ x' = y - \frac{1}{2}(x^2 + 6\mu xy + 3\nu y^2) + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 2.

2° $\lambda = 0$. — Dans ce cas, le transformé de Laplace A_2 du point A, ne décrit qu'une courbe; et la droite de Laplace $a = [A_1 A_2]$ relative à ce point, est tangente en

$$H = 3\mu A_1 - \gamma A_2,$$

à une courbe fixe.

Ce cas se subdivise en trois autres cas :

a. $\mu \neq 0$. — On peut supposer μ réduit à l'unité. On a alors

$$(41)\qquad \begin{cases} \omega_{10} = \gamma\omega_2, & \omega_{20} = 3\omega_2, \\ \omega_{00} = \omega_1 + \beta\omega_2, & \omega_{22} = \omega_1 + \nu\omega_2, \end{cases}$$

$$(42)\qquad \omega'_1 = -(2\beta + \nu)[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = 0.$$

L'expression ω_2 est donc une différentielle totale exacte.

Les expressions de Pfaff ω_1, ω_2 et les coefficients α, β, ν sont les *invariants fondamentaux* du réseau A^1; ils doivent satisfaire les conditions d'intégrabilité

$$(43)\qquad \begin{cases} [d\gamma\omega_2] + 3\gamma[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\beta\omega_2] - (\nu + 2\beta + \gamma)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\nu\omega_2] - (2\beta + \nu)[\omega_1\omega_2] = 0, \end{cases}$$

du système de Pfaff [(2), (3), (33), (41)].

Les équations différentielles réduites du réseau A^1 sont

$$(44)\qquad \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{2}\gamma y^2 + \ldots, \\ x' = y - \dfrac{3}{2}(2xy + \nu y^2) + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 2.

b. $\mu = 0$, $\gamma \neq 0$. — Le transformé de Laplace A_2 du point A occupe alors la même position que le point H. Nous pouvons supposer choisi le système de référence, de manière à avoir $\gamma = 1$, ce qui entraîne

$$(45)\qquad \begin{cases} \omega_{10} = \omega_2, & \omega_{20} = 0, \\ \omega_{00} = \beta\omega_2, & \omega_{22} = \nu\omega_2, \end{cases}$$

$$(46)\qquad \omega'_1 = -(2\beta + \nu)[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = 0.$$

L'expression ω_2 est donc une différentielle totale exacte.

Les formules (13) nous donnent

$$(47)\qquad \varphi_3 = -\frac{\beta}{2}y^3.$$

Les expressions de Pfaff ω_1, ω_2 et les coefficients β, ν sont les *invariants fondamentaux* du réseau A^1; ils sont liés par les conditions d'intégrabilité

$$\left\{\begin{aligned}&[d\beta\omega_2]-[\omega_1\omega_2]=0,\\&[d\nu\omega_2]=0,\end{aligned}\right. \tag{48}$$

du système de Pfaff [(2), (3), (33), (45)].

Les équations différentielles réduites du réseau A¹ sont

$$\left\{\begin{aligned}&y'=-\frac{1}{2}y^2+\ldots,\\&x'=y-\frac{3}{2}\nu y^2+\ldots,\end{aligned}\right. \tag{49}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 2.

c. $\mu=\gamma=0$, $\nu\neq 0$. — Dans ce cas, le transformé de Laplace A_1 du point A et la droite de Laplace $a=[A_1A_2]$ restent fixes quand on se déplace dans le plan; les droites $a_2=[AA_1]$ forment un faisceau dont le centre est A_1, et le transforme de Laplace A_2 du point A décrit la droite a. Nous pouvons supposer $\nu=1$; on a alors

$$\left\{\begin{aligned}&\omega_{10}=\omega_{20}=0,\\&\omega_{00}=\beta\omega_2,\qquad \omega_{22}=\omega_2,\end{aligned}\right. \tag{50}$$

$$\omega'_1=-(2\beta+1)[\omega_1\omega_2],\qquad \omega'_2=0. \tag{51}$$

L'expression ω_2 est donc une différentielle totale exacte.

Les formules (13) donnent

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi_p=0\qquad (p=1, 2, 3, \ldots),\\&\psi_3=\frac{1}{3}(4-\beta)y^3.\end{aligned}\right. \tag{52}$$

Les expressions ω_1, ω_2 et le coefficient β sont les *invariants fondamentaux* du réseau A¹; ilsdoivent satisfaire à la condition d'intégrabilité du systeme de Pfaff [(2), (3), (33), (50)]

$$[d\beta\omega_2]=0. \tag{53}$$

Les équations différentielles réduites du réseau A¹ sont

$$y'=0,\qquad x'=y-\frac{3}{2}y^2+\ldots, \tag{54}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à 2.

d. $\mu=\nu=\gamma=0$. — Dans ce cas, il est impossible de particulariser completement le système de référence mobile. On a

$$\omega_{10}=\omega_{20}=\omega_{22}=0.$$

Tous les réseaux A[1] qui correspondent à ce cas, sont équivalents vis-à-vis du groupe projectif, et chacun d'eux admet un groupe projectif à trois paramètres dont la structure est donnée par les formules

$$\omega'_1 = 2[\omega_1 \omega_{11}], \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_{11} = 0.$$

Pour avoir ces réseaux, on peut prendre, par exemple

$$\omega_1 = dt_1, \qquad \omega_2 = dt_2, \qquad \omega_{11} = 0,$$

de sorte que les formules (2) deviennent ici

$$dA = dt_1 A_1 + dt_2 A_2, \qquad dA_1 = 0, \qquad dA_2 = dt_2 A_1.$$

Ces équations s'intègrent immédiatement et donnent en particulier

$$A = C + \left(t_1 + \frac{1}{2} t_2^2\right) C_1 + t_2 C_2,$$

en désignant par C, C_1, C_2 trois points fixes. On a ainsi les coordonnées fixes d'un point du réseau en fonction de deux paramètres

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = t_1 + \frac{1}{2} t_2^2, \qquad x_2 = t_2,$$

x_0, x_1, x_2 étant les coordonnées homogènes du point A; ses coordonnées non homogènes sont

$$x = t_1 + \frac{1}{2} t_2^2, \qquad y = t_2.$$

On voit bien que le reseau A[1] est formé de la famille de droites $t_2 =$ const.

$$(55) \qquad y = t_2,$$

parallèles à l'axe des x (passant par le point fixe C_1), et de la famille de conique $t_1 =$ const.

$$(56) \qquad x = t_1 + \frac{1}{2} y^2,$$

surosculatrices en $C_1(\infty, 0)$ à la conique fixe

$$x = \frac{1}{2} y^2.$$

On pouvait obtenir les équations (55) et (56) immediatement, en remarquant que les formules (13) donnent dans ce cas

$$\varphi_p = \psi_q = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots; \; q = 2, 3, \ldots),$$

de sorte que les équations différentielles de la famille de courbes du réseau deviennent

$$y' = 0, \qquad x' = y. \tag{55}$$

On trouve sans aucune difficulté que le groupe projectif à trois paramètres laissant invariant le réseau A^1, est

$$(56)_1 \qquad \begin{cases} X = u_1^2\left(x - t_2 y - t_1 + \frac{1}{2} t_2^2\right) \\ Y = u_1(y - t_2), \end{cases}$$

ou

$$(56)_2 \qquad \begin{cases} X = u_1(y - t_2), \\ Y = u_1^2\left(x - t_2 y - t_1 + \frac{1}{2} t_2^2\right). \end{cases}$$

Remarque. — Les réseaux A^1 les plus généraux sont les solutions à deux dimensions du système de Pfaff [(2), (3), (33), (37)], où $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ sont considérées comme des inconnues, laissant indépendantes les expressions de Pfaff ω_1, ω_2. Ce système est, d'après (39), en involution et nous avons le résultat évident *a priori : Les réseaux simplement réglés les plus généraux dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

De même, les systèmes de Pfaff [(2), (3), (33), (41)], [(2), (3), (33), (45)], [(2), (3), (33), (50)] fournissent tous les réseaux A^1, respectivement dans les cas particuliers *a*, *b*, *c*. Ces systèmes sont, d'après (43), (48), (53), en involution par rapport à ω_1, ω_2, et nous avons le résultat suivant : *Les réseaux simplement réglés dépendent suivant les cas particuliers a, b, c, respectivement de trois fonctions arbitraires, de deux fonctions arbitraires, d'une fonction arbitraire d'un argument.*

Chacun des systèmes de Pfaff précédents, possède une famille de caractéristiques définie par l'équation $\omega_2 = 0$: c'est *la famille de droites des réseaux intégraux.*

13. Les réseaux simplement réglés à invariants égaux. — 1° *Cas général.* — Si le réseau A^1 est à invariants égaux ; nous devons avoir

$$\gamma = 1,$$

ce qui entraîne

$$\alpha = 0,$$

de sorte que nous avons

$$\begin{cases} \omega_{10} = \omega_2, & \omega_{20} = \omega_1 + 3\mu\omega_2, \\ \omega_{00} = \beta\omega_2, & \omega_{22} = \mu\omega_1 + \nu\omega_2. \end{cases} \tag{57}$$

avec

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} [d\beta\omega_2] - \beta\mu[\omega_1\omega_2] &= 0,\\ [d\mu\omega_2] - (2\mu^2+\beta)[\omega_1\omega_2] &= 0,\\ [d\mu\omega_1] + [d\nu\omega_2] - (2\mu\beta + 2\mu\nu + 1)[\omega_1\omega_2] &= 0.\end{aligned}\right.$$

2° *Cas particuliers.* — *a.* Dans ce cas, le réseau A^1 sera à invariants égaux si

$$\gamma = 0;$$

nous avons donc

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_{10} = 0, &&\omega_{20} = 3\omega_2,\\ &\omega_{00} = \omega_1 + \beta\omega_2, &&\omega_{22} = \omega_1 + \nu\omega_2\end{aligned}\right.$$

avec

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} [d\beta\omega_2] - (2\beta+\nu)[\omega_1\omega_2] &= 0,\\ [d\nu\omega_2] - (2\beta+\nu)[\omega_1\omega_2] &= 0.\end{aligned}\right.$$

b. Dans ce cas, le réseau A^1 ne peut pas être à invariants égaux.

c et *d*. Tous les réseaux A^1 sont, dans ces cas, à invariants égaux.

Remarque. — On obtient tous les réseaux A^1 à invariants égaux dans le cas général, en intégrant le système de Pfaff [(2), (3), (33), (57)], où l'on considère comme des inconnues les coefficients β, μ, ν. Les conditions d'intégrabilité (58) de ce système montrent qu'il est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et nous avons le résultat suivant : *Les réseaux simplement réglés à invariants égaux les plus généraux dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument.*

De même, l'intégration du système de Pfaff [(2), (3), (33), (59)], où l'on considère les coefficients β et ν comme des inconnnes, donne tous les réseaux A_1 à invariants égaux dans le cas *a*. Les conditions d'intégrabilité (60) de ce système montrent qu'il est en involution par rapport à ω_1, ω_1, et nous avons le résultat suivant : *Les réseaux simplement réglés à invariants égaux dépendent dans le cas particulier a, de deux fonctions arbitraires d'un argument.* Dans tous les cas, il y a une famille de *caractéristiques* définie par l'équation $\omega_2 = 0$: *c'est la famille de droites des réseaux intégraux.*

III. — RÉSEAUX DOUBLEMENT RÉGLÉS.

14. Deuxième particularisation du système de référence mobile. — Le réseau étant supposé doublement réglé, les coefficients h_1, k_2 sont nuls. Nous avons alors

$$(61)\quad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{21} = 0;$$

ces équations conduisent aux équations quadratiques extérieures

$$[\omega_{10}\omega_2] = 0, \qquad [\omega_{20}\omega_1] = 0,$$

d'où

(62) $$\omega_{10} = \gamma\omega_2, \qquad \omega_{20} = \lambda\omega_1,$$

par suite, d'après (13)

(63) $$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\gamma y^2, \qquad \psi_2 = -\frac{1}{2}\lambda x^2.$$

Remarquons que les transformés de Laplace A_1, A_2 du point A sont aussi les points focaux de la droite de Laplace $a = [A_1 A_2]$ relative à ce point.

Les points A_1, A_2, décrivent d'ailleurs les enveloppes respectives des droites $a_2 = [AA_1]$, $a_1 = -[AA_2]$.

Formons les covariants bilinéaires des équations (62), nous obtenons

$$[(d\gamma + 3\gamma\omega_{00})\omega_2] = 0, \qquad [(d\lambda + 3\lambda\omega_{00})\omega_1] = 0,$$

d'où

(64) $$\delta\gamma = -3e_{00}\gamma, \qquad \delta\lambda = -3e_{00}\lambda.$$

1° *Cas simple* $\gamma = \lambda = 0$. Dans ce cas, il est impossible de particulariser complètement le système de référence mobile. On a

$$\omega_{10} = 0, \qquad \omega_{20} = 0.$$

Tous les réseaux A^2 qui correspondent à ce cas sont équivalents par rapport au groupe projectif, et chacun d'eux admet un groupe projectif à quatre paramètres dont la structure est donnée par les formules

$$\omega_1' = [\omega_1(\omega_{11} - \omega_{00})], \qquad \omega_2' = [\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})],$$
$$(\omega_{11} - \omega_{00})' = 0, \qquad (\omega_{22} - \omega_{00})' = 0.$$

Pour avoir ces réseaux, on peut prendre par exemple

$$\omega_1 = dt_1, \qquad \omega_2 = dt_2, \qquad \omega_{11} - \omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} = 0,$$

de sorte que les formules (2) deviennent ici

$$dA = dt_1 A_1 + dt_2 A_2,$$
$$dA_1 = 0,$$
$$dA_2 = 0,$$

ces équations s'intègrent immédiatement et donnent en particulier

$$A = C + t_1 C_1 + t_2 C_2,$$

C, C_1, C_2 étant trois points fixes. On a ainsi les coordonnées fixes d'un point du réseau en fonction de deux parametres

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = t_1, \qquad x_2 = t_2,$$

x_0, x_1, x_2 étant les coordonnées homogenes de A; ses coordonnées non homogènes sont

$$x = t_1, \qquad y = t_2.$$

On voit que le réseau A^2 est formé de la famille de droites $t_2 = \text{const.}$

$$(65) \qquad y = t_2,$$

paralleles a l'axe des x (passant par le point fixe C_1), et de la famille de droites $t_1 = \text{const.}$

$$(66) \qquad x = t_1,$$

paralleles à l'axe des y (passant par le point fixe C_2).

On pouvait obtenir immédiatement ces deux familles de droites en remarquant que les formules (13) donnent

$$\varphi_p = \psi_p = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

de sorte que les équations différentielles des deux familles de droites du réseau deviennent

$$(67) \qquad y' = 0, \qquad x' = 0$$

On trouve sans aucune difficulté que le groupe projectif a quatre paramètres laissant invariant le réseau A^2, est

$$(68) \qquad X = u_1(x - t_1), \qquad Y = u_2(y - t_2),$$

ou

$$(68)' \qquad X = u_2(y - t_2), \qquad Y = u_1(x - t_1).$$

Il est évident que les réseaux A^2 correspondant a ce cas, sont à invariants égaux.

2° $\gamma = \lambda \neq 0$. — Nous pouvons, d'apres (64), supposer $\gamma = \lambda = 1$.
Nous avons alors

$$(69) \qquad \begin{cases} \omega_{10} = \omega_2, \qquad \omega_{20} = \omega_1, \\ \omega_{00} = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, il est impossible d'achever la particularisation du systeme de référence mobile. Tous les réseaux A^2 correspondant à ce cas, sont projectivement égaux, et chacun d'eux admet un groupe projectif à trois paramètres dont la structure est donnée par les formules.

$$\omega'_1 = [\omega_1 \omega_{11}], \qquad \omega'_2 = [\omega_{11} \omega_2], \qquad \omega'_{11} = [\omega_2 \omega_1].$$

Le réseau A^2 est à invariants égaux. Nous avons vu au n° **7** que la conique

$$\Phi = x_0^2 - 2x_1 x_2 = 0,$$

a en A_1 un contact du second ordre avec la courbe décrite par A_1 et en A_2 un contact du second ordre avec la courbe décrite par A_2. Or cette conique dont l'équation en coordonnées non homogènes s'écrit

$$\Phi = 1 - 2xy = 0 \tag{70}$$

est fixe. Soient, en effet, x et y les coordonnées non homogènes d'un point fixe P du plan. On a

$$\left\{ \begin{aligned} & dx + \omega_1 + x\omega_{11} - x(x\omega_2 + y\omega_1) = 0, \\ & dy + \omega_2 - y\omega_{11} - y(x\omega_2 + y\omega_1) = 0, \end{aligned} \right. \tag{71}$$

et l'équation

$$d\Phi = 0,$$

est bien une conséquence de (70), (71).

Les courbes décrites par A_1 et par A_2 coïncident donc avec la conique (70); c'est-à-dire que le *réseau* A^2 *est formé*, *dans ce cas*, *des droites tangentes à une conique fixe*.

3° *Cas général* $\gamma \neq \lambda$. — Dans ce cas, l'un au moins des coefficients γ, λ n'est pas nul; nous pouvons supposer que c'est γ. Il peut être, d'après (64), réduit à l'unité. On a alors :

$$\omega_{10} = \omega_2, \qquad \omega_{20} = \lambda\omega_1, \tag{72}$$

$$\omega_{00} = \beta\omega_2, \tag{73}$$

λ étant un *invariant* différent de 1; et d'après (13).

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2}\beta y^3. \tag{74}$$

15. Particularisation définitive du système de référence mobile. — L'équation (73) entraîne

$$[(d\beta - \beta\omega_{22})\omega_2] + (\lambda - 1)[\omega_1 \omega_2] = 0,$$

comme $\lambda \neq 1$. β ne peut pas être nul; nous pouvons le supposer égal à l'unité. Nous avons alors

(75) $$\omega_{00} = \omega_2, \qquad \omega_{22} = (\lambda - 1)\omega_1 + \nu\omega_2,$$

(76) $$\omega'_1 = -(\nu + 2)[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = (1 - \lambda)[\omega_1\omega_2],$$

et les formules (13) donnent

$$\varphi_4 = -\frac{1}{2}xy^3 + \frac{1}{8}(\nu - 4)y^4.$$

Les expressions de Pfaff ω_1, ω_2 et les coefficients λ, ν sont les *invariants fondamentaux* du réseau A_2. Ils sont liés par les conditions d'intégrabilité

(77) $$\begin{cases} [d\lambda\omega_1] - 3\lambda[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\nu\omega_2] - 2(\lambda\nu - \nu - 1)[\omega_1\omega_2] = 0, \end{cases}$$

du système de Pfaff [(2), (3), (61), (72). (75)].

Les équations différentielles réduites du réseau A^2 sont

(78) $$\begin{cases} y' = -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3 + (4), \\ x' = -\frac{1}{2}\lambda x^2 + (3), \end{cases}$$

où (n) désigne une expression au moins du $n^{\text{ième}}$ ordre en x, y.

Si $\lambda = 0$, le point A_2 reste fixe, les droites $a = [A_1A_2]$, $a_1 = -[AA_2]$, forment deux faisceaux dont ce point est le centre commun. Le réseau A^2 est alors formé des droites tangentes à une courbe fixe décrite par A_1 et des droites passant par un point fixe. L'étude du réseau A^2 se ramène, dans ce cas, à la théorie *centroprojective* d'une courbe.

Remarque. — Les réseaux A^2 les plus généraux sont donnés par l'intégration du système de Pfaff [(2), (3), (61), (72), (75)], où l'on considère λ, ν comme des inconnues. Les conditions d'intégrabilité (77) montrent que ce système est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et nous avons le résultat évident *a priori* : *Les réseaux doublement réglés les plus genéraux dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.* Il y a deux familles de caractéristiques définies par les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$: *ce sont les deux familles de droites des réseaux intégraux.*

CHAPITRE III.

CORRESPONDANCE PONCTUELLE ENTRE DEUX RÉSEAUX PLANS.

16. **Les caractéristiques** [4]. — Considérons deux réseaux plans quelconques, et une correspondance point par point arbitraire entre eux. Soient $M(t_1, t_2)$ et $N(t_1, t_2)$ les points générateurs de ces réseaux; la correspondance sera définie par valeurs égales des paramètres t_1, t_2.

Faisons correspondre à tout point M du premier réseau, un système de référence mobile formé des points A, A_1, A_2, dont le premier a la même position que M. De même, associons au point correspondant N du second réseau, un système de référence mobile B, B_1, B_2, le point B occupant la même position que N. Désignons respectivement par ω_{ij} et Ω_{ij} les composants des déplacements infiniment petits des systèmes de référence A, A_1, A_2 et B, B_1, B_2.

Chacun des systèmes de référence mobile attachés aux réseaux A et B dépend, outre des paramètres *essentiels* t_1, t_2, de six autres *inessentiels* que nous désignerons respectivement par $u_1, \ldots, u_6$ et $v, \ldots, v_6$. Si on laisse t_1, t_2 fixes et si l'on fait varier les v, on change le système de référence attaché au point donné (t_1, t_2) du réseau B. Nous désignerons par $\bar{\delta}$ un symbole de différentiation obtenue en laissant t, t_2 et $u_1, \ldots, u_6$ fixes et faisant varier les paramètres v; le symbole d se rapportera à une variation quelconque de tous les paramètres. Nous désignerons, pour abréger, par ε_{ij} ce que devient Ω_{ij} quand on y utilise le symbole $\bar{\delta}$ de différentiation, en gardant la notation Ω_{ij} pour le symbole d.

Nous avons manifestement

$$(79) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ \Omega_2 = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \end{cases}$$

et

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{00} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0,$$

les coefficients b_1, b_2, c_1, c_2 étant des fonctions de t, t_2, des u et des v.

En formant les covariants bilinéaires des équations (79), on obtient des équations quadratiques extérieures qui donnent

$$(80)\quad \begin{cases} \bar{\delta} b_1 = (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11}) b_1 - \varepsilon_{21} c_1, & \bar{\delta} b_2 = (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11}) b_2 - \varepsilon_{21} c_2, \\ \bar{\delta} c_1 = (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{22}) c_1 - \varepsilon_{12} b_1, & \bar{\delta} c_2 = (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{22}) c_2 - \varepsilon_{12} b_2. \end{cases}$$

Ces équations montrent comment varient les coefficients b_1, b_2, c_1, c_2 quand on modifie le système de référence mobile attaché au réseau B. Nous pouvons toujours supposer, d'après (80),

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = 1;$$

nous avons alors

$$(81)\qquad \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2.$$

Ces équations entraînent

$$[\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] + [\omega_2(\Omega_{21} - \omega_{21})] = 0,$$
$$[\omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12})] + [\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,$$

d'où

$$(82)\quad \begin{cases} \Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00} = f\ \omega_1 + f_1 \omega_2, & \Omega_{21} + \omega_{21} = f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2, \\ \Omega_{12} - \omega_{12} = g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2, & \Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00} = g_2 \omega_1 + g\ \omega_2 \end{cases}$$

et

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{00} = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{00} = 0.$$

Après cette particularisation, le système de référence mobile attaché au réseau B ne dépend plus que de deux paramètres inessentiels v qui soient indépendants de t_1 t_2 et des u.

17. Considérons un point A′ infiniment voisin du point A. Désignons par x, y les coordonnées non homogènes de ce point : elles sont, aux infiniment petits du second ordre près, égales à ω_1, ω_2. Soit B′ le point correspondant infiniment voisin du point B. Désignons par X, Y les coordonnées non homogènes de ce point; elles sont aux infiniment petits du second ordre près, égales à Ω_1 Ω_2. Déplaçons le réseau B dans l'espace projectif (c'est-à-dire appliquons-lui une transformation projective) de manière que les points B, B_1, B_2 viennent respectivement en A, A_1, A_2. Les points A′ et B′ coïncideront, d'après (81), avec un écart du second ordre.

$$(83)\quad \begin{cases} X = x + P(x, y) + (3), \\ Y = y + Q)x, y) + (3), \end{cases}$$

P et Q étant des polynomes homogènes du second degré en x, y, c'est-à-dire, d'après M. Fubini [2], les réseaux A et B auront un contact *analytique* du premier ordre au point A.

Remarquons que les relations (83) entraînent inversement (81). Par suite, *il y a* ∞^2 *manières possibles* de déplacer dans l'espace projectif le réseau B de sorte *que, dans sa nouvelle position, il ait en un point* A *un contact analytique du premier ordre avec le réseau* A, *sans que la correspondance entre ces réseaux soit altérée.*

Le calcul de P, Q se fait exactement comme celui de φ_i, ψ_i, et l'on obtient

$$(84)\quad \begin{cases} 2\,P(\omega_1, \omega_2) = \omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00}) + \omega_2(\Omega_{21} - \omega_{21}), \\ 2\,Q(\omega_1, \omega_2) = \omega_1(\Omega_{12} - \omega_{12}) + \omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00}). \end{cases}$$

Soit maintenant une courbe Γ :

$$y = px + qx^2 + \ldots \qquad (p \neq \infty)$$

passant par A; la courbe correspondante Λ sera

$$Y = pX + qX^2 + \ldots.$$

L'homographie qui réalise au point A le contact analytique du premier ordre du réseau B avec le réseau A, établit en ce point le contact du premier ordre de Λ, qui devient

$$y + Q(x, y) = p[x + P(x, y)] + qx^2 + (3),$$

avec Γ. Il y a exception si Γ est tangente en A à une des droites définies par

$$Q(x, px) = p\,P(x, px),$$

ou bien

$$\omega_1\,Q(\omega_1, \omega_2) = \omega_2\,P(\omega_1, \omega_2),$$

ou encore, en tenant compte de (84),

$$(85)\quad \begin{aligned} \Psi &= \omega_1^2(\Omega_{12} - \omega_{12}) + \omega_1\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{11}) - \omega_2^2(\Omega_{21} - \omega_{21}) \\ &= g_1\omega_1^3 - (2g_2 - f)\omega_1^2\omega_2 - (2f_1 - g)\omega_1\omega_2^2 - f_2\omega_2^3 = 0; \end{aligned}$$

le contact de Λ avec Γ sera alors du second ordre.

Des formules

$$\begin{aligned} (\Omega_{22} - \Omega_{11})' &= -[\Omega_{10}\omega_1] + [\Omega_{20}\omega_2] + 2[\Omega_{21}\Omega_{12}], \\ \Omega'_{12} &= [\Omega_{10}\omega_2] + [(\Omega_{11} - \Omega_{22})\Omega_{12}], \\ \Omega'_{21} &= [\Omega_{20}\omega_1] + [(\Omega_{22} - \Omega_{11})\Omega_{21}], \end{aligned}$$

on déduit

$$\bar{\delta}(\Omega_{22} - \Omega_{11}) = -\varepsilon_{10}\omega_1 + \varepsilon_{20}\omega_2, \qquad \bar{\delta}\Omega_{12} = \varepsilon_{10}\omega_2, \qquad \bar{\delta}\Omega_{21} = \varepsilon_{20}\omega_1,$$

d'où

$$\delta\Psi \equiv 0,$$

ce qui montre que la forme différentielle Ψ est un *invariant*.

Les directions définies en un point A par l'équation $\Psi = 0$, sont appelées les *directions caractéristiques* de la correspondance en ce point. On peut donc dire : *Quand on déplace dans l'espace projectif le réseau* B *de manière que, dans sa nouvelle position, il ait en un point* A *un contact analytique du premier ordre avec le réseau* A, *on réalise au point* A *le contact du second ordre d'une courbe* Λ *avec la courbe correspondante* Γ, *si la direction de* Γ *à ce point est caractéristique, et dans ce cas seulement.*

18. Remarquons que l'on a sur Γ

$$[A\, dA\, d^2A] = \omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1 + \omega_1^2\omega_{12} + \omega_1\omega_2(\omega_{22} - \omega_{11}) - \omega_2^2\omega_{21},$$

et sur Λ

$$[B\, dB\, d^2B] = \omega_1\, d\omega_2 - \omega_2\, d\omega_1 + \omega_1^2\Omega_{12} + \omega_1\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{11}) - \omega_2^2\Omega_{21},$$

par conséquent

$$\Psi = [B\, dB\, d^2B] - [A\, dA\, d^2A]. \tag{86}$$

Nous pouvons donc dire : *Pour qu'à un point d'inflexion* A *d'une courbe* Γ *corresponde un point d'inflexion* B *de la courbe correspondante* Λ *il faut et il suffit que la direction de cette courbe à ce point soit caractéristique.*

19. Une courbe dont la direction dans tous ses points est caractéristique, c'est-à-dire une courbe intégrale de l'équation (85), sera appelée la (courbe) *caractéristique de la correspondance*. Une correspondance étant donnée, l'un seul des cas suivants peut se présenter.

1° *Il y a trois systèmes* ∞^1 *de caractéristiques simples.* Une telle correspondance est nommée une *correspondance de la première espèce* (générale).

2° *Il y a un système* ∞^1 *de caractéristiques simples et un système* ∞^1 *de caractéristiques doubles.* Une telle correspondance est nommée *une correspondance de la deuxième espèce.*

3° *Il y a un système* ∞^1 *de caractéristiques triples.* Une telle correspondance est nommée une *correspondance de la troisième espèce.*

4° *Les caractéristiques sont indéterminées.* Une telle correspondance est nommée une *correspondance de la quatrième espèce.*

20. La déformation projective. — Il est évident que les coefficients de la forme invariante Ψ sont aussi des invariants. On peut d'ailleurs s'en rendre compte directement, en remarquant que les covariants bilinéaires des équations (82) donnent

$$(87)\qquad \bar{\delta} f = 2\varepsilon_{10}, \quad \bar{\delta} f_1 = \varepsilon_{20}, \quad \bar{\delta} f_2 = 0, \quad \bar{\delta} g_1 = 0, \quad \bar{\delta} g_2 = \varepsilon_{10}, \quad \bar{\delta} g = 2\varepsilon_{20}.$$

La correspondance entre les réseaux A et B sera une *déformation projective*, si les courbes du réseau A(B) font partie de ses caractéristiques.

Prenons les points A_1 et A_2 du système de référence mobile attaché au réseau A sur les tangentes en A aux courbes de ce réseau. La condition pour une déformation projective est donc que l'équation (85) soit vérifiée par $\omega_1 = 0$ et par $\omega_2 = 0$, ce qui donne

$$g_1 = 0, \qquad f_2 = 0.$$

Or, on peut, d'après (87), prendre

$$g_2 = 0, \qquad f_1 = 0,$$

ou

$$f = 0, \qquad g = 0.$$

Par suite, *la condition d'applicabilité projective est que le système de référence mobile étant choisi pour le réseau* A, *on puisse le choisir pour le réseau* B *de manière à avoir, en tenant compte de la correspondance entre les deux réseaux*,

$$(88)\qquad \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}$$

ou bien

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1, & \Omega_2 &= \omega_2, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} &= \omega_{11} - \omega_{00} + f_1\omega_2, & \Omega_{21} &= \omega_{21} + f_1\omega_1, \\ \Omega_{12} &= \omega_{12} + g_2\omega_2, & \Omega_{22} - \Omega_{00} &= \omega_{22} - \omega_{00} + g_2\omega_1. \end{aligned}\right.$$

21. Le système de référence mobile étant choisi pour le réseau, le système de référence attaché au réseau B est dans l'un ou l'autre cas, complètement déterminé.

En tenant compte de (88) ou de (89), les formules (83) deviennent

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x + \frac{1}{2} f x^2 + (3), \\ Y &= y + \frac{1}{2} g y^2 + (3), \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(91)\qquad \begin{cases} X = x + f_1 xy + (3), \\ Y = y + g_2 xy + (3). \end{cases}$$

Inversement, les formules (90) ou (91) entraînent les équations (88) ou (89) et caractérisent par suite une déformation projective.

Remarquons, d'après (88), qu'en prenant $g_2 = 0, f_1 = 0$, nous prenons les points B_1 et B_2 du système de référence mobile attaché au réseau B, de manière qu'ils soient les transformés de Laplace du point B, si les points A_1 et A_2 du système de référence mobile, attaché au réseau A, sont les transformés de Laplace du point A correspondant à B.

De même, on remarque d'après (91) qu'en prenant $f = 0$, $g = 0$, on réalise une application *analytique* du second ordre des réseaux projectivement applicables A et B.

22. Nous prendrons dorénavant, sauf pour l'étude de la déformation projective des réseaux à invariants égaux, la condition d'applicabilité projective sous la forme (88).

Les équations (88) mettent en évidence que *la propriété d'un réseau d'être non réglé, simplement ou doublement réglé, est conservée par la déformation projective.*

Nous avons

$$\Psi = \omega_1 \omega_2 (g\omega_2 - f\omega_1) = 0.$$

La troisième direction caractéristique est donc donnée par l'équation

$$(92)\qquad g\omega_2 - f\omega_1 = 0.$$

Nous l'appellerons la *direction principale* de la déformation projective.

Les courbes intégrales de l'équation (92), c'est-à-dire, les courbes de la troisième famille de caractéristiques, sont nommées *les courbes de la déformation projective.* Elles jouissent d'une propriété intéressante. Faisons correspondre, en effet, à tout point A d'une courbe Γ une droite

$$c = [A(\rho A_1 + \sigma A_2)]$$

passant par ce point et non tangente en ce point à Γ. Quand on se déplace le long de Γ, la droite c enveloppe une certaine courbe. Le point de contact de c avec son enveloppe est un point

$$(93)\qquad C = \pi A + \rho A_1 + \sigma A_2,$$

où π se détermine en exprimant que le point dC est situé sur la droite c.

On obtient alors la relation

$$(94) \qquad (\sigma\omega_1 - \rho\omega_2)\pi = \rho\, d\sigma - \sigma\, d\rho + \rho^2\omega_{12} - \sigma^2\omega_{21} + \rho\sigma(\omega_{22} - \omega_{11})$$

qui fournit bien π si $\sigma\omega_1 - \rho\omega_2 \neq 0$, c'est-à-dire si c n'est pas tangente en A à Γ.

Soient Λ et

$$l = [B(\rho B_1 + \sigma B_2)]$$

la courbe et la droite correspondantes à Γ et c. Déplaçons-nous le long de Λ, la droite l enveloppera une certaine courbe. Le point de contact de l avec son enveloppe sera

$$(95) \qquad L = \varpi B + \rho B_1 + \sigma B_2,$$

où ϖ est donné par

$$(96) \qquad (\sigma\omega_1 - \rho\omega_2)\varpi = \rho\, d\sigma - \sigma\, d\rho + \rho^2\omega_{12} - \sigma^2\omega_{21} + \rho\sigma(\Omega_{22} - \Omega_{11}).$$

Nous avons donc

$$(97) \qquad \varpi - \pi = \frac{\rho\sigma(\Omega_{22} - \Omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{11})}{\sigma\omega_1 - \rho\omega_2} = \frac{\rho\sigma(g\omega_2 - f\omega_1)}{\sigma\omega_1 - \rho\omega_2}.$$

Déplaçons dans l'espace projectif le réseau B, de manière que les points B, B_1, B_2 viennent respectivement en A, A_1, A_2. Le point L viendra alors en

$$\varpi A + \rho A_1 + \sigma A_2 = (\varpi - \pi)A + C;$$

il coïncidera donc avec le point C lorsque

$$(98) \qquad \varpi - \pi = 0.$$

En général, l'équation (98) exige que $\rho = 0$ ou $\sigma = 0$, c'est-à-dire que la droite c soit tangente en A à la courbe $\omega_1 = 0$ ou à la courbe $\omega_2 = 0$ du réseau A. Il y a une exception si

$$g\omega_2 - f\omega_1 = 0,$$

ce qui signifie que la courbe Γ est une *courbe de la déformation projective*; alors le point L, dans sa nouvelle position, coïncidera avec le point C pour chaque choix de la droite c.

23. La direction principale sera indéterminée si l'on a $g = 0$, $f = 0$. La correspondance qui réalise l'application est alors de la quatrième espece. Or, on a dans ce cas

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21},$$
$$\Omega_{00} - \omega_{00} = \Omega_{11} - \omega_{11} = \Omega_{22} - \omega_{22},$$

et les covariants bilinéaires de ces équations donnent

$$\Omega_{10} = \omega_{10}, \qquad \Omega_{20} = \omega_{20}.$$

Par suite, *une correspondance de la quatrième espèce est une correspondance projective.*

CHAPITRE IV.

L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES RÉSEAUX NON RÉGLÉS.

24. Le système de Pfaff des couples de réseaux non réglés projectivement applicables. — Le système de Pfaff

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \tag{88}$$

fournit tous les couples de réseaux A et B projectivement applicables et, en même temps, pour chaque couple, la correspondance ponctuelle qui réalise l'application. Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$\left\{\begin{aligned} &[\omega_1\,(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0,\\ &[\omega_2\,(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,\\ [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] + &[\omega_{12}(\Omega_{11} - \Omega_{22} - \omega_{11} + \omega_{22})] = 0,\\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] + &[\omega_{21}(\Omega_{22} - \Omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{11})] = 0. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

Ces équations montrent que le système de Pfaff [88] est un involution par rapport à ω_1, ω_2, et qu'il admet une solution générale dépendant de deux fonctions arbitraires de deux arguments.

On voit de plus qu'*il y a deux familles de caractéristiques* définies par les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$: ce sont les courbes des réseaux intégraux A et B. Il n'y a aucune solution singulière, et tout couple de réseaux projectivement applicable provient d'une solution générale du système [88].

Par suite, *les couples de réseaux non réglés projectivement applicables dépendent de deux fonctions arbitraires de deux arguments.*

25. Le système de Pfaff de couples de réseaux non réglés projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce [4]. — On peut toujours supposer que les caractéristiques doubles de la correspondance sont définies par l'équation $\omega_2 = 0$. On aura alors tous les couples de réseaux non réglés projectivement applicables A et B, et, en même temps, pour chaque couple, la correspondance de la deuxième espèce qui réalise l'application, en intégrant le système de Pfaff

$$(100) \quad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}. \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures auxquelles il conduit, sont

$$(101) \quad \begin{cases} [\omega_2\ (\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] - [\omega_{12}(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0. \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] + [\omega_{21}(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0, \\ 2[\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \end{cases}$$

Elles montrent que le système de Pfaff [100] est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et qu'il admet une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments.

On voit, de plus, *qu'il y a une famille de caractéristiques* définie par l'équation $\omega_2 = 0$. Une solution du système de Pfaff [100] sera *singulière* si l'on a

$$(102) \quad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}.$$

Les solutions singulières du système de Pfaff (100) s'obtiennent donc par l'intégration du système de Pfaff [(100), (102)]. Or, les covariants bilinéaires des équations (100) et (102), donnent

$$\Omega_{10} = \omega_{10}, \qquad \Omega_{20} = \omega_{20}.$$

Par suite, *les solutions singulières du système de Pfaff* [100] *sont formées par un réseau quelconque* A *et un réseau* B *se déduisant de* A *par une transformation projective.*

Tout couple de réseaux non réglés distincts projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce, provient donc d'une solution générale. Par conséquent : *les couples de réseaux non réglés distincts projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce, dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

Une conséquence immédiate est que : *étant donné un réseau non réglé* A *il n'y a pas, en général, un réseau* B *distinct de* A *qui soit projectivement applicable sur* A *par une correspondance de la deuxième espèce*, sinon, en effet, les couples de réseaux non réglés distincts projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce, dépendraient au moins de deux fonctions arbitraires de deux arguments.

26. **Le système de Pfaff de réseaux projectivement applicables sur un réseau non réglé donné** [3]. — Soit A un réseau non réglé, nous faisons correspondre à chacun de ses points, un système de référence normal. Soit B un réseau projectivement applicable sur A. Le système de Pfaff

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21} \tag{88}$$

fournit, de la manière la plus générale possible, le réseau B et la correspondance ponctuelle qui réalise l'application. Il conduit, en tenant compte de (24), aux équations quadratiques extérieures.

$$\left\{\begin{aligned} &[\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0,\\ &[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,\\ &[\omega_1(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] - [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0,\\ &[\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] - [\omega_2(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0. \end{aligned}\right. \tag{103}$$

Ces équations montrent que le système de Pfaff (88) est en involution et l'on a le résultat suivant : *Les réseaux projectivement applicables sur un réseau non réglé donné, dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

Il y a deux familles de caractéristiques définies, la première par l'équation $\omega_1 = 0$, la seconde par l'équation $\omega_2 = 0$; *ce sont les courbes des réseaux intégraux* B.

27. **Le système de Pfaff des réseaux projectivement applicables sur un réseau non réglé donné par une correspondance de la deuxième espèce.** — Soit A un réseau non réglé à chaque point duquel nous aurons associé un système de référence normal. Soit B un réseau projectivement applicable sur A par une correspondance de la deuxième espèce. Le système de Pfaff

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \Omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21},\\ &\qquad\qquad \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{12} - \omega_{00} \end{aligned}\right. \tag{100}$$

fournit, de la manière la plus générale possible, le réseau B et la correspondance de la deuxième espèce qui réalise l'application. Il conduit, en tenant compte de (24), aux équations quadratiques extérieures

$$\left\{\begin{aligned} &[\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,\\ &[\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] - [\omega_1(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0,\\ &[\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0,\\ &2[\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \end{aligned}\right. \tag{104}$$

Ces équations montrent que le système de Pfaff (100) n'est pas en involution; elles permettent de poser

$$(105)\quad \begin{cases} \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} + u\omega_2, \\ \Omega_{10} = \omega_{10} - u\omega_1 + v\omega_2, \\ \Omega_{20} = \omega_{20} + 2v\omega_1. \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures qu'entraînent ces équations donnent, en tenant compte de (27),

$$(106)\quad \begin{cases} du = (\overline{\alpha + 2\mu}\, u + 3v)\omega_1 + w\omega_2, \\ dv = (\overline{4\beta + 2\nu}\, u + \overline{3\alpha + 3\mu}\, v - w)\omega_1 + \left(uv + \dfrac{\lambda - 1}{2} u + \overline{3\beta + 3\nu}\, v\right)\omega_2. \end{cases}$$

Les covariants bilinéaires des équations (106) donnent enfin

$$(107)\quad \begin{aligned} dw = \Big[& 3uv + \left(\alpha_2 + 2\mu_2 + \frac{3\lambda - 3}{2} - \overline{\alpha + 2\mu}\;\overline{2\beta + \nu}\right) u \\ & + 3(\beta + 2\nu)v + 2(\alpha + 2\mu)w \Big]\omega_1 \\ + \Big[& uw - 2(2\beta + \nu)u^2 - 3v^2 \\ & + \left(4\beta_2 + 2\nu_2 - \frac{\lambda_1}{2} + \frac{3}{2}\overline{\lambda - 1}\;\overline{\alpha + \mu} - 2 \times \overline{2\beta + \nu}\;\overline{5\beta + 4\nu}\right) u \\ & + \frac{3}{2}(2\gamma - 3\lambda + 1)v + 3(3\beta + 2\nu)w \Big]\omega_2, \end{aligned}$$

et cette équation entraîne elle-même

$$(108)\quad \begin{aligned} (\alpha_2 + 2\mu_2 - 4\beta_1 - 2\nu_1 + \overline{\alpha + 2\mu}\;\overline{2\beta + \nu})u^2 - 9\alpha v^2 - 12(2\beta + \nu)uv & \\ + 6vw + f_1(u, v, w) = 0, & \end{aligned}$$

où f_1 est une fonction homogène du premier degré en u, v, w.

La relation (108) ne pouvant pas être une identité en u, v, w, donne, par différentiation, deux autres relations de la forme

$$(109)\quad \begin{cases} 18uv^2 + f_2(u, v, w) + f_1(u, v, w) = 0, \\ 18v^3 + 18\alpha uv^2 + 24(2\beta + \nu)u^2 v - 12uvw + f_2''(u, v, w) + f_1'(u, v, w) = 0, \end{cases}$$

où f_i désigne une fonction homogène du degré i en u, v, w,

Les relations (109) ne peuvent pas non plus être des identités en u, v, w; en différentiant ces relations on obtient d'autres relations qui ont encore la même propriété, et ainsi de suite. Si ces nouvelles relations ne sont pas incompatibles avec les relations (108) et (109), ce que rien n'oblige à croire *a priori*, les fonctions inconnues u, v, w, dont dépend la solution du problème. sont données par le système (108) et (109). Il en résulte que *le réseau* B *cherché, s'il existe, est en nombre fini.*

En tenant compte du résultat du n° 25, on peut dire :

Les réseaux non réglés, projectivement déformables par une correspondance de la deuxième espèce, dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.

28. **Conditions d'applicabilité projective des deux réseaux non réglés donnés** [7]. — Nous nous donnons ici deux réseaux non réglés A, B et nous nous proposons :

1° De reconnaître s'ils sont projectivement applicables ;

2° Dans les cas où ils le seront, de déterminer la correspondance qui réalise l'application.

Supposons que le système de référence mobile attaché à chacun des réseaux A et B soit normal.

Si les deux réseaux sont projectivement applicables l'un sur l'autre, les invariants $\alpha + 2\mu$, $2\beta + \nu$ ont, d'après (103), les mêmes valeurs numériques en deux points correspondants des deux réseaux. Il en est de même pour tous les invariants qui en sont dérivés, en convenant d'appeler dérivés d'un invariant I les quantités définies par

$$dI = I_1\omega_1 + I_2\omega_2.$$

Posons, pour la simplicité d'écriture,

$$\alpha + 2\mu = h, \qquad 2\beta + \nu = k.$$

Cela étant, plusieurs cas sont à distinguer :

I. *Les invariants h et k du réseau* A *ne sont liés par aucune relation.* — Il faudra alors que les invariants correspondants h' et k' de B ne soient non plus liés par aucune relation. Formons alors pour chacun des réseaux les quatre invariants dérivés

$$h_1, \quad h_2, \quad k_1, \quad k_2.$$

Il faudra, pour l'applicabilité projective des deux réseaux que les quatre invariants h_1, h_2, k_1, k_2 soient, pour les deux réseaux, les mêmes fonctions de h, k.

Réciproquement, s'il en est ainsi, les deux réseaux sont projectivement applicables et l'on a sans aucune intégration la correspondance ponctuelle qui réalise l'application. En effet, établissons la correspondance ponctuelle définie par les relations

$$h' = h, \qquad k' = k,$$

on aura en même temps

$$h'_1 = h_1, \qquad h'_2 = h_2, \qquad k'_1 = k_1, \qquad k'_2 = k_2.$$

Or, de

$$dh = h_1\omega_1 + h_2\omega_2, \qquad dk = k_1\omega_1 + k_2\omega_2,$$
$$dh' = h'_1\Omega_1 + h'_2\Omega_2, \qquad dk' = k'_1\Omega_1 + k'_2\Omega_2,$$

on tire

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2,$$

et par suite la correspondance considérée réalise effectivement l'application des deux réseaux.

II. *Les invariants h et k de* A *sont liés par une relation et une seule.* — Il faudra alors que les invariants h' et k' de B soient liés par la même relation unique. Supposons, pour fixer les idées, que l'invariant h ne soit pas constant. Formons ses invariants dérivés h_1 et h_2. Il y aura deux cas à distinguer :

1° *Les invariants h_1 et h_2 ne sont pas tous les deux des fonctions de h.* — Supposons, par exemple, h_1 indépendant de h. Nous formerons les invariants dérivés de h_1, soient h_{11}, h_{12}. Il faudra et il suffira alors, pour l'applicabilité projective des deux réseaux, que h'_2, h'_{11}, h_{12} s'expriment en fonction de h', h'_1 de la même manière que h_2, h_{11}, h_{12} s'expriment en fonction de h, h_1. La correspondance ponctuelle qui réalise l'application des deux réseaux. est définie par les formules

$$h' = h, \qquad h'_1 = h_1.$$

2° *Les invariants h_1 et h_2 sont des fonctions de h.* — Il faudra que h'_1 et h'_2 soient aussi des fonctions de h' et s'expriment en fonction de h' de la même manière que h_1 et h_2 en fonction de h.

Réciproquement, s'il en est ainsi, supposons $h_1 \neq 0$, et considérons entre les deux réseaux A et B une correspondance définie par les équations

$$h' = h, \qquad \Omega_2 = \omega_2;$$

cette correspondance réalise l'application projective de deux réseaux, car des équations précédentes et des identités

$$dh = h_1\omega_1 + h_2\omega_2, \qquad dh' = h'_1\Omega_1 + h'_2\Omega_2,$$

on déduit

$$\Omega_1 = \omega_1.$$

La correspondance qui réalise l'application dépend donc d'une constante arbitraire.

Il semble que, pour obtenir cette correspondance. il faille intégrer une équation différentielle absolument quelconque, or, *on peut se ramener à des quadratures*. Cherchons, en effet, pour ω_2 un facteur intégrant de la forme $\rho(h)$. On a, d'après (29),

$$[\rho(h)\omega_2]' = -h\,\rho(h)[\omega_1\omega_2] + h_1\,\rho'(h)[\omega_1\omega_2];$$

il suffit donc de prendre

$$\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} = \frac{h}{h_1},$$

ce qui donne $\rho(h)$ par une quadrature.

III. *Les invariants h et k de* A *sont des constantes.* — Il faudra que h' et k' soient aussi constants et que les valeurs des constantes soient les mêmes.

Réciproquement. s'il en est ainsi, la correspondance définie par le système de Pfaff complètement intégrable

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2$$

réalise l'application. *Cette correspondance dépend des deux paramètres arbitraires.* On peut l'obtenir par des quadratures.

Supposons d'abord, en effet $h = k = 0$; on a alors

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0,$$

de sorte que si l'on détermine sur chaque réseau, par deux quadratures, les coordonnées curvilignes x, y définies par

$$dx = \omega_1, \qquad dy = \omega_2,$$
$$dX = \Omega_1, \qquad dY = \Omega_2,$$

la correspondance ponctuelle qui réalise l'application, est donnée par les équations

$$X = x + c_1, \qquad Y = y + c_2.$$

Supposons maintenant h et k non nuls tous les deux. Les formules

$$\omega'_1 = k[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = -h[\omega_1\omega_2],$$

permettent. par deux quadratures, de poser

$$h\omega_1 + k\omega_2 = dH, \qquad e^{H}\omega_2 = dy;$$

et en posant (si $h \neq 0$)

$$x = \frac{1}{h}(e^{H} - ky),$$

on a

$$\omega_1 = \frac{dx}{hx + ky}, \qquad \omega_2 = \frac{dy}{hx + ky}.$$

On obtiendra de même pour B deux coordonnées curvilignes X, Y. La correspondance qui réalise l'application, est alors

$$X = c_1 x - c_2 k, \qquad Y = c_1 y - c_2 h.$$

29. Réseaux non réglés admettant un groupe à deux paramètres de déformations projectives. — Ces réseaux, d'après ce qui précède, sont ceux pour lesquels $\alpha + 2\mu$, $2\beta + \nu$ sont constants. Pour les valeurs c_1, c_2 de ces constantes, les réseaux en question sont fournis par le système de Pfaff

$$(110) \quad \begin{cases} \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{11} = (c_1 - 2\mu)\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_{10} = 3\beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \\ \omega_{20} = \lambda\omega_1 + 3\mu\omega_2, \\ \omega_{22} = \mu\omega_1 + (c_2 - 2\beta)\omega_2. \end{cases}$$

Il conduit aux équations quadratiques extérieures

$$(111) \quad \begin{cases} [d\beta\omega_2] + \frac{1}{3}(2\lambda - \gamma - 3c_1\beta + c_1c_2 - 1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\mu\omega_1] - \frac{1}{3}(2\gamma - \lambda - 3c_2\mu + c_1c_2 - 1)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ 3[d\beta\omega_1] + [d\gamma\omega_2] + 3\,(\gamma\mu + 2c_2\beta - c_1\gamma - \mu)\,[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [d\lambda\omega_1] + 3[d\mu\omega_2] - 3\,(\beta\lambda + 2c_1\mu - c_2\lambda - \beta)\,[\omega_1\omega_2] = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que le système de Pfaff (110) est en involution et qu'il admet une solution dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Par suite, *les réseaux non réglés admettant un groupe à deux paramètres de déformations projectives dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument*. On voit, de plus, qu'*il y a deux familles de caractéristiques* définies par les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$: *ce sont les courbes des réseaux intégraux*.

Les réseaux non réglés admettant un groupe à deux paramètres de déformations projectives font partie des réseaux plus généraux que l'on appelle *asymptotico-isothermes* (n° 35).

CHAPITRE V.

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES INVARIANTES $\omega_1\omega_2$, $\omega_1^3 + \omega_2^3$ D'UN RÉSEAU NON RÉGLÉ [7].

30. Considérons un réseau non réglé A. Faisons correspondre à chacun de ses points, un système de référence normal. Nous avons vu, au numéro 9, que les formes différentielles quadrique et cubique

$$\varphi = \omega_1\omega_2, \qquad \psi = \omega_1^3 + \omega_2^3$$

sont des *invariants fondamentaux rationnels du réseau*.

La forme φ, égalée à zéro, donne les courbes du réseau; la forme ψ, égalée à zéro, donne les courbes de Darboux.

On peut remarquer que la forme φ est à un facteur constant près, le hessien de la forme cubique ψ des deux variables ω_1 et ω_2. Rappelons-nous encore que le rapport $\frac{\psi}{\varphi}$ des deux formes φ et ψ, est *l'élément linéaire projectif du réseau non réglé* A.

Ces formes φ et ψ posent un certain nombre de questions que nous allons rapidement passer en revue, parce que certaines d'entre elles ont un rapport étroit avec la théorie d'application projective. Remarquons auparavant que la forme ψ n'admet qu'un nombre fini de substitutions linéaires en ω_1 et ω_2 : ces substitutions se partagent en trois catégories, les unes reproduisant la forme φ, les autres multipliant la forme φ par l'une ou l'autre des racines cubiques imaginaires de l'unité.

On peut dire que, *la forme ψ étant donnée* a priori, *la forme φ est déterminée à une racine cubique près de l'unité*. Si l'on porte son attention sur l'équation $\psi = 0$, on voit que toute substitution linéaire qui laisse cette équation invariante, laisse également invariante l'équation $\varphi = 0$.

31. **Le théorème de M. Fubini.** — Le théorème qui constitue en quelque sorte la théorie de la déformation projective est le suivant :

Pour que deux réseaux non réglés soient projectivement applicables, il faut et il suffit que l'on puisse établir entre eux une correspondance ponctuelle transformant le rapport $\frac{\psi}{\varphi}$ des deux formes φ et ψ relatives au premier réseau dans le rapport $\frac{\psi}{\varphi}$ relatif au second réseau.

Il nous est facile de démontrer ce théorème.

D'abord la condition est nécessaire, car si deux réseaux A et B sont projectivement applicables, on peut choisir les systèmes de référence mobiles associés aux deux réseaux, de manière à avoir

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}.$$

Si donc le système de référence associé au réseau A est normal, celui associé au réseau B le sera aussi; par suite

$$\frac{\Omega_1^3 + \Omega_2^3}{\Omega_1 \Omega_2} = \frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{\omega_1 \omega_2}. \tag{112}$$

Réciproquement, supposons l'existence entre les deux réseaux d'une correspondance ponctuelle telle que l'on ait (112). On aura alors

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2,$$

et par suite

$$\Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}.$$

Les conditions d'applicabilité projectives sont donc réalisées.

32. Les réseaux non réglés admettant une forme ψ donnée à l'avance. — Toute forme cubique qui n'est ni un cube parfait ni divisible par un carré parfait peut évidemment se mettre sous la forme $\varpi_1^3 + \varpi_2^3$, en désignant par ϖ_1 et ϖ_2 deux formes linéaires convenablement choisies.

Les réseaux non réglés, s'il en existe, qui admettent pour la forme ψ cette forme donnée à l'avance, se partagent en trois catégories, suivant que la forme quadratique φ est égale à $\varpi_1\varpi_2$, $\varepsilon\varpi_1\varpi_2$ ou $\varepsilon^2\varpi_1\varpi_2$, ε étant une quelconque des racines cubiques de l'unité.

Les réseaux d'une même catégorie sont tous projectivement applicables les uns sur les autres. Il résulte immédiatement de là que *les réseaux non réglés admettant une forme cubique donnée, existent et dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

Mais, *il n'y a, en général, aucun réseau non réglé à invariants égaux admettant une forme cubique donnée.* Cela tient à ce que, si l'on désigne par ξ et η deux intégrales premières des équations $\varpi_1 = 0$ et $\varpi_2 = 0$, on peut prendre

$$\varpi_1 = f(\xi, \eta)\, d\xi, \qquad \varpi_2 = g(\xi, \eta)\, d\eta,$$

avec deux fonctions arbitraires de deux arguments; il est vrai que l'on peut particulariser f et g en remplaçant ξ par une fonction de ξ, et η par une fonction de η; mais cela ne change pas essentiellement l'arbitraire des éléments qui entrent dans ϖ_1 et ϖ_2. On peut dire, en somme, que *la forme cubique $\varpi_1^3 + \varpi_2^3$ dépend de deux fonctions arbitraires de deux arguments;* comme les réseaux non réglés à invariants égaux ne dépendent que d'une fonction arbitraire de deux arguments, il est évident qu'il n'y a, en général, aucun réseau non réglé à invariants égaux admettant une forme cubique donnée à l'avance.

33. Les transformations de réseaux non réglés qui conservent les lignes de Darboux. — On peut se proposer de déterminer *les réseaux non réglés pour lesquels, l'équation différentielle $\psi = 0$ des lignes de Darboux est donnée à l'avance.* Si l'un de ces réseaux est connu, tous les autres pourront être mis avec celui-là en correspondance ponctuelle conservant les lignes de Darboux. Réciproquement la recherche des réseaux non réglés B qui peuvent être mis avec un réseau non réglé donné A en correspondance ponctuelle conservant les lignes de Darboux, revient au problème énoncé.

Remarquons qu'une telle correspondance conserve également les lignes de Segre

$$\omega_1^3 - \omega_2^3 = 0$$

et plus généralement encore les courbes

$$\omega_1^3 + c^3\omega_2^3 = 0 \qquad (c = \text{const.} \neq 0), \tag{113}$$

qui sont définies géométriquement par la propriété que leur tangente forme un rapport anharmonique constant avec les tangentes de Darboux (ou de Segre). Si l'équation différentielle donnée est mise sous la forme

$$\varpi_1^3 + \varpi_2^3 = 0,$$

où ϖ et ϖ_2 sont des expressions de Pfaff formées au moyen de deux variables indépendantes ξ et η, il est évident que les réseaux cherchés seront donnés par l'intégration du système de Pfaff

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_1 = t\varpi_1, & \omega_2 = t\varpi_2. \end{array}\right. \tag{114}$$

Les équations quadratiques extérieures qu'entraînent ces équations, sont

$$(115)\qquad \left\{\begin{aligned} &3[\omega_{11}\omega_2]+[\omega_{10}\omega_2]=0,\\ &[\omega_{20}\omega_1]+3[\omega_{22}\omega_2]=0,\\ &\left[\left(\frac{dt}{t}+\omega_{11}-\omega_{00}-\frac{b}{t}\,\omega_2\right)\omega_1\right]=0,\\ &\left[\left(\frac{dt}{t}+\omega_{22}-\omega_{00}-\frac{a}{t}\,\omega_1\right)\omega_2\right]=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on désigne par a et b les coefficients qui interviennent dans les expressions

$$(116)\qquad \varpi'_1=b[\varpi_1\varpi_2],\qquad \varpi'_2=-a[\varpi_1\varpi_2].$$

Elles montrent que le système de Pfaff (114) est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et nous avons le résultat évident *a priori : Les réseaux non réglés, pour lesquels l'équation différentielle* $\psi=0$ *des lignes de Darboux est donnée à l'avance, dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.* Les caractéristiques sont données par les équations $\omega_1=0$ et $\omega_2=0$: ce sont les courbes des réseaux intégraux.

34. Proposons-nous maintenant de déterminer *les réseaux non réglés à invariants égaux par lesquels l'équation différentielle* $\psi=0$ *des lignes de Darboux est donnée à l'avance.* Ces réseaux sont évidemment donnés par l'intégration du système de Pfaff

$$(117)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{12}=\omega_1, && \omega_{21}=\omega_2,\\ &\omega_{11}=\alpha\omega_1+\beta\omega_2, && \omega_{10}=3\beta\omega_1+\gamma\omega_2,\\ &\omega_{20}=\gamma\omega_1+3\mu\omega_2, && \omega_{22}=\mu\omega_1+\nu\omega_2,\\ &\omega_1\;=t\varpi_1, && \omega_2\;=t\varpi_2.\end{aligned}\right.$$

Les équations quadratiques extérieures auxquelles conduisent ces équations sont

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &[d\alpha\omega_1]+[d\beta\omega_2]+(\alpha\beta+\alpha\nu-2\beta\mu+\gamma-1)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &3[d\beta\omega_1]+[d\gamma\omega_2]+3(4\beta^2+2\beta\nu-\alpha\gamma-\gamma\mu-\mu)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[d\gamma\omega_1]+3[d\mu\omega_2]-3(4\mu^2+2\alpha\mu-\gamma\nu-\beta\gamma-\beta)[\omega_1\omega_2]=0,\\ &[d\mu\omega_1]+[d\nu\omega_2]-(\mu\nu+\alpha\nu-2\beta\mu+\gamma-1)[\omega_1\omega_2]=0,\end{aligned}\right.$$

$$(118)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{dt}{t}+\overline{2\beta+\nu-\frac{b}{t}\,\omega_2}\right)\omega_1\right]=0,\\ &\left[\left(\frac{dt}{t}+\overline{\alpha+2\mu-\frac{a}{t}\,\omega_1}\right)\omega_2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Elles montrent que le système de Pfaff (117) n'est pas en involution. Nous pouvons d'après (118), poser

$$(119) \qquad \frac{dt}{t} = \left(\frac{a}{t} - \alpha - 2\mu\right)\omega_1 + \left(\frac{b}{t} - 2\beta - \nu\right)\omega_2;$$

cette équation entraîne l'équation quadratique extérieure

$$(120) \qquad [(d\alpha + 2\,d\mu)\omega_1] + [(2\,d\beta + d\nu)\omega_2] + f_1[\omega_1\omega_2] = 0,$$

où f_1 est une fonction finie des variables $\alpha, \ldots, \nu$.

Les équations (32) et (120) montrent que le système de Pfaff [(117) (119)] est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et l'on a le résultat suivant :

Les réseaux non réglés à invariants égaux pour lesquels l'équation différentielle $\psi = 0$ *des lignes de Darboux est donnée à l'avance. dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.* On peut voir facilement qu'*il y a cinq familles de caractéristiques : ce sont les deux familles* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, *de courbes des réseaux intégraux, et les trois familles* $\omega_1^3 + \omega_2^3 = 0$ *de lignes de Darboux.*

35. *Étant donnés deux réseaux* A *et* B, *peut-on reconnaître s'il existe entre ces deux réseaux une correspondance conservant les lignes de Darboux, et, dans l'affirmative, comment peut-on déterminer cette correspondance ?*

Supposons qu'on ait rapporté chacun de ces réseaux à un système de référence normal. La correspondance cherchée, si elle existe, sera donnée par deux relations de la forme :

$$(121) \qquad \Omega_1 = t\omega_1, \qquad \Omega_2 = t\omega_2,$$

qui entraînent, d'après (29).

$$(122) \qquad \frac{dt}{t} + h'\Omega_1 + k'\Omega_2 - h\omega_1 - k\omega_2 = 0,$$

où nous désignons par h, k les invariants $\alpha + 2\mu$, $2\beta + \nu$ du réseau A et par h', k' les invariants analogues à h, k relatifs à B. Cette dernière équation entraîne à son tour

$$(123) \qquad (k'_1 - h'_2)[\Omega_1\Omega_2] - (k_1 - h_2)[\omega_1\omega_2] = 0.$$

Cela posé, deux cas sont à distinguer :

1° *Si les invariants k_1 et h_2 relatifs à A sont égaux*, il faudra alors qu'il en soit de même pour B. Les équations (121) et (122) sont alors complètement intégrables. *Il y a une infinité de correspondances conservant les lignes de Darboux, et elles dépendent de trois constantes arbitraires.*

Remarquons que l'équation (122) s'intègre d'elle-même par deux quadratures, car $h\omega_1 + k\omega_2$ et $h'\Omega_1 + k'\Omega_2$ sont des différentielles exactes $-\frac{d\rho}{\rho}$, $-\frac{d\rho'}{\rho'}$. On a alors

$$t = C\frac{\rho'}{\rho};$$

les équations (121), qui prennent la forme

$$\frac{1}{\rho'}\Omega_1 = \frac{C}{\rho}\omega_1, \qquad \frac{1}{\rho'}\Omega_2 = \frac{C}{\rho}\omega_2,$$

s'intègrent par des nouvelles quadratures, car chacun des membres de ces équations est une différentielle exacte, puisqu'on a, par exemple,

$$\left(\frac{1}{\rho}\omega_1\right)' = \frac{1}{\rho}k[\omega_1\omega_2] - \frac{1}{\rho^2}[d\rho\omega_1] = \frac{1}{\rho}k[\omega_1\omega_2] - \frac{1}{\rho}[\omega_1(h\omega_1 + k\omega_2)] = 0.$$

Les ∞^3 correspondances cherchées s'obtiennent donc par des quadratures.

Remarquons qu'en posant

$$\frac{1}{\rho}\omega_1 = d\xi, \qquad \frac{1}{\rho}\omega_2 = d\eta,$$

l'équation des lignes de Darboux se réduit à la forme

$$d\xi^3 + d\eta^3 = 0, \tag{124}$$

et les correspondances entre les deux réseaux sont

$$\xi' = C\xi + c_1, \qquad \eta' = C\eta + c_2;$$

en réalité, ces correspondances sont données par les formules plus générales

$$\begin{aligned} \xi' &= C\varepsilon\xi + c_1, & \eta' &= C\varepsilon^2\eta + c_2 \\ \xi' &= C\varepsilon\eta + c_1, & \eta' &= C\varepsilon^2\xi + c^2 \end{aligned} \qquad (\varepsilon^3 = 1).$$

En particulier, tout réseau dont les deux invariants k_1 et h_2 sont égaux admet avec lui même ∞^3 correspondances laissant invariantes les lignes de Darboux. *Ces réseaux sont caractérisés par la propriété de l'équation de lignes de Darboux d'être réductible à la forme* (124); en effet cette propriété entraîne l'existence d'un facteur ρ tel que $\frac{1}{\rho}\omega_1$ et $\frac{1}{\rho}\omega_2$ soient des différentielles exactes; cette dernière propriété donne

$$\frac{1}{\rho}k[\omega_1\omega_2]+\frac{1}{\rho^2}[\omega_1\,d\rho]=0,\qquad \frac{1}{\rho}h[\omega_2\omega_1]+\frac{1}{\rho^2}[\omega_2\,d\rho]=0,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho}=-h\omega_1-k\omega_2;$$

le second membre étant une différentielle exacte, on doit avoir

$$h_2=k_1.$$

Ces réseaux ont été appelés par M. Fubini [1] *asymptotico-isotermes.* Ils dépendent évidemment d'une fonction arbitraire de deux arguments puisqu'ils correspondent à une même équation différentielle de lignes de Darboux. De même on voit que les réseaux asymptotico-isothermes à invariants égaux dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.

2° *Si l'on n'a pas* $h_2=k_1$, on ne devra pas avoir non plus $h'_2=k'_1$. L'équation (123), en tenant compte de (121), donne la valeur de t

$$t^2=\frac{k_1-h_2}{k'_1-h'_2}.$$

La correspondance cherchée, si elle existe, conserve donc les expressions de Pfaff

$$\varpi_1=\sqrt{k_1-h_2}\,\omega_1,\qquad \omega_2=\sqrt{k_1-h_2}\,\omega_2.$$

On est alors ramené à un problème classique. On formera pour chacun des réseaux les quantités a et b définies par

$$\varpi'_1=b[\varpi_1\varpi_2],\qquad \varpi'_2=-a[\varpi_1\varpi_2],$$

ainsi que les quantités a_1, a_2, b_1, b_2, ... qui en dérivent

$$\begin{aligned} da\; &= a_1\,\varpi_1+a_2\,\varpi_2,\\ db\; &= b_1\,\varpi_1+b_2\,\varpi_2,\\ da_1 &= a_{11}\varpi_1+a_{12}\varpi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si les quantités a et b ne sont liées par aucune relation, il faudra que les quantités a' et b' relatives au réseau B ne soient non plus liées par aucune relation; et pour l'existence de la correspondance cherchée, il faudra et il suffira que a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 soient les mêmes fonctions de a' et b' que a_1, a_2, b_1, b_2 le sont de a et b. Dans ce cas, la correspondance est unique et connue sans intégration par les relations

$$a' = a, \qquad b' = b.$$

Les autres cas se traitent de la même manière.

On peut remarquer ici que *les quantités a et b ne peuvent pas être constantes toutes les deux.*

On a, en effet

$$k - \frac{k_{12} - h_{22}}{2(k_1 - h_2)} = b\sqrt{k_1 - h_2},$$

$$h - \frac{k_{11} - h_{21}}{2(k_1 - h_2)} = a\sqrt{k_1 - h_2},$$

d'où

$$h\omega_1 + k\omega_2 - \frac{dk_1 - dh_2}{2(k_1 - h_2)} = a\varpi_1 + b\varpi_2;$$

or, le second membre serait une différentielle exacte si a et b étaient des constantes, comme le montre le calcul de son covariant bilinéaire, et le premier nombre ne peut pas l'être, car cela entraînerait $k_1 = h_2$.

On peut déduire de là en particulier que, *si un réseau n'est pas asymptotico-isotherme, il admet au plus avec lui même ∞^1 correspondances conservant les lignes de Darboux.*

36. **Les réseaux non réglés admettant une forme quadratique φ donnée à l'avance.** — On peut poser sur la forme quadratique φ, des problèmes analogues à ceux qui viennent d'être résolus.

Il n'y a pas lieu de chercher les réseaux pour lesquels l'équation différentielle $\varphi = 0$ est donnée à l'avance, car cette équation différentielle est pour tous les réseaux de la même forme

$$d\xi\, d\eta = 0.$$

Proposons-nous donc de chercher les réseaux admettant une forme quadratique φ donnée à l'avance, forme qu'on peut toujours supposer être

$$\varphi = \varpi_1\varpi_2,$$

où ϖ_1 et ϖ_2 désignent deux expressions de Pfaff données. Les réseaux cherchés s'obtiennent évidemment par l'intégration du système de Pfaff

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega_{12} = \omega_1, \qquad && \omega_{21} = \omega_2,\\ &\omega_1 = t\varpi_1, && \omega_2 = \frac{1}{t}\varpi_2. \end{aligned}\right.$$

Ce système conduit aux équations quadratiques extérieures

$$
(126)\qquad
\begin{cases}
3[\omega_{11}\omega_1] + [\omega_{10}\omega_2] = 0, \\
[\omega_{20}\omega_1] + [3\omega_{22}\omega_2] = 0, \\
\left[\left(\dfrac{dt}{t} + \omega_{11} - \omega_{00} - bt\omega_2\right)\omega_1\right] = 0, \\
\left[\left(\dfrac{dt}{t} - \omega_{22} + \omega_{00} + \dfrac{a}{t}\omega_1\right)\omega_1\right] = 0.
\end{cases}
$$

On voit ainsi que *les réseaux non réglés cherchés dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments*. Il y a deux *familles de caractéristiques* définies par les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$: *ce sont les courbes des réseaux intégraux*.

37. Cherchons maintenant *les réseaux non réglés à invariants égaux admettant la forme quadratique φ donnée à l'avance*. Ces réseaux sont fournis évidemment par l'intégration du système de Pfaff

$$
(127)\qquad
\begin{cases}
\omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\
\omega_{11} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, & \omega_{10} = 3\beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \\
\omega_{20} = \gamma\omega_1 + 3\mu\omega_2, & \omega_{22} = \mu\omega_1 + \nu\omega_2.
\end{cases}
$$

Il conduit aux équations quadratiques (32) et

$$
(128)\qquad
\begin{cases}
\left[\left(\dfrac{dt}{t} + \overline{2\beta + \nu - bt}\,\omega_2\right)\omega_1\right] = 0, \\
\left[\left(\dfrac{dt}{t} - \overline{\alpha + 2\mu - \dfrac{a}{t}}\,\omega_1\right)\omega_2\right] = 0.
\end{cases}
$$

Les équations (32) et (128) montrent que le système (127) n'est pas en involution. Nous pouvons, d'après (128), poser

$$
(129)\qquad \frac{dt}{t} = \left(\alpha + 2\mu - \frac{a}{t}\right)\omega_1 - (2\beta + \nu - bt)\omega_2;
$$

cette équation entraîne l'équation quadratique extérieure

$$
(130)\qquad [(d\alpha + 2\,d\mu)\omega_1] - [(2\,d\beta + d\nu)\omega_2] + f_1[\omega_1\omega_2] = 0,
$$

où f_1 est une fonction finie des variables $\alpha, \ldots, \nu$.

Les équations (32) et (130) montrent alors que le système de Pfaff [(127), (129)] est en involution et l'on a le résulsat suivant :

Les réseaux non réglés à invariants égaux admettant une forme quadratique φ donnée à l'avance, dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument. On voit de plus *qu'il y a cinq familles* *de caractéristiques : ce sont les deux familles* $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ *de courbes des réseaux intégraux et les trois familles* $\omega_1^3 - \omega_2^3 = 0$ *de lignes de Segre.*

38. *Étant donnés deux réseaux* A *et* B, *peut-on connaître s'il existe entre les deux réseaux une correspondance ponctuelle conservant la forme quadratique* φ, *et, dans l'affirmative, comment peut-on déterminer cette correspondance ?*

Supposons qu'on ait rapporté chacun de ces réseaux a un système de référence normal. La correspondance cherchée, si elle existe, sera donnée par deux relations

$$\Omega_1 = t\omega_1, \qquad \Omega_2 = \frac{1}{t}\omega_2, \tag{131}$$

qui entraînent

$$\frac{dt}{t} - h\,\Omega_1 + k'\Omega_2 + h\omega_1 - k\omega_2 = 0. \tag{132}$$

Cette dernière relation entraîne

$$(h'_2 + k'_1 - 2h'k') - (h_2 + k_1 - 2hk) = 0. \tag{133}$$

La quantité $h_2 + k_1 - 2hk$ est *la courbure de la forme quadratique* φ relative au réseau A. Posons, pour la simplicité d'écriture,

$$p = h_2 + k_1 - 2hk.$$

Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter.

I. *La courbure* p *de la forme quadratique* φ *relative à* A *n'est pas constante ;* il faudra alors que la courbure p' de la forme φ' relative à B ne le soit pas non plus. Formons les invariants dérivés p_1 et p_2 ; supposons, pour fixer les idées, que l'invariant p_1, ne soit pas nul. La relation

$$p_1 - tp'_1 = 0$$

donne alors la valeur de t. *La correspondance cherchée, si elle existe, conserve donc les expressions de Pfaff*

$$\varpi_1 = p_1\omega_1, \qquad \varpi_2 = \frac{1}{p_1}\omega_2.$$

On est alors ramené à un problème classique. On formera pour chacun des réseaux les quantités a et b définies par

$$\varpi'_1 = b[\varpi_1\varpi_2], \qquad \varpi'_2 = -a[\varpi_1\varpi_2],$$

ainsi que les quantités a_1, a_2, b_1, b_2, ... qui en dérivent. Si les quantités a et b ne sont liées par aucune relation, il faudra que les quantités a' et b' ne soient non plus liées par aucune relation, et, pour l'existence de la correspondance cherchée, il faudra et il suffira que a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 soient les mêmes fonctions de a' et b' que a_1, a_2, b_1, b_2 le sont de a et b. Dans ce cas, la correspondance est unique et connue sans intégration. Les autres cas se traitent de la même manière.

II. *La courbure de la forme quadratique* φ *relative à* A *est constante*; il faudra que la courbure de la forme φ' relative à B ait la même valeur constante. Les équations (131) et (132) sont alors complètement intégrables. *Il y a une infinité de correspondances conservant la forme quadratique* φ, *et elles dépendent de trois constantes arbitraires.*

Remarquons qu'*on peut obtenir ces correspondances par des quadratures, si la courbure de la forme quadratique* φ *est nulle.* En effet, $k\omega_2 - h\omega_1$ et $k'\Omega_2 - h'\Omega_1$ sont des différentielles exactes $-\frac{d\sigma}{\sigma}$ et $-\frac{d\sigma'}{\sigma'}$; on a alors

$$t = \mathrm{C}\frac{\sigma'}{\sigma};$$

les équations (131) qui prennent alors la forme

$$\frac{1}{\sigma'}\Omega_1 = \frac{\mathrm{C}}{\sigma}\omega_1, \qquad \mathrm{C}\sigma'\Omega_2 = \sigma\omega_2,$$

s'intègrent par des nouvelles quadratures, puisque chacun des membres de ces équations sont des différentielles exactes.

On peut remarquer qu'en posant

$$\frac{1}{\sigma}\omega_1 = d\xi, \qquad \sigma\omega_2 = d\eta,$$

la forme quadratique φ se réduit à la forme

(134) $$\varphi = d\xi\, d\eta$$

et les correspondances entre les deux réseaux sont

$$\xi' = \mathrm{C}\xi + c_1, \qquad \eta' = \frac{1}{\mathrm{C}}\eta + c_2;$$

en réalité, ces correspondances sont données par les formules plus générales

$$\xi' = C\varepsilon\xi + c_1, \qquad \eta' = \frac{1}{C}\varepsilon^2\eta + c_2,$$

$$\xi' = C\varepsilon\eta + c_1, \qquad \eta' = \frac{1}{C}\varepsilon^2\xi + c_2.$$

En particulier, *tout réseau pour lequel la forme quadratique* φ *est de courbure nulle admet avec lui-même* ∞^1 *correspondances laissant cette forme* φ *invariante*. Ces réseaux sont caractérisés par la propriété de la forme quadratique φ d'être réductibles à la forme (134).

CHAPITRE VI.

L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES RÉSEAUX PLANS RÉGLÉS.

I. — LES RÉSEAUX SIMPLEMENT RÉGLÉS.

39. **Le théorème de M. Fubini.** — *Pour que deux réseaux simplement réglés soient projectivement applicables, il faut et il suffit que l'on puisse établir entre eux une correspondance ponctuelle transformant l'élément linéaire projectif du premier réseau dans celui du second réseau.*

Supposons, en effet, deux réseaux simplement réglés A^1 et B^1 projectivement applicables, et admettons que nous ayons choisi le système de référence associé à A^1 de manière à avoir les relations (33). Le système de référence associé à B^1 qui réalise l'application est tel que

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}.$$

On aura donc

$$\Omega_{12} = 0, \qquad \Omega_{21} = \Omega_2$$

et par suite

$$\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1}. \tag{135}$$

Réciproquement, supposons qu'il soit possible d'établir une correspondance ponctuelle entre les deux réseaux transformant l'élément linéaire projectif de l'un dans celui de l'autre; nous pouvons admettre qu'on a, pour chacun des deux réseaux, particularisé le système de référence mobile de manière à avoir les relations (33); on aura alors pour toute variation permise de l'un ou de l'autre des systèmes de référence

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta\omega_1 = 2e_{00}\,\omega_1, & \delta\omega_2 = e_{00}\,\omega_2, \\ \delta\Omega_1 = 2e'_{00}\,\Omega_1, & \delta\Omega_2 = e'_{00}\,\Omega_2. \end{array}\right. \tag{136}$$

Or, l'égalité (135) entraîne

$$\Omega_1 = u^2 \omega_1, \qquad \Omega_2 = u \omega_2;$$

mais on peut, d'après (136), modifier le système de référence associé à B^1 de manière à avoir $u = 1$.

On aura donc

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}.$$

Les conditions d'applicabilité projective sont donc réalisées.

40. Le système de Pfaff des réseaux projectivement applicables sur un réseau simplement réglé donné. [3] — Soit A^1 un réseau simplement réglé pour lequel nous aurons complètement particularisé le système de référence mobile. Soit B^1 un réseau projectivement applicable sur A^1.

On aura, de la manière la plus générale possible, le réseau B^1 et, en même temps, la correspondance ponctuelle qui réalise l'application en intégrant le système de Pfaff

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}. \tag{88}$$

Il conduit, en tenant compte de (33), aux équations quadratiques extérieures

$$\left\{\begin{aligned} [\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] &= 0, \\ [\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] &= 0, \\ [\Omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] &= 0, \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] - [\omega_2(\omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] &= 0. \end{aligned}\right. \tag{137}$$

On voit bien, d'après (137), *que les réseaux projectivement applicables sur un réseau simplement réglé donné, dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

Les courbes $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ des réseaux intégraux sont les caractéristiques du système de Pfaff (88).

41. Le système de Pfaff des couples de réseaux simplement réglés projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce. — Il y a deux cas à distinguer :

I. *Les caractéristiques doubles sont les courbes* $\omega_1 = 0$;

II. *Les caractéristiques doubles sont les droites* $\omega_2 = 0$.

Dans le premier cas, le système de Pfaff

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ &\qquad \omega_{12} = 0, \qquad \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}, \end{aligned}\right. \tag{138}$$

et dans le second cas, le système de Pfaff

$$(139)\qquad \begin{cases} \Omega_1=\omega_1, \quad \Omega_2=\omega_2, \quad \Omega_{12}=\omega_{12}, \quad \Omega_{21}=\omega_{21}, \\ \omega_{12}=0, \quad \Omega_{11}-\Omega_{00}=\omega_{11}-\omega_{00}, \end{cases}$$

fournit tous les couples de réseaux simplement réglés projectivement applicables et, en même temps, pour chaque couple, la correspondance de la deuxième espèce qui réalise l'application.

Ils conduisent respectivement aux équations quadratiques extérieures

$$(140)\qquad \begin{cases} [\omega_1(\Omega_{11}-\Omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00})]=0, \\ [\omega_2(\Omega_{10}-\omega_{10})]=0, \\ [\omega_1(\Omega_{20}-\omega_{20})]-[\omega_{21}(\Omega_{11}-\Omega_{00}-\omega_{11}+\omega_{00})]=0, \\ [\omega_1(\Omega_{10}-\omega_{10})]+2[\omega_2(\Omega_{20}-\omega_{20})]=0, \\ [\omega_2\omega_{10}]=0 \end{cases}$$

et

$$(141)\qquad \begin{cases} [\omega_2(\Omega_{22}-\Omega_{00}-\omega_{22}+\omega_{00})]=0, \\ [\omega_2(\Omega_{10}-\omega_{10})]=0, \\ [\omega_1(\Omega_{20}-\omega_{20})]+[\omega_{21}(\Omega_{22}-\Omega_{00}-\omega_{22}+\omega_{00})]=0, \\ 2[\omega_1(\Omega_{10}-\omega_{10})]+[\omega_2(\Omega_{20}-\omega_{20})]=0, \\ [\omega_2\omega_{10}]=0. \end{cases}$$

On voit, d'après (140) et (141), que chacun des systèmes de Pfaff (138) et (139) est en involution et admet une solution générale dépendant de cinq fonctions arbitraires d'un argument.

Le système de Pfaff (138) *possède deux familles de caractéristiques : ce sont les courbes* $\omega_1=0$ *et les droites* $\omega_2=0$ *des réseaux intégraux.* Une solution de ce système sera *singulière*, si l'on a

$$\Omega_{11}-\omega_{00}=\omega_{11}-\omega_{00}.$$

Le système de Pfaff (139) *ne possède qu'une famille de caractéristiques : la famille de droites* $\omega_2=0$ *des réseaux intégraux.* Une solution de ce système sera singulière, si l'on a

$$\Omega_{22}-\Omega_{00}=\omega_{22}-\omega_{00}.$$

On voit, comme au n° **25**, *que les solutions singulières de chacun des deux systèmes de Pfaff* (138) *et* (139) *sont formées par un réseau simplement réglé quelconque* A' *et un réseau* B' *se déduisant de* A' *par une transformation projective.*

Tout couple de réseaux simplement réglés distincts projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce, provient donc, dans l'un et l'autre cas, d'une solution générale.

Par suite, *les couples de réseaux simplement réglés distincts projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce, dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.*

Il en résulte immédiatement que *les réseaux simplement réglés projectivement déformables par une correspondance de la deuxième espèce sont exceptionnels* : sinon, en effet, les couples de réseaux simplement réglés distincts projectivement applicables, par une correspondance de la deuxième espèce, dépendraient au moins d'une fonction arbitraire de deux arguments.

42. — Le système de Pfaff des réseaux projectivement applicables sur un réseau simplement réglé donné par une correspondance de la deuxième espèce. — Soit A' un réseau simplement réglé pour lequel nous aurons complètement particularisé le système de référence mobile. Soit B' un réseau projectivement applicable par une correspondance de la deuxième espèce sur A'.

I. On aura, de la manière la plus générale possible, le réseau B' et la correspondance de la deuxième espèce qui réalise l'application et qui admet les courbes $\omega_1 = 0$ comme caractéristiques doubles, en intégrant le système de Pfaff

$$(142)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00}. \end{array}\right.$$

Il conduit, en tenant compte de (33), aux équations quadratiques extérieures

$$(143)\qquad \left\{\begin{array}{r} [\omega_1(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] - [\omega_2(\Omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{00})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + 2[\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations montrent que le système de Pfaff (142) n'est pas en involution, et permettent de poser

$$(144)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} + u\omega_1, \\ \Omega_{10} = \omega_{10} + 2v\omega_2, \\ \Omega_{20} = \omega_{20} + v\omega_1 - u\omega_2. \end{array}\right.$$

Ces équations entraînent les équations quadratiques extérieures

$$(145)\qquad \left\{\begin{array}{r} [\omega_1(du - u\overline{\omega_{11} - \omega_{00}})] - 3v[\omega_1\omega_2] = 0, \\ 2[\omega_2(dv + 3v\omega_{00})] + u[\omega_1(\omega_{10} + 2v\omega_2)] = 0, \\ [\omega_1(dv + 3v\omega_{00})] - [\omega_2(du - u\overline{\omega_{11} - \omega_{00}})] + 3u[\omega_2\omega_{22}] = 0. \end{array}\right.$$

1° *Cas général.* — Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A^1, satisfont aux équations (33), (37). Les équations (145) permettent alors de poser

$$(146) \qquad \left\{ \begin{aligned} du - u(\omega_{11} - \omega_{00}) &= w\omega_1 + 3v\omega_2, \\ dv + 3v\omega_{00} &= \frac{1}{2}u(\gamma + 2v)\omega_1 + (3\mu u - w)\omega_2. \end{aligned} \right.$$

Ces équations entraînent

$$(147) \qquad \begin{aligned} dw &- 2w(\omega_{11} - \omega_{00}) \\ &= \Big[-3\mu u^2 - 3v^2 + uw \\ &\quad + \left(6\mu\overline{\alpha - \mu} - \frac{3}{2}\beta\gamma - \frac{\gamma_2}{2} + 3\mu_1\right)u + 3\left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right)v + 6\mu w\Big]\omega_1 \\ &\quad + \left[3uv + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)u\right]\omega_2, \end{aligned}$$

et celle-ci conduit enfin à la relation

$$(148) \quad (3\mu\overline{\nu + 2\beta} + 3\mu_2 + 2\gamma - 1)u^2 + 9\nu v^2 + 18\mu uv - 6vw + f_1(u, v, w) = 0,$$

où f_1 désigne une fonction homogene du premier degré en u, v, w.

La relation (148) ne peut pas être une identité en u, v, w; elle donne par différentiation, les relations

$$(149) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 18v^3 + 18\nu uv^2 + 36\mu u^2 v - 12uvw + f_2(u, v, w) + f'_1(u, v, w) = 0, \\ & -18uv^2 + f''_2(u, v, w) + f''_1(u, v, w) = 0, \end{aligned} \right.$$

où f_i désigne une fonction homogène du degré i en u, v, w. Les relations (149) ne peuvent pas non plus être des identités en u, v, w; elles donnent par différentiation d'autres relations qui ont encore la même propriété, et ainsi de suite. Si ces nouvelles relations ne sont pas incompatibles avec (148) et (149), ce que rien n'oblige à croire *a priori*, les fonctions inconnues u, v, w, dont dépend la solution du problème, sont données par les équations (148) et (149).

Par suite, *le réseau* B^1 *cherché, s'il existe, est en nombre fini.*

2° *Cas particuliers.* — *a.* Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A^1, satisfont aux équations (33) et (41). Les équations (145) permettent alors de poser

$$(150) \qquad \left\{ \begin{aligned} du - u(\omega_{11} - \omega_{00}) &= w\omega_1 + 3v\omega_2, \\ dv + 3v\omega_{00} &= \frac{1}{2}u(\gamma + 2v)\omega_1 + (3u - w)\omega_2. \end{aligned} \right.$$

Ces équations entraînent

$$(151)\quad dw - 2w(\omega_{11} - \omega_{00})$$
$$= \left[-3u^2 - 3v^2 + uw - \frac{1}{2}(\beta\gamma + \gamma_2)u - \frac{9}{2}\gamma v + 6w\right]\omega_1 + \left(3uv - \frac{\gamma}{2}u\right)\omega_2,$$

et celle-ci conduit à la relation

$$(152)\qquad (3.\overline{2\beta + \nu} + 2\gamma)u^2 + 9\nu v^2 + 18uv - 6vw + f_1(u, v, w) = 0.$$

Cette relation entraîne par différentiation, les deux relations

$$(153)\qquad \begin{cases} 18v^3 + 18\nu uv^2 + 36u^2v - 12uvw + f'_2(u, v, w) + f'_1(u, v, w) = 0, \\ -18uv^2 + f''_2(u, v, w) + f''_1(u, v, w) = 0. \end{cases}$$

On voit bien que dans ce cas aussi, *le réseau cherché* B', *s'il existe, est en nombre fini.*

b. Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A', satisfont aux équations (33) et (45). Les équations (145) permettent de poser

$$(154)\qquad \begin{cases} du - u(\omega_{11} - \omega_{00}) = w\omega_1 + 3v\omega_2, \\ dv + 3v\omega_{00} = \dfrac{1}{2}u(1 + 2v)\omega_1 - w\omega_2. \end{cases}$$

Ces équations entraînent

$$(155)\quad dw - 2w(\omega_{11} - \omega_{00}) = \left(-3v^2 + uw - \frac{1}{2}\beta u - \frac{9}{2}v\right)\omega_1 + \left(3uv - \frac{u}{2}\right)\omega_2,$$

et celle-ci conduit à la relation

$$(156)\qquad 2u^2 + 9\nu v^2 - 6vw + f_1(u, v, w) = 0,$$

qui entraîne elle-même les relations

$$(157)\qquad \begin{cases} 18v^3 + 18\nu uv^2 - 12uvw + f'_2(u, v, w) + f'_1(u, v, w) = 0, \\ -18uv^2 + f''_2(u, v, w) + f''_1(u, v, w) = 0. \end{cases}$$

Par suite, *le réseau* B' *cherché, s'il existe, est en nombre fini.*

c. Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A', satisfont aux équations (33) et (50).

On peut alors, d'après (145), poser

$$(158)\qquad \begin{cases} du - u(\omega_{11} - \omega_{00}) = w\omega_1 + 3v\omega_2, \\ dv + 3v\omega_{00} = uv\omega_1 - w\omega_2. \end{cases}$$

Ces équations entraînent l'équation

$$dw - 2w(\omega_{11} - \omega_{00}) = (-3v^2 + uw)\omega_1 + 3uv\,\omega_2, \tag{159}$$

et celle-ci conduit à

$$qv^2 - 6vw = 0. \tag{160}$$

Il y a donc deux cas possibles : $v = 0$ ou $3v - 2w = 0$.

Mais, en réalité, il n'y en a qu'un seul. En effet, en différentiant l'équation

$$3v - 2w = 0,$$

on obtient

$$v = 0.$$

Ceci posé, on a alors, d'après (158),

$$v = 0, \qquad w = 0$$

et

$$du = u(\omega_{11} - \omega_{00}). \tag{161}$$

La fonction inconnue u, dont dépend la solution du problème, est donc donnée par l'équation différentielle complètement intégrable (161),

Par suite, *le réseau* B^1, *cherché existe et dépend d'une constante arbitraire.*

d. Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A^1, satisfont aux équations

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{21} = \omega_2, \qquad \omega_{10} = 0, \qquad \omega_{20} = 0, \\ \qquad\qquad \omega_{00} = \omega_{11} = \omega_{22} = 0. \end{array}\right. \tag{162}$$

On peut alors, d'après (145), poser

$$\left\{\begin{array}{l} du = w\omega_1 + 3v\,\omega_2, \\ dv = uv\,\omega_1 - w\,\omega_2. \end{array}\right. \tag{163}$$

Ces équations entraînent l'équation

$$dw = (-3v^2 + uw)\omega_1 + 3uv\,\omega_2, \tag{164}$$

et celle-ci conduit elle même à la relation

$$vw = 0. \tag{165}$$

On doit donc avoir :

$$v = 0 \qquad \text{ou} \qquad w = 0,$$

mais, d'après (163) et (164). chacune de ces deux relations entraîne l'autre.

Par conséquent, nous avons

$$v = 0, \qquad w = 0,$$

(166) $$du = 0.$$

Le réseau B^1 *cherché existe et dépend d'une constante arbitraire.*

En posant

$$u = c^2,$$
$$\omega_1 = dt_1, \qquad \omega_2 = dt_2,$$

nous avons

(167) $$\begin{cases} dB = -\frac{1}{3}c^2\,dt_1 B + dt_1 B_1 + dt_2 B_2, \\ dB_1 = \frac{2}{3}c^2\,dt_1 B_1, \\ dB_2 = -c^2\,dt_2 B + dt_2 B_1 - \frac{c^2}{3}\,dt_1 B_2. \end{cases}$$

Les équations (167) s'intègrent sans difficulté.

On trouve, en effet, successivement

$$B_1 = e^{\frac{2}{3}c^2 t_1} C_1,$$

$$B_2 = e^{-\frac{1}{3}c^2 t_1}(e^{ict_2} C + e^{-ict_2} C_2),$$

et enfin

$$B = \frac{1}{c^2} e^{-\frac{1}{3}c^2 t_1}(-ic\, e^{ict_2} C + e^{c^2 t_1} C_1 + ic\, e^{-ict_2} C_2),$$

où C, C_1, C_2 sont trois points fixes quelconques.

On a ainsi les coordonnées fixes d'un point du réseau B^1 en fonction des deux paramètres.

(168) $$x_0 = -ic\, e^{ict_2}, \qquad x_1 = e^{c^2 t_1}, \qquad x_2 = ic\, e^{-ict_2},$$

x_0, x_1, x_2 étant les coordonnées homogènes du point B générateur du réseau B^1.

Pour obtenir (168), on suppose évidemment $c \neq 0$, c'est-à-dire B^1 distinct de A^1.

On voit, d'après (168). que les courbes $t_2 =$ const. sont des droites passant par le point fixe C_1, et que les courbes $t_1 =$ const. sont des coniques

$$x_0 x_2 - c^2 e^{-2c^2 t_1} x_1^2 = 0$$

tangentes, en C, à la droite $[C C_1]$ et, en C_2, à la droite $[C_1 C_2]$.

II. On aura, de la maniere la plus générale possible, le réseau B' et la correspondance de la deuxieme espece qui réalise l'application et qui admet les droites $\omega_2 = 0$ comme caractéristiques doubles, en intégrant le systeme de Pfaff

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \Omega_{12} = \omega_{12}, \qquad \Omega_{21} = \omega_{21}, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00}. \end{array}\right. \tag{169}$$

Les équations quadratiques extérieures auxquelles il conduit, sont, en tenant compte de (33),

$$\left\{\begin{array}{r} [\omega_2(\Omega_{22} - \Omega_{00} - \omega_{22} + \omega_{00})] = 0, \\ [\omega_2(\Omega_{10} - \omega_{10})] = 0, \\ [\omega_1(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0, \\ 2[\omega_1(\Omega_{10} - \omega_{10})] + [\omega_2(\Omega_{20} - \omega_{20})] = 0. \end{array}\right. \tag{170}$$

Elles montrent que le systeme de Pfaff (169) n'est pas en involution, et permettent de poser

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} + u\,\omega_2, \\ \Omega_{10} = \omega_{10} + v\,\omega_2, \\ \Omega_{20} = \omega_{20} + 2v\,\omega_1. \end{array}\right. \tag{171}$$

Ces équations entraînent les équations quadratiques extérieures

$$[\omega_2(du - u\overline{\omega_{22} - \omega_{00}})] + 3v[\omega_1\omega_2] = 0, \tag{172}$$

$$\left\{\begin{array}{r} [\omega_2(dv + 3v\,\omega_{00})] = 0. \\ 2[\omega_1(dv + 3v\,\omega_{00})] + u[\omega_2(\omega_{20} + 2v\,\omega_1)] = 0. \end{array}\right. \tag{173}$$

1° *Cas général.* — Les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché au réseau A', satisfont aux équations (33) et (37).

Les équations (173) permettent alors de poser

$$dv + 3v\,\omega_{00} = \frac{1}{2}u(1 + 2v)\,\omega_2, \tag{174}$$

cette équation entraîne, en tenant compte de (172), la relation

$$2v^2 + (3 - 2\gamma)v + \alpha u = 0, \tag{175}$$

qui ne peut pas être une identité en u, v.

En différentiant la relation (175), on obtient

$$12\alpha v^2 + 6\alpha(1 - 2\gamma)v - (\alpha_1 + \alpha\overline{\mu - \alpha})u = 0. \tag{176}$$

On voit, d'après (176), qu'il y a lieu de distinguer le cas $\alpha \neq 0$ et le cas $\alpha = 0$.

Cas $\alpha \neq 0$. — L'équation (176) ne peut pas, dans ce cas, être une identité en u, v. *On voit bien que le réseau* B^1 *cherché, s'il existe, est en nombre fini.*

Ce cas constitue le cas le plus général ; par suite, en tenant compte des résultats obtenus aux nos 41 et 42 (cas général), on peut dire :

Les réseaux simplement réglés projectivement déformables par une correspondance de la deuxième espèce dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.

Cas $\alpha = 0$. — On doit, d'après (175), avoir

$$v = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad v = \gamma - \frac{3}{2}.$$

Si $v = 0$, on aura, d'après (174),

$$u = 0.$$

Le réseau B^1 *cherché se déduit alors de* A^1 *par une transformation projective.*

Si $v = \gamma - \frac{3}{2}$, le système de Pfaff [(169), (171)] conduit alors à la seule équation quadratique extérieure (172). Il est donc en involution et on a le résultat suivant :

Le réseau B^1 *cherché dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.*

2° *Cas particulier.* — Pour tous les cas particuliers a, b, c, d, les équations (173) permettent de poser

$$dv + 3v\omega_{00} = uv\omega_2. \tag{177}$$

En formant le covariant bilinéaire de cette équation, on obtient

$$v[\omega_1(\omega_{10} - v\omega_2)] = 0. \tag{178}$$

On doit donc avoir, d'après (178),

si A^1 appartient à la catégorie a :

$$v = 0 \qquad \text{ou} \qquad v = \gamma;$$

si A^1 appartient à la catégorie b :

$$v = 0 \qquad \text{ou} \qquad v = 1;$$

si A^1 appartient à la catégorie c ou d :

$$v = 0.$$

Dans tous les cas, le système de Pfaff (169) et (171) conduira à la seule équation quadratique extérieure (172). Il est donc en involution. Par suite. *le réseau* B^1 *cherché dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.*

43. Conditions d'applicabilité projective des deux réseaux simplement réglés donnés. — Soient donnés maintenant deux réseaux simplement réglés A^1 et B^1. Il s'agit de reconnaître s'ils sont projectivement applicables, et, dans l'affirmative, de déterminer la correspondance ponctuelle qui réalise l'application.

Supposons que le système de référence mobile attaché à chacun de ces réseaux soit complètement particularisé. Posons

$$\omega'_1 = k[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = -h[\omega_1\omega_2];$$

nous aurons, dans le cas général :

$$h = \mu - \alpha, \qquad k = -(2\beta + \nu),$$

dans le cas particulier a :

$$h = 0, \qquad k = -(2\beta + \nu),$$

dans le cas particulier b :

$$h = 0, \qquad k = -(2\beta + \nu),$$

dans le cas particulier c :

$$h = 0, \qquad k = -(2\beta + 1),$$

dans le cas particulier d :

$$h = 0, \qquad k = 0.$$

Si les réseaux A^1 et B^1 sont projectivement applicables, les invariants fondamentaux h et k ont les mêmes valeurs numériques en deux points correspondants de ces réseaux. Il en est de même pour tous les invariants qui en sont dérivés.

Réciproquement, *si les deux réseaux simplement réglés sont tels que l'on puisse établir entre eux une correspondance ponctuelle* *conservant les valeurs numériques des invariants h et k, ces deux réseaux sont projectivement applicables.*

En considérant les invariants dérivés de h et k, le problème posé se traite exactement de la même maniere qu'au n° **28**.

II. — RÉSEAUX DOUBLEMENT RÉGLÉS.

44. Theoreme de M. Fubini. — Les réseaux doublement réglés ayant tous un élément linéaire projectif identiquement nul, le théorème de M. Fubini s'énonce ainsi :

Les réseaux doublement réglés sont tous projectivement applicables les uns sur les autres, et. pour réaliser l'application, il suffit de faire correspondre les droites des deux réseaux suivant les lois arbitraires.

En effet, revenons au n° 20. Si les deux réseaux sont doublement réglés, la condition d'applicabilité projective $g_1 = 0$, $f_2 = 0$ est remplie, quelle que soit la correspondance entre ces deux réseaux. pourvu qu'elle porte les droites de l'un dans celles de l'autre.

45. Les couples de réseaux doublement reglés projectivement applicables par une correspondance de la deuxième espèce [4]. — On peut toujours supposer que les caractéristiques doubles de la correspondance sont les droites $\omega_1 = 0$. Le système de Pfaff

$$(179) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_2 = \omega_2, & \Omega_{12} = \omega_{12} & \Omega_{21} = \omega_{21}. \\ \omega_{12} = 0 & \omega_{21} = 0. & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} & \end{array}\right.$$

donne alors. de la manière la plus générale possible, les couples de réseaux doublement réglés projectivement applicables et, en même temps, la correspondance de la deuxième espèce qui réalise l'application.

Le système de Pfaff (179) a été étudié par M. Boruvka. D'après lui, deux cas seulement peuvent se présenter :

1° On a

$$(180) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \Omega_{00} = \omega_{00} + \omega_1 & \Omega_{22} = \omega_{22} + \omega_1, \\ \Omega_{10} = \omega_{10}. & \Omega_{20} = \omega_{20}, \\ \omega_{10} = 0, & \end{array}\right.$$

avec la condition d'intégrabilité

$$(181) \qquad [\omega_1 \omega_{20}] = 0, \qquad [\omega_1(\omega_{11} - \omega_{00})] = 0.$$

Les couples de réseaux cherchés dépendent donc, dans ce cas, de deux fonctions arbitraires d'un argument.

2° On a

$$(182)\quad \begin{cases} \Omega_{00} = 0, \quad \Omega_{22} = \omega_{22} + \omega_1, \quad \Omega_{10} = 2\omega_2, \quad \Omega_{20} = 2\omega_1, \\ \omega_{10} = 0, \quad \omega_{20} = \omega_1, \quad \omega_{00} = -\omega \quad \omega_{11} = (u+1)\omega_1 + \omega_2 \end{cases}$$

avec la condition d'intégrabilité.

$$(183)\qquad [\omega_1\, du] - 2u[\omega_1 \omega_2] = 0.$$

Les couples de réseaux cherchés dépendent donc, dans ce cas, d'une fonction arbitraire d'un argument.

CHAPITRE VII.

L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DES RÉSEAUX A INVARIANTS ÉGAUX.

46. Considérons un réseau plan A et une surface non développable que nous désignerons par son point générateur M. Supposons qu'il existe entre A et M une correspondance point par point, telle que les droites joignant les points correspondants passent par un point fixe M_3. Il est évident que le point M_3 ne peut être situé ni dans le plan du réseau ni dans tous les plans tangents à la surface.

Faisons correspondre à tout point A du réseau, un système de référence mobile A, A_1, A_2. De même, associons au point correspondant M de la surface, un système de référence mobile M, M_1, M_2, M_3, tel que les droites [MA], [M_1A_1], [M_2A_2] passent par le point fixe M_3, et, que le plan [MM_1M_2] soit tangent en M à la surface. Nous poserons, de plus

$$(1)' \qquad [MM_1M_2M_3] = 1$$

Le système de référence mobile étant choisi pour le réseau A, le système de référence attaché à M dépend alors de trois paramètres. Or, les points M_1, M_2, M_3, n'étant définis que par leurs positions, on peut disposer de ces paramètres, de manière à avoir

$$(184) \qquad \varpi_1 = \omega_1 \qquad \varpi_2 = \omega_2,$$

en désignant par ϖ_{hk} ($h, k = 0, 1, 2, 3$) les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile attaché à la surface.

Les expressions ϖ_{hk} satisfont évidemment *aux équations de structure*

$$(4)' \qquad \varpi'_{hk} = \sum_{i=0} [\varpi_{hi}\varpi_{ik}],$$

analogues à (4).

Cela posé, nous avons

$$(3)' \qquad \varpi_{00} + \varpi_{11} + \varpi_{22} + \varpi_{33} = 0,$$

$$(185) \qquad \begin{cases} \varpi_{03} = 0, \\ \varpi_{30} = 0, \quad \varpi_{31} = 0, \quad \varpi_{32} = 0; \end{cases}$$

et les relations

$$(186) \qquad \begin{cases} A = \tau M + \xi M_3, \\ A_1 = \tau M_1 + \eta M_3, \\ A_2 = \tau M_2 + \zeta M_3 \end{cases}$$

donnent, par différentiation, les équations

$$(187) \qquad \begin{cases} \varpi_{12} = \omega_{12}, \quad \varpi_{21} = \omega_{21}, \\ \varpi_{00} - \omega_{00} = \varpi_{11} - \omega_{11} = \varpi_{22} - \omega_{22}, \\ \varpi_{10} = \omega_{10}, \quad \varpi_{20} = \omega_{20} \end{cases}$$

et le système complètement intégrable

$$(188) \qquad \begin{cases} d\tau + \tau(\varpi_{00} - \omega_{00}) = 0, \\ d\xi + \xi(\varpi_{33} - \omega_{00}) - \eta\omega_1 - \zeta\omega_2 = 0, \\ d\eta - \xi\omega_{10} + \eta(\varpi_{33} - \omega_{11}) - \zeta\omega_{12} + \tau\varpi_{13} = 0, \\ d\zeta - \xi\omega_{20} - \eta\omega_{21} + \zeta(\varpi_{33} - \omega_{22}) + \tau\varpi_{23} = 0. \end{cases}$$

47. La première des équations (185) conduit à l'équation quadratique extérieure

$$(189) \qquad [\varpi_1 \varpi_{13}] + [\varpi_2 \varpi_{23}] = 0,$$

qui permet de poser

$$\varpi_{13} = c_1 \varpi_1 + c \varpi_2, \qquad \varpi_{23} = c \varpi_1 + c_2 \varpi_2.$$

L'équation

$$(190) \qquad \varpi_1 \varpi_{13} + \varpi_2 \varpi_{23} = c_1 \varpi_1^2 + 2 c \varpi_1 \varpi_2 + c_2 \varpi_2^2 = 0,$$

définit les *asymptotiques* de la surface M. En effet, une direction asymptotique est caractérisée par la circonstance que non seulement M et dM, mais aussi le point d^2M est situé dans le plan tangent $[MM_1M_2]$. Or, on a

$$d^2M = (\ldots)M + (\ldots)M_1 + (\ldots)M_2 + (\varpi_1\varpi_{13} + \varpi_2\varpi_{23})M_3,$$

ce qui prouve que (190) est bien la condition cherchée.

Remarquons que, le système de référence attaché au réseau A étant choisi, le système de référence attaché à la surface M dépendrait d'un paramètre arbitraire. En effet, les équations (184), (185), (187) seront respectées, si l'on prend ρM_3 au lieu de M_3. Il en résulte que les coefficients c, $c_1 c_2$ ne sont déterminés que par leurs rapports $c : c_1 : c_2$.

Supposons maintenant que le système de référence mobile attaché au réseau A soit *semi-normal. Pour que les asymptotiques de la surface* M *et les courbes du réseau* A *se correspondent, il faut et il suffit que l'on ait* $c_1 = c_2 = 0$. On peut alors, d'après la remarque précédente, prendre $c = 1$.

On a donc

(191) $$\varpi_{13} = \varpi_2, \qquad \varpi_{23} = \varpi_1 ;$$

ces équations entraînent

(192) $$\varpi_{22} + \varpi_{11} = 0,$$

et celle-ci conduit à l'équation quadratique extérieure

$$[\varpi_1 \varpi_{10}] + [\varpi_2 \varpi_{20}] = 0,$$

ou bien

(193) $$[\omega_1 \omega_{10}] + [\omega_2 \omega_{20}] = 0.$$

Par suite, on peut dire :

Si un réseau est la projection des asymptotiques d'une surface non développable d'un point fixe sur un plan ne contenant pas ce point, il est à invariants égaux [5].

Inversement, soit A un réseau à invariants égaux. Faisons correspondre à chacun de ses points un système de référence complètement particularisé. Soit M_3 un point fixe non situé dans le plan de A. Soit enfin M une surface non développable telle que A soit la projection de ses asymptotiques du point M_3. On aura, de la manière la plus générale possible, la surface M et les systèmes de référence mobiles attachés à lui, en intégrant le système de Pfaff (188) et en tenant compte des relations (184), (185), (187), (191), (192). Or ce système est complètement intégrable, et sa solution générale dépend de quatre constantes arbitraires (indépendamment des onze constantes qui fixent la position du réseau A dans son plan et du point M_3 dans l'espace projectif).

Par suite, pour chaque position du réseau à invariants égaux A *et du point fixe* M_3 *non situé dans le plan de* A, *il y a* ∞^4 *manières de construire la figure formée de* A, M_3 *et une surface* M *telle que* A *soit la projection de ses asymptotiques de* M_3. Les relations (184), (185), (187), (191), (192) montrent d'ailleurs que les surfaces M de toutes ces figures sont, quelles que soient les positions du réseau à invariants égaux A et du point fixe M_3, projectivement égales. De sorte que, *étant donné un réseau à invariants égaux, il n'y a qu'une seule surface non développable dont il soit la projection des asymptotiques, d'un point fixe non situé dans son plan.*

48. Soit A un réseau à invariants égaux. Soit M la surface non développable qui lui correspond. Nous avons vu que l'on peut obtenir les systèmes de référence mobiles associés à A et M, de manière à avoir

$$(194)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \varpi_1 = \omega_1, & \varpi_2 = \omega_2, & \varpi_3 = 0, & & \\ \varpi_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, & & & \\ \varpi_{12} = \omega_{12}, & \varpi_{21} = \omega_{21}, & \omega_{12} = h_1\omega_1, & \omega_{21} = k_2\omega_2, & \\ \multicolumn{3}{l}{\varpi_{00} - \omega_{00} = \varpi_{11} - \omega_{11} = \varpi_{22} - \omega_{22},} & \varpi_{10} = \omega_{10}, & \varpi_{20} = \omega_{20}, \\ \varpi_{30} = 0, & \varpi_{31} = 0, & \varpi_{32} = 0, & \varpi_{22} = \varpi_{11} = 0. & \end{array}\right.$$

On voit, d'après (194), que si A est non réglé, simplement ou doublement réglé, M est aussi non réglé, simplement ou doublement réglé, et inversement.

a. Soit N une surface projectivement applicable sur M. La condition d'applicabilité projective [7] est que, le système de référence mobile étant choisi pour la surface M, on puisse le choisir pour la surface N, de manière à avoir, en tenant compte de la correspondance entre les deux surfaces,

$$(195)\quad \left\{\begin{array}{llll} \pi_1 = \varpi_1, & \pi_2 = \varpi_2, & \pi_3 = 0, & \\ \pi_{13} = \varpi_{13}, & \pi_{23} = \varpi_{23}, & \pi_{12} = \varpi_{12}, & \pi_{21} = \varpi_{21}, \\ \multicolumn{4}{l}{\pi_{00} - \varpi_{00} = \pi_{11} - \varpi_{11} = \pi_{22} - \varpi_{22} = \pi_{33} - \varpi_{33},} \end{array}\right.$$

où les $\pi_{hk}(h, k = 0, 1, 2, 3)$ désignent les composantes du déplacement infiniment petit du système de référence mobile N, N_1, N_2, N_3 attaché à la surface N.

La surface N est, évidemment, non développable. Par suite, si l'on prend un point fixe quelconque

$$(196)\qquad C = N_3 - xN - yN_1 - zN_2.$$

et si l'on projette les asymptotiques de la surface N de ce point sur un plan ne le contenant pas, on obtient un réseau à invariants égaux B. Associons à chaque point de ce réseau, un système de référence mobile B, B_1, B_2; et désignons par $\Omega_{ij}(i, j = 0, 1, 2)$ les composantes de son déplacement infiniment petit. On peut prendre les points B, B_1, B_2

tels que l'on ait

$$B = \tau' N + \xi' C,$$
$$B_1 = \tau' N_1 + \eta' C,$$
$$B_2 = \tau' N_2 + \zeta' C,$$

ce qui donne par différentiation et en tenant compte de (194) et (195) :

$$(89)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_1 = \omega_1, & \Omega_2 = \omega_2, \\ \Omega_{11} - \Omega_{00} = \omega_{11} - \omega_{00} + y\omega_2, & \Omega_{21} = \omega_{21} + y\omega_1, \\ \Omega_{12} = \omega_{12} + z\omega_2, & \Omega_{22} - \Omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} + z\omega_2. \end{array} \right.$$

Par suite, *les réseaux à invariants égaux obtenus en projetant les asymptotiques des deux surfaces non développables projectivement applicables, des deux points fixes sur des plans ne contenant pas ces points, sont projectivement applicables.*

Ce théorème est vrai aussi dans le cas particulier où les surfaces M et N sont projectivement égales. Il en résulte *que les réseaux à invariants égaux obtenus en projetant les asymptotiques d'une surface non développable des deux points fixes sur des plans ne contenant pas ces points, sont projectivement applicables.*

b. Soit B un réseau à invariants égaux projectivement applicable sur A Le système de référence mobile étant choisi pour A, on peut alors le choisir pour B, de manière à avoir, en tenant compte de la correspondance entre ces deux réseaux, les relations (89). Soit N la surface non développable telle que B soit la projection de ses asymptotiques d'un point fixe non situé dans le plan de B. Il est facile de voir que l'on peut choisir le système de référence mobile associé à la surface N de manière à avoir, en tenant compte de (89) et (194), les relations (195).

Par suite, *les surfaces non développables correspondant à des réseaux à invariants égaux projectivement applicables, sont projectivement applicables.*

49. Les résultats prédédents permettent, en tenant compte des résultats obtenus par M. Cartan sur la déformation projective des surfaces [7], d'énoncer immédiatement les théorèmes suivants :

1° *Les réseaux à invariants égaux projectivement applicables sur un réseau à invariants égaux non réglé donné, dépendent de trois constantes arbitraires; on les obtient en projetant les asymptotiques de la surface non développable correspondant au réseau donné des différents points de l'espace sur des plans ne contenant pas ces points.*

Mais, si au réseau à invariants égaux non réglé donné correspond une surface déformable (ce réseau fait alors partie d'une catégorie de réseaux à invariants égaux dépendant de six fonctions arbitraires d'un argument), *il y a au plus* ∞^3 *catégories de réseaux à invariants égaux projectivement applicables sur lui; les réseaux à invariants égaux de chacune de ces catégories dépendent de trois constantes arbitraires, et correspondent à une même surface projectivement applicable sur la surface correspondant au réseau à invariants égaux non réglé donné.*

2° *Les réseaux à invariants égaux projectivement applicables sur un réseau à invariants égaux simplement réglé sont de deux catégories.*

Les réseaux de la première catégorie se déduisent de la surface correspondant au réseau donné et dépendent de trois constantes arbitraires :

Les réseaux de la seconde catégorie se déduisent des surfaces projectivement applicables sur la surface correspondant au réseau donné, et dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

3° *Les réseaux à invariants égaux doublement réglés sont tous projectivement applicables les uns sur les autres et, pour réaliser l'application, il suffit de faire correspondre les droites des deux réseaux suivant des lois arbitraires.*

50. Soit A un réseau à invariants égaux non réglé à chaque point duquel nous aurons associé un système de référence *normal*. Soit M la surface non développable qui correspond à A. Attachons à chaque point de M le système de référence mobile satisfaisant aux relations (184), (185), (187). (191), (192). Nous aurons

$$\varpi_1^3 + \varpi_2^3 = \omega_1^3 + \omega_1^3,$$
$$\varpi_1 \varpi_2 = \omega_1 \omega_2.$$

ce qui prouve que le réseau A et la surface M ont mêmes formes différentielles invariantes cubique et quadratique [1].

Les résultats obtenus directement au Chapitre V sur les réseaux à invariants égaux non réglés, peuvent donc aussi se déduire des résultats analogues obtenus par M. E. Cartan sur les surfaces non développables non réglés.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1]. G. Fubini et E. Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[2]. G. Fubini et E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale,* Bologna, Zanichelli, 1926 et 1927.

[3]. E. Čech, *Déformation projective des réseaux plans* (*C. R.*, 188, 1929 p. 291-292).

[4]. O. Borůvka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs.* (*Pub. Brno*, nos 72 et 85, 1926 et 1927),

[5]. G. Koenigs, *Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques* (*C. R.* 114, 1892, p. 55-57).

[6]. E. Cartan, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (n° 194 des *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann).

[7]. E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces* (*Ann. Éc. Norm.*, 1920, p. 259-356).

[8]. E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux.* Hermann, Paris 1922.

[9]. E. Cartan, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (*Ann. Éc. Norm.*, 1901).

[10]. E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Ann. Éc. Norm.*, 1904).

[11]. E. Cartan, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (*Bull. de la Soc. math. de France*, années 1919 et 1920).

[12]. E. Cartan, *Sur les formes différentielles en géométrie* (*C. R.*, 1924).

[13]. E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff.* Hermann, Paris, 1922.

Vu et approuvé :

Paris, le 18 janvier 1936.

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

Ch. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 18 janvier 1936,

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.