SHAO-LIEN CHOW

Problèmes de raréfaction et de localisation des ensembles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__178__1_0>

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. SHAO-LIEN CHOW

RESEARCH FELLOW OF CHINA FOUNDATION
FOR THE PROMOTION OF EDUCATION AND CULTURE

1re THÈSE. — PROBLÈMES DE RARÉFACTION ET DE LOCALISATION DES ENSEMBLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues en avril 1936 devant la commission d'examen

MM. G. BOULIGAND, professeur, *Président.*

Th. GOT — } *Examinateurs.*

H. PONCIN, maître de conférence }

POITIERS

SOCIÉTÉ FRANÇAISE D'IMPRIMERIE ET DE LIBRAIRIE

6 et 8, rue Henri-Oudin, 6 et 8

—

1936

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

PERSONNEL

	MM.	
Doyen	A. BILLARD.....	Zoologie.
Professeurs honoraires	LEBESGUE	
	DRACH	
	FRÉCHET	
	GARNIER	
	MAIGE	
	REBOUL	
Professeurs	A. TURPAIN.....	Physique.
	F. BODROUX....	Chimie.
	F. TABOURY.....	Chimie.
	G. BOULIGAND..	Calcul intégral et différentiel.
	P. BECQUEREL..	Botanique.
	A. GRUMBACH .	Physique.
	E. PATTE	Géologie.
	Th. GOT.........	Mécanique rationnelle et appliquée.
Maître de conférence	H. PONCIN.......	Physique mathématique.
Secrétaire	S. BESSE	

A **Monsieur** G. BOULIGAND

Hommage respectueux et reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE

PROBLÈMES
de raréfaction et de localisation des ensembles

INTRODUCTION

1. Quand, sur une collection finie ou infinie d'objets d'ailleurs quelconques, on élimine une partie d'entre eux, on dit que cette opération *raréfie* la collection. Pour un ensemble ponctuel, la raréfaction peut revêtir une forme particulière, la localisation; c'est ce qui se présente pour un ensemble E de points du plan qui serait tout entier porté par une courbe. Dans le plan les points de coordonnées commensurables forment un ensemble raréfié, en tant que dénombrable : on ne saurait pourtant le localiser. Limiter, pour un ensemble fermé, le nombre des dimensions est un autre mode de raréfaction, lequel *localise*.

La valeur philosophique de ces opérations est évidente. D'ailleurs la raréfaction est nécessairement au point de départ de toute spéculation, ainsi nous la trouvons à la base de la classification en sciences naturelles. Mieux encore : définir, c'est *raréfier*.

2. Dans le domaine de l'Analyse mathématique, on peut dire qu'autour de la raréfaction ont gravité un très grand nombre de considérations. Il serait oiseux de les exposer toutes ; il nous suffira de citer quelques exemples.

Dans la *géométrie des ensembles* nous avons déjà cité ce cas particulier de raréfaction qui est la localisation ; en topologie, la définition générale des courbes et des surfaces est un genre de localisation, lié à l'idée de la dimension.

Mais l'idée de raréfaction est présente dans des théories beaucoup plus anciennes. L'impossibilité pour un polynôme entier que le nombre de ses zéros dépasse son degré procède évidemment de l'ordre d'idées qui nous intéresse. Et la même réflexion s'applique aux résultats ultérieurs de la théorie des équations, limitant par exemple le nombre des racines positives (théorème de Descartes), ou bien des racines réelles contenues dans un certain intervalle (théorème de Budan et Fourier). Passant au plan complexe, Cauchy nous apprit à déterminer exactement le nombre des zéros à l'intérieur d'un contour. Grâce à cette transition, l'idée de raréfaction s'étendit à la théorie des fonctions d'une variable complexe, où il importait de savoir raréfier l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe, l'ensemble des pôles ou celui des zéros d'une fonction méromorphe, ou plus généralement, l'ensemble des points où une fonction de cette dernière catégorie acquiert une valeur donnée. On voit intervenir ici des ensembles qui, dans chaque cercle intérieur au domaine d'holomorphie ou de méromorphie, sont formés de points isolés.

Le mode de répartition des points où la fonction prend une valeur donnée se complique au cas où apparaissent des *singularités essentielles*. C'est Weierstrass (1) qui a fait le premier, d'une manière systématique, l'étude des points singuliers essentiels isolés. L'illustre auteur a montré qu'au voisinage d'un point singulier essentiel a, la fonction uniforme $f(z)$ s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée, c'est à dire que, étant donné un nombre ε aussi petit qu'on voudra et un nombre quelconque A, il y aura toujours à l'intérieur de tout cercle de centre a et rayon arbitraire, des points où $|f(z) - A| < \varepsilon$. De plus, on doit à M. E. Picard cette nouvelle précision d'une importance exceptionnelle : dans tout voisinage de a, si restreint soit-il, la fonction $f(z)$ prend effectivement toute valeur A donnée, sauf deux valeurs au plus.

Au point de vue de la raréfaction, le résultat de l'illustre géomètre (2) dévoile, pour ainsi dire, un renversement complet de point de vue. Dans les précédents problèmes, la recherche des racines consistait à prélever quelques unités pour l'ensemble des nombres; ici, c'est l'inverse : se chiffre par deux unités, au plus, l'ensemble des nombres qui ne sont pas racines.

Toutes les propositions récemment obtenues par de nombreux géomètres en prolongement du théorème de M. Picard (voir la bibliographie ci-dessous) (3) pourraient être commentées au même point de vue.

3 Si l'on passe aux fonctions multiformes, qui englobent comme on sait les fonc-

(1) K. Weierstrass, Mémoire sur fonctions uniformes d'une variable (*Mémoire de l'Académie de Berlin*, 1876).

(2) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IX, 1880.

(3) Denjov, Sur les fonctions entières de ce genre fini (*C. R.*, t. CXLV, p. 106-108) ; J. Sire, Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses, des fonctions entières (*Bull. Sc. Math.*, t. XLI, p. 148-160) ; F. Iversen, Sur une fonction entière dont la fonction inverse présente un ensemble de singularités transcendantes de la puissance du continu (*Of. vers. of Finska Soc.*, t. LVIII, no 3) , W. Gross, Eine ganze Funktion, fur die jede Komplexe Zahl Konvengenevert ist (*Math. ann.*, t. LXXIX, p. 201-208) ; E. Lindelöf, *Acta Math.*, t. XXXI, 381, 406 ; G. Julia, *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XXXVI, 1919, p. 93-126 ; t. XXXVII, 1920, p. 156-218 ; et Notes aux *C. R.*, 1919-1920.

tions algébriques, on voit toute l'importance des fonctions à un nombre fini de branches. Certains travaux de WEIERSTRASS et PAINLEVÉ ouvrent un nouveau champ de recherches sur la raréfaction, à propos des points singuliers de diverses fonctions : fonctions implicites, fonctions définies par une équation différentielle, catégories de fonctions à singularités simples, etc... Je me bornerai à rappeler ici la propriété fondamentale pour les singularités de la fonction inverse d'une fonction holomorphe. Soit $W = f(z)$ cette fonction. Les seuls points critiques sont les zéros de $f'(z)$. Ces points étant isolés ont pour image dans le plan W des points isolés.

Des questions analogues se posèrent dans l'analyse des points critiques des intégrales d'une équation différentielle, je renvoie le lecteur au tome II du *Cours d'analyse mathématique* de M. GOURSAT.

4. Nous avons dit l'importance du problème de raréfaction des ensembles dans la théorie des fonctions analytiques. Voici une remarque qui fera mieux saisir le lien profond des deux sujets : On peut faire l'étude des fondements topologiques de la théorie des fonctions analytiques et construire une théorie topologique des fonctions analytiques d'une variable complexe, qui devient pour la théorie ordinaire ce que la topologie est à la géométrie métrique. De telles considérations ont fait (à un point de vue se rapprochant plutôt de la théorie générale des transformations continues et des espaces abstraits) l'objet de diverses recherches, dues surtout à des mathématiciens polonais. Dans un ordre d'idées voisin, M. STOÏLOW a défini les transformations intérieures lesquelles comprennent, d'une part, les fonctions analytiques d'une variable complexe, d'autre part, les transformations topologiques les plus générales. Il définit une transformation intérieure sur une région de la variété à deux dimensions et montre que les points intérieurs qui se transforment en une même image sont isolés. Pour cela il a mis en évidence pour les points autour desquels la biunivocité locale n'a pas lieu, la propriété d'être isolés, à l'exemple des points critiques rencontrés dans l'inversion d'une fonction $W = f(z)$ holomorphe en z.

5. Ces aperçus, concernant la théorie des fonctions rappellent le rôle des ensembles de points isolés, celui des ensembles fermés punctiformes étant manifeste en matière de prolongement analytique. On peut penser que beaucoup de branches des mathématiques pourraient bénéficier de progrès réalisés en théorie des ensembles du point de vue de leur raréfaction, dans un sens d'ores et déjà nettement indiqué par des travaux que nous allons maintenant citer.

La première proposition dans cet ordre de recherches est due à M. LEBESGUE (1) ; elle nous apprend que l'ensemble des points d'une courbe rectifiable où la demi-tangente antérieure et la demi-tangente postérieure ne se réduisent pas à une droite

(1) LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904.

unique est un ensemble de mesure nulle. La deuxième est de M. A. Denjoy : Soit E un ensemble parfait discontinu à deux dimensions ; cet auteur appelle sommet un point S de l'ensemble E, tel qu'il existe un secteur de cercle ne contenant aucun point de E, ayant pour sommet S, d'ouverture égale à $\pi + \alpha$ ($\alpha > 0$) et de rayon non nul ρ. On a le théorème suivant : Les sommets d'un ensemble E forment un ensemble dénombrable (*Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. CLI, p. 138-140). Puis le théorème de Denjoy-Durand (1) nous donne un exemple remarquable : Un ensemble punctiforme est dénombrable si le contingent en chaque point de cet ensemble est contenu dans un demi-cône de révolution ayant ce point pour sommet. En prolongement de ces différentes notions, M. Bouligand a donné aux *Acta Mathematica* une propriété des ensembles dont le contingent laisse partout échapper un rayon (2). En outre, dans son livre : *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, il a posé les deux questions suivantes :

1° Essayer de généraliser, dans le plan par exemple, le théorème de Denjoy-Durand par une loi de raréfaction d'un ensemble soumis à l'hypothèse suivante : en chaque point M de l'ensemble, on peut trouver deux directions Mx et My et un secteur limité par la courbe $y = \lambda |x|^{1+\theta}$ (avec $0<\theta<1$) et par un segment rectiligne parallèle à l'axe de x, de telle manière que tous les points de l'ensemble suffisamment voisins de M soient contenus à l'intérieur de ce secteur.

2° Etudier, dans le plan ou dans l'espace, les ensembles tels que le cercle passant par trois de leurs points ait son rayon infiniment petit en même temps que le périmètre du triangle de ces trois points.

Nous trouvons ces deux questions abordées dans la thèse de M. Ch. Brunold (3), montrant que parmi les ensembles satisfaisant à la condition 2°, ne se trouve aucun continu. En relation, avec cette thèse, M. Bouligand établit cette autre proposition de raréfaction :

Un ensemble E de points de la sphère dont le biparatingent est partout réduit au plan tangent se laisse inclure dans un ensemble fermé punctiforme (4).

Dans cet ordre d'idées de raréfaction des ensembles, M. Otto Haupt a étudié ces deux questions (à paraître au *Journal de Crelle*) ; il nous démontre que : si un ensemble fermé a tous ses contingents circulaires formés de cercles de rayon nul, c'est un ensemble punctiforme.

6. Nous avons déjà parlé des problèmes de localisation. M. A. Denjoy (5) fut le

(1) *Acta Mathematica*, t. LVI.
(2) *Ibid.*, t. LVI, p. 371-372.
(3) Ch. Brunold, *Thèse de Toulouse*, n° 57, 1934, et *Bull. scientif. de l'École polytechnique de Timisoara*, t. V, 1934.
(4) Bouligand, *Bull. scientifique de l'École polytechnique de Timisoara*, t. V, 1934.
(5) *C. R.*, t. CLI, p. 138-139.

premier à s'en occuper en considérant dans un espace euclidien à n dimensions un ensemble parfait discontinu et montrant qu'il existe une courbe de Jordan sans point multiple le contenant. Puis, dans ses recherches récentes procédant du souci de restaurer la causalité en géométrie infinitésimale, M. Bouligand a fondé une nouvelle géométrie différentielle « *Géométrie infinitésimale directe* » où il s'est attaché à étudier les propriétés des ensembles, au nombre desquelles on remarque les lemmes d'univocité (1) qui posent de nouveaux problèmes de localisation, qui constituent le point de départ de mes recherches. Je les rappellerai en les rattachant à l'idée de localisation au chapitre 1er de cet exposé.

Signalons avant cela de nouveaux théorèmes de localisation dans les travaux de MM. Smidov et Verčenko (2) qui ont généralisé le théorème de Denjoy-Durand, de la manière suivante : L'ensemble A des points P de E, pour lesquels le contingent de E ne contient aucune paire de demi droites opposées passant par P est au plus dénombrable. En outre, ces auteurs ont établi la proposition que voici, apparentée aux lemmes d'univocité mais basée sur des hypothèses concernant le seul contingent et non plus le paratingent : L'ensemble B des points P de E livrant passage à un plan qui ne contienne aucune paire de demi droites opposées passant par P et appartenant simultanément au contingent de E en P, est situé sur un ensemble dénombrable de courbes rectifiables. De cette propriété se rapproche immédiatement cette autre, découverte par MM. Kolmogoroff et Verčenko (3) :

L'ensemble C des points P de E, où le contingent de E laisse échapper au moins une demi-droite, est situé sur un ensemble dénombrable de surfaces vérifiant la condition de Lipschitz (dans une représentation paramétrique convenable pour chaque surface), ce qui précise le résultat donné par M. Bouligand au tome LVI des *Acta Mathematica*.

Dans le même ordre d'idées, M. Frédéric Roger a fait connaître plus récemment des résultats concernant la raréfaction des points sur une courbe de Jordan sans point multiple dans un espace euclidien à n dimensions ; en outre, il nous donne des résultats très généraux, dans l'espace euclidien à n dimensions, sur le système des points d'un ensemble ponctuel où son contingent laisse échapper une variété linéaire à n-p dimensions : cela, en introduisant, à côté du contingent, la notion du *contingent bilatéral* (*Comptes rendus*, t. CC, p. 2050-2052 et t. CCI, p. 28-30 et p. 871-873).

7. Envisageons maintenant l'idée commune aux propositions des paragraphes précédents. Chacune comporte des hypothèses de raréfaction (ou de localisation)

(1) Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* (en abrégé : *G. I. D.*), Paris, Vuibert, 1932, p. 77-78.

(2) *C. R.*, février 1935.

(3) *C. R. Acad. sc. U. R. S. S.*, I, 1934, p. 105-107 ; 4, 1934, p. 361-364.

pour certains éléments ; puis de ces hypothèses, on conclut à la raréfaction ou à la localisation d'autres éléments. Le principe de démonstration consiste souvent à envisager d'abord une famille de sous-espaces, choisis de manière que chacun d'eux soit plus facile à atteindre que l'espace entier, pour chercher ensuite comment la raréfaction ou la localisation d'un ensemble dans ces sous-espaces entraîne la raréfaction de l'ensemble envisagé dans sa totalité.

8. Dans le présent travail relatif à l'espace euclidien à trois dimensions, je poursuis d'une part l'étude de la raréfaction des ensembles dans la voie où, sous l'influence de M. Bouligand, s'est orienté déjà M. Blanold, d'autre part je prolonge l'étude des théorèmes de localisation de M. A. Denjoy.

Dans tous les cas de localisation, j'ai adopté une hypothèse commune invariable, à savoir que les ensembles que je considère ont toujours le paratingent partout incomplet, mais j'envisage la question au point de vue intégral, ce qui distingue mes recherches des résultats connus de M. Bouligand.

Au premier chapitre, ayant rappelé les préliminaires les plus utiles pour la suite, j'étudie les propositions générales des ensembles fermés punctiformes ; ensuite je fais connaître de nouvelles catégories de points d'un ensemble où le paratingent est complet, par ces résultats on voit facilement qu'on est assez vite arrêté lorsqu'on essaye de perfectionner les critères de raréfaction fondés sur la considération du paratingent.

J'aborde, au deuxième chapitre, les problèmes de localisation des ensembles. C'est ici qu'apparaît l'intérêt de se placer au point de vue intégral, je donne un exemple montrant qu'il n'existe pas toujours une courbe simple rectifiable portant un ensemble plan à paratingent partout incomplet (1), ce résultat négatif, faute de spécifier que l'ensemble considéré est non fermé ; pour compléter cette recherche, je montre qu'un ensemble plan fermé punctiforme à paratingent partout incomplet est porté par un seul arc simple rectifiable ; puis j'étends ces divers résultats à l'espace.

Au chapitre troisième, je démontre plusieurs propriétés d'ensembles caractérisés par des raréfactions à divers degrés : je tire de propriétés des ensembles infinis une condition suffisante pour que les ensembles soient finis ; de même je passe par voie d'exclusion de propriétés des ensembles denses en eux mêmes à des propriétés d'ensembles clairsemés, de propriétés d'ensembles parfaits à des propriétés d'ensembles totalement imparfaits, etc. Ainsi, on saura que si l'intersection d'un ensemble avec toute surface convexe, quelle que soit, par ailleurs, cette surface, est toujours un ensemble fini, l'ensemble total ne peut avoir une infinité de points. Pour les degrés moindres de raréfaction ces critères consisteront, de même, en propriétés d'intersections soit avec des arcs simples, soit avec des courbes rectifiables.

(1) Voir page 21.

Certains résultats de ce travail ont déjà fait l'objet de communications publiées dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1), dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège* (2), et dans les *Comptes rendus du soixante-septième Congrès des Sociétés savantes*, 1934 (3).

J'exprime ma respectueuse gratitude à M. le professeur Bouligand, qui m'a orienté dans le choix du présent travail, à MM. L. Chamard et J. Mirguet, ses disciples, qui ont bien voulu dans des conversations personnelles me faire profiter de l'expérience acquise par eux dans ce genre de recherches.

Que la *China Foundation for the Promotion of Education and Culture*, qui m'a donné la possibilité de terminer ce travail, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LIX, septembre 1935.
(2) *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, n° 2, p. 57–61, 1935.
(3) *Comptes rendus du soixante-septième Congrès des Sociétés savantes*, Paris, 1934, p. 31-34.

CHAPITRE PREMIER

Propriétés générales de géométrie des ensembles.

I. Contingent et Paratingent.

1. Nous adopterons la terminologie et les définitions posées par M. G. Bouligand dans son *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe.* Rappelons les notions les plus importantes pour la suite.

Demi-tangentes, contingent. Une demi-droite OT, issuée du point d'accumulation O de l'ensemble E sera dite demi-tangente de l'ensemble E au point O, si tout cône de révolution de sommet O et d'axe OT contient (si faibles en soient la hauteur et l'angle au sommet) un point de l'ensemble E distinct du point O.

L'ensemble de toutes les demi tangentes à l'ensemble E en un même point d'accumulation sera appelé le contingent (en abrégé ctg) de l'ensemble E au point O.

Cette notion de « contingent » et la notion de « paratingent » dont il sera question plus loin ont été introduites par M. G. Bouligand, qui en a fait les instruments de sa géométrie infinitésimale directe. Contentons-nous d'énoncer les deux propriétés suivantes du contingent d'un ensemble E : il est fermé et n'est pas modifié si l'on substitue à E sa fermeture.

2. D'après la définition du contingent, on pourra sans inconvénient parler du contingent en un point isolé de E : ce contingent sera vide. Pour le cas d'un ensemble ayant au moins un point d'accumulation, je vais démontrer le lemme suivant que nous utiliserons ultérieurement.

Lemme. *Un ensemble borné contenant une infinité de points a au moins une demi-tangente.*

En effet, soit E l'ensemble donné ; d'après le théorème de Weierstrass-Bolzano, E a au moins un point d'accumulation M. Soit S_M^ε une sphère de centre M et de rayon ε. Par définition du point d'accumulation, on sait que E doit avoir une infinité de points dans la sphère S_M^ε. Soit E_ε l'ensemble des points de E situés dans l'intérieur de la sphère S_M^ε. Considérons les demi droites issues de M et passant par les points de E_ε ; que ces demi-droites soient ou non en nombre infini, on peut affirmer qu'il existe une demi-droite MT (qui est soit l'une des demi-droites de la famille, soit une demi-droite d'accumulation de cette famille) et telle que tout demi-cône de révolution de sommet M, d'axe MT et d'ouverture arbitraire contienne toujours un point de E_ε aussi voisin qu'on veut de M ; d'où il résulte que MT est une demi-tangente.

3. Paratingentes. Nous dirons qu'une droite Δ M Δ' passant un point d'accumulation M de l'ensemble ponctuel E est une paratingente de E en M, si l'on peut trouver une suite de segments $P_i\, Q_i$ (non nuls) dont les extrémités appartiennent à E, tendent vers M et dont les droites supports tendent vers la droite Δ M Δ' ou bien coïncident avec elle.

Paratingent. Le paratingent (en abrégé ptg) d'un ensemble E en un point M est l'ensemble de paratingentes de E en M.

Le paratingent est un ensemble fermé et englobe les droites portant les rayons du contingent. De cette remarque et du lemme du n° 2 résulte immédiatement le lemme suivant :

Lemme. *Un ensemble borné contenant une infinité de points a au moins une paratingente.*

4. Les lemmes des paragraphes 2 et 3 montrent que le contingent et le paratingent d'un ensemble borné E ayant une infinité de points n'est jamais vide. Ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème. *Un ensemble ponctuel borné E n'a qu'un nombre fini de points si son contingent ou paratingent est vide en tout point.*

II. Ensembles continus et ensembles punctiformes.

1. Définitions. Les ensembles que nous considérons ici sont en général formés par des points de l'espace euclidien. Prendre le *complémentaire* d'un ensemble E, c'est donc former l'ensemble C (E) des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble E. Un point appartenant ou non à l'ensemble E est dit *point frontière* de E, si toute sphère décrite autour de ce point contient au moins un point qui appartient et un point qui n'appartient pas à E. Un point faisant partie de E et qui n'est pas un point frontière de E est dit *point intérieur* ; alors il est centre d'une sphère de rayon non nul, englobée tout entière dans E. Un point est dit *extérieur* s'il est intérieur à C (E). Un ensemble *ouvert* est un ensemble ne comprenant que des points intérieurs.

2. Construction de Cantor-Minkowski. Soit E un ensemble ponctuel borné. De chaque point de E comme centre, avec un rayon ρ, décrivons un cercle ouvert dans le plan ou une sphère ouverte dans l'espace. Réunir ces cercles ou ces sphères, c'est par définition, effectuer la *construction de Cantor-Minkowski ou abréviativement C. M.* Dans la suite, la réunion de ces cercles ou ces sphères sera désignée par E_ρ.

Cette construction, utilisée par Minkowski pour définir la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface, a été envisagée depuis à plusieurs reprises. (Voir M. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2e édition, note de la page 37.)

Récemment, cette construction a été utilisée par M. G. Bouligand pour une théorie de l'ordre dimensionnel d'un ensemble fermé, applicable à certaines questions posées par le problème de Dirichlet ; deux de ses résultats nous seront plus particulièrement utiles : le fait que dans le plan, la longueur de la frontière de E_ρ est bornée (1) et le fait que dans l'espace, la frontière de l'ensemble ouvert E_ρ est d'aire bornée (2).

3. Ensembles bien enchaîné, continu. Un ensemble ponctuel borné est *bien enchaîné entre deux de ses points A et B*, s'il est possible de trouver, quel que soit le nombre λ, une suite de points de l'ensemble dont le premier soit A, le dernier soit B et tels que la distance de deux points consécutifs de la suite soit au plus λ ; une telle suite de points sera dite *une chaîne AB relative à λ*. Si cet ensemble borné est bien enchaîné relativement à tout couple de ses points il sera dit *bien enchaîné*.

Un ensemble borné, bien enchaîné, qui est de plus fermé, est dit *continu*.

4. Ensemble punctiforme. Un ensemble est dit *punctiforme* s'il ne contient aucun continu. Un ensemble dont le dérivé est punctiforme est lui-même punctiforme. Lorsqu'un ensemble fermé est punctiforme, son dérivé est aussi punctiforme, puisque contenu dans l'ensemble initial. Un ensemble E est dit *dense en soi*, lorsqu'il ne contient aucun point isolé, c'est à dire lorsqu'il est contenu dans son dérivé qui joue donc en même temps le rôle de fermeture ; un *ensemble parfait* est à la fois fermé et dense en soi. Un ensemble E sera dense relativement à un ensemble parfait le contenant s'il a pour dérivé cet ensemble parfait. Un ensemble E est dit *clairsemé*, lorsqu'il ne contient aucun ensemble dense en soi.

Un ensemble composé exclusivement de points isolés est dit *ensemble isolé*. Tout ensemble isolé est clairsemé. Un ensemble est dit *totalement imparfait* s'il ne contient aucun ensemble parfait.

5. Etant donné un ensemble fermé et borné quelconque dans le plan ou dans l'espace, supposons que nous ayons une famille de domaines telle que chacun des points de l'ensemble est à l'intérieur de l'un, au moins, de ces domaines. Le lemme de Borel-Lebesgue affirme que l'on peut extraire de cette famille un nombre fini de domaines, tels que tout point de l'ensemble soit à l'intérieur de l'un au moins des domaines extraits ; nous aurons à nous servir de ce lemme dans la suite.

Rappelons encore le théorème suivant qui sera utile. Etant donné une suite de

(1) M. G. Bouligand, Ensembles impropres et nombre dimensionnel (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LII, septembre et octobre 1928, juin 1929). — Act. Hermann, fasc. no 274.

(2) M. G. Bouligand, Une application du paratingent à une question de mesure superficielle (*Bulletin de l'Acad. polonaise des Sciences et des Lettres*, mars 1931).

continus dont chacun est compris dans celui qui précède dans la suite, l'ensemble des points communs à tous ces continus est un continu ou un point unique.

6. Ensemble mal enchaîné ; le défaut d'enchaînement. Si un ensemble ponctuel n'est pas bien enchaîné, entre deux de ses points A et B, on dit que cet ensemble est *mal enchaîné entre A et B*. Soit λ la borne supérieure des nombres ne donnant pas lieu à des chaînes entre A et B, c'est-à dire le plus grand nombre tel qu'on ne puisse trouver une suite de points de l'ensemble dont le premier soit A, le dernier soit B et dont les distances consécutives soient au plus égales à λ. Avec MM. Bouligand et Rabaté (*Rendic. dei Linci*, déc. 1930), on appelle λ *le défaut d'enchaînement entre A et B*.

7. Nous pouvons énoncer immédiatement la proposition suivante concernant ces différentes notions d'enchaînement et limitée aux ensembles bornés.

Théorème. *Entre deux points quelconques A et B d'un ensemble fermé punctiforme E, le défaut d'enchaînement a toujours une valeur positive.*

En effet, si ce défaut d'enchaînement entre A et B était inférieur à tout nombre donné arbitrairement, E serait bien enchaîné entre A et B ; d'où l'on peut déduire qu'il existerait sur E un continu partiel joignant A et B ; ce qui montre que E ne serait pas punctiforme, contrairement à nos hypothèses.

8. Arc simple et courbe simple. Pour caractériser certaines classes particulières de courbes, nous appellerons *arc simple* un continu de Jordan sans point multiple ayant deux extrémités (1), et *courbe simple fermée* (*ou cycle simple*) un continu de Jordan sans point multiple et sans extrémité.

9. Nous allons démontrer ici par la construction C. M, la proposition suivante (2) qui est utile pour la suite, page 22.

Soit E un ensemble plan, fermé, punctiforme. Etant donné un point M de E, on peut toujours construire un cycle simple de longueur bornée entourant M *ne portant aucun point de E et dont tout point est à une distance de* M *inférieure à un nombre donné* η.

Décrivons un cercle de centre M et de rayon inférieur à η. Soit F la réunion de la circonférence du cercle et du sous-ensemble de E constitué par tous les points de E non situés à l'intérieur du cercle. Soit N un point quelconque de F. Considérons toutes les chaînes (M, N) dont les sommets sont des points de (E+F) et désignons par $2d$ le défaut d'enchaînement entre M et N. Envisageons tous les $2d$ possibles entre M et les points de F ; tous ces défauts d'enchaînement sont positifs

(1) Bouligand, *Géométrie infinitésimale directe*, p. 49.
(2) M. G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, chap. XIII. Voir aussi M. G. Durand, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1931, ou *Journal de Math.*, 1931 ; M. L. Chamard, *Thèse*, Poitiers, 1933, ou *Bull. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 3e t. XIX.

et admettent une limite inférieure non nulle, sans quoi il existerait un continu entre M et le cercle. Soit 2D une telle limite inférieure.

Effectuons la construction C. M. sur la réunion E+F avec un rayon égal à D ; on obtient ainsi un ensemble ouvert $(E + F)_D$ qui présente au moins deux constituants (1) : l'un contient la circonférence et l'autre inclut M ; ce dernier est totalement intérieur au cercle. Soit C_M ce constituant. La frontière extérieure de C_M est évidemment à distance positive de E ; c'est toujours une courbe fermée, mais qui peut avoir des points multiples. Or, que cette courbe fermée soit constituée d'un ou plusieurs cycles simples, l'un de ces cycles, au moins, entoure le point M. En vertu d'un résultat cité de M. Bouligand, ce cycle simple a une longueur bornée (2). Notre énoncé est démontré.

10. On prouverait d'une manière analogue la proposition relative à l'espace. *Soit E un ensemble spatial, fermé, punctiforme. Etant donné un point M de F, on peut trouver une surface fermée d'aire bornée entourant M ne portant aucun point de E et dont tout point est à une distance de M inférieure à un nombre donné.*

III. Les conditions de raréfaction ou localisation par le paratingent au point de vue local.

1. Nous avons vu que la notion du paratingent est introduite par M. Bouligand, son étude a été poursuivie par MM. G. Rabaté et J. Mirguet. M. J. Mirguet (3) a montré que le paratingent d'un continu est un continu ; en ce qui concerne la raréfaction on en tire immédiatement le corollaire suivant :

Un ensemble E a sa fermeture punctiforme, quand le paratingent ne contient nulle part de continu. (Notamment, si le paratingent se compose d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de droites.) C'est un résultat de raréfaction.

Mais le paratingent d'un ensemble punctiforme peut être continu. Voici un exemple d'un ensemble punctiforme dont le paratingent est complet en un certain point : soient m n deux entiers positifs quelconques. Un ensemble E contient tous les points $\left(\pm \frac{1}{m}, 0\right)$ sur l'axe X X' et les points $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ sur OY. Le paratingent de E en l'origine est complet.

Dans cette section, je me propose de citer certains ensembles dont le paratingent est complet, en me plaçant d'abord dans le plan, puis dans l'espace ; ces résultats sont utiles pour le chapitre suivant. Pour plus de commodité dans notre

(1) M. Bouligand, *loc. cit.*, p. 34-37.
(2) Voir page 10 de cet exposé.
(3) M. Mirguet, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1934.

exposé, je vais d'abord rappeler les trois lemmes d'univocité du paratingent incomplet (1) de M. G. Bouligand.

I. — *Lemme d'univocité du plan.* Etant donné O un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel plan E, s'il existe une droite $y'Oy$ exclue du paratingent de E en O, on peut tracer un cercle de centre O suffisamment petit pour que :

1° La partie E_1 de E non extérieure à ce cercle possède au plus un point sur chaque parallèle à $y'Oy$;

2° Les droites d'interjonction de tous les points de E_1 pris deux à deux aient leurs pentes bornées en valeur absolue dans tout système d'axes xOx', yOy', où la droite $x'Ox$ est une droite quelconque distincte de $y'Oy$.

II. — *Deux lemmes d'univocités dans l'espace.* Soit dans l'espace à trois dimensions un point d'accumulation O d'un ensemble ponctuel E.

a). — S'il existe une droite $z'Oz$ exclue du paratingent de E en O, on peut trouver une sphère de centre O et de rayon ρ suffisamment petit pour que :

1° La partie E_1 de E non extérieure à cette sphère possède au plus un point sur chaque parallèle à Oz ;

2° Les droites d'interjonction de tous les points de E_1 pris deux à deux aient leurs pentes bornées en valeur absolue dans tout trièdre (véritable) de coordonnées $Oxyz$, ou encore, que leurs parallèles menées par l'origine soient à l'intérieur d'un certain cône de révolution de sommet O, d'axe $z'Oz$.

b). — S'il existe tout un plan yOz exclu du paratingent de E en O (c'est-à-dire dont toutes les droites passant par O sont exclues de ce paratingent), on peut trouver une sphère de centre O et de rayon ρ suffisamment petit pour que :

1° La partie E_1 de E non extérieure à cette sphère possède au plus un point dans chaque plan parallèle au plan yOz ;

2° Les droites d'interjonction de tous les points de E_1 aient leurs parallèles menées par O à l'intérieur d'un certain cône de révolution de sommet O, d'axe perpendiculaire au plan yOz.

2. Etant donné notre but de localisation, nous donnerons aux énoncés ci-dessus les formes suivantes :

I. — *Un ensemble plan ponctuel dont le paratingent en un point M est incomplet est situé, au voisinage de M, sur un arc simple rectifiable C, et cet arc C n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du paratingent de l'ensemble en M.*

(1) *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 77-78. M. Bouligand a donné ces résultats d'abord dans le cas des continus (*Bull. Sc. math. France*, 1928, p. 29 et suivantes), puis dans le cas d'ensembles quelconques (*Annales de la Société polonaise de Math.*, t. IX, 1930, p. 34-35). Il a enfin donné la forme plus générale dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions (*Bull. de l'Ac. Polon. des Sc. et des Lettres*, oct. 1930, p. 410). Voir aussi l'article de M. Bouligand : Deux applications du paratingent (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, n° 4, 1933), article lié aux questions de localisation.

II. — Un ensemble spatial ponctuel E,

a) *dont le paratingent en un point M est incomplet est situé, au voisinage de M, sur une orthosurface* (c'est-à-dire une surface à ptg partout incomplet, donc quarrable) *et cette surface S n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du ptg de l'ensemble en M* ;

b) *dont le paratingent en un point M exclut un plan total passant le point M est situé, au voisinage de M, sur un arc gauche simple, rectifiable C et cet arc C n'a qu'un point sur chaque parallèle au plan exclu totalement du paratingent de l'ensemble en M.*

3. — Nous allons maintenant démontrer qu'en matière de raréfaction et de localisation, les indications fournies par ce paratingent sont nécessairement délimitées par le fait suivant : il suffit de procéder à la réunion de deux ensembles, dans des conditions, cependant très simples, pour obtenir un nouvel ensemble dont le paratingent est complet en certains points.

A. — Le paratingent de certains ensembles plans.

1. — Ici, nous chercherons le paratingent (ou ptg) de certaines réunions d'ensembles. A cet effet, nous appliquerons la proposition (P) suivante :

(P). Soit M un point commun aux divers ensembles d'une réunion le ptg en M de la réunion inclut la réunion des ptg relatifs aux ensembles réunis (1).

2. — Plaçons-nous dans le plan, et soit E un ensemble tel qu'un de ses points M appartienne à un sous-continu E_1 de E et soit point d'accumulation d'un sous-ensemble, E_2 de E, continu ou non, tel que E_2—M soit disjoint de E_1. Les ensembles E_1 et E_2 admettent dès lors respectivement au moins une demi-tangente MT_1 et une demi-tangente MT_2. Supposons d'abord qu'on puisse prendre MT_1 et MT_2 non-colinéaires. Pour le continu E_1, deux cas peuvent se présenter :

Ou bien, en M son ptg est complet, et celui de E l'est aussi en vertu de la propriété (P) du n° 1.

Ou bien, en M, son ptg est incomplet, ce qui fait que E_1 se confond, au voisinage de M avec un arc simple à pentes bornées.

Dans ce dernier cas, je dis que *toute droite* $\Delta' M \Delta$ *ne séparant pas* MT_1 *et* MT_2 *appartient au ptg mutuel* (2) *de* E_1 *et* E_2 *en M, donc au ptg total de E au même point* (*propriété P*).

En effet, soit (Q_i) une suite de points de E_2 tendant vers M, quand l'indice *i* aug-

(1) M. Bouligand, *G. I. D.*, chap. XI, n° 75, p. 74 Voir aussi *Thèse* de M. Rabaté, Toulouse, 1931

(2) Voir Théorème de M. J. Mirguet, G. Bouligand, *G. I. D.*, exercice n° 16, p. 221. Le paratingent mutuel de deux ensembles est formé des paratingentes de leur réunion qui ne sont paratingentes ni du premier ensemble, ni du second.

mente indéfiniment. Par chaque point Q_i de cette suite, menons une droite D_i parallèle à $\Delta' M \Delta$. Considérons maintenant un point P de E_1 voisin de M et appartenant à une suite qui admet MT_1 comme demi-tangente en M. Si proche qu'il soit de M, le point P peut en être séparé par quelque droite D_i (pour i assez grand). Dès lors, le continu E_1 ayant des points (M et P) de part et d'autre de la droite D_i (qui coupe le plan entre M et P) a forcément au moins un point P_i sur D_i (1).

A cause de l'hypothèse d'un ptg incomplet pour E_1 en M, ce qui signifie qu'à toute sphère S_M^ε de centre M et de rayon ε, on peut faire correspondre une sphère S_M^η de rayon $\eta > 0$ de telle sorte que tout point P et E_1 situé dans S_M^η puisse être joint à M par un sous-continu de E_1 entièrement contenu dans S_M^ε (2).

Il résulte de cette propriété que, parmi les points tels que P_i envisagés plus haut, il en est au moins un situé dans une sphère S_M^ε de rayon infiniment petit. La droite D_i porte donc une corde dont les extrémités P_i et Q_i appartenant respectivement à E_1 et à E_2 tendent vers M quand i croît indéfiniment. Il en résulte que $\Delta' M \Delta$ est limite d'au moins une suite de droites parallèles qui portent des cordes de E dont les extrémités tendent vers M.

(C.Q.F.D.)

3. Envisageons maintenant le cas où MT_1 et MT_2 sont colinéaires. Si MT_1 et MT_2 sont opposés ; la droite qui les porte appartient au ptg en M et c'est tout ce que l'on peut dire *a priori*. Si MT_1 et MT_2 sont confondues, la droite qui les porte appartient au ptg, et on ne saurait rien dire de plus sans hypothèse supplémentaire dans le cas où, sur E_1 et sur E_2 respectivement, il existe deux voisinages de M admettant pour demi-tangentes MT_1 et MT_2 et dont l'un au moins inclut l'autre. Mais si MT_1 et MT_2 sont confondues et s'il existe dans E_1 un voisinage de M admettant MT_1 pour demi tangente, dans E_2—M un voisinage de M, disjoint du précédent et admettant MT_2 pour demi-tangente, il résulte des considérations du numéro précédent que le ptg mutuel de E_1 et de E_2 en M contient toute droite passant par M et ne portant pas les demi tangentes envisagées. La droite qui porte celle ci étant elle-même une paratingente, il en résulte que le ptg de E en M est ici complet.

On retrouve en particulier ce fait connu que si l'on envisage un point de rebroussement quelconque d'un arc simple, le ptg de l'arc simple y est complet.

4. Ce qui précède conduit immédiatement au problème suivant :

(1) Il est bien connu, en effet, que si un continu plan a 2 points de part et d'autre d'une coupure continue du plan, il a au moins un point sur cette coupure. Voir par ex. B. Knaster et C. Kuratowski, Sur les ensembles convexes (*Fund. Math.*, t. I, 1921, t. XXXIX, p. 235).

(2) Voir par ex. Fréchet, *Espaces Abstraits*. Coll Borel, Gauthier-Villars, p. 175 et G. Bouligand, *G. I. D.*, chap. IX, n° 61, p. 55.

Soit une courbe E_1 dont le ptg en un point M qui la coupe (ou encore : distinct d'une extrémité) est incomplet (ce qui exclut tout rebroussement en M). Considérons la réunion E de E_1 et de quelque autre ensemble E_2 formé de points étrangers à E_1 et dont M est point d'accumulation. Le ptg de E en M est complet.

En effet, soient MT_1 et MT'_1 deux demi-tangentes non confondues de E_1 en M. Alors E_2 a au même point au moins une demi-tangente MT_2.

Deux cas peuvent se présenter :

1° MT_2 est confondue avec MT_1 ou MT'_1 (MT_1 pour fixer les idées). Alors, le résultat du n° 3 exige que le ptg mutuel de E_2 et de tout sous-arc simple de E_1 admettant MT_1 comme demi-tangente soit complet. D'où il suit, en vertu de la propriété (P) du n° 1 que le ptg total de E en M est aussi complet.

2° MT_2 ne se confond ni avec MT_1 ni avec MT'_1. Alors, du résultat du n° 2, il suit que toute droite menée par M et ne séparant pas MT_1 et MT_2 est une paratingente mutuelle de E_1 et E_2, que toute droite menée par M et ne séparant pas MT'_1 et MT est aussi une ptg mutuelle de E_1 et E_2 et que toute droite menée par M et ne séparant pas MT_1 et MT'_1 est une paratingente de E_1.

Or, toute droite menée par M ou bien laisse MT_1 et MT_2 du même côté, ou bien laisse MT_1 et MT_2 du même côté ; ou bien encore laisse du même côté MT_1 et MT'_1.

Par suite le ptg de E en M est complet.

(C.Q.F.D.)

B. — Le paratingent de certains ensembles ponctuels dans l'espace.

1. Dans la section précédente, j'ai étudié, dans le plan, la réunion d'une courbe E à paratingent (ou ptg) incomplet et de quelque ensemble E_1 formée de points étrangers à E_1 et admettant sur E_1 un point d'accumulation M qui le coupe. J'ai prouvé que le ptg en M de $E = E_1 + E_2$ est complet.

Les questions analogues de l'espace euclidien à trois dimensions sont plus complexes. En toute généralité, le problème se pose ainsi :

Soit E_1 un certain continu et soit E_2 un certain ensemble de points étrangers à E_1 mais admettant un point d'accumulation M sur E_1. Etudier le ptg de l'ensemble réunion $E = E_1 + E_2$ en M.

Cette question est banale si le ptg de E_1 en M est complet, car alors le ptg de la réunion incluant la réunion des ptg relatifs aux ensembles réunis (1), le ptg de E est lui-même complet.

(1) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1932, chap. XII, n° 75, p. 74. Voir aussi G. Rabaté, *Thèse*.

Aussi, nous bornons-nous à examiner le cas d'un ensemble E_1 continu et à ptg incomplet en M. Mais le problème reste large. Il peut arriver que le ptg de E_1 laisse échapper tout un plan et alors, le voisinage de M sur E_1 est un arc simple à pentes bornées (1). Il peut arriver encore que le ptg de E en M laisse échapper une droite, donc toute une « gerbe » de droites, sans qu'en soit exclu tout un plan. Alors, le voisinage de M sur E_1 appartient à une surface à pentes bornées (2).

Dans cette section laissant de côté les cas intermédiaires, nous nous proposons donc d'étudier les deux problèmes suivants, solidaires d'ailleurs :

I. — *Soit E un ensemble formé par la réunion d'une courbe E_1 dont le ptg laisse échapper partout un plan et d'un ensemble E_2 constitué par des points étrangers à E_1 mais admettant un point d'accumulation M sur E_1. Déterminer le ptg de E en M.*

II. — *Soit E un ensemble formé par la réunion d'une surface E_1 à ptg partout incomplet et d'un ensemble E_2 constitué par des points étrangers à E_1 mais admettant sur E_1 un point d'accumulation M. Déterminer le ptg de E en M.*

2. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme I. — *Considérons un ensemble E formé par la réunion d'un continu E_1 dont le ptg laisse échapper partout un plan et d'un ensemble E_2 ayant ses points étrangers à E_1 mais admettant un point d'accumulation M sur E_1 : en ce cas, au point M, le premier E_1 a au moins une demi-tangente MT_1 ; le second E_2 admet une demi-tangente MT_2, distincte de MT_1. Alors toute droite $\Delta' M \Delta$ du plan $T_1 MT_2$ passant par M et ne séparant pas MT_1 et MT_2 est une paratingente de E en M.*

En effet, soit (Q_i) une suite de points de E_2 tendant vers M quand i augmente indéfiniment. Par chaque point Q_i de cette suite, menons un plan π_i perpendiculaire au plan $T_1 MT_2$ et parallèle à la droite $\Delta' M \Delta$. Considérons maintenant un point P de E infiniment voisin de M et appartenant à une suite qui admet MT_2 comme demi-tangente. Si proche qu'il soit de M, le point P peut être séparé par quelque plan π_i (pour i assez grand). Dès lors, le continu E_1 ayant des points (M et P) de part et d'autre du plan π_i envisagé a au moins un point P_i voisin de M sur π_i, car en vertu de l'hypothèse d'un continu dont le paratingent laisse échapper partout un plan, E_1 est un arc simple et, à ce titre, est connexe (3) en M, on peut joindre M à P par un continu (portant P_2) contenu dans la sphère infiniment petite S_M^ε de rayon ε et centre M. Il résulte de cette propriété que, parmi les points tels que P_i envisagés plus haut, il en est au moins un situé dans une sphère S_M^ε de rayon infiniment petit. De ce qui précède, dans chaque plan π_i (parallèle à $\Delta' M \Delta$ et

(1) G. Bouligand, *G. I. D.*, chap. xi, n° 81, p. 80-81, et G. Rabaté, *Thèse*, n° 65.

(2) Idem, *G. I. D.*, chap. xi, n° 82, et Mirguet, Sur le ptg d'un ensemble ponctuel, *C.R. Acad.*, t. CVC, 1932, p. 509.

(3) Voir p. ex. M. Fréchet, *Espaces Abstraits*, Coll. Borel, Gauthier-Villars, p. 75, et G. Bouligand, *G. I. D.*, chap. xi, n° 61, p. 55.

perpendiculaire à $T_1\,MT_2$) il existe une corde $P_i\,Q_i$ de E dont les extrémités tendant vers M quand i croît indéfiniment, appartient respectivement à E_1 et à E_2. D'ailleurs le plan $P_i\,M\,Q_i$ tend vers le plan $T_1\,MT_2$ donc les droites $P_i\,Q_i$ tendent vers $\Delta' M \Delta$.

En résumé, $\Delta' M \Delta$ est une « paratingente mutuelle » de E_1 et E_2 en M, et, de ce fait, appartient au paratingent total de E en M.

(C. Q. F. D.)

3. Le lemme précédent permet de rechercher à quelles conditions l'adjonction à une courbe E_1 du type ci-dessus (1) fournit un ptg complet d'un ensemble E_2, pour la réunion (problème du N° 1).

Lemme II. — *Soit E un ensemble réunion d'une courbe plane ou gauche E_1 dont le ptg laisse échapper partout un plan et d'un ensemble E_2 constitué par des points étrangers à E_1 mais ayant sur E_1 un point d'accumulation M distinct d'une extrémité. De sorte qu'au point M, E admet au moins deux demi-tangentes MT_1 et MT'_1 et E_2 au moins une demi tangente MT_2. On suppose que ces trois demi-tangentes sont distinctes et coplanaires. Alors, toute droite du plan des trois demi-tangentes précédentes qui passe par M est une paratingente de E en M.*

En effet, les droites qui portent une demi-tangente appartiennent au ptg et tout autre plan de trois demi tangentes telles que celles de l'énoncé passant par M, mais ne portant aucune demi-tangente divise le plan en deux demi-plans dont l'un au moins en contient deux. En vertu du lemme I précédent, une telle droite appartient aussi au ptg de E en M.

4. Occupons-nous maintenant du problème II :

Théorème. — *Soit un ensemble E, réunion d'une surface E_1 à ptg partout incomplet et d'un ensemble E_2 constitué par des points étrangers à E_1, mais admettant sur E_1 un point d'accumulation M non situé sur un bord. En ce point M, on suppose que E_2 possède une demi tangente MT_2 non située sur le contingent de E_1 au même point. Alors le ptg de E en M est complet.*

On sait que le ptg englobe les droites portant les rayons du contingent (2); nous allons donc montrer que toute droite $\Delta' M \Delta$ passant par M et ne portant pas une demi-tangente de E appartient au ptg. de E en M.

Supposons d'abord que le contingent Γ de E_1 en M divise l'espace. Deux cas peuvent se présenter.

1° $\Delta' M \Delta$ ne traverse pas le contingent Γ de E_1 en M. Considérons alors un plan P mené par $\Delta' M \Delta$ et coupant Γ suivant les demi-droites MT_1 et MT'_1 (3). Ces deux demi-droites sont demi-tangentes de la section E_1 par P (4). Dans le

(1) G. Bouligand, *G. I. D.*, chap. xi, n° 81, et G. Rabaté, *Thèse de Doctorat*, Toulouse, n° 65.
(2) Idem, *G. I. D.*, n° 73, p. 71.
(3) Et peut-être d'autres.
(4) G. Rabaté, *Thèse*, Toulouse, p. 25 et p. 27.

plan P, cette section admet $\Delta' M \Delta$ comme une paratingente en vertu du lemme I précédent, puisque $\Delta' M \Delta$ ne sépare pas MT_1 et MT'_1 ; donc $\Delta' M \Delta$ appartient au ptg de E_1 et par suite au ptg de E.

2° $\Delta' M \Delta$ traverse le contingent Γ de E_1 en M. Considérons le plan P déterminé par $\Delta' M \Delta$ et MT_2. Ce plan P rencontre Γ suivant deux demi tangentes MT_1 et MT'_1 de E_1 qui sont aussi des demi-tangentes de l'intersection $E_1 \times P$ (intersection qui n'est autre qu'une courbe plane à ptg incomplet). Ce qui montre que l'ensemble-réunion de $E_1 \times P$ et de E_2 admet trois demi-tangentes MT_1 MT'_1 et MT_2 coplanaires et distinctes, telles enfin que le lemme II s'applique : Toute droite menée par M dans le plan et en particulier $\Delta' M \Delta$ est donc une paratingente en M de $E_1 \times P + E_2$. Donc $\Delta' M \Delta$ appartient au ptg de E en M.

En résumé, dans les conditions de l'énoncé, une droite $\Delta' M \Delta$ menée par M est une paratingente de E en ce point quelle que soit sa position par rapport au contingent de E_1 en M.

Voyons maintenant ce qui se passe dans les cas particuliers.

a) Le contingent Γ se réduit à un plan ou deux faces d'un dièdre, c'est-à-dire continue à partager l'espace, notre démonstration est valable.

b) Le cas, où Γ se réduirait à une demi-droite ou à un faisceau plan incomplet, est à écarter. En effet, toute section de E_1 faite par un plan P contenant une demi-tangente MT_1 de E_1 est une courbe admettant M un point de rebroussement. En vertu des résultats que j'ai donnés dans le cas précédent du plan, le plan P est alors totalement couvert par le paratingent. Si on fait tourner le plan P autour de MT_1 on peut voir que le ptg de E_1 en M est complet, contrairement à l'hypothèse.

(C.Q.F.D.)

5. Ces diverses circonstances intervenues comme hypothèses dans les résultats précédents montrent bien pourquoi les indications sur la raréfaction d'un ensemble fournies par la considération du paratingent sont nécessairement limitées. Et cela confirme l'intérêt des recherches récentes faites sur la raréfaction à partir du contingent. (MM. Kolmogoroff, Smidov, Verčenko, Fréd. Roger.)

Il importe en outre d'ajouter une remarque : au chapitre suivant, nous envisagerons la localisation au point de vue intégral, et donnerons un exemple d'ensemble plan E à ptg partout incomplet et non localisé sur un seul cycle simple. Par contre, cet ensemble pourra se localiser sur plusieurs cycles simples disjoints (en nombre fini). Une idée se dégagera de cet exemple, qui le rapprochera à un certain titre des considérations précédentes :

Si K est un continu portant l'ensemble E, il existe au moins un point de K où le ptg de K est complet.

CHAPITRE II

Les problèmes de la localisation des ensembles au point de vue intégral

I. — Résultats découlant immédiatement des lemmes d'univocité.

1. Nous avons vu que les lemmes d'univocité posent de nouveaux problèmes de localisation (1) qu'on peut traduire immédiatement sous les formes suivantes :

I. — *Un ensemble plan ponctuel, dont le paratingent en un point est incomplet, est situé au voisinage de M sur un arc simple rectifiable C et cet arc C n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du paratingent de l'ensemble en M.*

II. — *Un ensemble spatial ponctuel E,*

a) *dont le paratingent en un point est incomplet est situé au voisinage de M, sur une orthosurface S* (c'est-à dire une surface à ptg partout incomplet donc quarrable) *et cette surface S n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du paratingent de l'ensemble en M (si le voisinage est assez restreint)* ;

b) *dont le paratingent exclut tout un plan de directions issues d'un point M, est situé au voisinage de M, sur un arc gauche simple rectifiable C et cet arc n'a qu'un point sur chaque plan parallèle au plan exclu totalement du paratigent de l'ensemble en M.*

2. Les résultats précédents sont des propositions locales. Nous allons les étudier au *point de vue intégral*. En vertu du lemme de Borel Lebesgue, nous trouvons immédiatement les propositions suivantes :

I. — *Un ensemble plan, borné, continu ou non, à paratingent partout incomplet, est situé sur une courbe plane rectifiable.*

II. — *Un ensemble spatial, borné, continu ou non, dont le paratingent laisse partout échapper au moins un plan est situé sur une courbe gauche rectifiable.*

III. — *Un ensemble spatial, borné, continu ou non, paratingent partout incomplet, est situé sur une surface quarrable.*

(1) Voir un article de M. Bouligand, Deux applications du paratingent (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, n° 4, 1933, p. 84-86.

3. D'après les propositions précédentes au point de vue intégral nous rappelons les trois résultats suivants (1) :

I. — *Une courbe plane C dont la longueur n'est pas bornée, mais qui est située dans un cercle de rayon fini, présente au moins un point où son paratingent est complet.*

II. — *Une courbe gauche C dont la longueur n'est pas bornée, mais qui est située dans une sphère de rayon fini, présente au moins un point où son paratingent a une droite sur tous les plans passant de ce point.*

III. — *Une surface S dont l'aire n'est pas bornée, mais qui est située dans une sphère de rayon fini, présente au moins un point où son paratingent est complet.*

II. — La possibilité de localisation sur un arc simple rectifiable plan.

1. Nous avons dit que l'étude du problème de la localisation, au point de vue topologique, commence avec M.A. Denjoy lorsqu'il considère dans un espace à n dimensions un ensemble parfait discontinu et montre qu'il existe une courbe de Jordan sans point multiple le contenant. On voit évidemment que cette courbe n'est pas toujours de longueur bornée. Au point de vue métrique, les lemmes d'univocité de M. Bouligand nous ont déjà donné de précieuses indications ; nous nous proposons maintenant de déterminer quelques conditions assurant un ensemble d'être situé sur un arc simple plan, mais on peut voir que des difficultés se présentent.

2. Un exemple singulier. Je vais montrer que chaque ensemble plan à ptg partout incomplet n'est pas toujours porté par une seule orthocourbe plane (c'est-à-dire un arc simple à ptg partout incomplet, donc rectifiable). Par exemple : Un ensemble plan, punctiforme, situé sur trois cycles convexes disjoints (c'est-à-dire à distance positive l'un à l'autre) et dense sur chaque arc de ces contours ; le ptg de l'ensemble en chaque point est bien incomplet, mais on ne peut le situer sur un seul arc sans point multiple. Cet exemple nous ayant mis en garde, je vais démontrer que certains ensembles plans punctiformes sont situés sur un seul arc simple rectifiable. Ce sont les ensembles fermés ou inclus dans des ensembles fermés à paratingent incomplet. Il suffit d'envisager ces derniers.

2 bis. Pour justifier cet énoncé, j'aurai besoin de quelques propositions préliminaires. D'abord, pour la commodité de l'exposé, je prendrai le premier résultat local de la page 20 comme lemme I.

Lemme I. — *Un ensemble punctiforme dont le paratingent (ptg) en un point est incomplet est situé, au voisinage de M, sur un arc simple rectifiable C et cet arc n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite exclue du ptg de l'ensemble en M.*

(1) Voir *Bull. Soc. math. France*, 1928, p. 31-32.

3. De la proposition de page 11, on conclut immédiatement un cas particulier suivant (1).

LEMME II. — *Soit E un ensemble fermé punctiforme à ptg incomplet. Etant donné un point M de E, on peut trouver un cycle simple rectifiable entourant M, ne portant aucun point de E et dont tout point est à une distance de M inférieure à un nombre donné η.*

4. Du résultat local précédent, nous allons maintenant passer à des considérations de nature intégrale. Reprenons notre ensemble E et soit M_1 un des points. Le voisinage de M_1 sur E appartient à un arc simple rectifiable (lemme I) et M_1 peut être entouré d'un cycle simple rectifiable C_{M_1} (lemme II) incluant un certain sous-ensemble E_1 de E. Nous avons vu d'ailleurs que C_{M_1} ne porte aucun point de E, il est évident que $(E - E_1) = F$ est à une distance positive de C_{M_1}. Choisissons dans F un second point de M_2 de E. Comme nous l'avons fait pour M_1, on peut attacher à M_2 un sous-ensemble E_2 de E situé dans un cycle simple rectifiable C_{M_2} ; ainsi de suite. On voit qu'on peut ainsi décomposer E en une famille au plus dénombrable de sous-ensembles à distances mutuelles positives entourées chacun par un cycle simple rectifiable de diamètre arbitrairement petit et ne portant aucun point de E.

Considérons la réunion d'un de nos cycles et du domaine borné dont il est la frontière ; nous avons ainsi un ensemble fermé que nous appellerons *cellule*. Notre ensemble E est donc recouvrable par une famille au plus dénombrable de cellules, dont le diamètre est arbitrairement petit. A cette famille on peut toujours substituer une famille finie jouissant de la même propriété (lemme Borel Lebesgue), d'où cet énoncé :

LEMME III. — *Soit E un ensemble plan, borné, fermé, punctiforme, à ptg partout incomplet. On peut enfermer E dans un nombre fini de cellules disjointes de diamètre inférieur à une longueur donnée dont les frontières sont des cycles simples rectifiables ne portant aucun point de E.*

5. Envisageons maintenant le cas de deux cellules contiguës définies dans le paragraphe précédent, déterminées l'une par la frontière C_1 incluant le sous-ensemble E_1 de E, l'autre par la frontière C_2 incluant le sous ensemble E_2 de E, ces deux frontières C_1 et C_2 étant des cycles disjoints et chacun rectifiable. En vertu du lemme I, on peut dire que E_1 et E_2 sont situés sur deux arcs simples rectifiables σ_1 et σ_2 respectivement dans C_1 et C_2. Soient A_1 un point de C_1 et A_2 un point de C_2. On peut choisir A_1 de telle sorte qu'il admette pour projection une extrémité P_1 de σ_1, de même pour A_2 par rapport à σ_2. On joint A_1 et A_2 à l'extérieur

(1) Ce cas particulier a été démontré par une autre manière, voir ma note sur certains ensembles plans punctiformes. *Bull. de la Soc. royale des Sc. de Liége*, n° 2, p. 57-61, 1935.

de C_1 et C_2 et l'on peut toujours s'arranger pour suivre un chemin rectifiable (1) (car C_1 et C_2 sont toutes deux rectifiables). Alors, $E_1 + E_2$ est un ensemble punctiforme répondant aux conditions indiquées et situé sur l'arc simple rectifiable :

$$\sigma_1 + \overline{P_1 A_1} + \widehat{A_1 A_2} + \overline{A_2 P_2} + \sigma_2.$$

Pour E tout entier, nous désignerons les C des cellules par les indices 1, 2, 3,... n dans l'ordre naturel ; joignons les cellules voisines comme nous l'avons fait pour C_1 et C_2 ; nous avons des résultats analogues. D'où le résultat annoncé au nº 1.

Théorème. — *Par un ensemble plan borné, fermé, punctiforme, à paratingent partout incomplet, on peut faire passer un arc simple rectifiable.*

III. — Ensembles situés sur un arc gauche simple rectifiable et ensembles situés sur une orthosurface.

1. Cette section est la suite naturelle de la précédente, dont elle étend les résultats à l'espace. Vu les propositions des §§ 3, 4, page 18, on ne peut dire si tout ensemble orthocurviligne spatial un ensemble, en chaque de ses points d'accumulation, le ptg est privé d'un plan) est porté par une seule orthocourbe gauche (un arc simple, le ptg est privé partout d'un plan) et si tout ensemble orthosuperficiel (en chaque point d'accumulation de l'ensemble, le ptg est incomplet) est porté par une seule orthosurface. Nous allons maintenant démontrer que certains ensembles spatiaux sont situés sur un seul arc simple rectifiable et certains ensembles spatiaux sur une seule orthosurface.

Comme dans le cas du plan, nous nous appuierons sur les résultats énoncés en tête du présent chapitre.

Lemme I. — *Un ensemble dont le paratingent en un point M est privé de tout un plan* π *est situé, au voisinage de M, sur un arc gauche simple rectifiable C et cet arc n'a qu'un point sur chaque plan parallèle au plan* π *exclu du paratingent de l'ensemble en M.*

Lemme II. — *Un ensemble dont le paratingent en un point M est incomplet est situé, au voisinage de M, sur une orthosurface S* (c.-à.-d. une surface à ptg partout incomplet, donc quarrable) *et cette surface n'a qu'un point sur chaque parallèle à la droite* δ *exclue du ptg de l'ensemble E en M.*

2. A la page 12 nous avons vu qu'autour de chaque point M d'un ensemble fermé punctiforme borné E, on peut construire une surface S fermée d'aire finie ne portant aucun point de E, et de dimensions aussi restreintes qu'on désire. C'est

(1) Voir la démonstration du théorème de la page 25.

un résultat local, comme p. 22, on fait passer à des considérations de nature intégrale, on a le lemme suivant :

LEMME III. — *Soit E un ensemble borné, fermé, punctiforme. On peut enfermer E dans un nombre fini de cellules disjointes de diamètres inférieurs à une longueur donnée dont les frontières sont des surfaces fermées d'aires finies ne portant aucun point de E.*

3. Le paratingent offre aussi la propriété de la semi-continuité supérieure d'inclusion (1), car toute droite limite de paratingentes $M_i D_i$ aux points M_i qui tendent vers le point M est elle-même une paratingente en M : donc le ptg en M englobe l'accumulatif des paratingentes en M. De cette propriété, il est facile de déduire les corollaires suivants :

COROLLAIRE I. — *Si une direction* d *est exclue du ptg d'un ensemble quelconque E en un point O, on peut toujours trouver une sphère, de centre O et de rayon non nul, telle que le ptg de E en tout point intérieur à la sphère laisse échapper aussi la même direction* d.

En effet, si, dans toutes les sphères de centre O et de rayon non nul, il existe toujours un point où la direction d était paratingente, d serait, en vertu de la propriété de la semi-continuité supérieure d'inclusion, une paratingente de E en O, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De même, on a :

COROLLAIRE II. — *Soit E un ensemble quelconque dont le ptg en un point M laisse échapper toutes les directions d'un plan π, il existe une sphère de centre M et de rayon non nul telle que le ptg de E en tout point intérieur à cette sphère laisse échapper également toutes les directions de π.*

En combinant ces différentes conclusions aux lemmes I et II, p. 23, on obtient les deux nouveaux lemmes suivants :

LEMME I^bis^. — *Un ensemble E borné, fermé, punctiforme dont le ptg est partout privé d'un plan, peut toujours être enfermé dans un nombre fini de cellules disjointes ne portant à leurs surfaces aucun point de E et dont les diamètres sont assez petits pour qu'à l'intérieur de chaque cellule les points de E soient situés sur un seul arc simple rectifiable.*

LEMME II^bis^. — *Un ensemble E borné, fermé, punctiforme dont le ptg est partout incomplet, peut toujours être enfermé dans un nombre fini de cellules disjointes ne portant à leurs surfaces aucun point de E et dont les diamètres sont assez petits pour qu'à l'intérieur de chaque cellule les points de E soient situés sur une même orthosurface.*

(1) G. BOULIGAND, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, p. 68. *Mém. Soc. Roy. Sc. Liége*, 3e série, t. XIX, 1933. Voir aussi *G. I. D.*, n° 77.

4. Voici maintenant les considérations de nature intégrale que nous avions annoncées : Soit E un ensemble, fermé, borné, punctiforme dont le ptg est privé partout d'un plan. En vertu du lemme I *bis*, p. 24, l'ensemble E peut toujours être enfermé dans un nombre fini n de cellules ; chaque sous ensemble E_i de E dans chaque cellule est situé sur un arc simple rectifiable ; le ptg de chaque arc $\widehat{A_i A'_i}$ en tout point intérieur à chaque cellule laisse échapper toutes les directions d'un même plan π_i.

Par construction tout plan parallèle à π_i ne rencontre $\widehat{A_i A'_i}$, à l'intérieur de C_i, qu'en un seul point et tous les points de $\widehat{A_i A'_i}$, sont compris entre les deux plans π_{A_i} et $\pi_{A'_i}$ parallèles à π_i menés par A_i et A'_i. Soient H_i et H'_i points de π_{A_i} et $\pi_{A'_i}$ situés sur C_i. Je dis qu'on peut toujours construire $n-1$ arcs simples $\widehat{H'_1 H_2}$, $\widehat{H'_2 H_3}, \ldots, \widehat{H'_{n-1} H_n}$ telsque la réunion $\widehat{A_1 A'_1} + \overline{A'_1 H'_1} + \widehat{H'_1 H_2} + \overline{H_2 A_2} + \widehat{A_2 A'_2} + \ldots + \widehat{A_n A'_n}$ forme un seul arc simple rectifiable.

En effet, les n arcs simples $\overline{H_i A_i} + \widehat{A_i A'_i} + \overline{A'_i H'_i} = c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont disjoints, le complémentaire de $\sum_{i=1}^{n} c_i - \overline{A'_1 H'_1} - \overline{H_2 A_2}$ (ou bien de $\overline{H_1 A_1} + \widehat{A_1 A'_1} + \widehat{A_2 A'_2} + \overline{A'_2 H'_2} + c_3 + c_4 + \ldots + c_n$) est un domaine (D_1), c'est-à-dire un ensemble ouvert connexe. (Voir p. 35, *G. I. D.*) Les deux points H'_1 et H_2 appartiennent à (D_1), il est facile dans (D_1) de construire un polygone d'un nombre fini de sommets $\widehat{H'_1 H_2}$ (voir p. 34, *G. I. D.*), tel que la réunion $r_1 = c_1 + \widehat{H'_1 H_2} + c_2$ forme un arc simple rectifiable. Cet arc simple r_1 est disjoint de $c_3, c_4, \ldots, c_n$, parce que $\widehat{H'_1 H_2}$ est construit dans (D_1). Le complémentaire de :

$r_1 + \sum_{i=3}^{n} c_i - \overline{A'_2 H'_2} - \overline{H_3 A_3}$ (ou bien de $c_1 + \widehat{H'_1 H_2} + \overline{H_2 A_2} + \widehat{A_2 A'_2} + \widehat{A_3 A'_3} + \overline{A'_3 H'_3} + c_4 + c_5 + \ldots + c_n$) est aussi un domaine (D_2). Les points H'_2 et H_3 appartiennent à (D_2) et on peut construire dans (D_2) un arc $\widehat{H'_2 H_3}$ tel que la réunion $r_2 = r_1 + \widehat{H'^2 H_3} + c_3$ forme un arc simple rectifiable et ainsi de suite. On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Par un ensemble borné, fermé, punctiforme dont le ptg est partout privé d'un plan* (variable suivant le point considéré), *on peut faire passer un arc simple rectifiable.*

5. Pour terminer cette section, nous allons étudier les ensembles fermés punctiformes spatiaux dont le ptg est partout simplement incomplet sans autre précision. D'après le lemme II *bis* un tel ensemble E est situé dans un nombre fini de cellules C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; chaque C_i contient un sous ensemble E_i de E ;

chaque E_i dans chaque C_i est situé sur une orthosurface S_i (c'est-à-dire une surface à ptg partout incomplet), le ptg de chaque S_i dans chaque C_i laisse échapper en tout point au moins une direction commune (d_i).

Limitons S_i à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à d_i et dont la directrice est une courbe b_i fermée située sur S_i, cette courbe b_i étant choisie de telle manière que E_i soit situé entièrement dans ce cylindre. Un point A_i de b_i situé sur ce cylindre et étranger à E_i (A_i existe, E_i étant non dense) est le centre d'une sphère ouverte intérieure à C_i dans laquelle on peut tracer un petit triangle T_i extérieur au cylindre, dont un sommet est le point A_i et dont le plan est perpendiculaire à d_i. La réunion ($E_i + T_i$) est alors située, à l'intérieur de C_i, sur une orthosurface (puisque son ptg est partout privé de d_i) ; cette orthosurface S'_i peut être choisie de manière à englober à la fois S_i et T_i. On peut, de nouveau, limiter S'_i de manière que son contour apparent dans la direction d_i comprenne le côté $\overline{u_i v_i}$ de T_i opposé à A_i. On obtient ainsi une rondelle de S'_i dont le bord englobe un petit segment $\overline{u_i v_i}$ de droite bordé d'un élément plan.

Prenons dans l'intérieur de chaque C_i deux rectangles $R_i = U_i V_i M_i N_i$, $R'_i = U'_i V'_i M'_i N'_i$ partant de deux segments disjoints $\overline{U_i V_i}$, $\overline{U'_i V'_i}$ de $\overline{u_i v_i}$ et parallèles à d_i (et de deux sens opposés), il est évident que les n réunions $R_i + S'_i + R'_i = H_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ forment n orthosurfaces disjointes. Je dis qu'on peut toujours construire $n - 1$ orthosurfaces $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ telles que la réunion $H_1 + B_1 + H_2 + B_2 + H_3 + \ldots + H_n$ forme une seule orthosurface.

En effet, le complémentaire de la réunion de n orthosurfaces $H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ est un domaine, le complémentaire de $R_1 + S'_1 + S'_2 + R_2 + H_3 + H_4 + \ldots + H_n$ est donc un domaine (D_1). Les deux sommets M'_1 et M_2 de R'_1 et R_2 sont situés dans (D_1), il existe donc (voir p. 34, *G. I. D.*) une succession d'un nombre fini $L_1 + 1$ de sphères $\mathcal{S}^j_1$, $j = 1, 2, \ldots, L_1 + 1$ partant d'une sphère $\mathcal{S}^1_1$ de centre M'_1 pour aboutir à une sphère $\mathcal{S}^{L_1+1}_1$ de centre M_2 dont chacune coupe la précédente, et telle que tout point de chacune d'elles appartienne à (D_1). De plus, il est évident qu'on peut toujours choisir la sphère $\mathcal{S}^j_1$ disjointe des j-2 sphères précédentes $\mathcal{S}^k_1$, $k = 1, \ldots, j$-2 et les L_1-1 sphères $\mathcal{S}^j_1$, $j = 2, 3, \ldots, L_1$ disjointes de R'_1 et R_2. On marque dans chaque partie commune de l'intersection de deux sphères consécutives ($\mathcal{S}^j_1$, $\mathcal{S}^{j+1}_1$), deux points M^j_1, N^j_1 tels que chaque groupe de quatre points (M'_1, N'_1, N^1_1, M^1_1), ($N^{j-1}_1, N^{j-1}_1, N^j_1, M^j_1$), ($M^{L_1}_1, N^{L_1}_1, N_2, M_2$) soit plan. Comme le ptg de la réunion de deux trapèzes n'ayant qu'un côté commun est partout incomplet, on obtient alors une orthosurface B_1 dans la suite de sphères $\mathcal{S}^j_1$ partant de R'_1 pour aboutir à R_2 : Pour l'obtenir il suffit de réunir les $L_1 + 1$ trapèzes ($M'_1 N'_1 N^1_1 M^1_1$), ($M^1_1 N^1_1 N^2_1 M^2_1$), ..., ($M^{L_1}_1 N^{L_1}_1 N_2 M_2$).

L'orthosurface B_1 réunie à H_1 et H_2 constitue une nouvelle orthosurface Ψ_1 qui a encore ses distances aux orthosurfaces $H_3, H_4, \ldots, H_n$, positives parce que B_1 est construite dans (D_1), le complémentaire de la réunion $\Psi'_1 + H_3 + H_4 + \ldots + H_n$ est encore un domaine (D_2). De même, M'_2 et M_3 sont deux points dans (D_2), il existe dans (D_2) une suite de sphères $\mathcal{S}_2^j$, $j = 1, 2, \ldots, L_2 + 1$ dont la première a pour centre M'_2, la dernière pour centre M_3 ; conformément à ce qui précède, on peut construire une orthosurface B_2 partant de R'_2 pour aboutir à R_3 dans la suite des sphères $\mathcal{S}_2^j$ et ainsi de suite. D'où l'énoncé suivant :

Théorème. — *Un ensemble spatial borné fermé punctiforme à ptg partout incomplet peut toujours être situé sur une seule orthosurface.*

CHAPITRE III

Quelques problèmes de raréfaction des ensembles.

1. Je me propose ici d'étudier la raréfaction des ensembles dans l'espace d'après la raréfaction de leurs points sur des variétés particulières. Pour délimiter ces recherches, je me borne à l'étude dans l'espace euclidien à trois dimensions ; je laisserai systématiquement de côté ici le cas du plan (1). Les résultats sont des propriétés extensibles aux espaces à n dimensions. Dans cet ordre, je donne certains critères pour la discrimination de divers ensembles discontinus ; je montrerai comment on peut distinguer des ensembles finis, des ensembles clairsemés, des ensembles totalement imparfaits, des ensembles fermés dénombrables et des ensembles fermés clairsemés. Je dois d'abord dégager certaines propriétés d'ensembles infinis, d'ensembles parfaits et d'ensembles denses en eux-mêmes, très généraux, soumis à la seule restriction qu'ils soient bornés (c'est-à-dire à diamètre borné).

2. Dans le but d'atteindre les ensembles finis par voie d'exclusion, voici un lemme concernant les ensembles infinis.

Lemme I. — *Soit E un ensemble de l'espace euclidien à trois dimensions ayant en O un point d'accumulation où il admet la demi-tangente OT. On peut toujours trouver une suite de points de E, en nombre infini, tendant vers O et situés sur une surface convexe au sens large* (2).

Soit π un plan quelconque passant par la demi-tangente OT. Si l'ensemble E a une infinité de points sur le plan π, l'énoncé précédent est évident.

Supposons que π ne porte qu'un nombre fini de points en E. En vertu des définitions du point d'accumulation et de la demi-tangente (3), tout demi cône de révolution, ayant pour sommet O, pour axe OT, contient à son intérieur (si faible que soient sa hauteur et son angle au sommet), au moins un point de E distinct de O et non situé sur π.

(1) Shao-Lien Chow, Sur certains ensembles finis (*Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timisoara*, Roumanie, 1935).

(2) Par opposition aux surfaces strictement convexes.

(3) Voir p. 8.

Le plan π partage un tel demi-cône en deux parties dont l'une au moins contient une infinité de points de E.

Nous considérons désormais une seule de ces parties, nous la choisirons de manière qu'elle contienne une infinité de points de E et nous la désignerons par γ_0.

Soit M_1 un point de E situé sur γ_0 et hors de π. Désignons par H_1 sa projection orthogonale sur OT et par G_1 sa projection sur le plan π' mené par OT perpendiculairement à π.

D'après ce que nous avons vu plus haut, le demi-cône circulaire droit d'axe OT, de hauteur $\overline{OH_1}$ et de rayon $\overline{H_1M_1}$ est coupé par π en deux parties et celle de ces parties qui est incluse dans γ_0 et que nous désignerons par γ_1 contiendra au moins un point M_2 de E (au sens étroit). Le point M_2 se projette en H_2 sur OT et en G_2 sur π'.

Le même procédé nous ferait distinguer une suite de points $\{M_i\}$ de E admettant O comme point limite et OT comme demi-tangente en O, de plus, chaque point M_i de cette suite est situé sur une droite $\overline{G_iM_i}$ parallèle à π et perpendiculaire à π'. La suite $\{G_i\}$ des traces de ces droites sur π' constitue l'ensemble des sommets d'une ligne polygonale convexe dont les côtés $\overline{G_iG_{i-1}}$ en infinité dénombrable ont leurs pentes relatives à OT, qui forment une suite monotone décroissante et tendant vers O. Il résulte de ce qui précède :

1° Que la réunion des plans $(\overline{G_iM_i}, \overline{G_{i+1}M_{i+1}})$ est une surface polyédrale convexe Σ admettant le plan π comme plan tangent en O ;

2° Que cette surface convexe porte une suite infinie de points $\{M_i\}$ de E.

(C. Q. F. D.)

3. Du lemme précédent découle ce résultat.

THÉORÈME. — *Est fini, tout ensemble E n'ayant qu'un nombre fini de points sur toute une surface convexe.*

Si l'ensemble a une infinité de points, en vertu du théorème de Weierstrass-Bolzano, il y a au moins un point d'accumulation O (1). On pourrait trouver une suite de points de l'ensemble qui tendent vers O, de manière que cette suite ait une demi-tangente OT en O (2). Il résulte du lemme précédent qu'on peut trouver une infinité de points de E sur un cylindre convexe, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, l'ensemble E ne peut contenir qu'un nombre fini de points.

(C. Q. F. D.)

4. Passons maintenant à l'étude des ensembles clairsemés. Nous aurons là encore un lemme important.

(1) Voir *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* de M. BOULIGAND, p. 8.
(2) Voir p. 8.

Considérons d'abord un ensemble dense en soi et borné E_0 de diamètre d. Nous allons définir un certain sous-ensemble $\mathcal{E}$, de E_0 et cela, par une suite d'opérations.

Point de départ. — Soient P'_0 et P''_0 deux points de E_0. Puisque le diamètre de E_0 est d, il existe un arc rectifiable d'extrémités P'_0 et P''_0 et de longueur $\leq d$.

Première opération. — Puisque E_0 est dense en soi, on peut trouver un sous-ensemble dense en soi E'_1 de E_0 incluant P'_0 et un sous-ensemble dense en soi E''_1 de E_0 incluant P''_0, les diamètres de ces deux sous-ensembles, peuvent avoir une valeur inférieure à d. Nous poserons

$$\text{diamètre } E'_1 \leq \frac{d}{2^2},$$

$$\text{diamètre } E''_1 \leq \frac{d}{2^2}.$$

Par un choix convenable de P'_0 et P''_0, ainsi que des diamètres précédents on peut s'arranger pour que E'_1 et E''_1 soient disjoints.

Dans E'_1, choisissons un point P'_1, différent de P'_0 et dans E''_1, choisissons un point P''_1, différent de P''_0.

Les diamètres de E_0 étant $\leq \frac{d}{2^0}$, il existe un arc rectifiable $\widehat{P'_1 P''_1}$ qui, ses extrémités étant contenues dans E_0 sans plus, a une longueur inférieure ou égale à $d = \frac{d}{2^0}$.

En résumé, la première opération nous conduit à distinguer deux points P'_1 et P''_1 de E_0, extrémités d'un arc de longueur $\leq \frac{d}{2^0}$ et situés respectivement dans E'_1 et E''_1, sous-ensembles denses en eux-mêmes de E_0, disjoints et de diamètres $\leq \frac{d}{2^2}$.

Deuxième opération. — En vertu des E'_1, E''_1 denses en eux-mêmes, on peut trouver :

$$\text{dans } E'_1 \left\{ \begin{array}{llll} \text{un sous-ensemble dense en soi} & E'_2 & \text{incluant} & P'_0, \\ \quad\quad\quad\text{»} & E''_2 & \text{»} & P'_1\,; \end{array} \right.$$

$$\text{dans } E''_1 \left\{ \begin{array}{llll} \text{un sous ensemble dense en soi} & E'''_2 & \text{incluant} & P''_0, \\ \quad\quad\quad\text{»} & E^{\text{iv}}_2 & \text{»} & P''_1\,; \end{array} \right.$$

E'_2 et E''_2 étant disjoints et de diamètres $\leq \frac{d}{2^4}$,

E'''_2 et E^{iv}_2 étant disjoints et de diamètres $\leq \frac{d}{2^4}$.

Dans E'_2, on choisit un point P'_2 différent de P'_0,
dans E''_2, on choisit un point P''_2 différent de P'_1,
dans E'''_2, on choisit un point P'''_2 différent de P''_0,
dans E^{iv}_2, on choisit un point P^{iv}_2 différent de P''_1.

Les diamètres de E_1^{I}, E_1^{II} étant $\leq \frac{d}{2^2}$, on peut trouver :

Un arc rectifiable d'extrémités P_2^{I} et P_2^{II} dans E_1^{I} et de longueur $\leq \frac{d}{2^2}$,

un arc rectifiable d'extrémités P_2^{III} et P_2^{IV} dans E_1^{II} et de longueur $\leq \frac{d}{2^2}$.

En résumé, la deuxième opération nous a fait distinguer quatre nouveaux points de E_0, à savoir P_2^{I}, P_2^{II}, P_2^{III}, P_2^{IV}, extrémités de deux arcs de longueurs $\leq \frac{d}{2^2}$ et situés ainsi :

P_2^{I} et P_2^{II} dans E_1^{I} de diamètre $\leq \frac{d}{2^2}$,

P_2^{III} et P_2^{IV} dans E_1^{II} de diamètre $\leq \frac{d}{2^2}$.

Troisième opération. — En vertu de la propriété des ensembles denses en eux-mêmes, on peut trouver :

Dans E_2^{I} $\begin{cases} \text{un sous-ensemble dense en soi } E_3^{I}, \text{ incluant } P_0^{I}, \\ \quad\text{»} \qquad E_3^{II}, \quad\text{»}\quad P_2^{I}, \end{cases}$

dans E_2^{II} $\begin{cases} \text{un sous-ensemble dense en soi } E_3^{III}, \text{ incluant } P_1^{I}, \\ \quad\text{»} \qquad E_3^{IV}, \quad\text{»}\quad P_2^{II}, \end{cases}$

dans E_2^{III} $\begin{cases} \text{un sous-ensemble dense en soi } E_3^{V}, \text{ incluant } P_0^{II}, \\ \quad\text{»} \qquad E_3^{VI}, \quad\text{»}\quad P_2^{III}, \end{cases}$

dans E_2^{IV} $\begin{cases} \text{un sous-ensemble dense en soi } E_3^{VII}, \text{ incluant } P_1^{II}, \\ \quad\text{»} \qquad E_3^{VIII}, \quad\text{»}\quad P_2^{IV}, \end{cases}$

E_3^{I}, E_3^{II}, E_3^{III}, E_3^{IV}, E_3^{V}, E_3^{VI}, E_3^{VII}, E_3^{VIII} étant mutuellement disjoints et de diamètres $\leq \frac{d}{2^6}$.

Dans E_3^{I} on choisit un point P_3^{I} différent de P_0^{I},
dans E_3^{II} on choisit un point P_3^{II} différent de P_2^{I},
dans E_3^{III} on choisit un point P_3^{III} différent de P_1^{I},
dans E_3^{IV} on choisit un point P_3^{IV} différent de P_2^{II},
dans E_3^{V} on choisit un point P_3^{V} différent de P_0^{II},
dans E_3^{VI} on choisit un point P_3^{VI} différent de P_2^{III},
dans E_3^{VII} on choisit un point P_3^{VII} différent de P_1^{II},
dans E_3^{VIII} on choisit un point P_3^{VIII} différent de P_2^{IV}.

Tous les diamètres étant $\leq \frac{d}{2^4}$ on peut trouver :

un arc rectifiable d'extrémités P_3^{I} et P_3^{II} dans E_2^{I} et de longueur $\leq \frac{d}{2^4}$,

un arc rectifiable d'extrémités P_3^{III} et P_3^{IV} dans E_2^{II} et de longueur $\leq \frac{d}{2^4}$, un arc rectifiable d'extrémités P_3^{V} et P_3^{VI} dans E_2^{III} et de longueur $\leq \frac{d}{2^4}$,

un arc rectifiable d'extrémités P_3^{VII} et P_3^{VIII} dans E_2^{IV} et de longueur $\leq \frac{d}{2^4}$.

En résumé, la troisième opération nous a menés à la distinction de huit nouveaux points de E_0 qui jouent le rôle d'extrémités pour quatre arcs rectifiables de longueurs $\leq \frac{d}{2^4}$ et situés deux à deux dans quatre sous-ensembles denses en eux-mêmes (E_2^{I}, E_2^{II}, E_2^{III}, E_2^{IV}) de diamètre $\leq \frac{d}{2^4}$.

Inutile d'aller plus loin dans cette voie ; on aperçoit la possibilité d'opérer par récurrence.

Je choisis d'abord deux points de E_0 liés par un arc de longueur $\leq d$, la première opération fournit deux nouveaux points de E_0 liés par un arc de longueur $\leq \frac{d}{2^0}$, la deuxième opération donne quatre points nouveaux de E_0 liés par deux arcs de longueurs $\leq \frac{d}{2^2}$, la troisième opération donne huit nouveaux points de E_0 liés par 4 arcs de longueur $\leq \frac{d}{2^4}$.

La $n^{\text{ième}}$ opération donne 2_n nouveaux points de E_0 liés par 2^{n-1} arcs de longueur $\leq \frac{d}{2^{2(n-1)}}$.

En répétant ce procédé une infinité de fois, on a distingué un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de E_0 sur la réunion d'une infinité d'arcs rectifiables de longueur totale bornée :

$$\lambda \leq \left(d + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{d}{2^{2(n-1)}} \right) = 3\,d.$$

Quand n tend vers l'infini, $\mathcal{E}$ peut s'enrichir de certains points limites.

5. Etudions maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ que nous venons de définir. D'abord l'ensemble des arcs que nous lui avons associés, de leurs extrémités et des limites de celle-ci est un certain continu K.

Nous avons vu au numéro précédent qu'après la première opération quatre points de E_0 sont distingués, formant les extrémités de deux premiers arcs dont la réunion a un défaut d'enchaînement $\leq 2 \cdot \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2}$.

Si nous joignons les deux paires d'extrémités dans E_1^{i} ($i = \mathrm{I}, \mathrm{II}$) par deux segments rectilignes, nous aurions un cycle K_1 de longueur

$$L_1 \leq (d + d) + \frac{d}{2}$$

partant des 2^2 points cités de E_0.

Au bout de la deuxième opération, les points distingués de E_0 sont au nombre de 2^3 et sont extrémités de quatre premiers arcs dont la réunion a un défaut d'enchaînement au plus égal à : $2^2 . \frac{d}{2^4} = \frac{d}{2^2}$.

Si nous joignons les quatre paires d'extrémités dans E_2^i ($i =$ I, II, III, IV) par quatre segments rectilignes, nous aurions un deuxième cycle K_2 de longueur :

$$L_2 \leqq \left(d + d + 2 . \frac{d}{2^2}\right) + \frac{d}{2^2}$$

partant les 2^3 points cités de E_0.

Au bout de la $n^{\text{ième}}$ opération, les points distingués, au nombre de 2^{n+1}, sont extrémités de 2^n premiers arcs dont la réunion a un défaut d'enchaînement : $2^n . \frac{d}{2^{2n}} = \frac{d}{2^n}$.

Si nous joignons les 2^n paires d'extrémités dans E_n^i [i = I, II, III,..., (2^n)] par 2^n segments rectilignes, nous aurions un $n^{\text{ième}}$ cycle K^n de longueur.

$$L_n \leqq \left(d + \sum_{n=1}^{n=n} 2^{n-1} . \frac{d}{2^{2(n-1)}} + \frac{d}{2^n} \right)$$

portant les 2^{n+1} points de E_0.

Après avoir répété ce procédé une infinité de fois, n tend vers l'infini, la somme du défaut d'enchaînement de nos arcs enlevés tend vers zéro. Donc la somme des longueurs de segments rectilignes (formant une suite infinie) qui joignent les couples d'extrémités dans E_i^i ($i =$ I, II,....∞) tend aussi vers zéro ; nous aurions un cycle K de longueur.

$$L \leqq \left[\left(d + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2^{n-1} . \frac{d}{2^{2(n-1)}} \right) + \lim_{n=\infty} \frac{d}{2^n} \right] = 3\, d$$

portant une infinité de points $\mathcal{E}$ de E_0, c'est-à-dire la limite de la longueur de notre dernier cycle K est la même que celle de la suite infinie d'arcs proposés.

D'autre part, chaque point de $\mathcal{E}$, extrémité d'arc, est engagé, avec une autre extrémité d'arc dans chaque élément d'une suite décroissante d'ensembles denses en eux-mêmes emboîtés, dont les diamètres tendent vers zéro, c'est-à-dire d'ensembles denses en eux-mêmes tendant à se réduire à un seul point. Ce qui montre que tous les points étrangers à nos arcs sur notre dernier cycle K de longueur bornée sont les points limites d'extrémités dont on a fait mention. Donc l'ensemble des arcs enlevés, de leurs extrémités et des limites de celles ci est un continu K.

On voit d'un même coup que chaque point de $\mathcal{E}$ est limite d'autres points de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est un ensemble dense en soi.

Il importe maintenant de préciser la nature d'un continu K sustentateur du sous-ensemble $\mathcal{E}$ de E_0.

Ce continu peut se scinder en deux parties, d'une part, les arcs qui le composent *privés de leurs extrémités* et d'autre part la *fermeture* de l'ensemble de ces extrémités. La réunion de nos arcs ouverts, en infinité dénombrable, de longueur bornée, ne peut présenter de points intérieurs. Quant à la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de l'ensemble des extrémités, c'est un ensemble non dense, donc privé de points intérieurs, car tout domaine incluant un de ses points contient une sphère étrangère à cet ensemble $\overline{\mathcal{E}}$, comme le montre la construction précédente (1). Notre continu est donc une courbe cantorienne de longueur bornée qui peut présenter des points multiples, et porte un sous-ensemble $\mathcal{E}$ dense en soi de E_0. C'est par suite la réunion d'un ensemble dénombrable d'arcs simples rectifiables dont l'ensemble des extrémités a pour fermeture $\overline{\mathcal{E}}$. L'ensemble $\overline{\mathcal{E}}$, complémentaire sur le continu K, d'une réunion d'arcs simples ouverts, est fermé. Etant à la fois dense en soi et fermé, $\overline{\mathcal{E}}$ sera un ensemble parfait, cette remarque est ici utile pour étudier les ensembles parfaits.

Ceci représente une propriété importante et que nous énoncerons ainsi :

Lemme III. — *Soit E_0 un ensemble dense en soi et borné, on peut toujours trouver une courbe rectifiable portant un sous-ensemble dense en soi de E_0.*

6. De la propriété précédente il résulte presque immédiatement le théorème suivant :

Théorème IV. — *Est clairsemé tout ensemble E_0 n'ayant qu'un sous-ensemble clairsemé sur toute courbe rectifiable.*

En effet, si E_0 n'était pas clairsemé, c'est-à-dire avait un sous-ensemble dense en soi, en vertu du lemme III, il admettrait en particulier un sous-ensemble dense en soi sur quelque courbe rectifiable et cela serait contraire à l'hypothèse.

7. Nous allons étudier maintenant les ensembles parfaits. Car tout ensemble parfait est dense en soi ; soit E_0 un ensemble parfait quelconque ; en vertu du lemme III et sa démonstration, on peut trouver toujours une courbe rectifiable

(1) Soit D_0 un domaine (diamètre d) contenant E_0. En vertu des caractères de E_1^{I} et E_1^{II}, on peut toujours les prendre à l'intérieur de D_0, de manière qu'ils soient situés respectivement dans deux domaines disjoints D_1^{I} et D_1^{II} de diamètres $\leq \frac{d}{2^2}$. Il est évident qu'il existe des sphères exclues de $\overline{\mathcal{E}}$ dans l'intérieur de D_0. De même pour les deux sous-ensembles E_2^{I}, E_2^{II} (ou E_2^{III} et E_2^{IV}) on peut les prendre à l'intérieur de D_1^{I} (ou D_1^{II}) de manière qu'ils soient situés respectivement dans deux domaines disjoints D_2^{I} et D_2^{II} (D_2^{III} et D_2^{IV}) de diamètres $\leq \frac{d}{2^4}$. Il existe aussi des sphères exclues de $\overline{\mathcal{E}}$ dans D_1^{I} (ou D_1^{II}), et ainsi de suite ; on aura une sphère exclue de $\overline{\mathcal{E}}$ au voisinage de tout point de $\overline{\mathcal{E}}$.

portant un sous-ensemble dense en soi de E_0, mais cette courbe contient la fermeture de cet ensemble dense en soi $\mathcal{E}$, cette courbe porte donc un sous-ensemble parfait $\overline{\mathcal{E}}$ de E_0.

Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme V. — *Soit E_0 un ensemble parfait et borné. On peut toujours trouver un arc simple portant un sous ensemble parfait de E_0.*

Nous avons vu que E_0 admet un sous-ensemble parfait $\overline{\mathcal{E}}$ sur une certaine courbe K de longueur bornée, pouvant présenter des points multiples. On sait qu'une courbe rectifiable portant des points multiples peut se décomposer en une infinité dénombrable d'arcs simples de Jordan. Nous allons démontrer que, si K porte un sous-ensemble parfait de E_0, il en sera de même de l'un au moins des arcs simples composants.

Soit σ un arc de la décomposition (*extrémités comprises*). Considérons le produit $\overline{\mathcal{E}}.\ \sigma = e$, c'est-à-dire l'ensemble des points communs à $\overline{\mathcal{E}}$ et à σ Cet ensemble est fermé, car σ comprenant deux extrémités est un ensemble fermé. Voici les cas qui peuvent se présenter :

1° e est parfait situé sur un des arcs σ ; alors notre proposition est exacte ;

2° e n'est pas parfait sur aucun arc σ ; il est alors dénombrable ou bien non dénombrable. Si sur un des arcs σ, e est non dénombrable, étant fermé (1), il est la réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable (Théorème de Cantor-Bendixson) ; notre énoncé est encore exact ; enfin, si e est dénombrable sur tout arc σ, les arcs σ forment une famille au plus dénombrable, la somme $\overline{\mathcal{E}}$ des e est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{E}}$ est dénombrable, contrairement à ce que nous avons établi plus haut.

8. De la proposition précédente, il résulte presque immédiatement le théorème suivant :

Théorème VI. — *Est totalement imparfait tout ensemble E_0 n'ayant qu'un sous-ensemble totalement imparfait sur tout arc simple rectifiable.*

En effet, si E_0 n'était pas totalement imparfait, c'est-à-dire avait un sous-ensemble parfait, en vertu du lemme IV il admettrait en particulier un sous-ensemble parfait, sur quelque arc rectifiable et cela contredirait l'hypothèse.

9. Nous allons maintenant appliquer le résultat précédent à l'étude des ensembles fermés.

D'après le théorème de Cantor-Bendixson, tout ensemble fermé est la réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. (Bien entendu, l'un ou l'autre peut être vide.) Soit donc E un ensemble fermé. Si E ne contient aucun sous-en-

(1) Voir A. Appert, *Les espaces abstraits les plus généraux* (Actualité Hermann, fasc. 145), p. 12, § III.

semble parfait, c'est-à-dire s'il est dénombrable, aucun arc rectifiable ne peut évidemment porter un sous-ensemble parfait E. Réciproquement, si E n'a pas de sous-ensemble parfait sur tout arc simple rectifiable, il ne peut contenir de sous-ensemble parfait, en vertu du lemme V. Ce résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME VII. — *Est dénombrable tout ensemble fermé E n'ayant sur tout arc simple rectifiable qu'un sous ensemble au plus dénombrable.*

10. Pour étudier les ensembles fermés, on sait que tout ensemble E fermé est la somme de deux ensembles disjoints, l'un parfait et l'autre clairsemé (l'un ou l'autre pouvant être vide) (1). D'après le résultat précédent nous avons immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Est clairsemé tout ensemble fermé n'ayant sur tout arc simple rectifiable qu'un sous-ensemble clairsemé.*

(1) A. APPERT, *Les espaces abstraits les plus généraux*. Actualités Hermann, (fasc. 145, énoncé 3), p. 33.

VU ET APPROUVÉ :
Poitiers, 17 mars 1936,
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
A. BILLARD.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :
Poitiers, 18 mars 1936,
Le Recteur de l'Académie de Poitiers,
P. MARTINO.

ADDENDA

1. — Conformément à la démonstration du théorème de la page 27, les théorèmes des pages 23 et 25 peuvent être présentés sous la forme suivante :

Par un ensemble plan borné, fermé, punctiforme, à paratingent partout incomplet, on peut faire passer une orthocourbe plane (1).

Un ensemble spatial, borné, fermé, punctiforme dont le ptg est partout privé d'un plan peut toujours être situé sur une orthocourbe gauche.

Si l'on remarque alors que le paratingent est covariant par rapport au *groupe topologique restreint du premier ordre* (2), on démontre facilement que *les propriétés de localisation établies dans le chapitre II sont invariantes par rapport à ce groupe.*

2. — Comme on sait que les ensembles finis, infinis, denses en eux-mêmes, clairsemés, parfaits, etc., sont des êtres topologiques (3), on peut dire immédiatement que *les propriétés étudiées dans le chapitre III sont invariantes par rapport aux transformations de la topologie pure* (2).

(1) Rappelons qu'une orthocourbe est rectifiable, mais que la réciproque n'est pas toujours vraie, voir M Bouligand, *G. I. D.*, chap. XVI, et M. Denjoy, « L'additivité métrique vectorielle », *Bull. de la Soc. roumaine des Sciences*, t 35.

(2) M. Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, p. 55-57, *Mémorial des Sc. Math.*, no LXXI, p. 25-31, et *G. I D.*, chap X et XI, spécialement p. 73 74.

(3) M. C. Kuratowski, *Topologie*, I ; M. A. Appert, *Les espaces abstraits les plus généraux*, Actualités Hermann, fasc 145 et 146 ; M. M Fréchet, *Espaces abstraits*.

ERRATA

Page	2,	*ligne*	24,	*au lieu de*	pour,	*lire*	sur.
—	10,	—	6,	—	E,	—	E_p.
—	16,	—	15,	—	ptg.	—	paratingente.
—	16,	—	18,	—	MT_1 et MT_2.	*lire*	MT_1 et MT_2.
—	22,	—	25,	—	soit un,	*lire*	soit E un.
—	22,	—	29,	—	contiguës,	—	consécutives.
—	25,	—	21,	—	$H_1' H_2$,	—	$\widehat{H_1' H_2}$
—	35,	—	30,	—	IV,	—	V.

TABLE DES MATIÈRES

Poitiers. — Société française d'imprimerie et de librairie.