RAPHAËL SALEM

Essais sur les séries trigonométriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__230__1_0>

SÉRIE A, N° 1919
N° D'ORDRE : 2786

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Raphaël SALEM

1re THÈSE. — ESSAIS SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1939 devant la Commission d'examen

MM. BOREL . . . . . *Président.*
MONTEL . . . . } *Examinateurs.*
DENJOY . . . . }

PARIS
HERMANN ET C^ie, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1940

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire .... M. MOLLIARD.

Doyen .... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires...

H. LEBESGUE.	DANGEARD.	G. BERTRAND
A. FERNBACH.	LESPIEAU.	H. ABRAHAM.
Émile PICARD.	MARCHIS.	Charles FABRY.
Léon BRILLOUIN.	VESSIOT.	Léon BERTRAND,
PÉCHARD.	PORTIER.	WINTREBERT.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	DUBOSCQ.
AUGER.	LAPIQUE.	BOHN.
		RABAUD.

PROFESSEURS

M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON.........	T	Recherches physiques.
J. DRACH..........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.
M. GUICHARD......	T	Analyses et mesures chimiques.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie
A. MICHEL-LÉVY ...	T	Pétrographie.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH	T	Physique.
G. BRUHAT	T	Physique théorique et physique céleste.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et radioactivité.
A. DUFOUR........	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND ..	T	Botanique.
M. JAVILLIER		Chimie biologique.
L. JOLEAUD	T	Paléontologie.
ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT......	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET.......	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN........	T	Mécanique physiqne et expérimentale.
FOCH.............	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.)
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN..........		Optique appliquée.
P. JOB............		Chimie générale.
LABROUSTE........		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques génér.
PÉRÈS		Mécanique théoriqne des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER...........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronaut.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY.............	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques
DUPONT...........	T	Théories chimiques.
LANQUINE.........	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
VALIRON...........		Mathématiques génér.
BARRABÉ...........		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.
CHATTON.	T	Biologie maritime.
AUBEL............		Chimie biologique.
Jacques BOURCART .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE..		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES.........		Enseignement de Physique.
GRASSÉ		Biologie animale (P. C. B.).
PRÉVOST..........		Chimie (P. C. B.).
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON		Chimie (P. C. B.)

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.............. D. TOMBECK.

PRÉFACE

J'AI réuni dans ce mémoire un certain nombre d'études sur les Séries Trigonométriques, qui ont déjà fait l'objet de notes insérées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

La théorie de l'Intégrale de M. Lebesgue a merveilleusement fécondé le domaine des séries de Fourier. Pendant les 25 dernières années, les recherches s'y sont multipliées, et ont conduit à de remarquables découvertes. Cependant, des problèmes posés depuis fort longtemps attendent encore leur solution.

Je ne me dissimule pas qu'il est prétentieux de vouloir apporter une contribution à une œuvre à laquelle tant de savants se sont intéressés. Je trouve une excuse dans l'espoir que certains procédés dont j'ai fait usage pourraient donner de meilleurs résultats, employés par d'autres que par moi.

Sur des chemins aussi battus, et par des mathématiciens de tous les pays, il est presque impossible de ne jamais tomber, sans le savoir, sur des questions déjà plus ou moins traitées. Lorsque cela m'est arrivé, j'ai mentionné ici — c'est le cas notamment aux chapitres III et IV — les travaux antérieurs aux miens. Je n'ai d'ailleurs développé ceux-ci que dans la mesure où les méthodes de démonstration m'ont paru le justifier.

Les études abordées dans ce petit livre sont de deux ordres. Les premières sont relatives aux coefficients des Séries Trigonométriques, les secondes à leur convergence.

Les séries très élémentaires à coefficients positifs, monotones et tendant vers zéro, m'ont fourni l'occasion de rechercher la relation précise entre l'ordre de grandeur de ces coefficients, et l'ordre de grandeur, au voisinage de l'origine, de la fonction représentée.

Un autre problème qui se pose très naturellement dans l'étude des coefficients est le suivant : une suite infinie de nombres tendant vers zéro étant arbitrairement donnée, dans quelles conditions existe-t-il une fonction sommable dont ces nombres soient les coefficients de Fourier. Le lecteur trouvera, au chapitre II, l'énoncé de conditions nécessaires et suffisantes.

Les coefficients de Fourier des fonctions continues ont souvent attiré l'attention. On sait qu'aucune condition d'ordre de grandeur ne peut être imposée à ces coefficients. Dès lors, la question se pose de savoir s'il n'existe pas, pour les modules des coefficients de Fourier des fonctions continues, d'autres conditions nécessaires que celle de Fischer-Riesz ; c'est-à-dire si la structure des ρ_n dans la série $\Sigma\rho_n \cos(nx\text{-}\alpha_n)$ n'est pas différente, pour les fonctions continues, de ce qu'elle est pour les fonctions de carré sommable ; autrement dit, si les ρ_n étant donnés de façon seulement que la série $\Sigma\rho_n^2$ converge, on peut toujours déterminer les α_n de façon que la série $\Sigma\rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ soit la série de Fourier d'une fonction continue. J'ai essayé, au chapitre IV, d'apporter une contribution à l'étude de cette question, ce qui m'a conduit, par ailleurs, au chapitre suivant, à la généralisation d'importants théorèmes sur la convergence absolue.

En ce qui concerne la convergence des séries de Fourier, on trouvera, au chapitre VI, un test général suffisant pour la convergence uniforme, comprenant ceux de Dini et de Jordan et contenant, en outre, d'autres critères intéressants.

Une généralisation du procédé de sommation de Poisson m'a conduit à de nouveaux procédés de sommation applicables, suivant les cas, en tout point ou sur un ensemble de mesure 2π.

Le problème de savoir s'il existe des fonctions continues, ou même seulement de carré sommable, dont la série de Fourier diverge sur un ensemble de mesure positive, est connu comme présentant d'extrêmes difficultés. On trouvera, au chapitre VII, l'indication d'une nouvelle méthode pour l'étude d'une intégrale qui joue un rôle important dans cette question, méthode qui peut être susceptible d'autres applications.

Dans l'étude des propriétés descriptives — et non plus métriques — des ensembles de points de divergence, j'ai indiqué comment dans la série $\Sigma\rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ où les ρ_n sont donnés, on peut toujours — quelque lente que soit la divergence de la série $\Sigma\rho_n$ —

déterminer les α_n de façon que la série $\Sigma\rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ diverge sur un ensemble de deuxième catégorie.

Je dois beaucoup au Traité sur les Séries Trigonométriques de M. Zygmund (1) qui fait connaître très exactement l'état de la Théorie au moment de sa parution, en 1935. Je m'y réfère souvent en le citant simplement par le nom de son auteur.

M. Arnaud Denjoy a bien voulu s'intéresser à ces exercices, et m'encourager à les publier. Je le prie de trouver ici l'expression de ma plus vive reconnaissance.

Paris. Novembre 1939.

(1) Antoni Zygmund. — Trigonometrical Series. Monografje Matematyczne, V. Warszawa-Lwow, 1935.

CHAPITRE I

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES A COEFFICIENTS MONOTONES [1]

1. — L'application de la transformation d'Abel aux Séries Trigonométriques de type

$$(1) \qquad a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

ou

$$(2) \qquad \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

où les a_n sont positifs, non croissants, et tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, montre que ces séries convergent uniformément dans tout intervalle excluant l'origine.

L'étude du comportement de ces séries au voisinage de ce point présente un certain intérêt, car elle met en lumière des relations simples entre l'ordre de grandeur des coefficients a_n et l'ordre de grandeur des fonctions (1) ou (2) quand x tend vers zéro.

2. — Considérons d'abord la série

$$f(x) = \frac{\sin x}{\psi(1)} + \frac{\sin 2x}{\psi(2)} + \cdots + \frac{\sin nx}{\psi(n)} + \cdots$$

où nous ferons sur $\psi(n)$ les hypothèses suivantes :

a) $\psi(n)$ est positive, jamais décroissante, et devient infinie avec n ;

b) $\psi(n+1) - \psi(n)$ n'est jamais croissante ($\psi(0) = 0$).

Il nous sera en outre commode de définir la fonction $\psi(u)$ pour toutes les valeurs de $u \geqslant 0$ par les conditions qu'elle ne soit jamais

---

[1] Cf. *Comptes Rendus*, t. 186, 1928, p. 1804.

décroissante, et qu'elle admette une dérivée jamais croissante ; ces conditions étant évidemment compatibles avec a) et b).

Remarquons immédiatement qu'en vertu de ces hypothèses la fonction

$$\frac{\psi(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u \psi'(u)du$$

n'est jamais croissante.

Cela posé, pour étudier $f(x)$ au voisinage de $x = 0$, prenons d'abord $x = \frac{\pi}{2p}$, p étant un entier positif arbitrairement grand. On a :

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(1)} + \cdots + \frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(p)} + \frac{\sin(p+1)\frac{\pi}{2p}}{\psi(p+1)} + \cdots + \frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{2p}}{\psi(2p-1)}$$
$$-\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(2p+1)} + \cdots + \frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(3p)} + \frac{\sin(p+1)\frac{\pi}{2p}}{\psi(3p+1)} + \cdots + \frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{2p}}{\psi(4p-1)}\right]$$
$$+ \cdots$$

c'est-à-dire

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) = P_0 - P_1 + P_2 - \cdots + (-1)^n P_n + \cdots$$

P_0, P_1... étant des quantités positives, décroissantes, et tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Les $p - 1$ derniers termes de P_0 sont chacun supérieur ou égal à un des $p - 1$ premiers termes de P_1 ; donc

$$P_0 - P_1 \geqslant \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(1)} + \cdots + \frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(p)}\right] - \left[\frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(3p)} + \cdots + \frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(4p-1)}\right]$$
$$\geqslant \frac{\sigma_p}{\psi(p)} - \frac{\sigma_p}{\psi(3p)}$$

où

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{p} \sin k\frac{\pi}{2p} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4p}\right)}{\sin\frac{\pi}{4p}} > \frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4p}} > \frac{2p}{\pi}$$

donc

$$P_0 - P_1 > \frac{2p}{\pi}\left[\frac{1}{\psi(p)} - \frac{1}{\psi(3p)}\right].$$

En raisonnant de même sur les autres différences $P_2 - P_3$, $P_4 - P_5$, etc., on a

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{2p}{\pi}\left[\frac{1}{\psi(p)} - \frac{1}{\psi(3p)} + \frac{1}{\psi(5p)} - \frac{1}{\psi(7p)} + \cdots\right].$$

Mais la dérivée de $-\frac{1}{\psi(u)}$ n'étant jamais croissante, on a

$$\frac{1}{\psi(p)} - \frac{1}{\psi(3p)} \geqslant \frac{1}{\psi(3p)} - \frac{1}{\psi(5p)}$$

c'est-à-dire

$$2\left[\frac{1}{\psi(p)} - \frac{1}{\psi(3p)}\right] \geqslant \frac{1}{\psi(p)} - \frac{1}{\psi(3p)} + \frac{1}{\psi(3p)} - \frac{1}{\psi(5p)}$$

et ainsi de suite ; d'où finalement

$$(3) \qquad f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{1}{\pi}\frac{p}{\psi(p)}.$$

D'autre part, nous avons :

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < P_0 < 2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(1)} + \cdots + \frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(p)}\right]$$

ou encore

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < 2\frac{\pi}{2p}\left[\frac{1}{\psi(1)} + \frac{2}{\psi(2)} + \cdots + \frac{p}{\psi(p)}\right]$$

c'est-à-dire, $\frac{n}{\psi(n)}$ n'étant jamais décroissante

$$(4) \qquad f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \pi\frac{p}{\psi(p)}.$$

Les inégalités (3) et (4) nous donnent exactement l'ordre de grandeur de $f(x)$ pour $x = \frac{\pi}{2p}$.

Pour passer au cas où x est quelconque, remarquons d'abord qu'en appliquant deux fois la transformation d'Abel à la série $\sum \frac{1}{\psi(n)} \sin nx$, nous avons

$$4f(x) \sin^2 \frac{x}{2} = \left[\frac{2}{\psi(1)} - \frac{1}{\psi(2)}\right] \sin x$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\psi(n-1)} - \frac{2}{\psi(n)} + \frac{1}{\psi(n+1)}\right] \sin nx.$$

On reconnaît immédiatement que cette dernière série, dérivée terme à terme, est uniformément convergente et nulle à l'origine.

Donc $x^2 f(x)$ admet une dérivée continue, nulle à l'origine ; si nous prenons

$$\frac{\pi}{(2p+1)} < x < \frac{\pi}{2p} \tag{5}$$

nous avons, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$:

$$\left| x^2 f(x) - \left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{2p}\right) \right| < \varepsilon \left| x - \frac{\pi}{2p} \right| < \frac{\varepsilon\pi}{2} \frac{1}{p^2}.$$

De cette inégalité et des inégalités (3), (4) et (5) on déduit immédiatement que le rapport

$$\frac{f(x)}{\frac{p}{\psi(p)}}$$

reste compris entre deux constantes absolues. D'autre part

$$\frac{\psi(p+1)}{p+1} < \frac{\psi\left(\frac{\pi}{2x}\right)}{\frac{\pi}{2x}} < \frac{\psi(p)}{p}$$

enfin

$$\frac{\psi\left(\frac{\pi}{2x}\right)}{\frac{\pi}{2x}} \leqslant \frac{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

D'où l'on déduit finalement que

$$\frac{A}{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)} < f(x) < \frac{B}{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

A et B étant deux constantes absolues positives ; ce que nous écrirons

$$f(x) \sim \frac{1}{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)} \tag{6}$$

3. — Etudions maintenant $f(x)$ en faisant sur $\psi(n)$ les hypothèses suivantes :

a) $\psi(n)$ est positive, jamais décroissante, et devient infinie avec n.

b) $\psi(n+1) - \psi(n)$ n'est jamais décroissante ($\psi(0) = 0$).

Nous définirons $\psi(u)$ pour tout $u \geqslant 0$ comme au début du § 2 ; ici, $\frac{\psi(u)}{u}$ n'est jamais décroissante.

En conservant les mêmes notations, nous avons

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_1 \geqslant \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\psi(1)} + \cdots + \frac{\sin p\frac{\pi}{2p}}{\psi(p)}\right] - \frac{\sigma_p}{\psi(3p)}\cdot$$

Or $\qquad \sin t > \frac{2}{\pi}t \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \qquad$ donc

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2p}\sum_1^p \frac{k}{\psi(k)} - \frac{\sigma_p}{\psi(3p)} > \frac{1}{p}\sum_1^p \frac{k}{\psi(k)} - \frac{p}{\psi(3p)}\cdot$$

D'autre part

$$\frac{p}{\psi(p)} > \frac{3p}{\psi(3p)}\cdot$$

Donc

$$\frac{p}{\psi(3p)} < \frac{1}{3}\frac{p}{\psi(p)} < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}\sum_1^p\frac{k}{\psi(k)}\cdot$$

D'où finalement

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}\sum_1^p\frac{k}{\psi(k)}\cdot$$

D'autre part

$$f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \mathrm{P}_0 < 2\frac{\pi}{2p}\left[\frac{1}{\psi(1)} + \cdots + \frac{1}{\psi(p)}\right] = \pi\frac{1}{p}\sum_1^p\frac{k}{\psi(k)}\cdot$$

On a donc

$$(7) \qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{k}{\psi(k)} < f\left(\frac{\pi}{2p}\right) < \pi\frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{k}{\psi(k)}.$$

Pour étudier maintenant le cas où x est quelconque supposons d'abord que $\frac{n}{\psi(n)}$ qui est non croissante, tende vers zéro pour $n=\infty$. La différentiation terme à terme de $\sum\frac{1}{\psi(n)}\sin nx$ donne alors la série

$$f'(x) = \sum\frac{n}{\psi(n)}\cos nx$$

qui est uniformément convergente, dans tout intervalle excluant l'origine. On a ensuite

$$2f'(x)\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\psi(1)}\sin\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{\psi(n)} - \frac{n+1}{\psi(n+1)}\right]\sin(2n+1)\frac{x}{2}$$

cette dernière série étant partout uniformément convergente, et nulle à l'origine.

$f'(x)$ est donc de la forme $\frac{\eta(x)}{x}$, $\eta(x)$ étant continue et nulle à l'origine. On a donc, pour $\frac{\pi}{2(p+1)} < x < \frac{\pi}{2p}$:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right| < \left|x - \frac{\pi}{2p}\right|\frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2(p+1)}} < \frac{\varepsilon}{p}$$

D'où on déduit, en tenant compte de (7), que le rapport de $f(x)$ à $\frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{k}{\psi(k)}$ reste compris entre deux constantes absolues, c'est-à-dire que :

$$f(x) \backsim \frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{k}{\psi(k)}.$$

D'autre part, on voit très facilement que

$$\frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{k}{\psi(k)} \backsim \frac{1}{p}\int_{1}^{p}\frac{u}{\psi(u)}\,du$$

et aussi que

$$\frac{1}{p}\int_1^p \frac{u}{\psi(u)}\,du \sim \frac{2x}{\pi}\int_1^{\frac{\pi}{2x}} \frac{u}{\psi(u)}\,du$$

et que

$$\frac{2x}{\pi}\int_1^{\frac{\pi}{2x}} \frac{u}{\psi(u)}\,du \sim x\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{u}{\psi(u)}\,du.$$

On a donc finalement

$$f(x) \sim x\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{u}{\psi(u)}\,du. \tag{8}$$

Nous pouvons maintenant nous affranchir de l'hypothèse supplémentaire que nous avons faite : $\frac{n}{\psi(n)} \to 0$. Comme $\frac{n}{\psi(n)}$ ne croît pas, si cette quantité ne tend pas vers zéro, elle tend vers une limite $\frac{1}{\lambda} > 0$. On a alors

$$\frac{\psi(n)}{n} = \lambda - \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n > 0)$$

ε_n décroissant et tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a alors

$$\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{\psi(n)} - \frac{1}{\lambda}\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}\,\frac{\varepsilon_n}{\lambda(\lambda - \varepsilon_n)}.$$

Cette dernière série est uniformément convergente partout, comme cela résulte de (8) pour le cas $\frac{n}{\psi(n)} \to 0$. Donc dans ce cas, $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{\psi(n)}$ présente, à l'origine, la même discontinuité de première espèce que la série bien connue $\frac{1}{\lambda}\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$. Le saut est égal à $\frac{\pi}{\lambda}$ [1].

C'est le résultat que donnerait la formule (8) dont le second membre reste fini, mais supérieur à un nombre fixe si $\lim \frac{n}{\psi(n)} \neq 0$. La formule (8) est donc générale.

---

[1] Cette remarque s'applique sans changement au cas où $\frac{\psi(n)}{n} = \lambda + \varepsilon_n$, qui entre dans le cas : $\psi(n+1) - \psi(n)$ non croissant, étudié au § 2.

4. — Si nous résumons maintenant les résultats obtenus aux deux paragraphes précédents nous pouvons les énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$f(x) = \sum_{1}^{n} \frac{\sin nx}{\psi(n)}$$

où $\psi(n)$ est positive, non décroissante, infinie avec n.

Si $\psi(n+1) - \psi(n)$ n'est jamais croissante $f(x)$ est infinie ou simplement discontinue au voisinage de l'origine, positive pour $x > 0$, et on a dans ce voisinage

$$f(x) \backsim \frac{1}{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$\psi(u)$ étant définie pour tout $u \geqslant 0$ de façon à n'être jamais décroissante et à avoir une dérivée jamais croissante ;

Si $\psi(n+1) - \psi(n)$ n'est jamais décroissante (ou même seulement si $\frac{\psi(n)}{n}$ n'est jamais décroissante) $f(x)$ est continue, ou bien simplement discontinue à l'origine, positive pour $x > 0$, et on a dans le voisinage de ce point

$$f(x) \backsim x \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{u}{\psi(u)} du.$$

Le cas particulier de la discontinuité de première espèce a lieu si $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\psi(n)}{n} = \lambda > 0$. Dans ce cas

$$f(+0) - f(-0) = \frac{\pi}{\lambda}\cdot$$

La formule (6) montre immédiatement que $f(x)$ est sommable ou non sommable, suivant que l'intégrale $\int_0 \frac{1}{x\psi\left(\frac{1}{x}\right)} dx$ a un sens ou non ; en d'autres termes la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\psi(n)}$ est, ou non, une série de Fourier suivant que la série $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ converge ou diverge (dans les hypothèses où nous nous sommes placés).

5. — Considérons maintenant la série

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos nx}{\psi(n)}$$

$\psi(n)$ étant positive, non décroissante, infinie avec n, et étudions $F(x)$ au voisinage de l'origine en supposant la série $\sum \frac{1}{\psi(n)}$ divergente.

On a

$$2F(x) \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\psi(1)} \sin\frac{x}{2} + \sum_1^\infty \left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right] \sin(2n+1)\frac{x}{2}$$

série uniformément convergente. Pour appliquer les résultats précédents nous ferons les hypothèses :

$$\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \quad \text{jamais croissante}$$

$$n\left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right] \quad \text{jamais croissante.}$$

Cette dernière hypothèse se justifiant par le fait que

$$n\left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right] \to 0.$$

La formule (8) donne alors $(x > 0)$

$$2F \sin\frac{x}{2} \backsim x \int_1^{\frac{1}{x}} u\left[\frac{1}{\psi(u)} - \frac{1}{\psi(u+1)}\right] du$$

donc

$$F(x) \backsim \int_1^{\frac{1}{x}} u\left[\frac{1}{\psi(u)} - \frac{1}{\psi(u+1)}\right] du. \tag{9}$$

On voit aisément en calculant $\int_0 F(x)dx$ par le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ et par intégration par parties, que $F(x)$ est toujours sommable : dans nos hypothèses, $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{\psi(n)}$ est donc toujours une série de Fourier.

Si on ne fait pas d'autre hypothèse que la croissance de $\psi(n)$, ce résultat n'est plus exact : nous en verrons un exemple dans le chapitre suivant.

6. — Supposons maintenant $\sum \frac{1}{\psi(n)} < \infty$; alors $F(x)$ est continue à l'origine, et nous pouvons nous proposer de rechercher l'ordre de grandeur de $F(0) - F(x)$.

Nous supposons toujours $\psi(n)$ positive non décroissante ; de plus, $\frac{n}{\psi(n)}$ tendant vers zéro, nous supposons cette quantité non croissante.

La série

$$F'(x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{\psi(n)} \sin nx$$

converge uniformément dans tout intervalle excluant l'origine, et y représente la dérivée de $F(x)$. Nous pouvons, moyennant des hypothèses appropriées, lui appliquer le Théorème I.

a) Supposons d'abord que $\frac{\psi(n+1)}{n+1} - \frac{\psi(n)}{n}$ ne soit jamais croissante. Alors, au voisinage de l'origine

$$-F'(x) \sim \frac{1}{x\,\dfrac{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x^2\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

d'où

$$F(0) - F(x) \backsim \int_0^x \frac{dz}{z^2\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}\,.$$

b) Supposons maintenant que $\frac{\psi(n+1)}{n+1} - \frac{\psi(n)}{n}$ ne soit jamais décroissante. Alors

$$-F'(x) \backsim x \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{u^2}{\psi(u)}\,du$$

d'où

$$F(0) - F(x) \backsim \int_0^x t\,dt \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{u^2}{\psi(u)}\,du$$

Les résultats obtenus aux deux paragraphes précédents peuvent se résumer ainsi :

Théorème II. — *Soit*

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\psi(n)}$$

où $\psi(n)$ est positive, non décroissante, infinie avec n.

Si $\sum \frac{1}{\psi(n)}$ *diverge, et si*

$$\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \quad \text{et} \quad n\left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right] \tag{10}$$

ne sont jamais croissantes, $F(x)$ *est infinie au voisinage de l'origine et on a, pour* $x > 0$

$$F(x) \backsim \int_{1}^{\frac{1}{x}} u\left[\frac{1}{\psi(u)} - \frac{1}{\psi(u+1)}\right] du$$

la définition de $\psi(u)$ pour tout $u \geqslant 0$ se faisant de manière que les propriétés (10) *soient conservées pour tout u.*

Si $\sum \frac{1}{\psi(n)}$ *converge,* $F(x)$ *est continue à l'origine. Alors*

a) *Si* $\frac{\psi(n)}{n}$ *n'est jamais décroissante, et si* $\frac{\psi(n+1)}{n+1} - \frac{\psi(n)}{n}$ *n'est jamais croissante on a* $(x > 0)$

$$F(0) - F(x) \backsim \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

b) *Si* $\frac{\psi(n)}{n}$ *n'est jamais décroissante, et si* $\frac{\psi(n+1)}{n+1} - \frac{\psi(n)}{n}$ *n'est jamais décroissante, on a* $(x > 0)$

$$F(0) - F(x) \backsim \int_{0}^{x} t dt \int_{1}^{\frac{1}{t}} \frac{u^2}{\psi(u)} du.$$

CHAPITRE II

LES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FONCTIONS SOMMABLES [1]

1. — Le problème qui va nous occuper dans ce chapitre est le suivant :

Etant donné une série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \tag{1}$$

quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_n, b_n pour que cette série soit la série de Fourier d'une fonction sommable ? Autrement dit quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients pour qu'il existe une fonction sommable $f(x)$ telle que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

pour toute valeur de n ?

On sait que si la série $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ converge, la série (1) est une série de Fourier, et sa fonction génératrice est de carré sommable : c'est le théorème de Fischer-Riesz. On doit à Littlewood [2] d'avoir montré qu'aucune autre condition que celle de Fischer-Riesz, *ne mettant en jeu que la valeur absolue des coefficients*, n'existe, qui permette d'affirmer que (1) est une série de Fourier. En d'autres termes, si $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ diverge, on peut toujours changer les signes des coefficients de manière à obtenir une série qui ne soit pas une série de Fourier.

---

(1) Cf. *Comptes Rendus*, t. 187, 1928, p. 881 ; *Comptes Rendus*, t. 192, 1931, p. 144.

(2) *Proc. London Math. Soc.* 25 (1926) pp. 328-337 ; *Journ. London Math. Soc.*, 5 (1930), pp. 179-182.

Il est naturellement beaucoup plus aisé de formuler des conditions *nécessaires* pour que a_n, b_n soient des coefficients de Fourier, que de trouver des conditions nécessaires et suffisantes. C'est ainsi que

$$\lim a_n = \lim b_n = 0, \qquad \sum \frac{b_n}{n} \text{ convergente}$$

sont des conditions nécessaires classiques.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord montrer comment on peut trouver d'autres conditions nécessaires, dont l'application peut présenter un certain intérêt ; nous indiquerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes.

2. — Supposons que (1) soit la série de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$. Soit $\varphi(x)$ une fonction à variation bornée dont les coefficients de Fourier sont α_n, β_n, α_0 étant essentiellement supposé nul. On sait [1] que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\varphi(x)dx = \pi\sum_{1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

la série du second membre étant convergente.

Soit maintenant μ un paramètre variable et considérons la fonction égale à $\varphi(\mu x)$ pour $-\pi \leqslant x < \pi$, et de période 2π. Si $\alpha_n(\mu)$, $\beta_n(\mu)$ sont les coefficients de Fourier de cette fonction, on aura

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\varphi(\mu x)dx = \pi\sum_{1}^{\infty}[a_n\alpha_n(\mu) + b_n\beta_n(\mu)]. \tag{2}$$

Or, si μ croît indéfiniment $\varphi(\mu x)$ reste uniformément bornée : d'autre part p et q étant quelconques dans $(-\pi, +\pi)$ l'intégrale

$$\int_p^q \varphi(\mu x)dx = \frac{1}{\mu}\int_{p\mu}^{q\mu}\varphi(y)dy$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$, α_0 *étant nul.* On en conclut [2] que l'intégrale de (2) tend vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$, donc la relation

$$\lim_{\mu=\infty}\sum_{1}^{\infty}[a_n\alpha_n(\mu) + b_n\beta_n(\mu)] = 0$$

est *nécessaire* si a_n, b_n sont des coefficients de Fourier.

---

(1) Cf. Zygmund, p. 91.

(2) Cf. Lebesgue, *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3e série, I, 1909, p. 52.

Prenons par exemple $\varphi(x)$ égal à $\cos x$ ou à $\sin x$, μ n'étant pas entier. On trouve immédiatement :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos \mu x dx = 2\mu \sin \mu\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\mu^2 - n^2}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin \mu x dx = 2 \sin \mu\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n b_n}{\mu^2 - n^2}.$$

Faisons croître μ indéfiniment, et d'une manière discontinue de façon que son écart avec l'entier le plus voisin reste supérieur à une quantité fixe ; on peut prendre, par exemple, $\mu = p + \frac{1}{2}$ et faire croître p indéfiniment par valeurs entières. On obtient ainsi les conditions

$$(3) \quad \lim_{p=\infty} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0 \qquad \lim_{p=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0$$

où nous nous sommes débarrassés du coefficient $(-1)^n$ en considérant la fonction $f(x + \pi)$ à la place de $f(x)$, et qui sont *nécessaires* pour que a_n, b_n, soient des coefficients de Fourier.

3. — La première des conditions (3) va nous conduire à un résultat intéressant. Soit

$$(4) \qquad a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

une série de cosinus à coefficients positifs, non croissants ($a_{n+1} \leqslant a_n$), a_n tendant vers zéro. Si cette série est une série de Fourier, la première des relations (3) doit être vérifiée. En s'appuyant sur la non-croissance des a_n, on montre. par un calcul très facile, que cette relation exige que $(a_n - a_{n+1}) \log n$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Si donc cette condition n'est pas satisfaite, on peut affirmer que la série (4) n'est pas une série de Fourier. C'est le cas, par exemple où $a_n = \frac{1}{m}$ pour tous les rangs n depuis $2^{(m-1)^2}$ jusqu'à $2^{m^2} - 1$. On obtient ainsi très simplement un exemple d'une série de cosinus, à coefficients positifs non croissants, et qui n'est pas une série de Fourier. L'existence de pareilles séries avait été démontrée par M. Szidon [1].

4. — Voici maintenant des conditions *nécessaires et suffisantes* pour que a_n, b_n, soient des coefficients de Fourier [2].

Soit (Z) *la classe des fonctions* $\omega(x) = \sum_1^\infty \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$, *continues, dérivables, telles que* $|\omega(x)| \leqslant 1$ *et que le développement de Fourier de la dérivée* $\omega'(x)$ *soit absolument convergent. Pour que la série* (1) *soit une série de Fourier il faut et il suffit :*

1° *Que la série formellement intégrée* $\sum \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx$ *converge vers une fonction continue* $F(x)$;

2° *Que l'expression* $\sum_1^\infty (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$ *tende vers zéro quand* ω *varie dans* (Z) *de façon à ce que* $\sum_1^\infty (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ *tende vers zéro.*

Les conditions sont nécessaires. — Supposons que a_n, b_n soient les coefficients de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$. La nécessité de la première condition est classique. Soit maintenant $\omega(x)$ une fonction de la classe (Z), et soit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega^2(x)dx = \sum_1^\infty (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \varepsilon.$$

On a

$$\sum_1^\infty (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\omega(x)dx.$$

L'ensemble des points E où $|\omega(x)|$ dépasse $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ a une mesure inférieure à $\pi\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Soit CE le complémentaire de E ; en tenant compte de $|\omega(x)| < 1$, on a

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\omega(x)dx\right| < \left|\int_E f(x)\omega(x)dx\right| + \left|\int_{CE} f(x)\omega(x)dx\right|$$
$$< \int_E |f(x)|\,dx + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro, le résultat annoncé.

---

[1] *Math. Zeitschrift*, 10 (1921), p. 121.

[2] J'ai adopté une légère modification de l'énoncé, suggérée par M. Zygmund : Cf. *Zentralblatt für Mathematik*, I (1931), p. 15.

Les conditions sont suffisantes. — Il nous suffira de prouver que $F(x)$ est absolument continue ; car alors $F(x)$ est une intégrale indéfinie et, des formules donnant ses coefficients de Fourier on déduira, en intégrant par parties, que a_n, b_n, sont les coefficients de Fourier de la fonction dont $F(x)$ est l'intégrale indéfinie.

Soient, dans $(0, 2\pi)$, ν intervalles non empiétants $(c_1 d_1)$, $(c_2 d_2)$,... $(c_\nu d_\nu)$. Nous choisirons la fonction $\omega'(x) = \dfrac{d\omega}{dx}$ de la façon suivante : p étant un entier positif aussi grand qu'on voudra, nous prendrons, pour $i = 1, 2,\ldots \nu$:

$$\omega'(x) = \frac{1}{2}\frac{p\pi}{c_i}\sin\left(\frac{2p\pi}{c_i}x\right) \qquad \text{pour} \qquad c_i < x < c_i\left(1 + \frac{1}{2p}\right)$$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2}\frac{p\pi}{d_i}\sin\left(\frac{2p\pi}{d_i}x\right) \qquad \text{pour} \qquad d_i\left(1 - \frac{1}{2p}\right) < x < d_i$$

$\omega'(x)$ sera nulle partout ailleurs.

$\omega'(x)$ est à valeur moyenne nulle, sa série de Fourier converge absolument et on a

$$|\,\omega(x)\,| = \left|\int_0^x \omega'(x)dx\right| < 1$$

$\omega(x)$ est donc de la classe (Z). Soit

$$\omega(x) = \sum_1^\infty \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Une application très simple du premier théorème de la moyenne donne

$$-\pi\sum_1^\infty (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \int_0^{2\pi} F(x)\omega'(x)dx = \frac{1}{2}\sum_1^\nu (F(\gamma_i) - F(\delta_i))$$

γ_i étant compris entre c_i et $c_i\left(1 + \dfrac{1}{2p}\right)$ et δ_i entre $d_i\left(1 - \dfrac{1}{2p}\right)$ et d_i.

D'autre part

$$\pi\sum_1^\infty (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \int_0^{2\pi} \omega^2(x)dx < \sum_1^\nu (d_i - c_i)$$

comme cela résulte du fait que $|\omega(x)| < 1$ et que $\omega(x)$ est nulle en dehors des intervalles (c_i, d_i).

Donc, si nos hypothèses sont vérifiées, quand $\sum\limits_1^{\nu}(d_i - c_i)$ tend vers zéro d'une manière quelconque, il en est de même de $\sum\limits_1^{\nu}[F(\gamma_i) - F(\delta_i)]$. Mais cette expression est aussi voisine qu'on veut, pour p assez grand, de $\sum\limits_1^{\nu}[F(c_i) - F(d_i)]$. Donc $F(x)$ est absolument continue, et notre théorème se trouve démontré.

5. — Le théorème de Fischer-Riesz est une conséquence immédiate de la proposition que nous venons d'établir. En effet, si $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ converge, il en est de même de $\sum\left|\frac{a_n}{n}\right|$ et $\sum\left|\frac{b_n}{n}\right|$. Donc $F(x)$ est continue. De plus, on a

$$\left|\sum_1^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\right| < \left(\sum_1^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_1^{\infty} \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_1^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_1^{\infty} \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

expression qui tend visiblement vers zéro avec $\sum\limits_1^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DE CERTAINS POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES [1]

1. — Dans ce chapitre nous allons étudier les propriétés extrémales de certains polynomes trigonométriques dont nous aurons à nous servir par la suite, mais qui peuvent présenter un intérêt en elles-mêmes.

Soit

$$f(x) = r_1 \cos (x - \alpha_1) + r_2 \cos (2x - \alpha_2) + \cdots + r_n \cos (nx - \alpha_n)$$

un polynome trigonométrique d'ordre n où nous considérerons les $r_i \geqslant 0$ comme donnés, fixes, et les α_i comme des arguments variables.

Quand x varie $|f(x)|$ a un maximum qui est une fonction positive et continue des α_i, soit $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$.

Quand les α_i varient, cette fonction a un minimum que nous désignerons par M. Nous allons en indiquer une borne supérieure. Remarquons d'abord que comme

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2).$$

On a forcément

$$\mathrm{M}^2 \geqslant \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2).$$

Cela posé, considérons l'intégrale $\mathrm{I}_k = \int_0^{2\pi} f^{2k}dx$, k étant un entier positif. Cette intégrale, considérée comme fonction des α_i

(1) Cf. *Comptes Rendus*, t. 196, 1933, p. 1776.

admet un minimum pour lequel on a nécessairement $\frac{\partial^2 I_k}{\partial \alpha_p^2} \geqslant 0$ pour $p = 1, 2, \dots n$. Cette relation s'écrit

$$\int_0^{2\pi} 2k(2k-1)f^{2k-2}r_p^2 \sin^2(px-\alpha_p)dx - \int_0^{2\pi} 2kf^{2k-1}r_p \cos(px-\alpha_p)dx \geqslant 0$$

ou, à plus forte raison

$$\int_0^{2\pi} f^{2k-1}r_p \cos(px-\alpha_p)dx \leqslant (2k-1)r_p^2 \int_0^{2\pi} f^{2k-2}dx.$$

En faisant $p = 1, 2, \dots n$ et ajoutant les résultats obtenus, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} f^{2k}dx \leqslant (2k-1)(r_1^2 + \cdots + r_n^2)\int_0^{2\pi} f^{2k-2}dx.$$

Ce qui, d'après l'inégalité de Schwarz-Hölder, donne immédiatement

$$\left[\int_0^{2\pi} f^{2k}dx\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{k}}(2k-1)(r_1^2 + \cdots + r_n^2). \tag{1}$$

La fonction $|f|$, déterminée ainsi par la condition de rendre I_k minimum, atteint son maximum $\mathfrak{M}$ en un point au moins x_0, et la valeur $\mathfrak{M}\lambda$ $(0<\lambda<1)$ en deux points au moins a, b, le premier à gauche, le second à droite de x_0, entre lesquels $|f|$ dépasse $\mathfrak{M}\lambda$. On a

$$2(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\lambda) < \int_a^b |f'|dx < \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f'^2dx\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{b-a}\,(\pi\Sigma p^2r_p^2)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$b - a > \frac{4\mathfrak{M}^2(1-\lambda)^2}{\pi\Sigma p^2r_p^2} > \frac{2}{\pi}\frac{\Sigma r_p^2}{\Sigma p^2r_p^2}(1-\lambda)^2$$

et

$$\int_0^{2\pi} f^{2k}dx > \mathfrak{M}^{2k}\frac{2}{\pi}\frac{\Sigma r_p^2}{\Sigma p^2r_p^2}\lambda^{2k}(1-\lambda)^2. \tag{2}$$

Prenons, pour rendre $\lambda^{2k}(1-\lambda)^2$ maximum, $\lambda = \frac{k}{k+1}$; la comparaison des inégalités (1) et (2) donne

$$\mathfrak{M}^2 < A \cdot k\left(\frac{\Sigma p^2r_p^2}{\Sigma r_p^2}\right)^{\frac{1}{k}}(r_1^2 + \cdots + r_n^2).$$

En choisissant k de façon à rendre le second membre minimum on obtient finalement

$$M < B\sqrt{\log\left(\frac{\Sigma p^2 r_p^2}{\Sigma r_p^2}\right)} \cdot \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2}$$

ou, si l'on veut, plus simplement

$$M < C\sqrt{\log n} \cdot \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2} \tag{3}$$

B et C étant des constantes absolues [1].

On peut donc toujours déterminer les arguments α_i de façon que le maximum de $|f|$ satisfasse à l'inégalité (3).

2. — La question se pose immédiatement de savoir si la relation (3) peut être améliorée, en d'autres termes si $\sqrt{\log n}$ peut être remplacée par une fonction de n croissant moins rapidement, ou même par une constante. MM. Zygmund et Serge Bernstein ont indiqué que la réponse à cette question était négative.

Voici la démonstration donnée par M. Serge Bernstein [2].

Prenons le polynome lacunaire :

$$f(x) = \cos(4x - \alpha_1) + \cos(4^2x - \alpha_2) + \cdots + \cos(4^m x - \alpha_m)$$

quels que soient les α_i, nous pouvons prendre

$$x_0 = \frac{\alpha_m}{4^m} + 2\pi\left(\frac{b_1}{4^m} + \frac{b_2}{4^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{4^2}\right)$$

où les b_i sont *entiers* et seront successivement déterminés par les inégalités

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi b_1}{2} + \frac{\alpha_m}{4} - \alpha_{m-1} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi b_2}{2} + \frac{\pi b_1}{8} + \frac{\alpha_m}{16} - \alpha_{m-2} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

et ainsi de suite. Dans ces conditions $f(x_0)$ aura son dernier terme égal à 1, et tous les autres termes seront supérieurs à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc

$$f(x_0) > 1 + \frac{m-1}{\sqrt{2}} > \frac{m}{\sqrt{2}}$$

---

[1] Après la publication de ce résultat, M. Zygmund m'a fait connaître que des problèmes analogues avaient été traités par Littlewood (*loc. cit.* au chap. II) par des méthodes différentes. J'ai cru néanmoins devoir donner ici ma démonstration pour la commodité du lecteur, et parce qu'elle est très élémentaire.

[2] *Comptes Rendus*, t. 197, 1933, p. 213.

Or ici

$$n = 4^m \quad \text{et} \quad r_1^2 + \cdots + r_n^2 = m = \frac{\log n}{\log 4}.$$

Donc

$$\mathrm{M} > \frac{1}{2\sqrt{\log 2}} \sqrt{\log n} \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2}.$$

3. — Il est intéressant de remarquer que le maximum $\mathfrak{M}$ de la valeur absolue du polynome

$$f(x) = r_1 \cos(x - \alpha_1) + \cdots + r_n \cos(nx - \alpha_n)$$

est d'autant plus faible que ce maximum est atteint un plus grand nombre de fois. On a même la relation très simple

$$\mathfrak{M}^2 < \mathrm{A}\frac{n}{p}(r_1^2 + \cdots + r_n^2),$$

si le maximum $\mathfrak{M}$ de $|f|$ est atteint en p points, que ces points soient distincts ou confondus.

Démontrons cette proposition. Considérons deux points d'intersection a, b, consécutifs, de la courbe $y = |f(x)|$ avec la droite $y = \mathfrak{M}\lambda$ $(0 < \lambda < 1)$, tels que dans (a, b) $|f|$ soit supérieur à $\mathfrak{M}\lambda$.

Dans (a, b) $\mathfrak{M}$ est atteint en q points $(q \leqslant p)$, distincts ou confondus. Soit x_0 le point le plus à droite. Dans (a, b) $f'(x)$ s'annule $2q - 1$ fois, $f''(x)$ $2q - 2$ fois,... $f^{(2q-1)}(x)$ une fois — (chaque point étant compté avec son ordre de multiplicité). D'autre part, les points où $f^{(h+1)}$ s'annule sont intérieurs (au sens large) aux intervalles constitués par les points où $f^{(h)}$ s'annule.

Il résulte de tout cela qu'on peut trouver dans (a, b) un point ξ_1, où la dérivée $f^{(2q-1)}$ s'annule, un point ξ_2 où $f^{(2q-2)}$ s'annule, etc... un point ξ_{2q-1} où f' s'annule et un point x_0 où $|f|$ atteint $\mathfrak{M}$, les points étant en outre tels que

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi_{2q-1} \leqslant x_0.$$

Cela posé on a, x étant quelconque

$$f^{(2q-1)}(x) - f^{(2q-1)}(\xi_1) = (x - \xi_1) f^{(2q)}(\zeta)$$

ζ étant compris entre x et ξ_1. Mais, d'après un théorème connu on a

$$|f^{(2q)}(\zeta)| \leqslant n^{2q}\mathfrak{M}$$

donc, en prenant $x \geqslant \xi_1$ on a

$$|f^{(2q-1)}(x)| \leqslant (x - \zeta_1)\, n^{2q}\mathfrak{M}.$$

Ensuite :

$$f^{(2q-2)}(x) - f^{(2q-2)}(\xi_2) = \int_{\xi_2}^{x} f^{(2q-1)}(x)dx$$

et, en prenant $x \geqslant \xi_2$:

$$|f^{(2q-2)}(x)| < \int_{\xi_2}^{x} |f^{(2q-1)}(x)|\,dx < \int_{\xi_1}^{x} |f^{(2q-1)}(x)| < \frac{(x-\xi_1)^2}{2\,!}\, n^{2q}\mathfrak{M}.$$

De même, finalement

$$\text{pour} \quad x \geqslant \xi_{2q-1} \qquad |f'(x)| < \frac{(x-\xi_1)^{2q-1}}{(2q-1)\,!}\, n^{2q}\mathfrak{M}.$$

Nous avons ensuite

$$f(x_0) - f(b) < \int_{x_0}^{b} |f'(x)|\,dx < \int_{\xi_1}^{b} |f'(x)|\,dx < \frac{(b-\xi_1)^{2q}}{(2q)\,!}\, n^{2q}\mathfrak{M}$$

et comme $f(x_0) - f(b) = \mathfrak{M}\,(1-\lambda)$, on en déduit

$$b - \xi_1 > \frac{(1-\lambda)^{\frac{1}{2q}}\,[(2q)\,!\,]^{\frac{1}{2q}}}{n}$$

or, k étant entier $(k\,!)^{\frac{1}{k}}$ est supérieur à $\frac{k}{e}$ donc

$$b - \xi_1 > \frac{2}{e}\frac{q}{n}(1-\lambda)^{\frac{1}{2q}}.$$

On trouverait de même une borne inférieure identique pour $\xi_1 - a$. Donc

$$b - a > \frac{4}{e}\frac{q}{n}(1-\lambda)^{\frac{1}{2q}} > \frac{4}{e}\frac{q}{n}\sqrt{1-\lambda}\cdot$$

En appliquant la même inégalité à tous les intervalles tels que $b - a$ et en sommant, on obtient, *a fortiori*

$$\mathrm{E}_\lambda > \sqrt{1-\lambda}\cdot\frac{p}{n}$$

E_λ étant la mesure de l'ensemble où $|f| > \mathfrak{M}\lambda$.

De là on déduit immédiatement :

$$\pi \sum r_p^2 = \int_0^{2\pi} f^2 dx > \mathfrak{M}^2 \lambda^2 E_\lambda > \mathfrak{M}^2 \frac{p}{n} \lambda^2 \sqrt{1-\lambda}$$

et en prenant $\lambda = \frac{4}{5}$ pour rendre maximum $\lambda^2 \sqrt{1-\lambda}$

$$\mathfrak{M}^2 < 12 \frac{n}{p} \sum r_p^2$$

ce qui est l'inégalité annoncée.

4. — Il n'y aurait presque rien à changer à la démonstration précédente pour obtenir le résultat plus général suivant :

Supposons que $|f|$ ait p maxima, distincts ou confondus, supérieurs ou égaux à $\mathfrak{M}\mu$ $(0 < \mu < 1)$. Soit $\lambda < \mu$ et E_λ la mesure de l'ensemble où $|f| > \mathfrak{M}\lambda$. Alors

$$E_\lambda > \sqrt{\mu - \lambda} \frac{p}{n}$$

d'où se déduit une limite supérieure pour $\mathfrak{M}^2$

$$\mathfrak{M}^2 < 12 \mu^{5/2} (r_1^2 + \cdots + r_n^2).$$

CHAPITRE IV

LES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES [1]

I

1. — Une question qui se présente d'elle-même au débutant dans l'étude des séries trigonométriques est celle de savoir si les coefficients de Fourier des fonctions continues doivent satisfaire à certaines conditions concernant leur ordre de grandeur. La considération de séries lacunaires telles que $\Sigma u_n \cos \varphi(n)x$ où Σu_n est une série convergente à termes positifs et où l'entier $\varphi(n)$ croît aussi rapidement qu'on voudra montre immédiatement que la réponse à cette question est négative. Si la série

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \rho_n \cos (nx - \alpha_n) \qquad (\rho_n \geqslant 0)$$

est la série de Fourier d'une fonction continue, il y a cependant une condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les ρ_n ; c'est la convergence de $\Sigma\rho_n^2$, en vertu du théorème de Fischer-Riesz. Mais cette condition n'est pas particulière aux fonctions continues ; elle s'applique au développement de Fourier de toute fonction de carré sommable.

La question qui se pose alors est celle de savoir s'il n'y a pas, concernant les coefficients ρ_n des fonctions continues, d'autre condition nécessaire que $\Sigma\rho_n^2 < \infty$; en d'autres termes si la structure des ρ_n n'est pas différente, pour les fonctions continues, de la structure des ρ_n pour les fonctions de carré sommable ; en d'autres termes encore, si la série (1) étant donnée, on peut, en supposant

---

[1] Cf. *Comptes Rendus*, t. 197, 1933, p. 113 ; *Comptes Rendus*, t. 197, 1933, p. 1175 ; et *Comptes Rendus*, t. 201, 1935, p. 470.

$\Sigma\rho_n^2 < \infty$, déterminer les arguments α_n de façon que cette série soit la série de Fourier d'une fonction continue.

Des résultats très intéressants ont été obtenus dans cet ordre d'idées par Paley et Zygmund [1], résultats qui m'ont été signalés par M. Zygmund après la publication des miens. Ces auteurs ont démontré que si $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\log^{1+\varepsilon} n$ converge, les séries $\Sigma \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ où l'on fait varier les signes des coefficients de toutes les manières possibles, sont « presque toutes » des séries de Fourier de fonctions continues. Pour le sens qu'il faut attacher au terme « presque toutes » et pour les démonstrations nous renverrons au mémoire de Paley et Zygmund.

Ici nous allons, par des méthodes beaucoup plus simples, indiquer des résultats moins généraux en ce qui concerne toutes les possibilités de choix des α_n, mais plus précis en ce qui concerne les conditions auxquelles doivent satisfaire les ρ_n pour que ce choix soit possible.

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soit donnée la série* (1) *et soit* $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \rho_p^2$ *le reste de la série* $\Sigma\rho_n^2$ *supposée convergente. Si la série* $\sum \frac{\sqrt{R_n}}{n\sqrt{\log n}}$ *converge, on peut toujours choisir les* α_p *de façon que la série* (1) *soit la série de Fourier d'une fonction continue.*

THÉORÈME II. — *Si on ne fait pas d'hypothèses particulières sur les* ρ_n, *le théorème précédent ne peut pas être amélioré. Autrement dit, étant donnée une suite* $\{R_n^0\}$ *positive, décroissante, tendant vers zéro, suffisamment régulière pour que* $R_n^0 \log n$ *soit monotone, et telle que la série* $\sum \frac{\sqrt{R_n^0}}{n\sqrt{\log n}}$ *diverge, on peut construire une série* (1) *telle que* $\Sigma\rho_n^2$ *converge, que le reste* R_n *soit au plus égal à* R_n^0, *et que, pour aucun choix des* α_p *elle ne représente une fonction continue.*

---

[1] Cf. PALEY et ZYGMUND, *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, 26 (1930), pp. 337-357 et 458-474, et 28 (1932), pp. 190-205.

Cf. aussi ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, p. 127.

2. *Démonstration du Théorème I.* — Elle est immédiate en se basant sur les propriétés extrémales étudiées au chapitre précédent. Soit n_1, n_2,... n_k,... une suite d'entiers croissant indéfiniment. Posons :

$$\varphi_0(x) = \sum_{p=1}^{n_1} \rho_p \cos(px - \alpha_p), \cdots \qquad \varphi_k(x) = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \rho_p \cos(px - \alpha_p), \cdots$$

Nous pouvons choisir les α_p de manière que

$$|\varphi_k(x)| < C\sqrt{\log n_{k+1}}\sqrt{R_{n_k}}\cdot$$

Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir les n_k de façon que la série

$$(2) \qquad \sum\sqrt{\log n_{k+1}}\sqrt{R_{n_k}}.$$

converge.

Or la série $\sum \frac{\sqrt{R_n}}{n\sqrt{\log n}}$ étant convergente, la série $\sum \frac{\sqrt{R_{2^n}}}{\sqrt{n}}$ converge, d'après le théorème de Cauchy ; une deuxième application de ce théorème montre la convergence de la série $\sum\sqrt{2^n}\sqrt{R_{2^{2^n}}}$. Or, si nous prenons $n_k = 2^{2^k}$, la série (2) devient

$$\sum\sqrt{2^{k+1}\log 2}\sqrt{R_{2^{2^k}}}.$$

Cette série converge donc, et notre théorème est démontré.

Remarquons que les séries considérées convergent presque partout, en vertu du théorème de Kolmogoroff et Seliverstoff (¹), car $\Sigma\rho_n^2 \log n$ converge. En effet

$$\sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \rho_n{}^2 \log n < \log n_{k+1} R_{n_k} < \sqrt{\log n_{k+1}}\sqrt{R_{n_k}} \quad \left(n_k = 2^{2^k}\right).$$

3. *Démonstration du théorème II.* — Remarquons d'abord que si la série à lacunes

$$(3) \qquad \sum r_q \cos(4^q x - \beta_q) \qquad (\Sigma r_q^2 < \infty)$$

est telle que Σr_q diverge, elle ne représente, pour aucun choix des β_q, une fonction continue. Cela résulte d'un théorème classique

(¹) Cf. Zygmund, p. 253.

de M. Szidon [1], mais peut se déduire immédiatement de la proposition de M. Serge Bernstein, démontrée au chapitre précédent, à savoir que, quels que soient les β_q, il existe toujours une solution commune x_k aux k inéquations congruentielles

$$|4^q x - \beta_q| \leqslant \frac{\pi}{4} \quad (\text{mod. } 2\pi) \quad q = 1, 2, \cdots k.$$

Il suffit alors de considérer la somme de Féjer $\sigma_k(x)$ de rang 4^k relative à la série (3) et d'y faire $x = x_k$. Si Σr_q diverge, $\sigma_k(x_k)$ tend vers $+\infty$ avec k ; donc la série (3) ne représente jamais une fonction continue.

Ceci étant, donnons-nous la suite $\{ R_n^0 \}$ du théorème II. Distinguons deux cas :

a) $R_n^0 \log n$ décroît. Prenons, alors, dans la série (1)

$$\rho_{4^q} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \sqrt{R^0_{4^q}} \quad \text{et} \quad \rho_n = 0 \quad \text{pour } n \neq 4^q$$

de manière à avoir une série lacunaire du type (3). La série $\sum \frac{\sqrt{R_n^0}}{n\sqrt{\log n}}$ divergeant, la série $\Sigma \rho_{4^q}$ diverge aussi, en vertu du théorème de Cauchy. D'autre part $R_n^0 = \dfrac{1}{\log n\omega(\log n)}$ ω étant croissante ; donc $\Sigma \rho_n^2 = \sum \frac{1}{4q} R^0_{4^q}$ converge ; enfin le reste de cette série est, pour $4^{q-1} \leqslant n \leqslant 4^q - 1$:

$$R_n = \sum_q^\infty \frac{1}{4q} R^0_{4^q} = \sum_q^\infty \frac{1}{4 \log 4 \cdot q^2 \cdot \omega(q \log 4)} < \frac{1}{4 \log 4\,(q-1)\,\omega(q \log 4)}$$

$$< \frac{1}{q \log 4\, \omega(q \log 4)} = R^0_{4^q} < R^0_n$$

b) $R_n^0 \log n$ croît : Prenons alors, dans la série (1)

$$\rho_{4^q} = \frac{1}{2q} \quad \text{et} \quad \rho_n = 0 \quad \text{pour } n \neq 4^q$$

alors il est immédiat que $\Sigma \rho_{4^q}$ diverge, et que $\Sigma \rho_n^2$ converge ; le reste de cette série est, pour $4^{q-1} \leqslant n \leqslant 4^q - 1$

$$R_n = \sum_q^\infty \frac{1}{4q^2} < \frac{1}{4(q-1)} < \frac{1}{q \log 4} < R^0_{4^q} < R^0_n$$

et la démonstration du théorème II est ainsi achevée.

---

[1] Cf. Zygmund, p. 139.

II

4. — On vient de voir que si on ne fait pas d'autre hypothèse que la convergence de $\Sigma\rho_n^2$, on ne peut pas toujours déterminer les arguments α_n de façon que la série (1) soit la série de Fourier d'une fonction continue.

Il se pose alors la question de savoir si, en supposant que les ρ_n satisfassent à certaines conditions de *régularité*, la détermination des α_n est possible quelque lente que soit la convergence de $\Sigma\rho_n^2$.

Nous allons montrer que la réponse est affirmative [1]. Notre méthode n'impose aux ρ_n que des conditions de régularité très générales. Elle est inspirée d'une méthode qui a servi à M. Hille [2] pour l'étude d'une série trigonométrique particulière. Elle repose sur la généralisation que nous avons faite de certains théorèmes de M. Van der Corput [3], généralisation qui peut présenter un intérêt en elle-même, et que nous allons d'abord exposer.

5. — *Généralisation de certains lemmes de M. Van der Corput.* Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b r(u)e^{2\pi i f(u)}du \qquad (a < b)$$

où $r \geqslant 0$ et f sont des fonctions réelles de la variable réelle u; nous désignerons les dérivées par des accents, et nous supposerons que r, r', f, f' et f'' sont continues.

Lemme I A. — *Si* $r \geqslant 0$ *et* $f' \geqslant 0$ *sont monotones et varient en sens contraire, on a :*

$$|I| < 2\cdot\text{Max}\,\frac{r}{\sqrt{|f''|}}$$

Supposons, pour fixer les idées, r décroissante et f' croissante (la

(1) Nos résultats ont été obtenus indépendamment de résultats analogues de M. Wilton, mais qui imposent aux ρ_n des conditions plus restrictives, et qui sont basés sur des considérations beaucoup plus complexes (équations fonctionnelles). Cf. *Journ. London Math. Soc.*, 9 (1934), pp. 194-201 et 247-254.

(2) *Journ. London Math. Soc.*, 4 (1929), pp. 176-182.

(3) Cf. Zygmund, p. 116.

démonstration est identique dans le cas inverse). Prenons un point c tel que $a \leqslant c \leqslant b$. On a

$$(4) \qquad \left| \int_a^c r(u) e^{2\pi i f(u)} du \right| < \int_a^c r(u) du < \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{f''}} \int_a^c \sqrt{f''(u)} \cdot du.$$

D'autre part

$$\int_c^b r(u) e^{2\pi i f(u)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_c^b \frac{r(u)}{f'(u)} \, d[e^{2\pi i f(u)}].$$

Or $\frac{r}{f'}$ décroît ; l'application du second théorème de la moyenne donne :

$$\left| \int_c^b r(u) e^{2\pi i f(u)} du \right| < \frac{2}{\pi} \frac{r(c)}{f'(c)} < \frac{r(c)}{f'(a) + \int_a^c f''(u) du} < \frac{r(c)}{\sqrt{f''(\theta)} \int_a^c \sqrt{f''(u)} du}$$

où $a \leqslant \theta \leqslant c$; donc

$$(5) \qquad \left| \int_c^b r(u) e^{2\pi i f(u)} du \right| < \frac{r(\theta)}{\sqrt{f''(\theta)}} \frac{1}{\int_a^c \sqrt{f''(u)} du}$$

$$< \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{f''}} \cdot \frac{1}{\int_a^c \sqrt{f''(u)} du} \cdot$$

Or $\int_a^c \sqrt{f''(u)} \, du$ croît avec c ; si elle reste constamment inférieure à 1, il n'y a qu'à prendre $c = b$ et l'inégalité (4) donne alors $|\mathrm{I}| \leqslant \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{f''}}$; si non, choisissons c de façon que $\int_a^c \sqrt{f''(u)} \, du = 1$, l'addition des inégalités (4) et (5) nous donnera alors le résultat annoncé.

Lemme IB. — *Si* $r \geqslant 0$ *et* $f' \geqslant 0$ *sont monotones et varient dans le même sens, et si* $\frac{r'}{f''}$ *est monotone, on a :*

$$|\mathrm{I}| < 2 \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{|f''|}} + \operatorname{Max} \frac{r'}{f''} \cdot$$

Supposons r et f' décroissants. La démonstration est la même dans le cas inverse. Ecrivons :

$$\mathrm{I} = \int_a^b [r(u) - r(b)] e^{2\pi i f(u)} du + r(b) \int_a^b e^{2\pi i f(u)} du.$$

La seconde intégrale est, en module, inférieure à

$$r(b)\cdot 2\,\mathrm{Max}\,\frac{1}{\sqrt{|f''|}} = r(b)\,\frac{2}{\sqrt{|f''(\theta)|}} < 2\,\frac{r(\theta)}{\sqrt{|f''(\theta)|}} < 2\,\mathrm{Max}\,\frac{r}{\sqrt{|f''|}}$$

θ étant compris entre a et b.

La première intégrale s'écrit :

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{r(u)-r(b)}{f'(u)-f'(b)}\cdot\frac{f'(u)-f'(b)}{f'(u)}\,d[e^{2\pi i f(u)}].$$

Or

$$\frac{r(u)-r(b)}{f'(u)-f'(b)} = \frac{\displaystyle\int_u^b |r'(u)|\,du}{\displaystyle\int_u^b |f''(u)|\,du}$$

est positive et monotone ; car sa dérivée a le signe de

$$-|r'|\int_u^b |f''|\,du + |f''|\int_u^b |r'|\,du.$$

C'est-à-dire de

$$\frac{\displaystyle\int_u^b |r'|\,du}{\displaystyle\int_u^b |f''|\,du} - \frac{|r'|}{|f''|} = \frac{|r'(\theta)|}{|f''(\theta)|} - \frac{|r'(u)|}{|f''(u)|} \qquad u \leqslant \theta \leqslant b.$$

Donc, d'après l'hypothèse faite sur $\frac{r'}{f''}$, cette dérivée a un signe constant. D'autre part $\frac{f'(u)-f'(b)}{f'(u)}$ est positive, décroissante, et inférieure à 1.

Une double application du second théorème de la moyenne à l'intégrale J donne alors

$$|\mathrm{J}| < \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Max}\,\frac{r(u)-r(b)}{f'(u)-f'(b)} < \mathrm{Max}\,\frac{\displaystyle\int_u^b |r'|\,du}{\displaystyle\int_u^b |f''|\,du} < \mathrm{Max}\,\frac{r'}{f''}\,.$$

Donc finalement

$$|\mathrm{I}| < 2 \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{|f''|}} + \operatorname{Max} \frac{r'}{f''}$$

qui est le résultat annoncé (¹).

Lemme I C. — Si r est positif et monotone ; et si f' est monotone (sans hypothèse de signe), on a, à condition que $\left|\frac{r'}{f''}\right|$ soit monotone

$$|\mathrm{I}| < 4 \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{|f''|}} + \operatorname{Max} \left|\frac{r'}{f''}\right|.$$

Ce lemme résulte immédiatement des deux lemmes précédents, et du partage de l'intégrale I en deux intégrales, l'une où $f' < 0$, l'autre où $f' > 0$.

Lemme II. — *Posons* $\mathrm{S} = \sum_{a<n\leqslant b} r(n)e^{2\pi i f(n)}$; *supposons* r *positif et monotone* ; f' *monotone* (*sans hypothèse de signe*) *et* $|f'| \leqslant \frac{1}{2}$. *Dans ces conditions on a* $|\mathrm{S} - \mathrm{I}| < \mathrm{C} \operatorname{Max} r$, C *étant une constante absolue.*

Ce lemme a été démontré par M. Van der Corput, pour r constant et égal à l'unité. La démonstration, à laquelle nous renvoyons (²), est basée très simplement sur la considération de l'intégrale de Stieltjes représentant S — I.

Dans le cas que nous considérons il suffit, pour la démonstration du lemme, de considérer l'intégrale de Stieltjes représentant S — I, de lui appliquer le second théorème de la moyenne (r étant monotone) et d'appliquer le lemme de M. Van der Corput pour $r = 1$.

Lemme III. — Supposons r positif et monotone ; f' monotone ; $\left|\frac{r'}{f''}\right|$ et $\frac{r}{\sqrt{|f''|}}$ monotones. Nous allons trouver une limitation pour $|\mathrm{S}|$.

(¹) Pour se rendre compte de la nécessité du terme $\frac{r'}{f''}$ dans la limitation de $|\mathrm{I}|$ quand r et f' varient dans le même sens, il suffit de considérer le cas où $r = f'$; on a $\mathrm{I} = \frac{e^{2\pi i f(b)} - e^{2\pi i f(a)}}{2\pi i}$ et, en prenant $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}$, on a $|\mathrm{I}| = \frac{1}{\pi}$. Or si $f = \log\log u$, $r = f' = \frac{1}{u \log u}$, $f'' = -\frac{1 + \log u}{u^2 \log^2 u}$, $\frac{r}{\sqrt{|f''|}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \log u}}$ et le maximum de cette fonction entre a et b vers zéro pour $a \to \infty$.

(²) Cf. Zygmund, p. 117.

Considérons la courbe $v = f'(u)$ et marquons sur cette courbe les points dont les ordonnées sont de la forme $k - \frac{1}{2}$ (k entier $\gtrless 0$) et comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$. En supposant, pour fixer les idées, f' croissante nous obtenons ainsi les points d'ordonnées

$$f'(a),\quad p-\frac{1}{2},\quad p+1-\frac{1}{2},\cdots,\quad p+q-\frac{1}{2},\quad f'(b)$$

auxquels correspondent respectivement les abscisses

$$a,\quad \alpha_p,\quad \alpha_{p+1}\cdots\quad \alpha_{p+q},\quad b.$$

Pour $\alpha_k \leqslant u \leqslant \alpha_{k+1}$ on a

$$k-\frac{1}{2} \leqslant f'(u) \leqslant k+\frac{1}{2},\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad |f'(u)-k| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Posons

$$S_k = \sum_{\alpha_k < n \leqslant \alpha_{k+1}} r(n)e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\alpha_k < n \leqslant \alpha_{k+1}} r(n)e^{2\pi i[f(n)-nk]}.$$

Comme $\left|\frac{d}{du}[f(u)-uk]\right| \leqslant \frac{1}{2}$, l'application à cette somme des lemmes I C et II donne

$$|S_k| < 4\,\mathrm{Max}\,(\alpha_k, \alpha_{k+1})\frac{r}{\sqrt{|f''|}} + \mathrm{Max}\,(\alpha_k, \alpha_{k+1})\left|\frac{r'}{f''}\right| + C\,\mathrm{Max}\,(\alpha_k, \alpha_{k+1})r$$

car $\frac{d^2}{du^2}[f(u)-uk] = f''(u)$. Il en est de même pour tous les intervalles (α_k, α_{k+1}) et pour les intervalles incomplets (a, α_p) et (α_{p+q}, b).

Or si φ est, pour fixer les idées, une fonction positive et décroissante de u, on a

$$\sum_k \mathrm{Max}\,(\alpha_k, \alpha_{k+1})\varphi(u) = \varphi(a) + \varphi(\alpha_p) + \cdots + \varphi(\alpha_{p+q}).$$

Si nous prenons comme nouvelle variable $v = f'(u)$, $\varphi(u)$ devient une fonction $\Phi(v)$ également décroissante et la somme $\sum_k$ devient

$$\Phi[f'(a)] + \Phi\left(p-\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(p+1-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \Phi\left(p+q-\frac{1}{2}\right)$$

$$< \Phi[f'(a)] + \Phi\left(p-\frac{1}{2}\right) + \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+q-\frac{1}{2}} \Phi(v)dv$$

$$< 2\,\Phi[f'(a)] + \int_{f'(a)}^{f'(b)} \Phi(v)dv.$$

En revenant à la variable u nous avons

$$\sum_k < 2\varphi(a) + \int_a^b \varphi(u) f''(u)du.$$

D'une façon générale, si φ est positive et monotone, nous avons :

$$\sum_k \operatorname{Max}(\alpha_k, \alpha_{k+1})\varphi(u) \leq 2 \operatorname{Max} \varphi + \int_a^b \varphi \cdot f'' \cdot du.$$

Nous obtenons donc finalement la limitation

$$(6) \quad |S| < 8 \operatorname{Max} \frac{r}{\sqrt{|f''|}} + 2 \operatorname{Max} \left| \frac{r'}{f''} \right| + 2C \operatorname{Max} r$$
$$+ \int_a^b (4r\sqrt{|f''|} + |r'| + Cr|f''|)du$$

sous les seules hypothèses énoncées au début du Lemme III.

6. *Application des lemmes précédents aux séries trigonométriques.* — Considérons, les $r(n)$ étant donnés, la série

$$(7) \qquad \sum_1^\infty r(n) e^{2\pi i f(n) + 2\pi i n x} \qquad r(n) \geq 0.$$

Nous allons, en nous servant des lemmes précédents, déterminer $f(n)$ de façon que cette série converge uniformément vers une fonction continue de x ; cela quelque lente que soit la convergence de $\Sigma r^2(n)$, à la condition que les $r(n)$ décroissent régulièrement, point que nous préciserons par la suite.

Les $r(n)$ étant décroissants, la convergence de $\Sigma r^2(n)$ entraîne celle de l'intégrale $\int^\infty r^2(u)du$.

Remarquons tout d'abord que f' étant monotone en même temps que $f' + x$, et que $[f(u) + ux]''$ étant égal à $f''(u)$, les limitations que nous donneront nos lemmes seront valables uniformément quel que soit x.

Cela posé, prenons

$$f''(u) = \frac{r^2(u)}{\int_u^\infty r^2(u)du}$$

(on est tout naturellement conduit à ce choix pour faire converger l'intégrale $\int^{\infty} r\sqrt{f''}\,du$, tout en faisant tendre vers zéro $\frac{r}{\sqrt{f''}}$).

Tout d'abord $\frac{r}{\sqrt{f''}} = \left(\int_u^{\infty} r^2du\right)^{\frac{1}{2}}$ décroît et tend vers zéro pour $u = \infty$.

Etudions maintenant $\frac{|r'|}{f''} = \frac{|r'|}{r^2}\int_u^{\infty} r^2du$. Si $\frac{|r'|}{r^2}$ est non croissante, c'est-à-dire si $\frac{1}{r}$ est concave (ou linéaire), alors $\frac{|r'|}{f''}$ décroît et tend vers zéro, à cause du facteur $\int_u^{\infty} r^2du$. Supposons maintenant $\frac{|r'|}{r^2}$ croissante $\left(\frac{1}{r}\text{ convexe}\right)$. On voit alors facilement que

$$\frac{r}{\int_u^{\infty} r^2du} = \frac{\int_u^{\infty} |r'|\,du}{\int_u^{\infty} r^2du}$$

croît aussi ; mais on a

$$\frac{|r'|}{f''} = \frac{|r'|}{r}\,\frac{\int_u^{\infty} r^2du}{r}$$

il suffit alors de supposer $\frac{|r'|}{r}$ décroissante $\left(\log\frac{1}{r}\text{ concave}\right)$ pour assurer la décroissance de $\frac{|r'|}{f''}$; d'autre part $\frac{|r'|}{r} \to 0$ car nous supposons évidemment Σr divergente ; donc $\frac{|r'|}{f''}$ décroît et tend vers zéro. En résumé, si $\log\frac{1}{r}$ est concave, et $\frac{1}{r}$ concave, convexe, ou linéaire, $\frac{|r'|}{f''}$ décroît et tend vers zéro. Nous supposerons ces hypothèses vérifiées (1).

Remarquons enfin que

$$\int_u^{\infty} r^2du = \int_u^{\infty}\left|\frac{r}{r'}\right|\,|r'r|\,du > \left|\frac{r}{r'}\right|\int_u^{\infty} |r'r|\,du = \frac{r^3}{2\,|r'|}$$

---

(1) En réalité l'hypothèse : $\frac{1}{r}$ concave, suffit si on se limite au cas où Σr_n^2 converge assez lentement, ce qui est le cas le plus intéressant. Nous n'avons complété les hypothèses que pour obtenir un résultat tout à fait général.

donc

$$rf'' < 2\,|r'|.$$

L'application de la formule (6) donne alors :

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b} r(n)e^{2\pi i f(n)\,+\,2\pi i n x}\right|$$

$$< 8\frac{r(a)}{\sqrt{f''(a)}} + 2\frac{|r'(a)|}{f''(a)} + 2Cr(a) + 4\int_a^b r\sqrt{f''}\,du + (2C+1)\int_a^b |r'|\,du$$

$$< 8\left(\int_a^\infty r^2du\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\,|r'(a)|}{r^2(a)}\int_a^\infty r^2du + (4C+1)r(a) + 4\int_a^b r\sqrt{f''}\,du$$

or nous avons :

$$\int_a^b r\sqrt{f''}\,du = \int_a^b \frac{r^2du}{\left(\int_u^\infty r^2du\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\left[\left(\int_a^\infty r^2du\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_b^\infty r^2du\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$< 2\left(\int_a^\infty r^2du\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où finalement

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b}\right| < 16\sqrt{\int_a^\infty r^2du} + 2\frac{|r'(a)|}{r^2(a)}\int_a^\infty r^2du + (4C+1)r(a) = \omega(a)$$

$\omega(a)$ étant indépendante de b, positive, décroissante, et tendant vers zéro pour $a \to \infty$. Cette inégalité a lieu uniformément quel que soit x. Donc la série considérée converge uniformément vers une fonction continue.

En résumé, dans la série (7), *où* $\Sigma r^2(n)$ *est supposée convergente, on peut toujours déterminer* $f(n)$ *pour que cette série converge uniformément vers une fonction continue, à condition* :

a) *soit que* r *décroisse et* $\frac{1}{r}$ *soit concave* (*ou linéaire*).

b) *soit que* r *décroisse,* $\frac{1}{r}$ *soit convexe, et* $\log\frac{1}{r}$ *concave.*

Il suffira de prendre

$$f(u) = \int^u \log\left(\frac{1}{\int_u^\infty r^2du}\right)du.$$

CHAPITRE V

GÉNÉRALISATION DE THÉORÈMES RELATIFS A LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES [1]

1. — M. Serge Bernstein a démontré les deux théorèmes suivants [2] :

a) Soit $f(x)$ une fonction continue, $\omega(\delta)$ son module de continuité. Si la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ converge, la série de Fourier de f est absolument convergente.

b) Ce théorème ne peut pas être amélioré. En d'autres termes, si le module de continuité $\omega(\delta)$ est tel que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge, on peut construire une fonction continue dont le module de continuité est inférieur à $\omega(\delta)$ et tel que sa série de Fourier ne converge pas absolument.

Nous nous proposons de généraliser ces résultats en démontrant les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit* $\Sigma\rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ *la série de Fourier d'une fonction continue dont le module de continuité est* $\omega(\delta)$ *Soit* $F(u)$ *une fonction positive, croissante et concave de u positif, s'annulant avec u. Si la série* $\sum F\left[\frac{1}{n}\,\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ *converge, la série* $\Sigma F(\rho_n^2)$ *converge aussi.*

Théorème II. — *S'il existe des nombres positifs fixes* α, β *(d'ailleurs aussi petits que l'on voudra) tels que* $\frac{u^{\frac{1}{3}+\alpha}}{F(u)}$ *décroisse, et*

[1] *Comptes Rendus*, t. 201 (1935), p. 703.
[2] *Comptes Rendus*, t. 199 (1934), p. 397.

$\dfrac{u^{1-\beta}}{F(u)}$ *croisse* [1], *le théorème précédent ne peut pas être amélioré ; autrement dit, si l'on se donne un module de continuité* $\omega_0(\delta)$, *tel seulement que la décroissance de* $\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ *soit soumise à certaines conditions de régularité, et tel que la série* $\Sigma F\left[\frac{1}{n}\,\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ *diverge, on peut trouver une fonction continue dont le module de continuité soit inférieur à* $\omega_0(\delta)$ *et telle que,* $\Sigma\rho_n \cos(nx - \alpha_n)$ *étant sa série de Fourier, la série* $\Sigma F(\rho_n^2)$ *diverge.*

Les théorèmes de M. Bernstein correspondent au cas où

$$F(u) = \sqrt{u}.$$

2. — Avant de démontrer les théorèmes I et II, nous commencerons par reprendre, en élargissant un peu les hypothèses, une proposition démontrée par M. de La Vallée Poussin [2] et permettant de limiter supérieurement le module de continuité de $f(x)$, de période 2π, en fonction de l'approximation avec laquelle $f(x)$ peut être représentée par une série de polynomes trigonométriques.

Soit $f(x) = P_1 + P_2 + \cdots + P_n + \cdots$, P_n étant un polynome trigonométrique d'ordre $\leqslant n$, la série ΣP_i étant uniformément convergente. Supposons que

$$|R_n| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} P_i\right| < \Omega(n)$$

$\Omega(n)$ décroissant et tendant vers zéro pour $n \to \infty$. Ecrivons

$$f = \sum_{1}^{n_1} P_i + \sum_{n_1+1}^{n_2} P_i + \cdots + \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} P_i + R_{n_{k+1}}.$$

---

(1) Les hypothèses faites sur $F(u)$ se justifient en remarquant que : 1° si $F(u)$ se réduit à u, $\Sigma\rho_n^2$ converge évidemment toujours quel que soit $\omega(\delta)$; 2° si $F(u) = u^{\frac{1}{3}}$, la série $\Sigma\rho_n^{\frac{2}{3}}$ peut converger, alors que la série $\Sigma\left[\frac{1}{n}\,\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ diverge toujours car le produit par n de son terme général ne tend pas vers zéro.

(2) Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Paris, 1919), chapitre IV.

Le polynome $\sum_{n_p+1}^{n_{p+1}} P_i$ est d'ordre n_{p+1} au plus ; il est égal à $R_{n_p} - R_{n_{p+1}}$; sa valeur absolue est donc inférieure à $2\Omega(n_p)$ et celle de sa dérivée est inférieure, d'après un théorème bien connu, à $2n_{p+1}\,\Omega(n_p)$. Donc, si $\omega(\delta)$ est le module de continuité de f, on a

$$\omega(\delta) < \delta[2\,n_1\Omega(0) + 2\,n_2\Omega(n_1) + \cdots + 2\,n_{k+1}\Omega(n_k)] + 2\,\Omega(n_{k+1}).$$

Prenons $n_p = 2^p$; on a alors :

$$2n_{p+1}\Omega(n_p) = \Omega(2^p)(2^{p+2}) = 8\Omega(2^p)[2^p - 2^{p-1}] \qquad (p \geqslant 1)$$

d'où

$$\omega(\delta) < 4\cdot\Omega(0)\delta + 8\delta\sum_{p=1}^{k}\Omega(2^p)[2^p - 2^{p-1}] + 2\Omega(2^{k+1})$$
$$< 4\Omega(0)\delta + 8\delta\int_0^{2^k}\Omega(u)du + 2\Omega(2^{k+1}).$$

Choisissons k de façon que

$$\frac{1}{2^{k+1}} < \delta < \frac{1}{2^k}.$$

Alors

$$\omega(\delta) < 4\Omega(0)\delta + 8\delta\int_0^{\frac{1}{\delta}}\Omega(u)du + 2\Omega\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Comme $\Omega(x)$ décroît, on voit que seul l'ordre de grandeur du second terme compte, et nous obtenons le résultat

(1) $$\omega(\delta) < A\delta\int_0^{\frac{1}{\delta}}\Omega(u)du$$

A étant une constante indépendante de δ. — *Ce résultat est valable sous la seule condition que* $\Omega(u)$ *soit décroissante* [1].

---

[1] Dans le théorème démontré par M. de LA VALLÉE POUSSIN, l'auteur a recherché les conditions d'existence des dérivés de f ; il a été ainsi conduit à supposer la convergence de l'intégrale $\int^{\infty}\frac{\Omega(u)}{u}du$, hypothèse dont nous nous affranchissons ici.

Si nous supposons maintenant qu'il existe un $\alpha < 1$ tel que $u^\alpha\,\Omega(u)$ croisse avec u, on a

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} u^\alpha\Omega(u)\frac{du}{u^\alpha} < \left(\frac{1}{\delta}\right)^\alpha \Omega\left(\frac{1}{\delta}\right)\int_0^{\frac{1}{\delta}}\frac{du}{u^\alpha}$$

d'où

$$\omega(\delta) < \mathrm{C}\Omega\left(\frac{1}{\delta}\right) \tag{2}$$

C étant une constante indépendante de δ.

3. — Appliquons maintenant les résultats précédents aux fonctions continues considérées au chapitre IV :

$$g(x) + ih(x) = \sum_1^\infty r(n)e^{i\varphi(n)+inx} \tag{3}$$

où nous supposons que $r(n)$ décroissant dans les conditions de régularité que nous avons précisées, $\varphi(n)$ a été choisie pour que la série (3) converge uniformément. Nous avons vu que le reste de la série arrêtée au n^e terme est inférieur à

$$\mathrm{B}\sqrt{\int_n^\infty r^2(u)du}$$

B étant indépendant de n. Remarquons, en passant, que l'ordre d'approximation donné par les sommes partielles de la série est donc le meilleur possible [1].

Le module de continuité de g ou h est tel que

$$\omega(\delta) < \mathrm{H}\delta\int_0^{\frac{1}{\delta}} du\sqrt{\int_u^\infty r^2du}$$

H étant indépendant de δ.

Supposons maintenant que la convergence de $\Sigma r^2(n)$ soit assez lente pour que $n^\beta r^2(n)$ croisse, avec $\beta < 3$. Alors

$$\int_u^\infty r^2(u)du > u^\beta r^2(u)\int_u^\infty\frac{du}{u^\beta} = \frac{ur^2(u)}{\beta - 1}. \tag{4}$$

---

[1] Cf. La Vallée Poussin, *loc. cit*, p. 13.

Dans ces conditions la fonction

$$u^{\beta-1}\int_u^\infty r^2 du$$

est croissante, car sa dérivée

$$(\beta-1)u^{\beta-2}\int_u^\infty r^2 du - u^{\beta-1}r^2(u)$$

est positive, d'après (4). Comme $\beta-1$ est inférieur à 2, nous nous trouvons dans le cas d'application de l'inégalité (2) et nous avons

$$\omega(\delta) < \mathrm{K}\sqrt{\int_{\frac{1}{\delta}}^\infty r^2 du} \tag{5}$$

K étant une constante indépendante de δ.

Dans ce cas, on peut même affirmer que $\omega(\delta)$ est précisément de l'ordre du second membre de (5). Cela résulte de ce que, pour toute fonction continue dont la série de Fourier est $\Sigma\rho_n \cos(nx-\alpha_n)$, dont la meilleure approximation d'ordre n est E_n, et dont le module de continuité est $\omega(\delta)$, on a [1]

$$\mathrm{E}_n^2 \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n+1}^\infty \rho_p^2, \qquad \mathrm{E}_n < 6\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \omega^2\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{72}\sum_{n+1}^\infty \rho_p^2. \tag{6}$$

4. *Démonstration du théorème I.* — Elle est une conséquence immédiate de la troisième des inégalités (6) et de l'inégalité de Jensen [2] applicable par suite de la concavité de $\mathrm{F}(u)$. En effet [3] :

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{N}+1}^{2\mathrm{N}} \mathrm{F}(\rho_n^2) < \mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{N}+1}^{2\mathrm{N}} \rho_n^2\right) < 72\,\mathrm{F}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\,\omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right].$$

En posant $\mathrm{N} = 2^h$, on voit que la série $\Sigma\mathrm{F}(\rho_n^2)$ converge si la série $\Sigma 2^h\mathrm{F}\left[\frac{1}{2^h}\,\omega^2\left(\frac{1}{2^h}\right)\right]$ converge ; donc, d'après le théorème de

---

(1) Cf. La Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 13 et p. 45.

(2) Cf. Zygmund, p. 67.

(3) Si $\mathrm{F}(u)$ est concave et s'annule pour $u=0$, et si n est entier, $\mathrm{F}(nu) < n\mathrm{F}(u)$. On le démontre facilement de proche en proche.

Cauchy, si la série $\Sigma F\left[\frac{1}{n}\,\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ converge, ce qui est le théorème annoncé.

5. *Démonstration du théorème II.* — Nous supposerons que $\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ décroisse assez régulièrement pour qu'en posant

$$\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right)=\int_n^\infty r^2(u)du$$

la suite des $r(n)$ qui s'en déduit décroisse elle-même assez régulièrement de façon à permettre de former avec elle une série uniformément convergente du type (3), soit $g(x)+ih(x)$.

D'autre part, étant donnée la première hypothèse faite sur $F(u)$, la série $\Sigma\left[\frac{1}{n}\,\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{3}+\alpha}$ diverge ; on voit alors facilement que si ε est inférieur à $\dfrac{3\alpha}{2\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)}$, la quantité $n^{1-\varepsilon}\,\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ ne peut pas être bornée. Nous pouvons donc supposer, en n'imposant à $\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ que des conditions de régularité, qu'il existe un nombre γ, inférieur à 1, tel que $n^\gamma\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ soit croissante.

Dans ces conditions il résulte de ce qui a été démontré au § 3 ci-dessus que $g(x)$, par exemple, a un module de continuité $\omega(\delta)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\omega(\delta)<K\omega_0(\delta)$$

La fonction $g_1(x)=\frac{g(x)}{K}=\Sigma\rho_n\cos(nx-\alpha_n)$ a donc un module de continuité inférieur à $\omega_0(\delta)$.

Reste à démontrer que $\Sigma F(\rho_n^2)$ diverge. Nous pouvons supposer, toujours en n'imposant à $\omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$ que des conditions de régularité, que $nF(\rho_n^2)$ est monotone. Alors, si cette quantité croît, $\Sigma F(\rho_n^2)$ diverge ; si au contraire elle décroît, comme $\dfrac{\rho_n^{2(1-\beta)}}{F(\rho_n^2)}$ décroît quand n croît, $n\rho_n^{2(1-\beta)}$ décroît aussi ; on a alors :

$$\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right)=K^2\int_n^\infty \rho^2(u)du=K^2\int_n^\infty u^{\frac{1}{1-\beta}}\rho^2(u)\frac{du}{u^{\frac{1}{1-\beta}}}<$$

$$<K^2n^{\frac{1}{1-\beta}}\rho_n^2\int_n^\infty\frac{du}{u^{\frac{1}{1-\beta}}}=K^2\frac{(1-\beta)}{\beta}n\rho_n^2$$

donc

$$\frac{1}{n}\,\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right) < C\rho_n^2.$$

Si $C \leqslant 1$, la divergence de $\Sigma F\left[\frac{1}{n}\,\omega_0^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ entraîne celle de $\Sigma F(\rho_n^2)$; si $C > 1$, il suffit de remarquer, pour arriver à la même conclusion, que $\frac{u}{F(u)}$ étant croissante, on a $F(Cu) < CF(u)$.

Le théorème II se trouve donc démontré.

CHAPITRE VI

LA CONVERGENCE UNIFORME DES SÉRIES DE FOURIER [1]

1. — On connaît les tests classiques de Jordan et Dini sur la convergence uniforme des séries de Fourier de fonctions continues. Nous avons essayé, en reprenant l'étude de l'intégrale de Fourier, d'énoncer un test de convergence uniforme plus général, d'application simple, comprenant les deux précédents comme cas particuliers et susceptible de conduire à d'autres critères intéressants.

2. — Soit $f(x)$ une fonction continue ; si on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x)$$

on sait que, pour que le développement de Fourier de f converge uniformément, il faut et il suffit [2] que

$$\int_0^{\pi} [\varphi(t) + \varphi(-t)] \frac{\sin nt}{t}\, dt$$

tende uniformément vers zéro avec $1/n$. Partageons, pour simplifier, cette intégrale en deux, l'une contenant $\varphi(t)$, l'autre $\varphi(-t)$ et considérons la première.

Si $\omega(\delta)$ désigne le module de continuité de f, nous avons d'abord

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(t) \frac{\sin nt}{t}\, dt \right| < \pi\varpi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Il suffit donc de considérer l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} \sin nt\, dt = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \left[\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{\varphi\left(t + k\frac{\pi}{n}\right)}{t + \frac{k\pi}{n}} \right] \sin nt\, dt.$$

---

(1) *Comptes Rendus*, t. 207 (1938), p. 662.

(2) Cf. Zygmund, p. 24.

L'application du premier théorème de la moyenne donne immédiatement, pour valeur absolue de cette intégrale

$$\left| \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{\varphi\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}{\theta + \frac{k\pi}{n}} \right| \cdot \frac{2}{n} \qquad \frac{\pi}{n} < \theta < \frac{2\pi}{n}$$

Il suffit donc de considérer la somme

$$\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{\varphi\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)}{n\theta + k\pi}$$

où nous pouvons supposer sans inconvénient n impair.

Considérons, dans cette somme, la différence de deux termes consécutifs. On a :

$$\frac{\varphi\left(\theta + 2h\frac{\pi}{n}\right)}{n\theta + 2h\pi} - \frac{\varphi\left(\theta + \overline{2h+1}\,\frac{\pi}{n}\right)}{n\theta + \overline{2h+1}\pi} = \frac{\varphi\left(\theta + \frac{2h\pi}{n}\right) - \varphi\left(\theta + \frac{\overline{2h+1}\pi}{n}\right)}{n\theta + 2h\pi}$$
$$+ \varphi\left(\theta + \frac{\overline{2h+1}\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{n\theta + 2h\pi} - \frac{1}{n\theta + \overline{2h+1}\pi}\right].$$

Or on a

$$\left| \varphi\left(\theta + \frac{\overline{2h+1}\pi}{n}\right)\left[\frac{1}{n\theta + 2h\pi} - \frac{1}{n\theta + \overline{2h+1}\pi}\right] \right|$$
$$< \omega\left(\overline{2h+3}\,\frac{\pi}{n}\right) \frac{1}{(2h+1)(2h+2)\pi}.$$

Prenons un entier q compris entre 0 et $\frac{n-3}{2}$.

La somme de ces quantités de $h = 0$ à $h = q - 1$, est inférieure à $\frac{1}{\pi}\,\omega\left(\overline{2q+1}\,\frac{\pi}{n}\right)$; la somme de $h = q$ jusqu'à $h = \frac{n-3}{2}$ est inférieure, si $|f(x)| < M$, à $\frac{2M}{\pi}\,\frac{1}{2q+1}$. Or il n'y a qu'à choisir, par exemple, q de l'ordre de $\sqrt{n}$ pour faire tendre vers zéro la quantité

$$\frac{1}{\pi}\,\omega\left(\overline{2q+1}\,\frac{\pi}{n}\right) + \frac{2M}{\pi}\,\frac{1}{2q+1}.$$

Il suffit donc de considérer la somme des quantités

$$\frac{\varphi\left(\theta + \frac{2h\pi}{n}\right) - \varphi\left(\theta + \frac{\overline{2h+1}\pi}{n}\right)}{n\theta + 2h\pi}.$$

Or

$$\frac{1}{n\theta + 2h\pi} - \frac{1}{(2h+2)\pi} < \frac{1}{(2h+1)(2h+2)\pi}.$$

En remplaçant les dénominateurs par $(2h + 2)\pi$ l'erreur est donc de l'ordre de $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Nous pouvons donc, dans la somme considérée, remplacer les éléments donnés par

$$\frac{\varphi\left(\theta + \frac{2h\pi}{n}\right) - \varphi\left(\theta + \frac{\overline{2h+1}\pi}{n}\right)}{(2h+2)\pi}$$

c'est-à-dire, finalement, qu'il nous suffit de considérer la somme

$$\frac{f(x+\theta) - f\left(x+\theta+\frac{\pi}{n}\right)}{2} + \frac{f\left(x+\theta+\frac{2\pi}{n}\right) - f\left(x+\theta+\frac{3\pi}{n}\right)}{4} + \cdots$$
$$+ \frac{f\left(x+\theta+\overline{n-3}\,\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x+\theta+\overline{n-2}\,\frac{\pi}{n}\right)}{n-1}$$

où $\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{2\pi}{n}$. L'intégrale considérée au début avec $\varphi(-t)$ conduit à la même somme, où l'on remplace π et θ par $-\pi$ et $-\theta$.

D'où la conclusion suivante :

Si la somme

$$T_n(x) = \frac{f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)}{1} + \frac{f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{3\pi}{n}\right)}{2} + \cdots + \frac{f\left(x+\frac{\overline{n-1}\pi}{n}\right) - f(x+\pi)}{\frac{1}{2}(n+1)}$$

ainsi que celle qui s'en déduit par le changement de π en $-\pi$, tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quel que soit x, la série de Fourier de f converge uniformément.

3. — Déduisons de ce test les critères connus de Dini et Jordan.

On a immédiatement

$$|T_n(x)| < C\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n$$

C étant une constante absolue. D'où le test de Dini.

Soit maintenant m un entier inférieur à $\frac{1}{2}(n+1)$, et soit V la variation totale de f, supposée à variation bornée. On a

$$|T_n(x)| < \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right] + \frac{V}{m+1}$$

il n'y a qu'à choisir m croissant indéfiniment avec n et tel que $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log m$ tende vers zéro pour voir que $T_n(x)$ tend uniformément vers zéro.

4. — Nous allons maintenant déduire de la proposition énoncée plus haut un critère beaucoup plus général que celui de Jordan.

Rappelons d'abord quelques définitions.

Par analogie avec les fonctions à variation bornée, nous appellerons avec L. C. Young (1), fonction à « Φ — variation bornée » une fonction f telle que la somme

$$\sum_i \Phi[|f(x_{i+1}) - f(x_i)|]$$

soit bornée quels que soient les points de subdivision x_i choisis dans l'intervalle considéré ; $\Phi(v)$ étant une fonction croissante de $v \geqslant 0$, s'annulant avec v et définie pour v suffisamment petit.

Nous aurons d'autre part à nous servir des fonctions dites « complémentaires » de W. H. Young. Si $\varphi(u)$, $(u \geqslant 0)$ et $\psi(v)$, $(v \geqslant 0)$ sont deux fonctions continues, nulles à l'origine, croissantes au sens strict, tendant vers l'infini, et inverses l'une de l'autre, on a pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$:

$$ab \leqslant \Phi(a) + \Psi(b)$$

où

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(u)du \qquad \Psi(v) = \int_0^v \psi(v)dv$$

Φ et Ψ sont dites fonctions complémentaires (2).

5. — Considérons maintenant deux fonctions complémentaires $\Phi(u)$, $\Psi(v)$ que nous supposerons définies pour des valeurs suffisamment petites de u et v.

(1) *Comptes Rendus*, t. 204 (1937), p. 470.
(2) Cf. ZYGMUND, p. 64-65.

k étant entier positif, posons :

$$\Delta_k = \left| f\left(x + \overline{2k-2}\,\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + \overline{2k-1}\,\frac{\pi}{n}\right) \right|$$

et soit $\varepsilon(k)$ une fonction positive de k, décroissant aussi lentement qu'on voudra, et tendant vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

On a

$$\frac{\Delta_k}{k\varepsilon(k)} < \Phi(\Delta_k) + \Psi\left(\frac{1}{k\varepsilon(k)}\right).$$

Supposons Ψ choisi de façon que la série $\Sigma\Psi\left(\frac{1}{k}\right)$ soit convergente. On peut toujours choisir $\varepsilon(k)$ pour que $\Sigma\Psi\left(\frac{1}{k\varepsilon(k)}\right)$ converge également. Alors, si f est une fonction à « Φ — variation bornée » on a, m étant un entier quelconque inférieur à $\frac{1}{2}(n+1)$,

$$\sum_{k=m}^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{\Delta_k}{k\varepsilon(k)} < \mathrm{A}$$

A étant une constante indépendante de n et de x. D'où

$$\sum_{m}^{\frac{1}{2}(n+1)} \frac{\Delta_k}{k} < \mathrm{A}\varepsilon(m)$$

par conséquent

$$|\mathrm{T}_n(x)| < \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-1}\right] + \mathrm{A}\varepsilon(m)$$

il n'y a plus qu'à choisir m comme au § 3 ci-dessus pour voir que $\mathrm{T}_n(x)$ tend uniformément vers zéro.

D'où le théorème suivant :

Le développement de Fourier de la fonction continue f converge uniformément si f est à « Φ — variation bornée » Φ étant la fonction complémentaire d'une fonction Ψ telle que la série $\Sigma\Psi\left(\frac{1}{k}\right)$ converge.

On peut prendre, par exemple :

$$\Psi(v) = \int_0^v \frac{dv}{|\log v|^{1/\alpha}} \qquad 0 < \alpha < 1$$

car

$$\Psi\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\varphi}{|\log \varphi|^{1/\alpha}} < \frac{1}{k(\log k)^{1/\alpha}}.$$

Dans ce cas $\Phi(u)$ s'obtient en posant

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(u)du \qquad u = \frac{1}{|\log \varphi|^{1/\alpha}};$$

d'où

$$\varphi(u) = e^{-u^{-\alpha}} \qquad \Phi(u) = \int_0^u e^{-u^{-\alpha}}du.$$

Pour u suffisamment petit on a $\Phi(u) < e^{-u^{-\alpha}}$. Donc, si f est à « exp. $(-u^{-\alpha})$ — variation bornée », avec $\alpha < 1$, son développement de Fourier converge uniformément.

Un résultat plus restrictif $\left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$ avait été obtenu par une autre voie par L. C. Young [1].

---

[1] *Loc. cit.* plus haut.

CHAPITRE VII

UNE GÉNÉRALISATION DU PROCÉDÉ DE SOMMATION DE POISSON [1]

I

1. — Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

la série de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$. On sait que le procédé de sommation de Poisson consiste à considérer la série absolument convergente pour $0 \leqslant r < 1$:

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

et à faire tendre ensuite r vers l'unité.

On sait aussi que ce procédé est applicable en tout point de continuité de f ; que $f(r,x)$ tend uniformément vers $f(x)$ si f est continue ; enfin que si f est supposée seulement sommable, le procédé de Poisson est applicable presque partout.

2. — La généralisation que nous avons en vue est la suivante. Soient

$$\psi_0(r), \quad \psi_1(r) \cdots \psi_n(r) \cdots$$

des fonctions positives de r, formant une suite décroissante et convexe quel que soit r tel que

$$0 \leqslant r < 1.$$

Nous supposons $\psi_0(r)$ constante et égale à l'unité.

---

(1) *Comptes Rendus*, t. 205 (1937), p. 14 et p. 311.

D'autre part nous supposerons que

$$\lim_{r\to 1} \psi_p(r) = 1 \qquad (p \text{ fixe})$$

$$\lim_{n=\infty} \psi_n(r) = 0 \qquad (r \text{ fixe } \textit{inférieur} \text{ à } 1)$$

Considérons la série

$$\psi_0(r)\,\frac{1}{2} + \psi_1(r)\cos t + \cdots + \psi_n(r)\cos nt + \cdots \qquad 0 \leqslant r < 1)$$

Dans les hypothèses faites, cette série converge vers une fonction sommable [1] de t que nous appellerons le noyau, et que nous désignerons par $K(t, r)$.

On sait alors que

$$(1)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)K(t, r)dt = \frac{a_0}{2}\,\psi_0(r) + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\psi_n(r)$$

l'intégrale existant pour presque toute valeur de x, et l'égalité ayant lieu à condition que la série du second membre converge [2].

Le noyau possède les propriétés suivantes :

1° Il est positif quel que soit t.

2° Son maximum $M(\delta, r)$ pour $0 < \delta \leqslant t \leqslant \pi$ tend vers zéro quand r tend vers 1

3° Enfin on a $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} K(t, r)\,dt = 1$.

La troisième propriété est évidente. Les deux premières résultent de ce que, pour $0 < \delta \leqslant t \leqslant \pi$, on a, en appliquant deux fois la transformation d'Abel :

$$K(t, r) = \Delta^2\psi_0 \cdot \frac{1}{2} + \Delta^2\psi_1[2\chi_1(t)] + \cdots + \Delta^2\psi_n[(n+1)\chi_n(t)] + \cdots$$

le signe Δ^2 désignant des différences secondes, et $\chi_n(t)$ le noyau de Féjer :

$$\chi_n(t) = \frac{\sin^2 (n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

(1) Cf. Zygmund, p. 109. V. aussi plus haut chap. I, § 5.

(2) Cf. Zygmund, p. 14 et p. 90.

On a

$$(n+1)\chi_n(t) < \frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

et

$$\mathrm{M}(\delta, r) < \frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}[\Delta^2\psi_0 + \Delta^2\psi_1 + \cdots] = \frac{1-\psi_1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

Supposons maintenant que les $\psi_n(r)$ soient choisies de façon que la série de (1) converge au point x. Les propriétés du noyau permettent alors de démontrer, par un raisonnement classique [1] que si x est un point de continuité de $f(x)$, on a

$$f(x) = \lim_{r\to 1}\left[\frac{a_0}{2}\psi_0(r) + \sum_1^\infty (a_n\cos nx + b_n \sin nx)\psi_n(r)\right]. \tag{2}$$

Ainsi en particulier, supposons $f(x)$ continue. Alors :

1° Si $\psi_n(r) = O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ on sait que la série de (1) converge partout [2] ; l'égalité (2) a lieu partout et cela, d'ailleurs, d'après les propriétés du noyau, uniformément en x.

2° Si $\psi_n(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)$ on sait, d'après le théorème bien connu de Kolmogoroff et Seliverstoff, que la série de (1) converge presque partout [3] ; l'égalité (2) a donc lieu presque partout.

Autrement dit, *soit* $f(x)$ *une fonction continue, et*

$$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sa série de Fourier.

On a, partout, uniformément en x :

$$\lim_{s\to 0}\sum \frac{a_n\cos nx + b_n \sin nx}{1 + s\log n} = f(x) \tag{3}$$

et, presque partout

$$\lim_{s\to 0}\sum \frac{a_n\cos nx + b_n \sin nx}{1 + s\sqrt{\log n}} = f(x). \tag{4}$$

Nous allons montrer maintenant que cette dernière égalité est valable pour les fonctions bornées. Mais la démonstration repose

---

(1) Cf. Zygmund, p. 45.
(2) Cf. Zygmund, p. 58.
(3) Cf. Zygmund, p. 255.

sur d'autres méthodes qui présentent, croyons-nous, un intérêt en elles-mêmes. Nous allons donc les exposer d'abord.

II

3. — Soit f_0, $f_1 \ldots f_n \ldots$ une suite de fonctions réelles, bornées dans leur ensemble, de la variable x dans $(0, 2\pi)$. Soit

$$|f_p(x)| \leqq M_p \leqq M, \qquad \Delta f_p = f_p - f_{p+1}, \qquad \Delta^2 f_p = \Delta f_p - \Delta f_{p+1}.$$

Considérons la série trigonométrique dont le terme d'ordre p est, quel que soit p, le terme d'ordre p de la série de Fourier de f_p :

$$\text{(S)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(x)dx + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x) \cos p(x-\alpha)dx$$

et soit $S_n(\alpha)$ la somme de cette série arrêtée au terme de rang n. Nous nous proposons de limiter supérieurement l'intégrale $\int_0^{2\pi} S_u^2(\alpha)d\alpha$.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par $D_n(u)$ le noyau de Dirichlet d'ordre n, et par $K_n(u)$ le noyau de Féjer d'ordre n :

$$D_n(u) = \frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$(n+1)K_n(u) = \sum_{k=0}^{n} D_k(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2.$$

Cela posé, la somme des carrés des coefficients d'ordre p de la série (S) s'écrit

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} f_p(x)\cos pxdx\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} f_p(x)\sin px\,dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x)f_p(y)\cos px\cos py\,dxdy$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x)f_p(y)\sin px\sin py\,dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x)f_p(y)\cos p(x-y)dxdy$$

d'où

$$(5)\quad \pi\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(x)f_0(y)\,\frac{1}{2}\,dxdy$$
$$+\sum_1^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x)f_p(y)\cos p(x-y)dxdy.$$

3. 1. Appliquons au second membre la transformation d'Abel, en remarquant que

$$\Delta[f_p(x)f_p(y)] = f_p(x)\Delta f_p(y) + f_p(y)\Delta f_p(x) - \Delta f_p(x)\Delta f_p(y).$$

Nous avons

$$\pi\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha = \sum_0^{n-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta[f_p(x)f_p(y)]D_p(x-y)dxdy$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(x)f_n(y)D_n(x-y)dxdy$$
$$= 2\sum_0^{n-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(y)\Delta f_p(x)D_p(x-y)dxdy$$
$$-\sum_0^{n-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta f_p(x)\Delta f_p(y)D_p(x-y)dxdy$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(x)f_n(y)D_n(x-y)dxdy.$$

Les intégrales de $\Delta f_p(x)\ \Delta f_p(y)\ D_p(x-y)$ sont toutes positives ; en effet, en désignant par a_m, b_m les coefficients de Fourier d'ordre m de $\Delta f_p(x)$, on a

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta f_p(x)\Delta f_p(y)\cos m(x-y)dxdy = a_m^2 + b_m^2.$$

Nous avons donc

$$\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < \frac{2}{\pi}\sum_0^{n-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(y)\Delta f_p(x)D_p(x-y)dxdy$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(x)f_n(y)D_n(x-y)dxdy.$$

Or on a, C étant une constante absolue

$$\left| \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f_p(y)D_p(x-y)dy \right| < CM_p \log p.$$

Quant à la dernière intégrale, elle est positive et inférieure à $\int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx$. On a donc, finalement

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < C\sum_0^{n-1}{}' M_p \log p \int_0^{2\pi} |\Delta f_p(x)|\, dx + \int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx$$

l'accent au signe de sommation indiquant que, dans les deux premiers termes, $\log p$ doit être remplacé par une constante numérique telle que 1.

3. 2. — On peut donner à la limite supérieure trouvée une forme différente, utile dans certaines applications. Posons

$$E_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \sum_2^n \frac{\cos pu}{\log p}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\pi\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(x)f_0(y)\frac{1}{2}\,dxdy \\ &+ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)f_1(y)\cos(x-y)dxdy + \\ &+ \sum_2^n \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_p(x)f_p(y)\log p\cdot\frac{\cos p(x-y)}{\log p}\,dxdy.\end{aligned}$$

En appliquant la transformation d'Abel nous trouverons des termes de la forme

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta[f_p(x)f_p(y)\log p]E_p(x-y)dxdy$$

et, en remarquant que si φ désigne une fonction bornée on a (1)

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(y)E_p(x-y)dy \right| < C\cdot\max|\varphi|$$

(1) Cf. Zygmund, p. 110.

C étant une constante absolue, on déduira, par le même raisonnement que précédemment, que

$$(8) \qquad \int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < C\sum_0^{n-1}{}' M_p\sqrt{\log p}\int_0^{2\pi}|\Delta[f_p(x)\sqrt{\log p}]|dx + \int_0^{2\pi} f_n^2(x)\log n.$$

3. 3. — Enfin, on peut trouver une limitation d'un autre genre pour l'intégrale considérée, en appliquant deux fois la transformation d'Abel au second membre de (5). Nous avons :

$$\pi\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha = \sum_0^{n-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^2[f_p(x)f_p(y)](p+1)K_p(x-y)dxdy + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta[f_{n-1}(x)f_{n-1}(y)]nK_{n-1}(x-y)dxdy + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(x)f_n(y)D_n(x-y)dxdy.$$

Nous savons déjà que la dernière intégrale est positive et inférieure à $\pi\int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx$. D'autre part :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta[f_{n-1}(x)f_{n-1}(y)]nK_{n-1}(x-y)dxdy =$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(y)\Delta f_{n-1}(x)nK_{n-1}(x-y)dxdy - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta f_{n-1}(x)\Delta f_{n-1}(y)nK_{n-1}(x-y)dxdy$$
$$< 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(y)\Delta f_{n-1}(x)nK_{n-1}(x-y)dxdy.$$

Donc :

$$\pi\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < \sum_0^{n-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^2[f_p(x)f_p(y)](p+1)K_p(x-y)dxdy + 2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(y)\Delta f_{n-1}(x)nK_{n-1}(x-y)dxdy + \pi\int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx.$$

Remarquons maintenant que

$$\Delta^2[f_p(x)f_p(y)] = f_{p+1}(x)\Delta^2 f_p(y) + f_{p+1}(y)\Delta^2 f_p(x) + \Delta f_p(x)\Delta f_p(y) + \Delta f_{p+1}(x)\Delta f_{p+1}(y)$$

et remplaçons dans les intégrales où elles figurent, les différences secondes par les valeurs ainsi trouvées.

Nous avons

$$\int_0^{2\pi} \Delta^2 f_p(x)dx \int_0^{2\pi} f_{p+1}(y)(p+1)K_p(x-y)dy$$
$$= \pi(p+1)\int_0^{2\pi} \Delta^2 f_p(x)dx \cdot \sigma_p[f_{p+1}(x)]$$

$\sigma_p\ [f_{p+1}]$ désignant la somme de Féjer d'ordre p de la série de Fourier de f_{p+1}. Donc $|\sigma_p[f_{p+1}]| \leqslant M_{p+1} \leqslant M$, d'où

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{p+1}(y)\Delta^2 f_p(x)(p+1)K_p(x-y)dxdy\right|$$
$$< \pi M(p+1)\int_0^{2\pi} |\,\Delta^2 f_p(x)\,|\,dx$$

et, de même

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{n-1}(y)\Delta f_{n-1}(x)nK_{n-1}(x-y)dxdy\right| < \pi Mn\int_0^{2\pi} |\,\Delta f_{n-1}(x)\,|\,dx$$

D'autre part, en adoptant les notations de (6), on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta f_p(x)\Delta f_p(y)K_p(x-y)dxdy =$$

$$= \pi^2\,\frac{(p+1)\,\dfrac{a_0^2}{2} + p(a_1^2+b_1^2) + \cdots + (a_p^2+b_p^2)}{p+1} < \pi\int_0^{2\pi} [\Delta f_p(x)]^2 dx.$$

Nous avons donc :

$$\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < 2\,M\sum_0^{n-2}(p+1)\int_0^{2\pi} |\,\Delta^2 f_p(x)\,|\,dx$$
$$+\sum_0^{n-2}\int_0^{2\pi}(p+1)[\Delta f_p(x)]^2dx + \sum_0^{n-2}\int_0^{2\pi}(p+1)[\Delta f_{p+1}(x)]^2dx$$
$$+\,2\,Mn\int_0^{2\pi} |\,\Delta f_{n-1}(x)\,|\,dx + \int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx.$$

Nous avons maintenant

$$\sum_0^{n-2}(p+1)[\Delta f_{p+1}(x)]^2 = \sum_1^{n-1} p[\Delta f_p(x)]^2$$

donc

$$\sum_0^{n-2} (p+1)[\Delta f_p(x)]^2 + \sum_0^{n-2} (p+1)[\Delta f_{p+1}(x)]^2 < 2 \sum_0^{n-1} (p+1)[\Delta f_p(x)]^2$$

or

$$\sum_0^{n-1} (p+1)[\Delta f_p(x)]^2 = \sum_0^{n-2} [\Delta^2 f_p(x) \sum_0^{p} (k+1)\Delta f_k(x)] + \Delta f_{n-1}(x) \sum_0^{n-1} (k+1)\Delta f_k(x).$$

Mais

$$\left| \sum_0^{p} (k+1)\Delta f_k(x) \right| = | f_0 + f_1 + \cdots + f_p - (p+1) f_{p+1} | < 2(p+1)\mathrm{M}$$

donc

$$\sum_0^{n-1} (p+1)[\Delta f_p(x)]^2 < 2\mathrm{M} \sum_0^{n-2} (p+1) \, | \Delta^2 f_p(x) | + 2\mathrm{M}n \, | \Delta f_{n-1}(x) |$$

d'où finalement :

$$\text{(9)} \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{S}_n^2(\alpha) d\alpha < 6\mathrm{M} \sum_0^{n-2} (p+1) \int_0^{2\pi} | \Delta^2 f_p(x) | \, dx + 6\mathrm{M} \int_0^{2\pi} n \, | \Delta f_{n-1}(x) | \, dx + \int_0^{2\pi} f_n^2(x) dx.$$

4. — Les inégalités (7), (8), (9) conduisent respectivement aux résultats suivants :

1° Si la série

$$\sum \mathrm{M}_n \log n \int_0^{2\pi} | \Delta f_n(x) | \, dx$$

converge, la série (S) est la série de Fourier d'une fonction de carré sommable $\mathrm{S}(\alpha)$ et on a

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{S}^2(\alpha) d\alpha < \mathrm{C} \sum \mathrm{M}_n \log n \int_0^{2\pi} | \Delta f_n(x) | \, dx + 2\pi \mathrm{M}^2.$$

2° Il en est de même si la série

$$\sum \mathrm{M}_n \sqrt{\log n} \int_0^{2\pi} \left| \Delta\left(f_n(x) \sqrt{\log n}\right) \right| dx$$

converge et si $\log n \int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx$ est bornée ; cela aura lieu, en particulier si $M_n \sqrt{\log n}$ reste bornée, et si les fonctions $\sqrt{\log n}\, f_n(x)$ sont positives et forment une suite décroissante quand n croît, quel que soit x.

3° Si la suite de fonctions $\{ f_i \}$ est positive, décroissante, et convexe quel que soit x, $S(\alpha)$ est encore la série de Fourier d'une fonction de carré sommable. L'on a en effet, d'après (9) :

$$\int_0^{2\pi} S_n^2(\alpha)d\alpha < 6M \sum_0^{n-2} (p+1)\Delta^2 \int_0^{2\pi} f_p(x)dx + 6Mn\Delta \int_0^{2\pi} f_{n-1}(x)dx + \int_0^{2\pi} f_n^2(x)dx.$$

Or la suite $\left\{ \int_0^{2\pi} f_i(x)dx \right\}$ est positive, décroissante, et convexe, et on sait que dans ces conditions

$$\sum_0^{\infty}(p+1)\Delta^2 \int_0^{2\pi} f_p(x)dx = \int_0^{2\pi} f_0(x)dx - \lim \int_0^{2\pi} f_n(x)dx$$

et

$$\lim_{n=\infty} \cdot n\Delta \int_0^{2\pi} f_{n-1}(x)dx = 0.$$

L'on a, dans ce cas

$$\int_0^{2\pi} S^2(\alpha)d\alpha \leqslant 6M \int_0^{2\pi} f_0(x)dx - 5M \lim \int_0^{2\pi} f_n(x)dx. \tag{10}$$

Si la suite $\{ f_i \}$ est *limitée* au n^e terme, ce résultat est encore valable, à la condition que cette suite, *complétée par deux zéros*, soit elle-même convexe. Sans quoi, il faudrait tenir compte du terme $n\Delta \int_0^{2\pi} f_{n-1}(x)dx$.

5. — L'intérêt du problème que nous venons d'étudier dans les deux paragraphes précédents réside surtout dans le fait suivant. Considérons une fonction $F(x)$ sommable, dont les coefficients de Fourier d'ordre n sont a_n, b_n, et désignons par $S_n(x)$ sa somme de Fourier d'ordre n. Désignons par $n(x)$ une fonction de x ne prenant que des valeurs entières positives, comprises entre 0 et n. On sait (1) que l'étude de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \mathrm{S}_{n(x)}(x)dx$$

joue un rôle primordial dans l'étude de la convergence presque partout de la série de Fourier de F. Mais on voit immédiatement que l'on a

$$(11)\quad \int_0^{2\pi} \mathrm{S}_{n(x)}(x)dx = \int_0^{2\pi} f_0(x)\ \frac{a_0}{2}\ dx + \sum_1^n \int_0^{2\pi} f_p(x)(a_p \cos px + b_p \sin px)dx$$

les f_i étant des fonctions caractéristiques d'ensembles E_i de $(0, 2\pi)$ tels que

$$\mathrm{E}_0 \supset \mathrm{E}_1 \supset \cdots \supset \mathrm{E}_n.$$

Or on a

$$\mathrm{I}^2 < \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_p^2 + b_p^2)\right]\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} f_0(x)dx\right)^2 + \right. \\ \left. + \sum_1^n \left(\int_0^{2\pi} f_p(x) \cos p(x)dx\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} f_p(x) \sin pxdx\right)^2\right].$$

Donc, la question non encore résolue de savoir si I *est bornée quelle que soit la fonction* F *de carré sommable, revient à celle-ci : l'intégrale* $\int_0^{2\pi} \mathrm{S}_n^2(x)dx$ *que nous avons cherché à limiter est-elle bornée pour toute suite* $\{ f_i \}$ *de fonctions caractéristiques d'ensembles tels que* $\mathrm{E}_i \supset \mathrm{E}_{i+1}$, *et cela indépendamment de la suite considérée ?*

Le théorème de Kolmogoroff et Seliverstoff, qui montre que I est bornée, si $\Sigma(a_n^2 + b_n^2) \log n$ converge est, comme on le voit immédiatement, une conséquence de l'égalité (11) et de l'inégalité (8). Il suffit, comme nous venons de le faire, d'appliquer l'inégalité de Schwartz, mais après avoir multiplié les a_n et b_n par $\sqrt{\log n}$ et avoir divisé $f_n(x)$ par $\sqrt{\log n}$.

(1) Cf. ZYGMUND, p. 253.

6. — Pour donner, dans le même ordre d'idées, une application de l'inégalité (10), considérons un procédé de sommation quelconque appliqué à la série de Fourier de $F(x)$, soit

$$\xi_p(x) = \lambda_0^p A_0 + \lambda_1^p A_1 + \cdots + \lambda_p^p A_p \qquad (\lambda_i^p > 0, \quad \lambda_0^p = 1)$$

où nous avons posé, pour simplifier

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_p = a_p \cos px + b_p \sin px.$$

Considérons l'intégrale

$$J = \int_0^{2\pi} \xi_{n(x)}(x)dx$$

elle peut s'écrire, si $n(x) \leqslant n$

$$J = \int_0^{2\pi} [\varphi_0(x)\xi_0(x) + \varphi_1(x)\xi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)\xi_n(x)]dx$$

les φ_i étant des fonctions caractéristiques d'ensemble $\mathcal{E}_i$, *non empiétants*. On a donc

$$(12) \quad J = \int_0^{2\pi} [(\lambda_0^0\varphi_0 + \lambda_0^1\varphi_1 + \cdots + \lambda_0^n\varphi_n)A_0 + \cdots + \\ + (\lambda_p^p\varphi_p + \lambda_p^{p+1}\varphi_{p+1} + \cdots + \lambda_p^n\varphi_n)A_p + \cdots + \lambda_n^n\varphi_n A_n]dx.$$

Posons

$$f_p = \lambda_p^p\varphi_p + \lambda_p^{p+1}\varphi_{p+1} + \cdots + \lambda_p^n\varphi_n \qquad 0 \leqslant p \leqslant n$$

$$\text{si} \quad \lambda_p^q > \lambda_{p+1}^q, \quad \text{on a} \quad f_p > f_{p+1}.$$

D'autre part

$$\Delta f_p = \varphi_p\lambda_p^p + \varphi_{p+1}\left(\lambda_p^{p+1} - \lambda_{p+1}^{p+1}\right) + \cdots + \varphi_n\left(\lambda_p^n - \lambda_{p+1}^n\right).$$

Si donc, pour chaque valeur des indices on a

$$\lambda_p^q - \lambda_{p+1}^q > \lambda_{p+1}^q - \lambda_{p+2}^q$$

on a $\Delta f_p > \Delta f_{p+1}$.

En d'autres termes supposons que la suite

$$\lambda_0^p, \lambda_1^p \cdots \lambda_p^p, 0, 0$$

soit décroissante et convexe quel que soit p. Alors la suite $\{f_i\}$, complétée par deux zéros est décroissante et convexe, l'inégalité

(10) est valable et donne, en appliquant à (12) l'inégalité de Schwarz :

$$J^2 < \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_p^2 + b_p^2)\right) \cdot \pi.6M \int_0^{2\pi} f_0(x)dx$$

or

$$f_0 = \lambda_0^0\varphi_0 + \lambda_0^1\varphi_1 + \cdots + \lambda_0^n\varphi_n = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n \leqslant 1$$

donc, dans les hypothèses considérées :

$$\left|\int_0^{2\pi} \xi_{n(x)}(x)dx\right| < C\left(\int_0^{2\pi} F^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

C étant une constante absolue.

On en déduit, pour toute fonction de carré sommable, la convergence presque partout du procédé de sommation considéré, et même l'intégrabilité de la fonction : Sup $|\xi_n(x)|$.

III

7. — Revenons maintenant au problème de la généralisation du procédé de sommation de Poisson, considéré dans la partie (I) de ce chapitre.

Les fonctions ψ_i auront la même signification que dans (I) ; par $f(x)$ nous désignerons une fonction *bornée*, dont les coefficients de Fourier seront a_n, b_n.

Nous supposerons $\psi_n(r) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)$. On sait alors que la série

$$\frac{a_0}{2}\psi_0(r) + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\psi_n(r)$$

converge pour presque toute valeur de x vers une fonction $F(r,x)$ et l'on a, comme dans (1), presque partout

$$F(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2}\psi_0(r) + \psi_1(r)\cos(x-\alpha) + \cdots\right]d\alpha.$$

Supposons maintenant que r soit une fonction déterminée de x que nous désignerons par r_x. Nous supposerons $r_x \leqslant \rho < 1$. Nous allons montrer que l'intégrale $\int_0^{2\pi} F(r_x, x)dx$ est bien déterminée. En effet l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \left| \frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \psi_1(r_x)\cos(x-\alpha) + \cdots \right|$$

qui est égale à

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \left(\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \psi_1(r_x)\cos(x-\alpha) + \cdots \right) = \pi\psi_0(r_x) = \pi$$

(puisque nous avons supposé $\psi_0(r)$ constant et égal à 1) est bien définie. L'intégrale double

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha dx \left| \frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \psi_1(r_x)\cos(x-\alpha) + \cdots \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \left| \frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \cdots \right|$$

existe donc, et puisque $f(\alpha)$ est bornée, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha dx f(\alpha) \left(\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \psi_1(r_x)\cos(x-\alpha) + \cdots \right)$$

existe donc. Ceci prouve que l'intégrale $\int_0^{2\pi} F(r_x, x)\, dx$ a une valeur bien déterminée.

Nous allons limiter supérieurement sa valeur absolue. On a

$$\int_0^{2\pi} F(r_x, x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \cdots \right] dx$$

or l'intégrale

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \psi_1(r_x)\cos(x-\alpha) + \cdots \right] dx$$

représente une fonction sommable de α. (Cela résulte du même raisonnement que précédemment où il n'y a qu'à supposer $f = 1$. Soient A_n, B_n les coefficients de Fourier de $\Phi(\alpha)$:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \cdots \right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \cos n\alpha \left[\frac{1}{2}\psi_0(r_x) + \cdots \right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx \pi\psi_n(r_x)\cos nx$$

Donc

$$A_n = \int_0^{2\pi} \psi_n(r_x) \cos nx dx \quad B_n = \int_0^{2\pi} \psi_n(r_x) \sin nx dx$$

$$A_0 = \int_0^{2\pi} \psi_0(r_x) dx = 2\pi.$$

Nous allons montrer maintenant que $\Phi(\alpha)$ est de carré sommable. Ceci résulte immédiatement de la convergence de $\Sigma(A_n^2 + B_n^2)$, convergence assurée, comme il a été démontré au § 4 ci-dessus par le fait que la suite $\{\psi_n(r_x)\}$ est positive, décroissante, convexe.

On déduit de tout ce qui précède que

$$\left| \int_0^{2\pi} F(r_x, x) dx \right| < C \left(\int_0^{2\pi} f^2(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{2}},$$

C étant une constante absolue.

Remarquons que la limitation trouvée vaut aussi bien, avec un choix convenable de la constante, pour $\int_0^{2\pi} | F(r_x, x) | dx$ car il n'y a rien à changer à la démonstration si on multiplie F par une fonction $\varphi(x)$ bornée.

Cela posé supposons

$$r_0 < r_x < r_1 < 1.$$

Nous allons montrer que si r_0 est assez voisin de 1, l'intégrale $\int_0^{2\pi} | F(r_x, x) - f(x) | dx$ est arbitrairement petite.

Posons, en effet

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

avec

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_p \cos px + b_p \sin px), \qquad f_2(x) \sim \sum_{n+1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

et formons avec f_1 et f_2 les fonctions $F_1(r_x, x)$ et $F_2(r_x, x)$. On a d'abord

$$\int_0^{2\pi} |F_2(r_x,x) - f_2(x)| dx < \int_0^{2\pi} |F_2(r_x,x)| dx + \int_0^{2\pi} |f_2(x)| dx$$

$$< A \left[\sum_{n+1}^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

A étant une constante absolue ; donc, en prenant n assez grand l'intégrale considérée est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$.

n étant ainsi fixé, on a

$$F_1(r_x,x) - f_1(x) = \sum_1^n (a_p \cos px + b_p \sin px) \, [\psi_p(r_x) - 1]$$

or si r_0 est assez voisin de 1 chacun des termes de cette somme est aussi petit que l'on veut. Le nombre de termes étant fini, on peut prendre r_0 assez voisin de 1 pour que $|F_1(r_x,x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$. Alors

$$\int_0^{2\pi} |F(r_x,x) - f(x)| dx < \int_0^{2\pi} |F_1 - f_1| dx + \int_0^{2\pi} |F_2 - f_2| dx < \varepsilon.$$

De ce résultat on déduit, par un raisonnement classique, que dans les hypothèses faites, $F(r,x) - f(x)$ tend vers zéro presque partout pour $r \to 1$.

D'où la proposition annoncée à la fin de la partie (I) de ce chapitre : Si $f(x) \sim \Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est bornée, on a, presque partout

$$\lim_{s \to 0} \sum \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{1 + s\sqrt{\log n}} = f(x).$$

M. Kawata [1] a généralisé ce résultat en montrant qu'il s'applique non seulement aux fonctions bornées, mais également aux fonctions de carré sommable.

D'autre part, MM. Izumi et Kawata [2] ont démontré aussi que si $f^p(x)$ est sommable, $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, on a presque partout

$$\lim_{s \to 0} \sum \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{1 + s(\log n)^{1/p}} = f(x).$$

Nous renverrons, pour les démonstrations, aux mémoires de ces auteurs.

---

(1) *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13 (1937), p. 381-384.
(2) *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13 (1937), p. 388-391.

CHAPITRE VIII

LES SOMMES PARTIELLES DES SÉRIES DE FOURIER [1]

1. — On connaît les difficultés auxquelles se heurte l'étude du comportement des sommes partielles des séries de Fourier. En particulier, pour les fonctions de carré sommable, on ne sait pas si leurs développements de Fourier convergent « presque partout » ou si, au contraire, il est possible de trouver une fonction de carré sommable dont la série de Fourier diverge sur un ensemble de mesure positive.

Nous désignerons dans ce qui suit par $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n du développement de Fourier d'une fonction sommable f et par a_n, b_n, ses coefficients de Fourier.

Nous dirons que $\{ n_k \}$ est une suite d'indices de convergence pour f si $S_{n_k}(f)$ converge presque partout pour $k = \infty$.

Rappelons deux importants résultats bien connus [2] :

a) Si f est de carré sommable, toute suite $\{ n_k \}$ telle que

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1,$$

est une suite d'indices de convergence (Kolmogoroff).

b) Si f est telle que $\Sigma(a_n^2 + b_n^2) \log n$ converge, la suite naturelle des entiers est une suite d'indices de convergence ; en d'autres termes le développement de Fourier de f converge presque partout (Kolmogoroff et Seliverstoff).

2. — Il est naturel de se demander ce qui se passe entre ces deux cas extrêmes ; c'est-à-dire quand f est telle que $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\omega(n)$

---

[1] *Comptes Rendus*, t. 207 (1938), p. 469 ; *Comptes Rendus*, t. 208 (1939), p. 70 ; *Comptes Rendus*, t. 206 (1938), p. 226.

[2] Cf. ZYGMUND, p. 251 et sq.

converge, $\omega(n)$ étant une fonction infiniment croissante et croissant moins vite que $\log n$. Nous allons montrer que $\omega(n)$ étant donné, on peut déterminer une suite d'indices de convergence, dépendant de $\omega(n)$ seulement et non de la fonction f considérée.

Suivant la méthode employée par Kolmogoroff et Seliverstoff dans l'étude du cas (b) ci-dessus, nous allons faire l'étude de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} S_{n(x)}(f)dx$$

$n(x)$ étant variable avec x et au plus égal à n.

3. — Posons, pour simplifier

$$A_p = a_p \cos px + b_p \sin px \qquad (a_0 = 0)$$

et désignons par $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$... $\psi_n(x)$, une suite de fonctions caractéristiques d'ensembles telle que $\psi_i \geqslant \psi_{i+1}$. On a

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_1^n \psi_p A_p \cdot dx$$

la suite $\{ \psi_i \}$ étant déterminée par la fonction $n(x)$.

La série $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\omega(n)$ étant convergente, désignons par $F(x)$ la fonction de carré sommable dont la série de Fourier est $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\sqrt{\omega(n)}$. Nous avons, par application de la transformation d'Abel :

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_1^n \frac{\psi_p}{\sqrt{\omega(p)}} A_p \sqrt{\omega(p)} \cdot dx = \int_0^{2\pi} \sum_1^n \Delta\left(\frac{\psi_p}{\sqrt{\omega(p)}}\right) S_p(F) \cdot dx$$

(où Δu_p désigne la différence $u_p - u_{p+1}$, et $\Delta u_n = u_n$ si u_n est le dernier terme de la suite $\{ u_n \}$). On a

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_1^n \frac{\Delta\psi_p \cdot S_p(F)}{\sqrt{\omega(p)}} dx + \sum_1^n \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\omega(p)}}\right) \int_0^{2\pi} \psi_{p+1} S_p(F)dx.$$

On voit immédiatement que la dernière somme est inférieure, en valeur, absolue à $\left(\frac{2\pi}{\omega(1)} \int_0^{2\pi} F^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Occupons-nous de la première intégrale que nous écrirons :

$$J = \int_0^{2\pi} F \cdot \left(\sum_1^n \frac{S_p(\Delta\psi_p)}{\sqrt{\omega(p)}} \right) dx.$$

On a

$$J^2 < \int_0^{2\pi} F^2 dx \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{S_1(\Delta\psi_1)}{\sqrt{\omega(1)}} + \cdots + \frac{S_n(\Delta\psi_n)}{\sqrt{\omega(n)}} \right]^2 dx.$$

Etudions la dernière intégrale. En développant le carré, on a

$$\int_0^{2\pi} \sum_1^n \frac{[S_p(\Delta\psi_p)]^2}{\omega(p)} dx + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{p<q} \frac{S_p(\Delta\psi_p) S_q(\Delta\psi_q)}{\sqrt{\omega(p)\omega(q)}} dx$$

or on a

$$\sum_1^n \int_0^{2\pi} \frac{[S_p(\Delta\psi_p)]^2}{\omega(p)} dx < \sum_1^n \int_0^{2\pi} \frac{(\Delta\psi_p)^2}{\omega(p)} dx < \frac{1}{\omega(1)} \int_0^{2\pi} \psi_1 dx < \frac{2\pi}{\omega(1)}$$

en se rappelant que $\{ \psi_i \}$ est une suite décroissante de fonctions caractéristiques d'ensembles.

D'autre part :

$$\sum_{q=p+1}^{q=n} \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta\psi_p) \cdot S_q(\Delta\psi_q)}{\sqrt{\omega(p)\omega(q)}} dx = \sum_{q=p+1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta\psi_p) \cdot \Delta\psi_q}{\sqrt{\omega(p)\omega(q)}} dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta\psi_p)}{\sqrt{\omega(p)}} \left[\sum_{q=p+1}^{n} \frac{\Delta\psi_q}{\sqrt{\omega(q)}} \right] dx = \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta\psi_p)}{\omega(p)} \cdot \chi_p \cdot dx,$$

en posant :

$$\chi_p = \sqrt{\omega(p)} \left[\frac{\Delta\psi_{p+1}}{\sqrt{\omega(p+1)}} + \cdots + \frac{\Delta\psi_n}{\sqrt{\omega(n)}} \right];$$

$\chi_p(x)$ est une fonction positive, inférieure à l'unité. D'autre part :

$$(1) \qquad \sum_1^n \int_0^{2\pi} \frac{S_p(\Delta\psi_p) \cdot \chi_p}{\omega(p)} dx = \sum_1^n \int_0^{2\pi} \Delta\psi_p \cdot \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx$$

or si nous désignons par k_p, k_p' deux exposants positifs complémentaires, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_p'} = 1$, on a

$$(2) \qquad \Delta\psi_p \cdot \frac{|S_p(\chi_p)|}{\omega(p)} < \frac{1}{k_p} \frac{|S_p(\chi_p)|^{k_p}}{[\omega(p)]^{k_p}} + \frac{1}{k_p'} (\Delta\psi_p)^{k_p'}.$$

Donc

$$\left|\sum_1^n \int_0^{2\pi} \Delta\psi_p \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx\right| < \sum_1^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{k_p} \frac{|S_p(\chi_p)|^{k_p}}{[\omega(p)]^{k_p}} dx + \int_0^{2\pi} \psi_1 dx.$$

Or on sait (¹) que (si $k_p > 2$)

$$\int_0^{2\pi} |S_p(\chi_p)|^{k_p} dx < (4k_p)^{k_p} \int_0^{2\pi} (\chi_p)^{k_p} dx < 2\pi(4k_p)^{k_p}.$$

Donc finalement

$$\left|\sum_1^n \int_0^{2\pi} \Delta\psi_p \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx\right| < 2\pi \sum_1^n \frac{1}{k_p} \left[\frac{4k_p}{\omega(p)}\right]^{k_p} + 2\pi.$$

On peut choisir chaque exposant k_p de façon que chaque terme de la dernière somme soit minimum. On est ainsi conduit à prendre

$$k_p = \frac{\omega(p)}{4e}$$

et on a

$$\left|\sum_1^n \int_0^{2\pi} \Delta\psi_p \frac{S_p(\chi_p)}{\omega(p)} dx\right| < 2\pi \sum_1^n \frac{4e}{\omega(p)} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\omega(p)}{4e}} + 2\pi. \tag{3}$$

Dans cette dernière somme, — on le voit facilement en se reportant à l'intégrale du premier membre de (1) avant sa transformation par (2) — on n'a à faire entrer que les valeurs de p prises par $n(x)$ dans l'intégrale I : pour les autres, en effet, $\Delta\psi_p = 0$. D'autre part, $\omega(n)$ n'est pas définie à une constante multiplicative près.

On voit donc que si $n(x)$ ne prend que des valeurs d'une suite $\{n_k\}$ telle que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} \left(\frac{1}{A}\right)^{\omega(n_k)}$$

converge, A étant une constante positive, d'ailleurs aussi grande qu'on voudra, le premier membre de (3) restera borné, et l'on aura finalement

$$I < C\left(\int_0^{2\pi} F^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(¹) Cf. Zygmund, p. 153.

C étant une constante dépendant de $\omega(n)$ mais pas de f. Le raisonnement désormais classique de Kolmogoroff et Seliverstoff montre alors que la suite $\{ S_{n_k}(x) \}$ converge presque partout.

D'où le théorème suivant :

Si la série $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\omega(n)$ *converge, on obtient une suite* $\{ n_k \}$ *d'indices de convergence pour la série de Fourier de* f, *en prenant une suite d'entiers* $\{ n_k \}$ *telle que l'on ait*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{-\omega(n_k)} < \infty \tag{4}$$

A *étant une constante aussi grande qu'on voudra.*

Pour $\omega(n) = \log n$ on retrouve le théorème de Kolmogoroff et Seliverstoff sur la convergence presque partout de la série.

4. — Quand la croissance de $\omega(n)$ devient assez faible (nous préciserons ce point) les résultats obtenus par la condition (4) sont dépassés par ceux que fournit la méthode très simple suivante :

Soit $\sigma_n(f)$ la somme de Féjer d'ordre n de la série de Fourier de f. On a :

$$\int_0^{2\pi} [S_n(f) - \sigma_n(f)]^2 dx = \pi \frac{\rho_1^2 + 2^2\rho_2^2 + \cdots + n^2\rho_n^2}{(n+1)^2} \qquad (\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2).$$

Considérons une suite $\{ n_k \}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^2 + 2^2\rho_2^2 + \cdots + n_k^2\rho_{n_k}^2}{n_k^2} < \infty \tag{5}$$

alors on aura

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f)]^2 dx < \infty$$

donc, aussi presque partout

$$\sum_{k=1}^{\infty} [S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f)]^2 < \infty$$

et à plus forte raison, presque partout

$$| S_{n_k}(f) - \sigma_{n_k}(f) | \to 0$$

d'où la convergence presque partout de la suite $\{ S_{n_k}(f) \}$. Remarquons que ceci ne suppose pas la fonction f de carré sommable. La condition (5) fournit, par exemple, une suite d'indices si $n\rho_n^2 \to 0$.

Supposons maintenant $\sum_1^\infty \rho_n^2 \omega(n)$ convergente. Un calcul immédiat montre alors que la condition (5) est réalisée si l'on a

$$\frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{n_{k+1}^2} + \cdots = 0\left[\frac{\omega(n_k)}{n_k^2}\right]. \tag{6}$$

Donc :

Une suite $\{ n_k \}$ *satisfaisant à la condition* (6) *constitue une suite d'indices de convergence pour toute fonction* f *telle que* $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\omega(n)$ *converge.*

On voit immédiatement que la condition (6) est toujours réalisée, même si $\omega(n) = C^{te}$, pour $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$. On retrouve donc un théorème rappelé au début de ce chapitre.

5. — Le choix des indices par la condition (6) donne de meilleurs résultats que leur choix par la condition (4) quand la croissance de $\omega(n)$ est suffisamment lente.

Précisons ce point. Pour satisfaire à la condition (6) on peut prendre

$$n_k = e^{\varphi(k)}$$

$\varphi(k)$ croissant plus rapidement que $\log k$ et moins vite que k; on peut supposer $e^{\varphi(k)}$ convexe. On a

$$\int_k^\infty e^{-2\varphi(x)}dx = \int_k^\infty \frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi'(x)} \cdot e^{-\varphi(x)}\varphi'(x)dx$$

or $\varphi' e^\varphi$ croît puisque e^φ est convexe ; donc

$$\int_k^\infty e^{-2\varphi(x)}dx < \frac{e^{-\varphi(k)}}{\varphi'(k)} \int_k^\infty e^{-\varphi(x)}\varphi'(x)dx = \frac{e^{-2\varphi(k)}}{\varphi'(k)} \cdot$$

D'autre part φ croissant moins vite que k

$$\int_k^\infty e^{-2\varphi(x)}dx > \frac{1}{\varphi'(k)} \int_k^\infty e^{-2\varphi(x)}\varphi'(x)dx = \frac{e^{-2\varphi(k)}}{2\varphi'(k)} \cdot$$

Pour satisfaire à la condition (6) on est donc conduit à prendre :

$$\omega(e^{\varphi(k)}) < \frac{C}{\varphi'(k)}$$

C étant une constante.

Posons $\omega(u) = \theta\,(\log u)$, la croissance de $\theta(x)$ étant d'ordre inférieur à celle de x. On prendra alors φ telle que

$$\theta(\varphi(k)) > \frac{C}{\varphi'(k)}$$
$$\varphi'(k)\ \theta(\varphi(k)) > C.$$

Si $\Theta(x)$ désigne la primitive $\int_0^x \theta(x)dx$ de θ, on prendra

$$\Theta[\varphi(k)] > Ck$$

ou, en ordre de grandeur

(7) $$\log \Theta[\varphi(k)] > \log k.$$

Voyons maintenant comment choisir $\varphi(k)$ pour satisfaire à la condition (4). En posant toujours $\omega(u) = \theta\,(\log u)$ il faut que $\Sigma A^{-\theta(\varphi(k))}$ converge, c'est-à-dire que l'on ait

(8) $$\theta(\varphi(k)) > \mu \log k$$

μ étant une constante.

En comparant (7) et (8) on voit que, pour que la condition (6) donne de meilleurs résultats que la condition (4) il faut que $\frac{\log \Theta\,(x)}{\theta\,(x)}$ croisse indéfiniment avec x. Or

$$\Theta(x) < x\theta(x)$$

il faut donc que

$$\theta(x) = o\,(\log x)$$

c'est-à-dire, finalement, que

$$\omega(u) = o\,(\log \log u).$$

La condition (6) donnera donc de meilleurs résultats que la condition (4) à partir du moment où la croissance de $\omega(u)$ sera d'ordre inférieur à celle de log log u.

6. — Les conditions (4) et (6) ne sont applicables qu'aux fonctions de carré sommable. Si on suppose seulement que f est sommable, on sait (1) que, pour *chaque* fonction f il existe une suite $\{ n_k \}$ d'indices de convergence, variable avec la fonction considérée.

Nous nous proposons de montrer que cette suite d'indices de convergence ne dépend, très simplement, que du module de continuité intégral de f, et nous allons déterminer la suite $\{ n_k \}$ en fonction de ce module.

Rappelons d'abord qu'étant donnée une fonction sommable f on appelle module de continuité intégral de cette fonction, $\omega(\delta)$ le maximum de $\int_0^{2\pi} | f(x+h) - f(x) | \, dx$ pour tout h tel que $0 < h \leqslant \delta$; on sait que $\omega(\delta)$ tend vers zéro avec δ.

Nous nous appuyerons sur les deux théorèmes suivants :

a) Si f est sommable et si S_n est sa somme de Fourier d'ordre n, on a, pour tout p tel que $0 < p < 1$

$$\int_0^{2\pi} | S_n(x) |^p dx < \frac{A}{\cos \frac{p\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} | f(x) | \, dx \right)^p$$

A étant une constante absolue (2).

b) L'expression

$$\theta_n(x) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

tend vers $f(x)$ en tout point où la série de Fourier de f est sommable par la méthode de Féjer, c'est-à-dire presque partout (3).

Cela posé, en conservant les notations précédentes, nous avons immédiatement :

$$\int_0^{2\pi} | S_n(x) - \theta_n(x) |^p dx$$
$$< \frac{A}{1-p} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2} f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{2} f\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \right| dx \right)^p$$

(1) Cf. Zygmund, p. 154.
(2) Cf. Zygmund, p. 150.
(3) Cf. Zygmund, p. 181.

d'où

$$\int_0^{2\pi} |S_n - \theta_n|^p dx < \frac{A}{1-p}\left[\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]^p < \frac{B}{1-p}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p$$

B étant une constante absolue.

En cherchant la valeur p_n de p qui rend minimum cette dernière quantité on trouve immédiatement

$$p_n = 1 - \frac{1}{\left|\log \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right|}$$

et

$$\int_0^{2\pi} |S_n - \theta_n|^{p_n} dx < Be\omega\left(\frac{1}{n}\right)\left|\log \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right|.$$

Soit alors une suite d'entiers $\{n_k\}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\left|\log \omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right| < \infty \tag{9}$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |S_{n_k} - \theta_{n_k}|^{p_{n_k}} dx < \infty$$

donc, aussi, presque partout

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_{n_k} - \theta_{n_k}|^{p_{n_k}} < \infty$$

et *a fortiori*

$$|S_{n_k} - \theta_{n_k}|^{p_{n_k}} \to 0$$

presque partout ; d'où en se reportant à la valeur de p_{n_k} :

$$|S_{n_k} - \theta_{n_k}| \to 0$$

et comme, presque partout, $\theta_{n_k} \to f$, la suite $\{S_{n_k}\}$ tend vers f presque partout.

D'où la proposition suivante :

Pour toute fonction sommable f, de module de continuité intégral $\omega(\delta)$, une suite d'entiers $\{n_k\}$ tels que la série $\Sigma\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\left|\log\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right|$ converge, constitue une suite d'indices de convergence.

7. — En ce qui concerne la convergence presque partout des séries de Fourier, le meilleur résultat obtenu jusqu'à présent est celui, rappelé plus haut, de Kolmogoroff et Seliverstoff.

On n'a pu, jusqu'à présent, ni l'améliorer, ni montrer qu'il ne pouvait être amélioré.

Nous nous proposons seulement de montrer ici, comment, des critères connus sur la convergence presque partout, on peut, par de très simples transformations, déduire d'autres critères intéressants.

Considérons, pour simplifier, une série trigonométrique de cosinus :

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x \cdots + a_n \cos nx + \cdots \tag{10}$$

nous ne supposerons pas que cette série soit une série de Fourier ; nous supposerons seulement que a_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ (ce qui, comme on le sait, est une condition *nécessaire* pour la convergence sur un ensemble de mesure positive).

En appliquant la transformation d'Abel, on voit immédiatement que, si l'on fait exception pour les points congrus à zéro, la série (10) et la série :

$$(a_0 - a_1) \sin \frac{x}{2} + (a_1 - a_2) \sin \frac{3x}{2} + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \cdots \tag{11}$$

convergent ou divergent aux mêmes points.

Donc tout critère assurant la convergence presque partout de la série (11) assurera la convergence presque partout de la série (10).

D'autre part, si la série (10) est la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, on voit immédiatement que la série (11) est la série de Fourier de la fonction $2f(x) \sin \frac{x}{2}$.

Nous en déduisons que :

1° *Si la série* (10) *est une série de Fourier, la condition*

$$|a_0 - a_1| + 3|a_1 - a_2| + \cdots + (2n+1)\,|a_n - a_{n+1}| = o(n)$$

(qui assure, comme on le sait [1], la convergence presque partout de la série (11)) est une condition suffisante pour la convergence presque partout de la série (10).

---

[1] Cf. ZYGMUND, p. 43.

Cette condition peut évidemment s'écrire

$$|a_0 - a_1| + 2|a_1 - a_2| + \cdots + n|a_{n-1} - a_n| = o(n) \,;$$

ou encore, comme

$$n|a_{n-1} - a_n| < |(n-1)a_{n-1} - na_n| + |a_{n-1}|$$

on peut l'écrire aussi

$$|a_1 - 2a_2| + \cdots + |\overline{n-1}a_{n-1} - na_n| = o(n).$$

On voit alors qu'elle est réalisée, en particulier, si les a_n sont positifs et que na_n croît avec n (toujours à condition que la série (10) soit une série de Fourier).

2° Sans supposer que la série (10) soit une série de Fourier, et sous la seule hypothèse $a_n \to 0$, l'application du théorème de Kolmogoroff et Seliverstoff à la série (11) montre que la série (10) converge presque partout si la série

$$\sum (a_n - a_{n+1})^2 \log n \tag{12}$$

converge.

Les séries de sinus conduisent aux mêmes résultats.

On voit que la méthode qui nous a servi est générale, et que d'autres résultats du même genre peuvent être obtenus en employant, au lieu du facteur $2 \sin \frac{x}{2}$ qui nous a servi à passer de la série (10) à la série (11) toute autre fonction convenablement choisie pour assurer l'équiconvergence ; on pourra, en particulier, faire intervenir, au lieu des différences premières des coefficients, les différences secondes, troisièmes, etc.

Sans nous arrêter à ces généralisations, examinons d'un peu plus près la condition donnée par la convergence de la série (12). Considérons la série trigonométrique générale

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum \rho_n \cos (nx - \alpha_n) \tag{13}$$

où nous supposons

$$\lim \rho_n = 0.$$

Cette série convergera presque partout si

$$\sum \left[(a_n - a_{n+1})^2 + (b_n - b_{n+1})^2 \right] \log n < \infty$$

ou, ce qui revient au même, si les séries

$$\sum (\rho_n - \rho_{n+1})^2 \log n, \qquad \sum \rho_n^2 (\alpha_n - \alpha_{n+1})^2 \log n$$

convergent.

Grossièrement parlant, la convergence presque partout est assurée quand les amplitudes et les phases varient « peu » d'un terme à l'autre.

Si M_n représente dans le plan Oxy le point de coordonnées a_n, b_n, le théorème de Kolmogoroff et Seliverstoff assure la convergence presque partout de la série (13) si $\Sigma \overline{OM}_n^2 \log n$ converge ; la condition que nous venons d'énoncer assure la convergence presque partout si $\Sigma \overline{M_n M_{n+1}}^2 \log n$ converge, à condition que M_n tende vers O.

CHAPITRE IX

LA DIVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES SUR DES ENSEMBLES AYANT LA PUISSANCE DU CONTINU [1]

1. — On connaît depuis longtemps l'existence de fonctions continues dont le développement de Fourier diverge sur un ensemble de points ayant la puissance du continu (mais de mesure nulle). D'autre part, Kolmogoroff a montré l'existence de fonctions sommables (mais de carré non sommable) dont le développement de Fourier diverge partout [2]. Enfin Steinhaus [3], Wilton [4], Kuzmin [5] ont fait connaître des séries trigonométriques fort simples, à coefficients tendant vers zéro, et qui sont partout divergentes, mais qui ne sont pas des développements de Fourier.

Nous allons étudier ici le problème d'un point de vue différent, en considérant, dans la série trigonométrique :

$$\sum_{1}^{\infty} r_n e^{2\pi i(nx - s_n)} \qquad (0 \leqslant x < 1) \tag{1}$$

les $r \geqslant 0$ comme *donnés*. Nous allons montrer qu'on peut toujours (en supposant, bien entendu, la divergence de Σr_n) déterminer très simplement les s_n de façon que la série (1) diverge sur un ensemble ayant la puissance du continu. Cet ensemble sera même de deuxième catégorie au sens de Baire. Nous poserons ensuite la question de la mesure de cet ensemble.

Nous utiliserons, pour la détermination des s_n, la théorie des approximations Diophantiennes.

---

(1) *Comptes Rendus*, t. 205 (1937), p. 382 ; *Comptes Rendus*, t. 209 (1939), p. 748.

(2) Cf. ZYGMUND, chapitre VIII.

(3) *Journ. London Math. Soc.*, 4 (1929), p. 86-88.

(4) *Journ. London Math. Soc.*, 9 (1934), pp. 194-201 et 247-254.

(5) *Trans. Leningrad Industr. Inst. Sect. Phys. Math.*, N° 10, p. 53-56.

2. — Soit $\varphi(\nu)$ une fonction positive infiniment croissante, définie pour $\nu \geqslant 0$, entière pour ν entier. Posons

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

où les u sont déterminés de la façon suivante : les $\varphi(0)$ premiers u sont nuls ; les $\varphi(1)$ suivants égaux à $\frac{0}{1}$; les $\varphi(2)$ suivants à $\frac{1}{1}$; les $\varphi(3)$ suivants à $\frac{0}{2}$; les $\varphi(4)$ suivants à $\frac{1}{2}$; les $\varphi(5)$ suivants à $\frac{2}{2}$; et ainsi de suite en considérant toutes les fractions $\frac{p}{q}$ $(0 \leqslant p \leqslant q)$; la fraction $\frac{p}{q}$ sera donc répétée $\varphi\left(\frac{q(q+1)}{2} + p\right)$ fois ; de plus, elle apparaîtra pour la première fois dans la suite des u au rang

$$n + 1 = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi\left(\frac{q(q+1)}{2} + p - 1\right) + 1.$$

Considérons alors la somme partielle de la série (1) depuis le rang $n + 1$ jusqu'au rang $n+\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]$ inclusivement. Cette somme s'écrit

$$\sigma = \sum_{k=1}^{k=\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p\right]} r_{n+k} e^{2\pi i\left[(n+k)x - s_n - k\frac{p}{q}\right]}$$

ou encore

$$\sigma = e^{2\pi i(nx - s_n)} \sum_{k=1}^{k=\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p\right]} r_{n+k} e^{2\pi i k\left(x - \frac{p}{q}\right)}.$$

Supposons que l'on ait

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{8\varphi\left[\frac{q(q+3)}{2}\right]} \tag{2}$$

alors

$$2\pi k \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\pi}{4} \frac{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]}{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + q\right]} \leqq \frac{\pi}{4}$$

d'où immédiatement, tous les termes de la dernière sommation ayant leurs parties réelles positives et supérieures à $\frac{r_{n+k}}{\sqrt{2}}$,

$$|\sigma| > \frac{1}{\sqrt{2}}\left[r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots + r_{n+\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p\right]}\right].$$

Or la série Σr_n étant supposée divergente, il existe une fonction $\psi(n)$ qu'on peut supposer croissante, et telle que

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots + r_{n+\psi(n)} > 1.$$

Choisissons φ de façon que

$$\varphi(\nu) \geqq \psi[\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(\nu - 1)]. \tag{3}$$

Nous aurons alors

$$\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right] \geqq \psi(n)$$

et $|\sigma| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour tout x satisfaisant à (2).

Donc si x est une irrationnelle satisfaisant à l'inégalité (2) pour une infinité de valeurs de q (φ étant choisi par l'inégalité (3)) la série (1) divergera au point x. Comme seules les grandes valeurs de q sont intéressantes on peut remplacer l'inégalité (2) par

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{8\varphi(q^2)} \tag{4}$$

et énoncer la proposition suivante :

$\psi(n)$ étant déterminée par la condition

$$r_{n+1} + \cdots + r_{n+\psi(n)} > 1$$

et $\varphi(\nu)$ par la condition (3), *la série donnée divergera en tout point x admettant l'approximation* (4) *par les nombres rationnels.*

Or l'ensemble des points x satisfaisant à l'inégalité (4) pour une infinité de valeurs de q est complémentaire d'un ensemble de première catégorie. C'est, au sens de M. Denjoy, un « Résiduel ». On sait qu'un Résiduel est de deuxième catégorie ; il est partout dense, et a la puissance du continu [1].

---

[1] Cf. Denjoy, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1915 (I), p. 151 ; Hobson, *The Theory of functions of a real variable*, Vol. I, 3e édit. (Cambridge, 1927), p. 135-137.

Il est remarquable que l'on puisse toujours arriver au résultat ci-dessus quelque lente que soit la divergence de Σr_n, quelque régulière que soit la décroissance des r_n ; la détermination des s_n est toujours possible.

En d'autres termes, il est impossible de formuler une condition (autre que la converge absolue) ne mettant en jeu que la valeur des coefficients r_n d'une série trigonométrique $\Sigma r_n \cos(nx - \alpha_n)$, et assurant la convergence, sauf sur un ensemble de première catégorie.

3. — Occupons-nous maintenant de la *mesure* de l'ensemble de divergence obtenu. On sait, d'après un raisonnement classique de Borel, que si l'intégrale $\int^{\infty} \frac{qdq}{\varphi(q^2)}$ converge, l'ensemble des points x admettant l'approximation (4) est de mesure nulle. Inversement, d'après un théorème de Khintchine, si l'intégrale $\int^{\infty} \frac{qdq}{\varphi(q^2)}$ diverge, la mesure de cet ensemble est égale à l'unité [1].

Donc la mesure de l'ensemble de divergence, que nous désignerons par E, est zéro, ou l'unité suivant que l'intégrale $\int^{\infty} \frac{d\nu}{\varphi(\nu)}$ converge ou diverge.

On voit tout de suite très facilement que si Σr_n^2 converge, l'intégrale $\int^{\infty} \frac{d\nu}{\varphi(\nu)}$ converge forcément, donc mes $\mathrm{E} = 0$.

En effet, on a, en conservant les notations précédentes

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \cdots + r_{n+\psi(n)} > 1$$

avec

$$\psi(n) \leqslant \varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]$$

donc

$$1 < \varphi\left[\frac{q(g+1)}{2} + p\right] (r_{n+1}^2 + \cdots + r_{n+\psi(n)}^2).$$

Si on somme les inégalités analogues pour toutes les fractions $\frac{p}{q}$ on a

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{p=q} \frac{1}{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2} + p\right]} < \infty$$

(1) Khintchine, *Math. Annalen*, 92 (1924), p. 115-125.

or

$$\sum_{p=0}^{p=q} \frac{1}{\varphi\left[\frac{q(q+1)}{2}+p\right]} > \frac{q+1}{\varphi\left[\frac{q(q+3)}{2}\right]} > \frac{q}{\varphi(q^2)} \qquad (q \geqslant 3)$$

donc la série $\sum_0^\infty \frac{q}{\varphi(q^2)}$ converge, ce qui revient à la proposition énoncée.

Par contre, si l'intégrale $\int^\infty \frac{d\nu}{\psi^2(n)}$ diverge, on peut montrer que mes E $= 1$.

Posons en effet

$$F(\nu) = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(\nu)$$

on a, d'après (3)

$$F(\nu) - F(\nu - 1) = \psi[F(\nu - 1)].$$

(Nous pouvons en effet dans (3) remplacer l'inégalité par une égalité, en remplaçant au besoin ψ par une fonction à croissance plus rapide, mais telle que $\int^\infty \frac{dn}{\psi^2(n)}$ diverge toujours : exemple $\psi = 0(\sqrt{n})$.)

Donc

$$\sum_{n=F(\nu-1)+1}^{n=F(\nu)} \frac{1}{\psi^2(n)} < \frac{1}{\psi[F(\nu-1)]} \sum_{n=F(\nu-1)+1}^{n=F(\nu)} \frac{1}{\psi(n)} =$$

$$= \frac{1}{F(\nu) - F(\nu-1)} \sum_{n=F(\nu-1)+1}^{n=F(\nu)} \frac{1}{\psi(n)} < \frac{1}{\psi[F(\nu-1)]} = \frac{1}{\varphi(\nu)}$$

en supposant $\psi(n)$ croissante, comme il a été dit plus haut. La divergence de l'intégrale $\int^\infty \frac{dn}{\psi^2(n)}$ entraîne donc celle de l'intégrale $\int^\infty \frac{d\nu}{\varphi(\nu)}$ et par suite mes E $= 1$.

4. — On a vu que la méthode employée conduit forcément à un ensemble de divergence de mesure nulle quand Σr_n^2 converge. Cette méthode laisse donc intact le problème de savoir si une fonction de carré sommable peut avoir un développement de Fourier divergent sur un ensemble de mesure positive. Ceci n'est pas surprenant. On peut remarquer, en effet, que toute méthode assurant la divergence d'une série trigonométrique par une division de cette série en blocs de termes $U_1\ U_2 \dots U_k \dots$:

$$\sum_1^\infty \rho_n \cos(nx - \alpha_n) = U_1 + U_2 + \cdots + U_k + \cdots$$

tels que pour tout x appartenant à un certain ensemble E il y ait une infinité de blocs $U_{n_1}, U_{n_2} \dots U_{n_p} \dots$, dépendants de x, tels que $|U_{n_p}| > B(x) > 0$, ne peut conduire qu'à un ensemble E de mesure nulle si $\Sigma\rho_n^2$ converge.

En effet si E est de mesure positive, il contient certainement un sous-ensemble $\mathcal{E}$, de mesure positive également, dans lequel $B(x) > B$, B étant une constante positive. Pour x faisant partie de $\mathcal{E}$ on aurait une infinité de blocs tels que $|U_k(x)| > B$. Or ceci est impossible. Car si

$$U_k = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \rho_n \cos(nx - \alpha_n)$$

on a

$$\int_0^{2\pi} U_k^2 dx = \pi \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \rho_n^2.$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} U_k^2 dx$ converge ; donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2$ converge presque partout ; donc, presque partout également $|U_k| \to 0$, ce qui conduit à une contradiction avec ce qui précède. Donc forcément mes $E = 0$.

TABLE DES MATIÈRES