LAURENT SCHWARTZ

Étude des sommes d'exponentielles réelles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__259__1_0>

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

959

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

V

ÉTUDE DES SOMMES D'EXPONENTIELLES RÉELLES

PAR

Laurent SCHWARTZ
Docteur ès-sciences
Agrégé de l'Université
Boursier de Recherches du Centre National
de la Recherche Scientifique

PARIS
HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1943

Printed in France

INTRODUCTION

WEIERSTRASS a montré que toute fonction continue $f(x)$ sur un intervalle réel fermé $[a, b]$ (1), peut, quel que soit $\varepsilon > 0$, être approchée à moins d'ε par un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Si l'on se borne à l'intervalle $[0,1]$ et que l'on effectue le changement de variable $x = e^{-2\pi X}$, on obtient le théorème suivant : *toute fonction continue* $F(X)$ *sur le demi axe réel positif* $[0, +\infty]$ *peut, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *être approchée à moins d'*ε *par un « polynôme de* DIRICHLET »

$$P(X) = a_0 + a_1 e^{-2\pi X} + \cdots + a_n e^{-2\pi n X}.$$

Ch. MÜNTZ (2) a généralisé ce théorème comme suit :

$\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *étant une suite infinie croissante de nombres réels* $\geqslant 0$, *une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction continue* (3) $F(X)$ *sur* $[0, +\infty]$ *puisse, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *être approchée à moins d'*ε *par un polynôme de* DIRICHLET

$$P(X) = a_0 + a_1 e^{-2\pi\lambda_1 X} + \cdots + a_n e^{-2\pi\lambda_n X},$$

est la divergence de la série $\sum\limits_{\nu > 0} 1/\lambda_\nu$.

Après 5 paragraphes de préliminaires, destinés à poser les problèmes sous forme d'analyse fonctionnelle, et à rappeler les propriétés indispensables des transformations de FOURIER et de LAPLACE, nous avons donné une démonstration du théorème de MÜNTZ au début du chapitre I (§ 6, 7, 8), et nous avons abordé le problème suivant :

(1) Voir note 1, page 15.

(2) MÜNTZ [1]. Pour toutes les références bibliographiques, voir l'index bibliographique placé à la fin du volume.

(3) Nous ne parlerons dans cette introduction que des fonctions continues, mais notre étude porte aussi sur les fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable, $p \geqslant 1$.

Laurent SCHWARTZ.

Lorsque la série $\sum_{\nu>0} 1/\lambda_\nu$ *converge, quelles sont les fonctions continues* F(X) *sur* $[0, +\infty]$ *qui peuvent, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *être approchées à moins d'*ε *par des polynômes de* DIRICHLET *de la forme* $P(X) = \sum a_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$?

Nous avons complètement résolu ce problème, aux § 9, 10 et 11, en indiquant les propriétés caractéristiques de ces fonctions (énoncées au théorème I du § 10 et à la réciproque I du § 11). On peut les résumer de la façon suivante :

F(X) *est analytique sur* $]0, +\infty[$ *et prolongeable par une fonction* F(Z), $Z = X + iY$, *holomorphe pour* $X > 0$; *elle admet un développement de* DIRICHLET *suivant les fonctions* $e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$.

$$F(Z) = \sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

convergent pour $X > 0$ *une fois opérés certains groupements de termes convenables, dépendant exclusivement de la suite* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots$

Dans ces conditions si des polynômes de DIRICHLET

$$P_j(X) = \sum (a_\nu)_j e^{-2\pi\lambda_\nu X}$$

convergent uniformément vers F(X) *sur* $[0, +\infty]$, *les* $P_j(Z)$ *convergent vers* F(Z) *uniformément dans tout compact du demi-plan* $X > 0$.

Il y a lieu de remarquer le contraste entre le cas de divergence et le cas de convergence de la série $\sum_{\nu>0} 1/\lambda_\nu$; dans le premier cas, on peut approcher toutes les fonctions continues, dans le deuxième cas on ne peut approcher que des fonctions analytiques d'une classe très restreinte.

Au § 12, nous avons étendu les résultats précédents, en remplaçant l'intervalle $[0, +\infty]$ par un intervalle réel quelconque [A, B].

Les derniers paragraphes du chapitre I (§ 13 et 14) sont consacrés aux applications à la théorie des séries de DIRICHLET lacunaires. Les séries considérées sont de la forme $\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, la série $\sum_{\nu>0} 1/\lambda_\nu$ étant supposée convergente. Certaines des propriétés énoncées sont classiques, d'autres sont nouvelles. Toutes sont des conséquences presque immédiates de ce qui précède ; aussi sommes-nous passés très rapidement sur ces applications, les considérant plus comme une illustration des méthodes utilisées que comme le but de nos recherches ; nous avons été conduits, du fait du volume nécessairement restreint de ce travail, à abréger des développements que le lecteur complétera facilement.

Le deuxième chapitre abandonne les problèmes d'approximation et traite de propriétés extrémales. Quelle est la valeur absolue maxima du coefficient a_k d'un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_n x^n$ de degré n, borné en module par 1 dans l'intervalle $[0, 1]$? M. S. Bernstein a résolu le problème, par les formules (15. *a*) que nous donnons au § 15. Nous avons partiellement traité un problème plus général, qui, après changement de variable $x = e^{-2\pi X}$, s'énonce ainsi :

Quelle est la valeur absolue maxima du coefficient a_k d'un polynôme de Dirichlet

$$P(X) = a_0 + a_1 e^{-2\pi\lambda_1 X} + \cdots + a_k e^{-2\pi\lambda_k X} + \cdots + a_n e^{-2\pi\lambda_n X}$$

borné en module par 1 *sur le demi axe réel* $[0, +\infty]$ (*la suite finie* $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ *étant donnée*) ?

Nous n'avons cherché qu'une expression asymptotique du maximum. Nous avons supposé que la suite $\Lambda_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\}$ est la suite-section formée des n premiers éléments d'une suite infinie croissante Λ de nombres réels > 0. Si nous désignons par $N(k\,; n\,; \Lambda)$ le maximum cherché, nous nous sommes bornés à l'étude asymptotique de $N(k\,; n\,; \Lambda)$ pour une suite Λ donnée, pour k fixe et $n \to +\infty$.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que la série $\sum 1/\lambda_\nu$ converge ou diverge. Si cette série converge, $N(k\,; n\,; \Lambda)$ reste borné, pour k fixe et $n \to +\infty$.

Si cette série diverge, $N(k\,; n\,; \Lambda)$ tend vers $+\infty$ avec n, et c'est là que son étude asymptotique est intéressante. Avec la seule hypothèse $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \lambda_\nu = +\infty$ nous avons trouvé

$$\log N(k\,; n\,; \Lambda) \sim 2\lambda_k S_n$$

avec

$$S_n = \sum_{\nu \leqslant n} 1/\lambda_\nu.$$

En nous plaçant dans le cas un peu plus restrictif où la série $\sum (1/\lambda_\nu)^2$ converge, nous avons trouvé

$$A_k e^{2\lambda_k S_n} \leqslant N(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \leqslant B_k e^{2\lambda_k S_n} \sqrt{S_n},$$

A_k et B_k dépendant de la suite Λ et de k, non de n. Bien que nous ne soyons pas parvenus à améliorer ces inégalités, nous considérons comme probable l'existence d'une constante C_k (dépendant encore de la suite Λ et de k, non de n) telle que

$$N(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \sim C_k e^{2\lambda_k S_n}.$$

Ainsi lorsque Λ est la suite des entiers naturels, $S_n = \sum_{\nu \leqslant n} 1/\lambda_\nu$ diffère de $\log n$ d'une quantité bornée, nous pouvons donc situer N entre $A'_k\ n^{2k}$ et $B'_k\ n^{2k}\sqrt{\log n}$, alors que les formules de M. S. Bernstein donnent une valeur principale égale à $\dfrac{2^{2k}}{(2k)!}\ n^{2k}$. (Voir § 19).

Notre étude contenait initialement un 3e chapitre. Nous avons dû, dans cette thèse, nous borner aux deux premiers ; le 3e paraîtra comme mémoire autonome dans un périodique [1]. Néanmoins, étant donnée l'unité du tout, nous résumerons ici ce troisième chapitre.

$\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ sera un système dénombrable de nombres réels de signes quelconques, rangés par ordre de grandeurs croissantes ($\lambda_\nu > 0$ pour $\nu > 0$, $\lambda_\nu < 0$ pour $\nu < 0$, éventuellement $\lambda_0 = 0$).

Nous étudierons l'approximation des fonctions continues F(Y) sur un intervalle fini $(-A, +A)$ par des « polynômes trigonométriques » de la forme $P(Y) = \sum_{|\nu| \leqslant n} a_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$.

Pour certains systèmes Λ, l'approximation à moins d'ε est possible pour toute fonction continue F(Y), quel que soit $\varepsilon > 0$; pour d'autres systèmes on ne peut approcher que certaines classes de fonctions continues. La séparation de ces deux sortes de systèmes Λ

(1) Probablement les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **1943**. Le titre de ce mémoire est : Approximation des fonctions par des sommes d'exponentielles imaginaires.

est un problème très complexe ; il suffit pour s'en apercevoir de remarquer que le système $\{ \lambda_\nu = \nu/2A \}$ permet seulement l'approximation des fonctions continues périodiques ($F(A) = F(-A)$), mais qu'augmenté d'un élément quelconque λ, il permet l'approximation de toutes les fonctions continues. Nous nous sommes intéressés au problème suivant : *lorsque toutes les fonctions continues ne peuvent pas être approchées, quelles sont les propriétés caractéristiques de celles qui peuvent l'être ?*

Le résultat est le suivant :

$F(Y)$ *admet un « développement non-harmonique de* FOURIER » *formel*

$$F(Y) = \sum c_\nu \, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$$

qui admet le mode de convergence suivant :

La série $\sum c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} e^{-2\pi |\lambda_\nu| X}$ *est convergente pour* $X > 0$, *quel que soit* Y, *du moins une fois opérés certains groupements de termes convenables, dépendant uniquement du système* Λ ; *sa somme* $F(Y ; X)$, *harmonique dans le demi-plan* $X > 0$, *est continue sur le segment vertical* $X = 0$, $|Y| < A$ *sur lequel elle est égale à* $F(Y)$. Il s'agit en somme de la généralisation du procédé de sommation exponentielle d'ABEL, classique dans la théorie des séries de FOURIER ordinaires.

De cette étude on déduit des applications à la théorie des séries de DIRICHLET lacunaires, qui sont bien plus vastes que celles du 1er chapitre. Elles comprennent comme cas particulier un théorème classique de POLYA sur la distribution des directions de croissance maxima des fonctions entières, et un théorème de Vl. BERNSTEIN sur la distribution des points singuliers d'une série de DIRICHLET sur sa droite d'holomorphie. Mais comme, encore une fois, les démonstrations sont immédiates, nous sommes passés très rapidement sur ces applications ; mais nous avons terminé le mémoire par une note, donnant un point de vue historique sur les applications à la théorie des fonctions analytiques.

D'une façon générale, et en particulier en ce qui concerne cette note historique, nous nous excusons d'avance des lacunes ou des erreurs bibliographiques qui ne peuvent manquer d'exister dans nos références ; nous avons dû travailler dans des conditions ne permettant pas une abondante documentation. Signalons en particulier que le récent ouvrage de M. N. Levinson (1) ne nous est parvenu qu'une fois le manuscrit entre les mains de l'imprimeur ; nous n'avons eu que le temps de le parcourir et de compléter quelques-unes de nos références.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Georges Valiron qui, non seulement m'a donné de nombreux conseils, mais encore, par la correspondance qu'il a bien voulu entretenir avec moi, m'a aidé à surmonter beaucoup de difficultés.

Je veux enfin exprimer ma reconnaissance à M. Hadamard et M. Paul Lévy qui ont guidé et enrichi ma formation mathématique, et à M. N. Bourbaki dont la forte personnalité a influencé grandement mes recherches récentes.

(1) N. Levinson [1].

PRÉLIMINAIRES

§ 1. — Système total ; système libre ; base.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur un corps fondamental $\mathfrak{k}$ (qui sera toujours le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes). Un élément de $\mathcal{E}$ sera appelé indifféremment point ou vecteur, et dans ce dernier cas sera surmonté d'une flèche.

Un système de vecteurs $\{\vec{e}_\nu\}$ (ν parcourant un ensemble d'indices N) est dit *total* s'il engendre l'espace entier ; autrement dit si tout vecteur $\vec{x}$ admet *au moins* une représentation

$$\vec{x} = \sum_\nu x_\nu \vec{e}_\nu \tag{1 a}$$

comme combinaison linéaire d'un nombre *fini* des $\vec{e}_\nu$, à coefficients x_ν dans $\mathfrak{k}$.

Un système de vecteurs $\{e_\nu\}$ est dit *libre* s'il vérifie l'une quelconque des trois conditions suivantes, toutes équivalentes :

1° aucun des vecteurs du système n'appartient au sous-espace vectoriel engendré par les autres ;

2° il n'existe aucune relation $\sum_\nu x_\nu \vec{e}_\nu = \vec{0}$ à coefficients non tous nuls entre un nombre fini des vecteurs $\vec{e}_\nu$;

3° tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ admet *au plus* une représentation de la forme (1 *a*).

Un système non libre est dit *lié*.

Un des vecteurs, $\vec{e}_k$, est dit indépendant des autres s'il n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les autres ; un système libre est un système dont tout vecteur est indépendant des autres ; un système lié est un système dont au moins un vecteur est dépendant des autres.

Un système $\{ e_\nu \}$ à la fois libre et total est dit *système de référence* ou *base* ; c'est un système total qui cesse de l'être par suppression d'un quelconque de ses éléments, c'est aussi un système libre qui cesse de l'être par adjonction d'un vecteur quelconque.

Si le système $\{ e_\nu \}$ est une base, tout $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ admet *une représentation et une seule* de la forme (1 *a*) ; x_ν est la *composante* de $\vec{x}$ suivant le vecteur de base $\vec{e_\nu}$; un nombre fini seulement des x_ν peuvent être $\neq 0$.

§ 2. — Formes linéaires. Dualité

Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ n'a qu'un nombre fini n de dimensions.

Comme les formes linéaires sur $\mathcal{E}$ (à valeurs dans $\mathfrak{k}$) peuvent être additionnées, et multipliées par des scalaires de $\mathfrak{k}$, elles forment un espace vectoriel $\mathcal{E}'$ sur $\mathfrak{k}$, appelé *dual* de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}'$ a le même nombre de dimensions que $\mathcal{E}$. D'ailleurs le dual $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}'$, appelé bidual de $\mathcal{E}$, est isomorphe à $\mathcal{E}$.

Soient $\vec{x} \in \mathcal{E}$, $\vec{y} \in \mathcal{E}'$; appelons $B(\vec{y}, \vec{x}) = y(\vec{x})$ la valeur de la forme linéaire $\vec{y}$ au point $\vec{x}$; B est une forme bilinéaire qui établit une relation dite de *dualité* entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. $B(\vec{y}, \vec{x})$ est appelé *produit scalaire* de $\vec{y}$ et $\vec{x}$; lorsqu'il est nul, on dit que $\vec{y}$ et $\vec{x}$ sont *orthogonaux*.

Soit $\{ \vec{e_\nu} \}_{\nu \in N}$ une base de $\mathcal{E}$. Chaque forme linéaire $\vec{y}$ est déterminée par les $B(\vec{y}, \vec{e_\nu}) = y_\nu$. Si en particulier nous appelons $\vec{f_\mu}$ la forme définie par les égalités

$$B(\vec{f_\mu}, \vec{e_\nu}) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu \neq \mu \\ 1 & \text{si} \quad \nu = \mu. \end{cases}$$

les $\{ \vec{f_\mu} \}_{\mu \in N}$ forment une base de $\mathcal{E}'$. Les deux bases $\{ e_\nu \}$ de $\mathcal{E}$, $\{ f_\nu \}$ de $\mathcal{E}'$, entièrement déterminées l'une par l'autre, sont dites *bases biorthogonales normales*.

Si $\qquad \vec{x} \in \mathcal{E}$ est égal à $\sum_\nu x_\nu \vec{e_\nu}$

et $\qquad \vec{y} \in \mathcal{E}'$ à $\sum_\nu y_\nu \vec{f_\nu}$

on peut écrire

$$B(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{\nu} y_\nu^r x_\nu.$$

En particulier les composantes de $\vec{x}$ suivant la base $\{\vec{e_\nu}\}$ peuvent être interprétées grâce aux relations de dualité, par

$$x_\nu = B(\vec{f_\nu}, \vec{x})$$

Les propriétés, pour un système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\}$, de totalité et d'indépendance, peuvent s'exprimer par les relations de dualité :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un système* $\{\vec{e_\nu}\}$ *de vecteurs de* $\mathcal{E}$ *soit total, il faut et il suffit que*

$$\text{« } B(\vec{y}, \vec{e_\nu}) = 0 \quad \textit{pour tout } \nu \text{ »} \quad \textit{entraîne} \quad \vec{y} = 0.$$

THÉORÈME II. — *Pour qu'un système* $\{e_\nu\}_{\nu \in N}$ *de vecteurs de* $\mathcal{E}$ *soit libre, il faut et il suffit que pour tout* $\mu \in N$, *il existe* $\vec{f_\mu} \in \mathcal{E}'$ *vérifiant lorsque* ν *parcourt* N

$$B(\vec{f_\mu}, \vec{e_\nu}) = \delta_{\mu\nu}.$$

Tout système $\{\vec{f_\mu}\}_{\mu \in N}$ satisfaisant aux conditions du théorème II est libre dans $\mathcal{E}'$; c'est un système *biorthogonal normal associé* au système $\{\vec{e_\nu}\}$. Pour qu'un tel système soit unique, il faut et il suffit que le système $\{\vec{e_\nu}\}$ soit une base de $\mathcal{E}$; le système $\{\vec{f_\mu}\}$ est alors lui aussi une base de $\mathcal{E}'$.

§ 3. — Espaces vectoriels topologiques

Les considérations précédentes deviennent sans intérêt dans un espace à une infinité de dimensions, sans l'introduction d'une topologie.

Nous supposerons donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel topologique (1). Sa topologie est définie par la donnée, pour chaque point

(1) Pour les notions générales de topologie, consulter N. BOURBAKI [1], chap. I, II, III.

de $\mathcal{E}$, d'un système de voisinages, satisfaisant à certains axiomes ; il suffit d'ailleurs de connaître les voisinages de l'origine, ceux d'un autre point s'en déduisent par translation.

Un espace vectoriel $\mathcal{E}$ est dit *normé* lorsqu'à tout élément $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ est affecté un nombre réel $p(\vec{x})$, appelé norme de $\vec{x}$, que l'on écrit aussi $\|\vec{x}\|$, et qui satisfait aux 4 axiomes suivants :

$$(3a) \qquad \begin{cases} p(\vec{x}) \geqslant 0 \\ p(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant p(\vec{x}) + p(\vec{y}) \\ p(\rho\vec{x}) = |\rho|\, p(\vec{x}) \qquad (\rho \in \mathfrak{k}) \\ p(\vec{x}) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \vec{x} = \vec{0}. \end{cases}$$

Un espace vectoriel normé est toujours considéré comme topologique ; un système fondamental de voisinages de $\vec{O}$ dans sa topologie est constitué par les boules

$$(\mathrm{V}_\alpha) \qquad p(\vec{x}) \leqslant \alpha \qquad (\alpha \text{ réel} > 0).$$

Deux normes définissant la même topologie sont dites équivalentes.

Un système de vecteurs $\{ e_\nu \}_{\nu \in \mathrm{N}}$ est dit *total* si l'espace vectoriel qu'il engendre est partout dense dans $\mathcal{E}$; autrement dit si tout $\vec{x} \in \mathcal{E}$ admet au moins une représentation

$$(3b) \qquad \vec{x} = \lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j \vec{e_\nu}$$

comme limite (1) de vecteurs dont chacun, $\sum\limits_\nu (x_\nu)_j \vec{e_\nu}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini des $\vec{e_\nu}$.

Un système de vecteurs $\{ \vec{e_\nu} \}_{\nu \in \mathrm{N}}$ est dit *libre* s'il vérifie l'une quelconque des 3 conditions suivantes, toutes équivalentes :

1° aucun des vecteurs du système n'appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les autres ;

(1) La limite doit être entendue ici dans un sens absolument général, j peut être un indice entier tendant vers $+\infty$, ou une variable continue tendant vers une limite. Ce peut être enfin une limite suivant un filtre quelconque. Cf. N. Bourbaki [1], § 5.

2° toute relation

$$\lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j \vec{e}_\nu = \vec{0},$$

entraîne

$$\lim_j (x_\nu)_j = 0 \text{ pour tout } \nu.$$

3° pour toute représentation

(3 *b*) $$\vec{x} = \lim_j \sum_\nu (x_\nu)_j \vec{e}_\nu.$$

$\lim_j (x_\nu)_j$ existe pout tout ν.

Dans ce cas, si nous posons

(3 *c*) $$\lim_j (x_\nu)_j = x_\nu.$$

les $\{x_\nu\}$ sont déterminés pour $\vec{x}$ donné, indépendamment de la relation (3 *b*), pourvu seulement que celle-ci soit possible (c'est-à-dire pourvu que $\vec{x}$ appartienne à l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{e}_\nu$. Nous écrirons symboliquement :

(3 *d*) $$\vec{x} \sim \underset{\nu \in N}{\mathrm{S}}\ x_\nu \vec{e}_\nu.$$

Nous avons écrit $\sim$ et non $=$, S et non $\sum$, pour bien montrer qu'il ne s'agit pas d'une véritable somme, mais d'une limite de sommes. (En général la série $\sum_\nu x_\nu \vec{e}_\nu$ est divergente.) D'ailleurs ce développement $\mathrm{S}\, x_\nu \vec{e}_\nu$ ne caractérise pas nécessairement $\vec{x}$: plusieurs vecteurs peuvent avoir le même développement ; autrement dit on peut avoir même pour $\vec{x} \neq \vec{0}$

$$\vec{x} \sim \underset{\nu}{\mathrm{S}}\ 0.\vec{e}_\nu \quad (^1).$$

Dans les exemples qui seront étudiés dans ce mémoire, nous montrerons que cette circonstance quelque peu paradoxale ne se produit pas.

Un système $\{e_\nu\}_{\nu \in N}$ à la fois libre et total est dit *système de référence* ou *base* ; c'est un système total qui cesse de l'être par sup-

(1) Voir par exemple KACZMARZ-STEINHAUS [1], p. 262.

pression de l'un quelconque de ses éléments ; c'est aussi un système libre qui cesse de l'être par adjonction d'un vecteur quelconque. Si le système $\{ e_\nu \}_{\nu \in N}$ est une base, tout $\vec{x} \in \mathcal{E}$ admet alors une représentation symbolique bien définie de la forme (3 *d*), qui encore une fois ne signifie pas autre chose que (3 *b*) et (3 *c*) ; x_ν est la composante de $\vec{x}$ suivant le vecteur de base $\vec{e_\nu}$, c'est une forme linéaire continue de $\vec{x}$.

Les formes linéaires *continues* sur $\mathcal{E}$ forment un espace vectoriel $\mathcal{E}'$ sur $\mathfrak{k}$ qu'on appelle *dual topologique* de $\mathcal{E}$. Pour que la forme linéaire $y(\vec{x})$ soit continue, lorsque $\mathcal{E}$ est normé, il faut et il suffit que $\dfrac{|y(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|}$ soit borné ; le maximum $p(\vec{y})$ de cette expression peut être pris comme norme de la forme linéaire $\vec{y}$, de sorte que $\mathcal{E}'$ est lui aussi un espace vectoriel normé. Le dual topologique $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}'$ ainsi normé est appelé *bidual topologique* de $\mathcal{E}$; il n'est pas en général isomorphe à $\mathcal{E}$, mais $\mathcal{E}$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}''$.

Soient $\vec{x} \in \mathcal{E}$, $\vec{y} \in \mathcal{E}'$; on peut encore définir le *produit scalaire* $B(\vec{y}, \vec{x})$, forme bilinéaire continue qui établit entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ une *relation de dualité.*

Nous avons défini $\|\vec{y}\|$ comme Max $\dfrac{|y(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|}$; on peut manifestement pour calculer ce maximum se restreindre à la sphère $\|x\| = 1$ ou à l'hyperplan fermé $y(\vec{x}) = 1$, ce qui permet d'énoncer :

Théorème I. — *La norme d'une forme linéaire continue $\vec{y}$ est le maximum de $|y(\vec{x})|$ lorsque $\vec{x}$ décrit la sphère $\|\vec{x}\| = 1$; c'est aussi l'inverse de la plus courte distance de l'origine à l'hyperplan fermé $y(\vec{x}) = 1$.*

Théorème de Hahn-Banach [1] II. — *Toute forme linéaire continue définie seulement sur un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$, et de norme* N *dans ce sous-espace vectoriel,*

[1] Voir S. Banach [1], p. 28.

peut être au moins d'une manière prolongée dans l'espace entier par une forme linéaire continue de même norme N.

Ce théorème est de démonstration délicate ; ses applications sont très nombreuses. En particulier il permet de généraliser les théorèmes I et II du § 2 aux espaces vectoriels normés à une infinité de dimensions ; mais les formes linéaires $\vec{y}$ du théorème I et $\{\vec{f_\mu}\}_{\mu\in N}$ du théorème II doivent être des formes linéaires continues. Un système tel que $\{\vec{f_\mu}\}_{\mu\in N}$, est encore appelé *biorthogonal normal associé* à $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu\in N}$; c'est toujours un système libre de $\mathcal{E}'$. Pour qu'un tel système soit unique, il faut et il suffit que $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu\in N}$ soit une base de $\mathcal{E}$; mais alors $\{\vec{f_\mu}\}_{\mu\in N}$ n'est pas nécessairement total dans $\mathcal{E}'$ (1).

Soit $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu\in N}$ une base, $\{\vec{f_\mu}\}_{\mu\in N}$ le système biorthogonal normal associé. On peut avoir une nouvelle interprétation des composantes x_ν d'un vecteur $\vec{x}$: $x_\nu = B(\vec{f_\nu}, \vec{x})$; cela revient à dire que $\vec{f_\nu}$ est la forme linéaire continue qui à chaque vecteur $\vec{x}$ associe sa composante x_ν.

Un des buts du présent travail sera d'étudier dans des espaces vectoriels usuels la formule (3 *d*), et de voir dans quel sens la somme du 2e membre s'apparente à une série convergente.

Nous avons vu que si $\{\vec{e_\nu}\}$ est une base, à tout $\vec{x}$ on peut faire correspondre un système de composantes $\{x_\nu\}$; mais les conditions auxquelles doit satisfaire un système $\{x_\nu\}$ d'éléments de $\mathfrak{k}$ pour être celui des composantes d'un vecteur, sont très complexes ; leur étude sera également un des buts de ce travail.

§ 4. — Espaces vectoriels usuels

(a, b) étant un intervalle réel fini ou infini, on appelle $L^p(a, b)$ (p réel $\geqslant 1$) l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$, définies sur (a, b), à valeurs dans $\mathfrak{k}$, et de puissance p-ième sommable par rap-

(1) Voir note 1, p. 11.

port à la mesure de LEBESGUE (on considère comme identiques deux fonctions presque partout égales) ; cet espace est en outre normé (1) par

$$\|f\|_{L^p(a,\,b)} = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $f(x) \in L^p(a, b)$ pour tout p fini, on démontre que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p$ existe et n'est autre que le maximum vrai de $|f(x)|$, $M(|f|)$ défini par

$|f(x)| \leqslant M(|f|)$ presque partout

$|f(x)| > M'$ sur un ensemble de mesure > 0, quel que soit $M' < M$ (2).

$M(|f|)$ peut être égal à $+\infty$.

Aussi appelle-t-on $L^\infty(a, b)$ l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$ mesurables et presque partout bornées sur (a, b) (on considère toujours comme identiques deux fonctions presque partout égales) avec la norme

$$\|f\|_\infty = M(|f|) < +\infty.$$

On montre que tous les L^p sont complets (3).

Pour $1 < p < +\infty$, le dual topologique de L^p est isomorphe à $L^{p'}$, où $p' = p/(p-1)$, $(1/p + 1/p' = 1)$, et réciproquement. Si $\vec{f} \in L^p$, $\vec{g} \in L^{p'}$ on peut prendre comme produit scalaire

$$B(\vec{g}, \vec{f}) = \int_a^b g(x)f(x)dx \quad (4) \tag{4a}$$

C'est l'inégalité de HÖLDER (5)

$$\left|\int_a^b g(x)f(x)dx\right| \leqslant \|\vec{g}\|_{p'} \, \|\vec{f}\|_p \tag{4b}$$

qui montre que si l'on considère $\vec{g} \in L^{p'}$ comme forme linéaire continue sur L^p, sa norme

$$\operatorname*{Max}_{f \in L^p} \frac{\left|\int_a^b g(x)\,f(x)dx\right|}{\|f\|_p} \text{ n'est autre que } \|g\|_{p'}.$$

(1) BANACH [1], p. 2 4, KACZMARZ STEINHAUS [1], p. 15.
(2) BANACH [1], p. 2 4, ZYGMUND [1], p. 66.
(3) BANACH [1], p. 3 4, KACZMARZ STEINHAUS [1], p. 15.
(4) BANACH [1], p. 59 65.
(5) BANACH [1], p. 2.

Le dual de L^1 est aussi isomorphe à L^∞, et l'on a encore les formules (4 *a*) et (4 *b*) pour $p = 1$, $p' = \infty$; mais le dual de L^∞ n'est pas isomorphe à L^1 et contient un sous-espace vectoriel fermé isomorphe à L^1.

On appelle $C(a, b)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle compact $[a, b]$ [1], avec la norme

$$\| f \|_{C(a, b)} = \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) |$$

$C(a, b)$ est un sous-espace vectoriel fermé donc complet de L^∞. Nous voyons là une différence capitale entre les L^p pour p fini, et L^∞ : tandis que dans tout L^p, p fini, le sous-espace vectoriel des fonctions continues est dense, dans L^∞ ce sous-espace vectoriel est fermé. Comme dans le présent travail nous étudierons la totalité de systèmes de vecteurs dans les L^p, ces vecteurs représentant toujours des fonctions continues, il ne pourra être question que de totalité dans L^p pour p fini, ou dans C, jamais dans L^∞.

On appelle $V[a, b]$ l'espace des distributions bornées de masses sur l'intervalle $[a, b]$; toute distribution peut être représentée par une fonction à variation bornée $\Phi(x)$ (la distribution peut comporter des masses ponctuelles aux points a et b, même s'ils sont à l'infini). Cet espace est en outre normé par

$$\| \Phi \|_V = \int_a^b | d\Phi(x) |.$$

L'espace $V[a, b]$ est complet. Si la fonction $\Phi(x)$ est absolument continue,

$$d\Phi = \varphi(x) dx, \ \varphi \in L^1, \qquad \text{et} \qquad \| \Phi \|_V = \| \varphi \|_{L^1} ;$$

ainsi L^1 est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de V. On définirait de même $V]a, b[$ comme l'espace des distributions de masses sur $]a\ b[$, et $V[a, b[$, $V]a, b]$.

[1] Pour désigner des intervalles et spécifier s'ils ont ou non des extrémités nous emploierons la notation suivante :

$[a, b]$ est l'intervalle fermé, $a \leqslant x \leqslant b$

$]a, b[$ est l'intervalle ouvert, $a < x < b$

$[a, b[$ est un intervalle semi ouvert $a \leqslant x < b$.

La topologie de ces intervalles s'obtient en les considérant comme sous-ensembles de la droite réelle achevée, compacte, $[-\infty, +\infty]$.

Le dual topologique de C(a, b) est isomorphe à V[a, b] (¹). Pour $\vec{f} \in$ C, $\vec{G} \in$ V, le produit scalaire peut s'écrire

$$(4\,c)\qquad B(\vec{G}, \vec{f}) = \int_a^b f(x)\,dG(x),$$

et l'inégalité de Hölder devient

$$(4\,d)\qquad \left|\int_a^b f(x)\,dG(x)\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \times \|G\|_V \quad (^2).$$

Le dual de V n'est pas isomorphe à C, mais contient un sous-espace vectoriel fermé isomorphe à C.

Un espace particulièrement intéressant est l'espace $L^2(a, b)$ appelé espace de Hilbert. Comme il est isomorphe à son propre dual, on peut définir dans l'espace lui-même un produit scalaire bilinéaire et une orthogonalité

$$B(\vec{f}, \vec{g}) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

(avec $\|f\|_2^2 = B(f, \bar{f})$ si $\mathfrak{k}$ est le corps des complexes, $\bar{f}$ étant la fonction complexe conjuguée de f ; $\|f\|_2^2 = B(f, f)$ si $\mathfrak{k}$ est le corps des réels, ce que nous supposerons dans la suite de ce paragraphe).

Une des plus importantes propriétés de L^2 est la possibilité d'y former des bases orthogonales normales. On appelle ainsi une base $\{\vec{e}_\nu\}_{\nu\in N}$ telle que $B(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$. Tout vecteur $\vec{x} \in L^2$ admet alors une représentation unique $\vec{x} \backsim \underset{\nu}{S} x_\nu \vec{e}_\nu$ (voir formule (3 d)) ; mais ici le signe $\sim$ peut être remplacé par $=$, et S par $\sum$, car il s'agit bien d'une somme convergente dans l'espace de Hilbert. De plus

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_\nu |x_\nu|^2 < +\infty;$$

réciproquement tout système de nombres réels $\{x_\nu\}$ vérifiant $\sum_\nu |\vec{x}_\nu|^2 < +\infty$ est le système des composantes d'un vecteur $\vec{x} \in L^2$, ce qui résout ici très simplement le problème posé à la fin du § 3.

(¹) Banach [1], p. 59-65.
(²) Banach [1], p. 5.

D'une façon générale, l'espace de HILBERT est une généralisation immédiate de l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions ; d'ailleurs tout sous espace vectoriel à un nombre fini de dimensions d'un espace de HILBERT est un espace euclidien. Aussi l'espace L^2 se prête-t-il bien aux calculs analytiques que l'on peut faire dans l'espace d'EUCLIDE.

§ 5. — Transformations de Fourier et de Laplace (1)

Soit S l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'axe réel, nulles pour $|x|$ assez grand.

Pour $f(x) \in S$, on peut définir

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy} f(x)dx, \; y \text{ réel.} \tag{5 a}$$

On démontre que $g(y) \in L^2(-\infty, +\infty)$ vérifie l'égalité de PARSEVAL (2)

$$\| g(y) \|_{L^2(-\infty, +\infty)} = \| f(x) \|_{L^2(-\infty, +\infty)} \tag{5 b}$$

Cela prouve que la transformation linéaire $\vec{f} \to \vec{g}$, de l'espace vectoriel S muni de la norme de $L^2(-\infty, +\infty)$, dans l'espace vectoriel $L^2(-\infty, +\infty)$, est continue et conserve les normes. Mais un théorème général de topologie (3) dit qu'une transformation uniformément continue définie sur un sous espace partout dense d'un espace uniforme, peut être et d'une seule manière prolongée dans tout l'espace par une transformation continue. S étant partout dense dans $L^2(-\infty, +\infty)$, on voit que la transformation linéaire $\vec{f} \to \vec{g}$ ci-dessus définie peut se prolonger d'une seule manière comme une transformation linéaire continue de L^2 dans lui-même, dite *transformation de Fourier*, vérifiant l'égalité de PARSEVAL (5 *b*). Nous représenterons toujours cette transformation par la formule (5 *a*) bien que l'intégrale du 2^e membre n'ait plus de sens si $f(x) \in L^2$ n'est pas sommable.

(1) TITCHMARSH [1].
(2) TITCHMARSH [1], chap. III.
(3) N. BOURBAKI [1], p. 101.

On démontre la formule de réciprocité (1)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2i\pi xy} g(y)dy \tag{5 c}$$

où le signe d'intégration a le même sens conventionnel.

Toujours pour $f(x) \in S$ on démontre l'inégalité de PARSEVAL-RIESZ (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \|g(y)\|_{L^{p'}(-\infty,+\infty)} \leqslant \|f(x)\|_{L^{p}(-\infty,+\infty)} \\ \text{avec} \quad p' = p/(p-1) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2. \end{array} \right. \tag{5 d}$$

Cela montre, par un raisonnement identique à celui qui a été fait plus haut, qu'on peut par prolongement définir la transformation de FOURIER comme une transformation linéaire continue de L^p dans $L^{p'}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$; cette transformation diminue (3) les normes, d'après (5 d). Nous la représenterons toujours sous la forme (5 a), mais ne chercherons pas à donner de sens à la formule de réciprocité (5 c).

Lorsque $f(x) \in L^p$, $p > 2$, on ne peut pas en général définir la transformation de FOURIER ; même si pour une autre raison on peut la définir (par exemple si en outre $f(x) \in L^2$) on ne peut pas affirmer que $g(y) \in L^{p'}$; on a simplement, par l'inégalité de PARSEVAL-RIESZ une minoration

$$\left\{ \begin{array}{l} \|g(y)\|_{L^{p'}(-\infty,+\infty)} \geqslant \|f(x)\|_{L^{p}(-\infty,+\infty)} \\ p' = p/(p-1) \qquad p \geqslant 2. \end{array} \right. \tag{5 e}$$

Si $F(x) \in V]-\infty, +\infty[$, on peut définir

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy}\, dF(x) \tag{5 f}$$

Comme

$$\|g(y)\|_{L^\infty(-\infty,+\infty)} \leqslant \|F(x)\|_{V]-\infty,+\infty[}$$

on a là une transformation linéaire continue, dite de *Fourier-*

(1) TITCHMARSH [1], p. 69.

(2) TITCHMARSH [1], p. 96.

(3) En ce qui concerne les inégalités, nous emploierons une fois pour toutes les notations de N. BOURBAKI [2], § 6.

$\geqslant$ o s'énonce positif

$>$ o s'énonce strictement positif.

De même pour : croissant et strictement croissant ; à gauche et strictement à gauche, etc. La transformation de FOURIER de L^p dans $L^{p'}$ diminue les normes ; elle les diminue strictement pour $1 < p < 2$.

Stieltjes, de V dans L^∞. La fonction $g(y)$ est d'ailleurs continue. Si $F(x)$ est absolument continue, $dF = f(x)dx$, $g(y)$ est la transformée de Fourier de $f(x) \in L^1$.

La *transformation de Laplace* (1) est définie par

$$(5g) \qquad G(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x} f(x)dx\ ; \quad \lambda = \sigma + i\tau.$$

Si par exemple $f(x) = 0[e^{\varepsilon x}]$ pour $x \to +\infty$, quel que soit $\varepsilon > 0$, $G(\lambda)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$.

Le cas le plus intéressant est celui où $f(x) \in L^2(0, +\infty)$. Alors $e^{-\varepsilon x}f(x) \in L^1$, de sorte que $G(\lambda)$ est aussi holomorphe pour $\sigma > 0$; $G(\lambda)$ est bornée dans tout demi-plan $\sigma \geqslant \varepsilon > 0$, et, dans un tel demi-plan tend vers 0 pour $|\sigma + i\tau| \to \infty$. De plus pour σ fixe, $G(\sigma + i\tau)$, en tant que fonction de τ, est la transformée de Fourier de la fonction égale à $e^{-2\pi\sigma x}f(x)$ pour $x \geqslant 0$, à 0 pour $x < 0$:

$$(5h) \qquad G(\sigma + i\tau) = \int_0^\infty [e^{-2\pi\sigma x} f(x)]\, e^{-2i\pi\tau x}\, dx$$

On en déduit l'égalité de Parseval

$$(5i) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma + i\tau)|^2 d\tau = \int_0^\infty |e^{-2\pi\sigma x} f(x)|^2 dx$$

et la formule de réciprocité

$$(5j) \qquad f(x)e^{-2\pi\sigma x} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma + i\tau)e^{2i\pi\tau x}\, d\tau$$

Désignons par H^p l'espace vectoriel des fonctions $G(\lambda)$ holomorphes pour $\sigma > 0$, et pour lesquelles $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma + i\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$ est borné pour $\sigma > 0$ (2).

Normons cet espace par

$$(5k) \qquad \|G\|_{H^p} = \max_{\sigma > 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma + i\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

On démontre les propriétés suivantes de l'espace H^p (3) :

(1) Doetsch [1] ; Titchmarsh [1] ; Paley-Wiener [1], p. 8.

(2) Zygmund [1] p. 158. Il ne s'agit pas du même espace H^p, mais d'un espace à propriétés tout à fait analogues.

(3) Titchmarsh [1], p. 119 151 ; Zygmund [1], p. 158-164 ; Hardy [1] ; Nevanlinna [1], p. 180-196.

1° Quels que soient $\varepsilon > 0$ et $q \geqslant p$, si $G(\lambda) \in H^p$, alors $G(\lambda + \varepsilon) \in H^q$, et il existe une constante $K(\varepsilon)$ dépendant exclusivement de ε, telle que

$$(5l) \qquad \| G(\lambda + \varepsilon) \|_{H^q} \leqslant K(\varepsilon) \| G(\lambda) \|_{H^p}$$

2° Lorsque le point λ tend vers le point $i\tau$ de l'axe imaginaire sur une ligne ayant une tangente non verticale, $G(\lambda)$ tend vers une limite $G(i\tau)$ du moins pour presque toutes les valeurs de τ.

3° Si $G(\lambda) \in H^p$, alors $G(i\tau) \in L^p(-\infty, +\infty)$

La fonction de σ égale à $\| G(\sigma + i\tau) \|_{L^p(-\infty + \infty)}$ est décroissante et l'on peut écrire

$$(5m) \qquad \| G(\lambda) \|_{H^p} = \| G(i\tau) \|_{L^p(-\infty, +\infty)}$$

4° $G(\lambda)$ est représentable par l'intégrale de Cauchy

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(i\tau)}{\lambda - i\tau} d\tau.$$

On voit que la transformation de Laplace est une transformation linéaire continue conservant les normes, de $L^2(0, +\infty)$ dans H^2.

Mais on démontre que réciproquement toute fonction $G(\lambda) \in H^2$ est transformée de Laplace d'une fonction $f(x) \in L^2(0, +\infty)$, donnée par (5 j). La transformation de Laplace définit donc un isomorphisme entre $L^2(0, +\infty)$ et H^2.

Si maintenant $f(x) \in L^p(0, +\infty)$, $G(\lambda)$ est encore une fonction holomorphe pour $\sigma > 0$. Si de plus $1 \leqslant p \leqslant 2$ l'inégalité de Parseval-Riesz montre que

$$(5n) \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | G(\sigma + i\tau) |^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(\int_0^{\infty} | e^{-2\pi\sigma x} f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La transformation de Laplace est donc une transformation linéaire continue, diminuant les normes, de $L^p(0, +\infty)$ dans $H^{p'}$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Mais pour $p < 2$, ce n'est pas un isomorphisme. On a les formules :

$$(5h') \qquad G(i\tau) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\tau x} dx,$$

$$(5n') \qquad \| G(i\tau) \|_{p'} \leqslant \| f(x) \|_p,$$

Pour $G(\lambda) \in H^q$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, la formule (5 *j*) a un sens et l'on a l'inégalité de PARSEVAL-RIESZ

$$(5\,o)\quad \left(\int_0^{\infty} |e^{-2\pi\sigma x} f(x)|^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma + i\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}.$$

La transformation réciproque de la transformation de LAPLACE, (5 *j*), est donc une transformation linéaire continue diminuant les normes de H^q dans $L^{q'}(0 + \infty)$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $q' = q/(q-1)$. Mais pour $q < 2$, ce n'est pas un isomorphisme. On a les formules :

$$(5\,j')\qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(i\tau) e^{2i\pi\tau x} d\tau$$

$$(5\,o')\qquad \| f(x) \|_{q'} \leqslant \| G(i\tau) \|_q.$$

La transformation de LAPLACE-STIELTJES

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\lambda x} dF(x),$$

définie pour $F(x) \in V[0, +\infty[$ est une transformation linéaire continue, diminuant les normes, de $V[0, +\infty[$ dans H^{∞}. Elle prolonge la transformation de LAPLACE de $L^1(0, +\infty)$ dans H^{∞}. Elle admet une formule de réciprocité obtenue par intégration formelle de (5 *j*).

CHAPITRE PREMIER

APPROXIMATION DES FONCTIONS PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES RÉELLES

---

§ 6. — Théorème de Weierstrass. Théorème de Müntz

WEIERSTRASS a montré que sur un intervalle fini $[a, b]$, toute fonction continue $f(x)$ peut être approchée à ε près par un polynôme, quel que soit $\varepsilon > 0$. En langage fonctionnel, cela peut s'écrire : dans $C(a, b)$ le système des vecteurs $\{\vec{e_\nu} = x^\nu\}$ $(\nu = 0, 1, 2, ...)$ est total.

Ch. MÜNTZ [1] a généralisé cette proposition en 1914 en énonçant le théorème suivant :

$M = \{\mu_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, 2, ...)$ *étant une suite croissante de nombres réels* $\geqslant 0$, $\mu_0 = 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mu_\nu = +\infty$, *pour que le système de vecteurs* $\{\vec{e_\nu} = x^{\mu_\nu}\}$ *soit total dans* $C(0,1)$, *il faut et il suffit que la série* $\sum\limits_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu$ *diverge.*

On voit pourquoi la présence de la fonction $x^0 = 1$ est indispensable à la totalité : c'est la seule des fonctions x^{μ_ν} qui ne s'annule pas pour $x = 0$.

Lorsque le système des $\{x^{\mu_\nu}\}$ est total, il le reste après suppression de l'un quelconque de ses éléments $\neq x^0$; donc chaque vecteur $\vec{e_\nu}$ est dépendant des autres, sauf $\vec{e_0}$.

Ainsi la présence ou l'absence de x^0 dans le système introduit toujours une petite complication dans les énoncés relatifs à la totalité ou à l'indépendance dans $C(0,1)$. Nous nous en affranchirons en considérant le sous-espace vectoriel $C'(0,1)$ formé des

(1) Ch. MÜNTZ [1].

fonctions continues nulles pour $x = 0$; le lecteur rétablira sans peine les énoncés relatifs à C(0,1).

Comme nous nous préoccupons ici du double point de vue de la totalité et de l'indépendance, nous énoncerons le théorème sous une forme plus générale :

THÉORÈME GÉNÉRAL DE MÜNTZ. — $M = \{\mu_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *étant une suite croissante de nombres réels,*

$$\mu_\nu + \frac{1}{p} > 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant +\infty) \qquad \lim_{\nu \to +\infty} \mu_\nu = +\infty.$$

1° *Si la série* $\sum_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu$ *diverge, le système de vecteurs* $\{\vec{e_\nu} = x^{\mu_\nu}\}$ *est total dans* $L^p(0,1)$ *lorsque* p *est fini, dans* C′(0,1) *lorsque* $p = \infty$; *de plus chaque vecteur est dépendant des autres.*

2° *Si la série* $\sum_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu$ *converge, le système des vecteurs* $\{\vec{e_\nu}\}$ *est non total, mais libre, dans* $L^p(0,1)$ *lorsque* p *est fini, dans* C′(0,1) *lorsque* $p = \infty$.

Nous donnerons dans la suite une démonstration de ce théorème. Nous noterons par P(x ; M) toute combinaison linéaire $\sum a_\nu x^{\mu_\nu}$ d'un nombre fini des x_{μ_ν}, $\mu_\nu \in M$, et nous appellerons polynôme une telle combinaison, par extension de la notion ordinaire de polynôme, qui correspond à des μ_ν entiers ; les μ_ν sont les exposants, les a_ν les coefficients du polynôme.

§ 7. — Passage de puissances à des exponentielles

Faisons le changement de variable $x = e^{-2\pi X}$, et à chaque fonction $f(x)$ définie sur $[0,1]$ faisons correspondre la fonction F(X) définie sur $[0, +\infty]$:

$$\text{(7a)} \qquad F(X) = f(e^{-2\pi X})\, e^{-\frac{2\pi}{p}X} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

On voit immédiatement que

$$\|F\|_{L^p(0,+\infty)} = (1/2\pi)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(0,1)}.$$

La transformation $f \to F$ définit donc pour p fini un isomorphisme multipliant les normes par un facteur constant entre

$L^p(0,1)$ et $L^p(0, +\infty)$; pour $p = \infty$ un isomorphisme conservant les normes entre $C'(0,1)$ (déjà défini) et $C'(0, +\infty)$, sous espace vectoriel de $C(0, +\infty)$ formé des fonctions nulles pour $x = +\infty$. On vérifie aisément que le dual de $C'(0, +\infty)$ est $V[0, +\infty[$.

Dans cet isomorphisme, à la fonction puissance x^{μ_ν} correspond la fonction exponentielle $e^{-2\pi\lambda_\nu X}$, $\lambda_\nu = \mu_\nu + \frac{1}{p}$.

Nous appellerons toujours polynôme une combinaison linéaire à nombre fini de termes

$$P(x; \Lambda) = \sum_{\lambda_\nu \in \Lambda} a_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}.$$

Les a_ν seront encore les coefficients du polynôme.

Le théorème général de Müntz peut donc s'énoncer de la façon suivante :

Théorème. — $\Lambda = \{\lambda_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *étant une suite croissante de nombres réels* > 0, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_\nu = +\infty$;

1° Si $\sum 1/\lambda_\nu = +\infty$, *le système de vecteurs* $\{\vec{e_\nu} = e^{-2\pi\lambda_\nu X}\}$ *est total dans tous les* $L^p(0, +\infty)$ *(p fini) et dans* $C'(0, +\infty)$, *et chaque vecteur est dépendant des autres.*

2° Si $\sum 1/\lambda_\nu < +\infty$, *le système de ces mêmes vecteurs est non total, mais libre, dans tous les* $L^p(0, +\infty)$ *(p fini) et dans* $C'(0 + \infty)$

§ 8. — Démonstration du théorème de Müntz (1)

D'après les théorèmes du § 4, pour que le système des $\{\vec{e_\nu} = e^{-2\pi\lambda_\nu X}\}$ soit total, il faut et il suffit que

a) pour p fini, le système de relations

$$(8a) \quad \begin{cases} \varphi(X) \in L^{p'}(0, +\infty) \quad p' = p/(p-1) \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X} \varphi(X) dX = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \lambda_\nu \; (\nu = 1, 2 \cdots), \end{cases}$$

entraîne $\varphi(X) \equiv 0$;

(1) Des démonstrations d'un genre analogue à celle qui est donnée dans ce paragraphe, ont été données déjà par divers auteurs. Signalons notamment Carleman [1], p. 14-17 ; Szasz [1] ; Szego [1] ; Paley-Wiener [1], p. 32-34. Une démonstration d'un tout autre genre est donnée par MM. Kaczmarz-Steinhaus [1], p. 86-92.

b) pour $p = +\infty$, le système de relations

$$(8b)\quad \begin{cases} \Phi(X) \in V[0, +\infty[\\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda X} d\Phi(X) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = \lambda_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

entraîne $\Phi(X) \equiv 0$.

1° Supposons la série $\Sigma 1/\lambda_\nu$ divergente.

Posons

$$J(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda X} \varphi(X) dX \qquad \text{pour} \qquad p \text{ fini}$$

$$J(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda X} d\Phi(X) \qquad \text{pour} \qquad p = \infty,$$

les relations (8 *a*) (p fini) ou (8 *b*) ($p = \infty$) étant supposées satisfaites.

De toute façon si on pose $\lambda = \sigma + i\tau$, $J(\lambda)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$ et bornée pour $\sigma \geqslant \varepsilon > 0$, et s'annule pour les $\lambda = \lambda_\nu$. Or, M. Blaschke (1) a donné une condition toujours vérifiée par les zéros ζ_ν d'une fonction holomorphe, bornée et $\not\equiv 0$ de la variable complexe ζ dans un domaine $(\mathcal{D})$. Si le domaine $(\mathcal{D})$ est le disque $|\zeta| < 1$, la condition de Blaschke est $\sum_{\zeta_\nu \neq 0} \log | 1/\zeta_\nu | < +\infty$.

Pour un domaine $\mathcal{D}$ connexe quelconque, la condition devient $\sum_{\zeta_\nu \neq \zeta_0} G(\zeta_0, \zeta_\nu) < +\infty$, G étant la fonction de Green, ζ_0 un point quelconque. En particulier pour le domaine $\sigma \geqslant \varepsilon > 0$, nous trouvons

$$\sum_{\lambda_\nu \neq a} \log \left| \frac{1 + \dfrac{a - 2\varepsilon}{\lambda_\nu}}{1 - \dfrac{a}{\lambda_\nu}} \right| < +\infty,$$

a réel $> \varepsilon$. Et comme $\lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu = +\infty$, cette condition est équivalente à $\Sigma 1/\lambda_\nu < +\infty$; par hypothèse cette condition n'est pas satisfaite, on a donc $J(\lambda) \equiv 0$ et par suite d'après (5 *j*) $\varphi(X) \equiv 0$ (p fini) ou $\Phi(X) \equiv 0$ ($p = +\infty$) ; le système $\{\vec{e}_\nu\}$ est total.

(1) Blaschke [1].

Comme le système $\{\vec{e_\nu}\}$ reste total par suppression de l'un quelconque de ses éléments, chaque vecteur est dépendant des autres

2° Supposons la série $\sum 1/\lambda_\nu$ convergente, et de somme S. Alors la condition de BLASCHKE est satisfaite par les λ_ν dans le domaine $(\mathcal{D})$ constitué par le demi-plan $\sigma > 0$. D'après la réciproque du théorème de BLASCHKE on peut construire une fonction $W(\lambda)$ holomorphe dans $(\mathcal{D})$, bornée, $\not\equiv 0$, et s'annulant pour les $\lambda = \lambda_\nu$. On peut prendre

$$W(\lambda) = \prod_{\lambda_\nu \in \Lambda} \left(\frac{1 - \lambda/\lambda_\nu}{1 + \lambda/\lambda_\nu}\right).$$

Pour $\sigma > 0$, $|W(\lambda)| \leqslant 1$; $W(\lambda)$ est d'ailleurs continue en tout point de la verticale $\sigma = 0$, et y prend des valeurs de module 1.

Posons $J(\lambda) = W(\lambda)/(1 + \lambda)^2$.

On voit immédiatement que $J(\lambda) \in H^p$, quel que soit p [1] ; en particulier pour $1 \leqslant p \leqslant 2$, de sorte que d'après les propriétés de la transformation de LAPLACE (§ 5) on peut écrire

$$J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X} \varphi(X) dX$$

$\varphi(X) \in L^{p'}(0, +\infty)$, quel que soit $p' \geqslant 2$.

Montrons que l'on a aussi $\varphi(X) \in L^{p'}$, $1 \leqslant p' < 2$.

D'après $(5j')$

$$\varphi(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(i\tau) e^{2i\pi\tau X} d\tau.$$

Intégrons par parties

$$(8c) \qquad \varphi(X) = -\frac{1}{2\pi X} \int_{-\infty}^{+\infty} J'(i\tau) e^{2i\pi\tau X} d\tau = -\frac{1}{2\pi X} \psi(X).$$

Mais $J'(i\tau) \in L^2(-\infty, +\infty)$ car

$$\frac{J'(\lambda)}{J(\lambda)} = 2\sum \frac{\lambda_\nu}{\lambda^2 - \lambda_\nu^2} - \frac{2}{1+\lambda}$$

et

$$\left|\frac{J'(i\tau)}{J(i\tau)}\right| \leqslant 2\sum \frac{\lambda_\nu}{\tau^2 + \lambda_\nu^2} + \frac{2}{\sqrt{1+\tau^2}} \leqslant 2S + 2.$$

(1) Pour la définition de H^p, voir § 5.

Alors d'après l'égalité de Parseval

$$\int_0^\infty |\psi(X)|^2 dX \leqslant (2S+2)^2 \| J(\lambda) \|_{H^2}^2$$

On peut écrire

$$\int_0^\infty |\varphi(X)|^{p'} dX = \int_0^1 |\varphi(X)|^{p'} dX + \int_1^\infty |\varphi(X)|^{p'} dX$$

avec

$$\int_0^1 |\varphi(X)|^{p'} dX \leqslant \| \varphi(X) \|_\infty^{p'} \leqslant \| J(\lambda) \|_{H^1}^{p'}$$

et

$$\int_1^\infty |\varphi(X)|^{p'} dX \leqslant \left(\int_1^\infty |\psi(X)|^2 dX \right)^{\frac{p'}{2}} \left(\int_1^\infty \frac{dX}{(2\pi X)^{\frac{2}{2-p'}}} \right)^{\frac{2-p'}{2}}$$

d'après l'inégalité de Hölder.

Finalement

$$\int_0^\infty |\varphi(X)|^{p'} dX \leqslant \| J \|_{H^1}^{p'} + h \| J \|_{H^2}^{p'} (2S+2)^{p'} \tag{8d}$$

h étant une constante absolue.

Dans ces conditions, $\varphi(X)$ satisfait aux conditions (8 *a*), $\Phi(X) = \int_0^X \varphi(t)dt$ aux conditions (8 *b*) et ne sont pas $\equiv 0$: cela prouve que le système $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$ n'est pas total.

$J(\lambda)$ n'a pas d'autres racines réelles > 0 que les λ_ν ; donc la forme linéaire $\overrightarrow{\varphi} \in L^{p'}$ (pour p fini) ou $\overrightarrow{\Phi} \in V$ ($p = +\infty$) n'est orthogonale à aucun vecteur $e^{-2\pi\lambda X}$, en dehors de ceux du système. Il en résulte que l'espace vectoriel $A^p(\Lambda)$ adhérence dans $L^p(0, +\infty)$ du sous espace vectoriel engendré par les $\overrightarrow{e_\nu}$ n'est adhérent à aucun $e^{-2\pi\lambda X}$ qui n'appartienne pas au système $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$. En particulier aucun des vecteur $\overrightarrow{e_\nu}$ n'est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par les autres, le système est libre.

On obtient d'ailleurs immédiatement un système biorthogonal normal associé au système $\{ e_\nu \}$.

Si en effet nous posons

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{J'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \tag{8e}$$

on a, quels que soient j et k

$$J_k(\lambda_j) = \delta_{kj}.$$

Par des raisonnements identiques à ceux qui ont été faits plus haut, on montrerait que

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X} \varphi_k(X) dX,$$

$$\varphi_k(X) \in L^{p'}(0, +\infty), \qquad 1 \leqslant p' \leqslant \infty :$$

(8f) Pour $p' \geqslant 2, \qquad \|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}} \leqslant \|J_k\|_{H^p} \leqslant \dfrac{C}{\lambda_1 |J'(\lambda_k)|}$

(8g) Pour $1 \leqslant p' < 2, \qquad \|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}} \leqslant \dfrac{C_1 S + C_2}{\lambda_1 |J'(\lambda_k)|}.$

C, C_1, C_2 étant des constantes absolues, λ_1 le plus petit des λ_ν.

Les formes linéaires $\vec{\varphi_k}(X) \in L^{p'}$ (pour p fini),

$$\vec{\Phi_k}(X) = \int_0^X \varphi_k(t)dt \in V[0, +\infty[\quad (\text{pour } p = +\infty)$$

constituent un tel système biorthogonal normal associé au système $\{\vec{e_\nu}\}$.

Il en existe d'ailleurs une infinité d'autres (le système $\{\vec{e_\nu}\}$ n'étant pas total) ; on pourrait en obtenir en remplaçant $J(\lambda)$ par une autre fonction analogue définie à partir de $W(\lambda)$.

Pour tout $\vec{F}(X) \in A^p(\Lambda)$ on peut écrire formellement

$$F(X) \sim \underset{\nu}{S} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X} \qquad \text{(d'après } 3d)$$

c_k est une forme linéaire continue de $\vec{F} \in A^p(\Lambda)$, et un prolongement à tout L^p (pour p fini) ou C' (pour $p = \infty$) de cette forme linéaire, est celle qui est définie par

$$\varphi_k \in L^{p'} (p \text{ fini}) \qquad \text{ou} \qquad \Phi_k \in V (p = \infty).$$

Autrement dit

$$c_k = \int_0^\infty \varphi_k(X) F(X) dX. \tag{8h}$$

On en déduit l'importante majoration

$$|c_k| \leqslant \|F\|_p \|\varphi_k\|_{p'} \leqslant \frac{C(\Lambda)}{|J'(\lambda_k)|} \|F\|_p. \tag{8i}$$

$C(\Lambda)$ étant une constante dépendant exclusivement de la suite Λ.

Remarque. — On peut étendre le problème de MÜNTZ à un système quelconque de nombres λ_ν réels > 0. Mais les démonstrations deviennent plus compliquées.

1° Si $\sum \lambda_\nu/(\lambda_\nu^2 + 1) = +\infty$, le système $\{\vec{e_\nu}\}$ est total dans L^p, $\infty > p \geqslant 2$, et dans C'.

Je n'ai pas pu prouver qu'il fût total dans L^p, pour $1 \leqslant p < 2$. On peut cependant le prouver en admettant la véracité d'une hypothèse de M. André BLOCH sur la dérivée d'une fonction bornée dans un domaine.

2° Si $\sum \lambda_\nu/(\lambda_\nu^2 + 1) < +\infty$, le système n'est pas total. Je ne traiterai pas la question ici, elle fera l'objet de publications ultérieures. Remarquons seulement que si $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \lambda_\nu = +\infty$, la série $\sum \lambda_\nu/(\lambda_\nu^2 + 1)$ converge ou diverge en même temps que la série $\sum 1/\lambda_\nu$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudierons l'adhérence $A^p(\Lambda)$ du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{e_\nu}$, lorsque la série $\sum 1/\lambda_\nu$ converge. Nous étudierons en même temps la convergence du développement

$$F(X) \sim \underset{\nu}{S} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}.$$

La suite $\{\lambda_\nu\}$ sera supposée donnée une fois pour toutes, de sorte que nous appellerons « constantes » des quantités qui peuvent dépendre de cette suite.

§ 9. — Etude de l'adhérence $A^p(\Lambda)$ dans le cas d'une suite $\{\lambda_\nu\}$ régulière

Rappelons que si, formellement, $F(X) \sim \underset{\nu}{S} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$, on a

$$|c_k| \leqslant \frac{C}{|J'(\lambda_k)|} \|F\|_p. \tag{8i}$$

Nous allons montrer que si la suite $\{\lambda_\nu\}$ vérifie certaines conditions de régularité, la série $\sum |c_k| e^{-2\pi\lambda_k X}$ est convergente pour $X > 0$ et que l'on peut écrire :

$$(9a) \qquad \sum |c_k| e^{-2\pi\lambda_k X} \leqslant C(X) \|F\|_p$$

$C(X)$ étant une constante dépendant exclusivement de X et restant bornée pour $X \geqslant \varepsilon > 0$.

Nous montrerons même que l'on a

$$(9b) \qquad \sum |c_k| e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_k)X} \leqslant C(X) \|F\|_p ;$$

λ_1 est le plus petit des λ_ν.

Pour prendre une condition de régularité simple, nous supposerons

$$(9c) \qquad \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqslant q > 0 \text{ fixe.}$$

Cette condition est en particulier toujours réalisée si les λ_ν sont des entiers. Il est bien évident que toute suite $\{\lambda_\nu\}$ rendant finie la somme $\sum 1/\lambda_\nu$ ne satisfait pas à cette condition, mais alors il faut que la croissance de la suite $\{\lambda_\nu\}$ soit irrégulière, puisque $\limsup_{\nu \to \infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) = +\infty$

D'après (8 *i*) on peut écrire

$$(9d) \qquad \sum_{k \geqslant 1} |c_k| e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_k)X} \leqslant |c_1| + C \sum_{k \geqslant 2} \frac{e^{+2\pi(\lambda_1 - \lambda_k)X}}{|J'(\lambda_k)|} \|F\|_p$$

$$\leqslant C' \|F\|_p \left(1 + \sum_{k \geqslant 2} \frac{e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_k)X}}{|J'(\lambda_k)|}\right)$$

Nous sommes donc amenés à minorer $|J'(\lambda_k)|$ lorsque λ_k tend vers $+\infty$. Faisons d'abord ce calcul.

$$(9e) \qquad |J'(\lambda_k)| = \left(\prod_{\substack{\lambda_\nu \in \Lambda \\ \lambda_\nu \neq \lambda_k}} \left| \frac{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}}{1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}} \right| \right) \frac{1}{2\lambda_k(1 + \lambda_k)^2}$$

On a, pour λ_k assez grand, $\frac{1}{2\lambda_k(1 + \lambda_k)^2} \geqslant e^{-\eta\lambda_k}$, quel que soit

$\eta > 0$. D'autre part la fonction entière $\prod\limits_{\lambda_\nu \in \Lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)$ est de genre 0, on a donc

$$\prod_{\substack{\lambda_\nu \in \Lambda \\ \lambda_\nu \neq \lambda_k}} \left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\right) \leqslant e^{\eta \lambda_k}$$

ce qui donne, sans avoir besoin d'aucune restriction sur la suite $\{\lambda_\nu\}$

$$(9f) \qquad |J'(\lambda_k)| \geqslant e^{-2\eta\lambda_k} \prod_{\substack{\lambda_\nu \in \Lambda \\ \lambda_\nu \neq \lambda_k}} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\right|,$$

pour λ_k assez grand, quel que soit $\eta > 0$.

Mais la fonction entière $E(\lambda) = \prod\limits_{\lambda_\nu \in \Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)$ est aussi de genre 0. M. Hadamard (¹) a montré qu'une telle fonction, considérée en dehors de voisinages de ses zéros, ne peut pas prendre des valeurs dont le module tend trop vite vers 0. Le théorème de M. Hadamard, dit théorème du minimum, a été considérablement précisé depuis, et on en a donné diverses formes. Nous ferons dans notre étude un fréquent usage de ce théorème, mais pas toujours exactement sous les formes habituellement énoncées ; dans ce cas, sans démontrer à chaque fois la proposition, nous renverrons à des ouvrages donnant des énoncés très analogues et dont il suffira de changer un peu la démonstration. Nous utiliserons ici la forme suivante :

(9g) *Si $E(\lambda)$ est une fonction entière de genre 0, dont les zéros réels > 0 λ_ν, rangés par valeurs croissantes, vérifient $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqslant q > 0$, on a pour k assez grand, $|E'(\lambda_k)| \geqslant e^{-\eta\lambda_k}$; et cela quel que soit $\eta > 0$* (²).

On a donc aussi $\prod\limits_{\substack{\lambda_\nu \in \Lambda \\ \lambda_\nu \neq \lambda_k}} \left|1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\right| \geqslant e^{-\eta\lambda_k}$ et par suite

$$(9h) \qquad J'(\lambda_k)| \geqslant e^{-\alpha\lambda_k}$$

(¹) Hadamard [1] ; E. Borel [1], p. 361 et [2], p. 77 82, Lindelof [1].

(²) Vl. Bernstein [1], note II à la fin du livre. Voir en particulier l'énoncé de la page 289. Voir aussi Levinson [1], p. 90.

pour λ_k assez grand ; $\alpha > 0$ quelconque. Cela revient à dire que quel que soit α, il existe une constante $K(\alpha)$ telle que pour *toutes* les valeurs de λ_k

$$(9\,h') \qquad |J'(\lambda_k)| \geqslant K(\alpha)e^{-\alpha\lambda_k}$$

La formule (9 *d*) devient alors :

$$(9\,i) \qquad \sum_{k\geqslant 1} |c_k|\, e^{2\pi(\lambda_1-\lambda_k)X} \leqslant C'\,\|F\|_p\left(1+\frac{1}{K(\alpha)}\sum_{k\geqslant 2} e^{\alpha\lambda_k-2\pi(\lambda_k-\lambda_1)X}\right)$$

On a certainement $\alpha\lambda_k - 2\pi(\lambda_k-\lambda_1)X \leqslant -\alpha\lambda_k$ dès que $X \geqslant \frac{\alpha\lambda_k}{\pi(\lambda_k-\lambda_1)}$; donc pour tout $k \geqslant 2$ dès que $X \geqslant \frac{\alpha\lambda_2}{\pi(\lambda_2-\lambda_1)}$.

Il suffit donc lorsque Z décrit le demi-plan $X \geqslant \varepsilon$, de choisir $\frac{\alpha\lambda_2}{\pi(\lambda_2-\lambda_1)} = \varepsilon$; alors la série du 2e membre de l'inégalité (9 *i*) est majorée par $\sum_{k\geqslant 2} e^{-\alpha\lambda_k}$. Mais la convergence de $\sum 1/\lambda_\nu$ entraîne $\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_k}{k} = +\infty$ de sorte que la série $\sum e^{-\alpha\lambda_k}$ est elle-même à partir d'un certain terme majorée par $\sum e^{-Ak}$, $A > 0$ quelconque, donc convergente ; ce qui démontre bien l'inégalité (9 *b*).

Naturellement cette formule reste valable dans des conditions bien moins restrictives pour la suite $\{\lambda_\nu\}$ que la condition (9 *c*). Il suffit que les intervalles $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu$, qui sont en moyenne très larges pour $\nu \to \infty$, ne soient pas trop souvent très petits. M. Vl. Bernstein (¹), définit un *indice de condensation* de la suite $\{\lambda_\nu\}$, qui est toujours nul lorsque l'on a (9 *c*). Exprimer que cet indice de condensation est nul, revient justement à écrire que la fonction entière $E(\lambda)$ vérifié pour λ_k assez grand $|E'(\lambda_k)| \geqslant e^{-\eta\lambda_k}$, quel que soit $\eta > 0$.

Nous pouvons donc dire que la formule (9 *b*) est valable toutes les fois que l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ est nul.

Les conséquences de la formule (9 *a*) sont très importantes. Posons $Z = X + iY$, $X > 0$

$$G(Z) = \sum_k c_k e^{-2\pi\lambda_k Z}$$

(¹) Vl. Bernstein [1], note II.

G(Z) est holomorphe pour $X > 0$, et représentée par une série de DIRICHLET absolument convergente pour $X > 0$; on a

$$|G(Z)| \leqslant C(X) \, \|F\|_p \tag{9j}$$

Rien ne nous dit *a priori* qu'il y ait identité de la fonction G(X) définie par le développement convergent $\sum c_k e^{-2\pi\lambda_k X}$, et la fonction F(X) qui en tant que vecteur de L^p admet le développement formel

$$\vec{F} \sim \underset{k}{S} c_k \vec{e_k}, \quad \vec{e_k} = e^{-2\pi\lambda_k X}.$$

Mais il est aisé de le montrer. Soit $P_j(X\,;\Lambda)$ une suite de polynômes $\in A^p(\Lambda)$ convergeant vers F(X) dans $L^p(0, +\infty)$.

$$\lim_j \|P_j - F\|_p = 0.$$

Mais d'après (9 *j*)

$$|P_j(Z) - G(Z)| \leqslant C(X) \, \|P_j - F\|_p$$

de sorte qu'en particulier les $P_j(X)$ convergent vers G(X), uniformément pour $X \geqslant \varepsilon > 0$; on a donc bien $G(X) = F(X)$ presque partout.

Nous supprimerons donc la notation G et écrirons

$$F(Z) = \sum_k c_k e^{-2\pi\lambda_k Z}. \tag{9k}$$

Nous pouvons rassembler tous les résultats obtenus dans ce paragraphe en un théorème :

THÉORÈME FONDAMENTAL I. — *Si la série $\sum 1/\lambda_\nu$ converge et si l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ est nul, en particulier si les λ_ν sont des entiers, toute fonction F(X) $\in A^p(\Lambda)$ a les propriétés suivantes :*

1° F(X) *est analytique sur* $]0, +\infty[$ *et prolongeable par une fonction* F(Z), $Z = X + iY$, *holomorphe pour* $X > 0$.

2° F(Z) *a le développement de* DIRICHLET

$$F(Z) = \sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z} ;$$

ce développement, et même le développement $\sum_\nu c_\nu e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_\nu)Z}$ *est nor-*

malement (¹) *convergent dans tout demi-plan* $X \geqslant \varepsilon > 0$; *les* c_ν *sont les composantes de* $\vec{F}$ *suivant le système libre* $\{\vec{e_\nu}\}$.

3° *On a les inégalités* :

$$(9b) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X}\,|F(Z)| \leqslant \sum_\nu |c_\nu|\, e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_\nu)X} \leqslant C(X)\, \|F\|_p.$$

$C(X)$ *étant une constante dépendant exclusivement de* X *et restant bornée dans tout demi-plan* $X \geqslant \varepsilon > 0$.

On en déduit que si des polynômes $\in A^p(\Lambda)$ *ou plus généralement des fonctions* $F_j(X) = \sum_\nu (c_\nu)_j e^{-2\pi\lambda_\nu X} \in A^p(\Lambda)$ *convergent dans* L^p *vers* F, *les* $F_j(Z)$ *convergent vers* $F(Z)$ *uniformément dans tout demi-plan* $X \geqslant \varepsilon > 0$, *et même que dans un tel demi plan, on a uniformément* :

$$\lim_j e^{2\pi\lambda_1 X}\left[\sum_\nu |(c_\nu)_j - c_\nu|\, e^{-2\pi\lambda_\nu X}\right] = 0$$

On pourrait démontrer de la même manière que pour $X > 0$, on a

$$\sum_{\lambda_k \geqslant \lambda} |c_k|\, e^{(\lambda - \lambda_k)2\pi X} \leqslant C_\lambda(X)\, \|F\|_p.$$

En particulier on a la suite des inégalités ($h = 1, 2, ..$)

$$(9l) \qquad \operatorname*{Max}_{X \geqslant \varepsilon} \left| \frac{F(Z) - \sum_{k<h} c_k e^{-2\pi\lambda_k Z}}{e^{-2\pi\lambda_h Z}} \right| \leqslant C(\varepsilon, h)\, \|F\|_p,$$

$C(\varepsilon, h)$ étant une constante dépendant exclusivement de ε et h.

Il résulte des théorèmes démontrés ci-dessus que pour $Z = X + iY$ fixe, $X > 0$, $F(Z)$ est une forme linéaire continue de $\vec{F} \in A^p(\Lambda)$. Il est intéressant de prolonger cette forme linéaire en l'étendant de $A^p(\Lambda)$ à $L^p(0, +\infty)$ (p fini), à $C'(0, +\infty)$ ($p = \infty$) ; c'est-à-dire de déterminer $\varphi(t, Z) \in L^{p'}(0, +\infty)$, telle que pour toute fonction $\vec{F} \in A^p(\Lambda)$, on ait

$$(9m) \qquad F(Z) = \int_0^\infty \varphi(t, Z) F(t)\, dt.$$

(¹) Une série est dite normalement convergente lorsque la série des valeurs absolues est uniformément convergente.

Il suffit d'ailleurs pour cela que l'on ait

$$(9\,n) \qquad e^{-2\pi\lambda_\nu Z} = \int_0^\infty \varphi(t, Z)\, e^{-2\pi\lambda_\nu t}\, dt \qquad (\nu = 1, 2 \cdots),$$

car alors $(9\,m)$ est vraie lorsque F est un polynôme et par suite pour toute fonction F, limite de polynômes.

Il y a plusieurs méthodes pour déterminer une telle fonction $\varphi(t, Z)$ (qui naturellement n'est pas unique).

Par exemple, la formule $(8\,h)$

$$c_\nu = \int_0^\infty \varphi_\nu(t) F(t) dt$$

suggère

$$F(Z) = \sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z} = \int_0^\infty F(t) \left(\sum_\nu \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\right) dt,$$

c'est-à-dire

$$(9\,o) \qquad \varphi(t, Z) = \sum_\nu \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}.$$

La série au second membre est une série convergente de vecteurs de $L^{p'}$, et même la somme des normes est finie car

$$\sum \| \varphi_\nu \|_{p'} e^{-2\pi\lambda_\nu X} \leqslant C \sum \frac{e^{-2\pi\lambda_\nu X}}{|J'(\lambda_\nu)|} \leqslant C(X).$$

Il est bon de remarquer que $\varphi(t, Z)$ (pour Z fixe) est ainsi déterminée comme limite de vecteurs de $L^{p'}$, mais qu'il pourrait n'y avoir convergence pour aucune valeur particulière de t [1]. Mais les fonctions ici considérées sont indépendantes de p' ; on peut donc faire $p' = \infty$, ce qui montre qu'il s'agit d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

On peut obtenir aussi cette même fonction $\varphi(t, Z)$ en cherchant sa transformée de LAPLACE

$$J(\lambda, Z) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda t} \varphi(t, Z) dt,$$

[1] De même que dans la théorie des séries de FOURIER, si

$$f(x) \in L^2(0,1), \qquad \text{on a} \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{2i\pi\nu x},$$

la série du 2e membre est convergente dans L^2 vers $f(x)$, mais pour chaque valeur particulière de x, la série peut diverger.

qui pour les valeurs $\lambda = \lambda_\nu$ prend les valeurs $e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, d'après (9 *n*).

La transformée de LAPLACE de $\varphi_\nu(t)$ est

$$J_\nu(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)J'(\lambda_\nu)}.$$

Nous pourrons alors prendre

$$J(\lambda, Z) = \sum_\nu J_\nu(\lambda) e^{-2\pi\lambda_\nu Z} = J(\lambda) \sum_\nu \frac{e^{-2\pi\lambda_\nu Z}}{(\lambda - \lambda_\nu)J'(\lambda_\nu)}. \tag{9p}$$

On détermine ainsi $J(\lambda, Z)$ pour tout $\lambda = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqslant 0$, par une série uniformément convergente ; d'ailleurs cette série est aussi convergente dans H^p ($p \geqslant 1$ quelconque) et même la série des normes est convergente car

$$\sum e^{-2\pi\lambda_\nu X} \| J_\nu(\lambda) \|_{H^p} \leqslant C \sum \frac{e^{-2\pi\lambda_\nu X}}{|J'(\lambda_\nu)|} \leqslant C(X).$$

On a des propriétés analogues pour $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda, Z)$ (Z fixe), de sorte que, d'après les inégalités (8 *c*) et (8 *d*) le passage à la limite peut se faire pour la formule d'inversion de la transformation de LAPLACE et on a

$$\varphi(t, Z) e^{-2\pi\sigma t} = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\sigma + i\tau, Z) e^{2i\pi\tau t} d\tau.$$

L'intégrale du 2e membre est d'ailleurs sommable pour tout t, de sorte que cette formule donne $\varphi(t, Z)$ pour tout t comme une fonction continue.

Naturellement en revenant aux variables x et z, et aux fonctions $f(x) \in L^p(0,1)$, on peut donner un théorème analogue au théorème général. On obtient :

THÉORÈME FONDAMENTAL II. — *Si les μ_ν sont réels, $\mu_\nu + \frac{1}{p} > 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mu_\nu = +\infty$; si la série $\sum\limits_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu$ converge, et si l'indice de condensation de la suite $\{\mu_\nu\}$ est nul, en particulier si les μ_ν sont des entiers, toute fonction $f(x) \in A^p(M)$ a les propriétés suivantes :*

1° *$f(x)$ est analytique sur $]0,1[$ et prolongeable par une fonction*

$f(z)$, $z = re^{i\theta}$, holomorphe sur tout le domaine de la surface de RIEMANN *de log z défini par $r < 1$.*

2° *$f(z)$ a le développement formel en série de puissances*

$$f(z) = \sum c_\nu z^{\mu_\nu}. \tag{9q}$$

Le développement $\Sigma c_\nu z^{\mu_\nu - \mu_1}$ est normalement convergent dans toute région $r \leqslant 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; les c_ν sont les composantes de $\vec{f}$ suivant le système libre des $\{\vec{x}^{\mu_\nu}\}$.

3° *On a les inégalités*

$$r^{-\mu_1} |f(z)| \leqslant \sum |c_\nu| r^{\mu_\nu - \mu_1} \leqslant C(r) \|f\|_{L^p(0,1)}, \tag{9r}$$

$C(r)$ étant une constante dépendant exclusivement de r et restant bornée pour $r \leqslant 1 - \varepsilon$; on en déduit que si des polynômes ou plus généralement des $f_j(x) = \sum (c_\nu)_j x^{\mu_\nu} \in A^p(M)$ convergent dans L^p vers f, les $z^{-\mu_1} f_j(z)$ convergent vers $z^{-\mu_1} f(z)$ uniformément dans toute région $r \leqslant 1 - \varepsilon$, et même que l'on a uniformément dans une telle région

$$\lim_j \left[\sum_\nu |(c_\nu)_j - c_\nu| r^{\mu_\nu - \mu_1}\right] = 0.$$

Sous cette forme le théorème est susceptible des mêmes améliorations que sous la première forme.

§ 10. — Etude de l'adhérence $A^p(\Lambda)$ dans le cas général

Lorsque l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ n'est pas nul, la démonstration du théorème fondamental du précédent paragraphe n'est plus valable ; un exemple va nous montrer que le théorème n'est plus toujours vrai.

Prenons [1]

$$2\pi\lambda_{2n} = n^2 \qquad 2\pi\lambda_{2n+1} = n^2 + e^{-n^4}$$

$$F(Z) = \sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}; \qquad c_{2n} = e^{n^3},\ c_{2n+1} = -e^{n^3}.$$

On voit sans peine que la série de DIRICHLET **est partout divergente : le terme général tend vers ∞.**

[1] Il faut commencer à λ_1, comme toujours.

Mais groupons les termes 2 par 2 :

$$\mathcal{G}_n(Z) = c_{2n} e^{-2\pi\lambda_{2n}Z} + c_{2n+1} e^{-2\pi\lambda_{2n+1}Z}.$$

Pour Z fixe, on a, pour $n \to \infty$

$$|\mathcal{G}_n(Z)| \sim e^{n^3} e^{-n^2X} \left| 1 - e^{-Ze^{-n^4}} \right| \sim |Z| e^{n^3 - n^2X - n^4};$$

la série $\sum_n \mathcal{G}_n(Z)$ est donc absolument convergente pour tout Z et définit F(Z) comme une fonction entière.

Montrons que la série $\sum_n \mathcal{G}_n(Z)$ est normalement convergente dans tout secteur angulaire

$$X \geqslant \alpha \qquad \left| \frac{Y}{X - \alpha} \right| \leqslant K, \qquad \alpha \text{ réel, K réel} > 0, \text{ quelconques.}$$

Dans le demi-plan $X \geqslant \alpha$, on a la majoration uniforme

$$\left| 1 - e^{-Ze^{-n^4}} \right| \leqslant C |Z| e^{-n^4}.$$

Donc

$$|\mathcal{G}_n(Z)| \leqslant Ce^{n^3 - n^4} |Z| e^{-n^2X}.$$

Dans la partie du secteur où $X \leqslant 0$, $|Z|$ est borné, et $e^{-n^2X} \leqslant e^{n^2|\alpha|}$; dans la partie où $X \geqslant 0$, $|Z| e^{-n^2X} \leqslant |Z| e^{-X}$ qui est borné. Finalement $|\mathcal{G}_n(Z)| \leqslant Ae^{|\alpha| n^2 + n^3 - n^4}$ est bien majoré par le terme d'une série numérique convergente.

On peut voir aussi que la série $\sum \mathcal{G}_n(Z)$ ne saurait converger uniformément dans aucun demi-plan $X \geqslant \alpha$: car alors d'une part $|F(Z)|$ serait bornée par un nombre M sur la verticale $X = \alpha$, d'autre part les inégalités de CAUCHY [1], donneraient $M \geqslant e^{n^3} e^{-\alpha n^2}$ $(n = 0, 1, 2...)$ ce qui est absurde.

La fonction F(X) est $\in L^p(0, +\infty)$ (p fini quelconque) et de $C'(0, +\infty)$; elle est limite de polynômes, à savoir

$$P_n(Z) = \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant n} \mathcal{G}_\nu(Z),$$

et cependant son développement en série de DIRICHLET diverge partout.

[1] Dans le cas de convergence uniforme, même par groupements de termes, sur une verticale, le maximum du module de la fonction dépasse le module de chaque terme de la série.

On pourrait construire des exemples plus complexes que celui-ci; il se peut que les groupes de λ_ν très serrés comprennent un nombre de termes croissant. De toute façon les caractères observés dans cet exemple sont universels. Nous montrerons ultérieurement que toutes les fois que l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ n'est pas nul, le théorème fondamental du § 9 est faux ; l'hypothèse de l'indice de condensation nul apparaît comme nécessaire et suffisante pour la validité de ce théorème.

Dans le cas général le théorème doit s'énoncer sous la forme suivante :

THÉORÈME FONDAMENTAL. I. — *Si la série* $\sum 1/\lambda_\nu$ *converge, on peut répartir les* λ_ν *en une infinité de groupes de termes consécutifs* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \cdots \mathcal{G}_n, \cdots$ *dépendant exclusivement du système* $\{\lambda_\nu\}$, *et tels que toute fonction* $F(X) \in A^p(\Lambda)$ *possède les propriétés suivantes :*

1° $F(X)$ *est analytique sur* $]0, +\infty[$ *et prolongeable par une fonction* $F(Z)$, $Z = X + iY$, *holomorphe pour* $X > 0$.

2° $F(Z)$ *a le développement de* DIRICHLET *(peut-être divergent)* $F(Z) = \sum_\nu c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, *où les* c_ν *sont les composantes de* $\vec{F}$ *suivant e système libre* $\{\vec{e}_\nu\}$. *Si on pose*

$$\mathcal{G}_n < F(Z) > = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

la série $e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mathcal{G}_n < F(Z) >)$ *est normalement convergente dans tout secteur angulaire* (ε, K) :

$$X \geqslant \varepsilon > 0, \qquad |Y/(X-\varepsilon)| \leqslant K$$

(*mais peut, pour* ε *assez faible, n'être pas uniformément convergente dans le demi-plan* $X \geqslant \varepsilon$).

3° *On a les inégalités*

$$(10a) \quad e^{2\pi\lambda_1 X} |F(Z)| \leqslant e^{2\pi\lambda_1 X} \sum |\mathcal{G}_n < F(Z) >| \leqslant C(X, Y) \| F \|_p$$

$C(X, Y)$ *est une quantité dépendant exclusivement de* X, Y, *et bornée dans tout secteur angulaire* (ε, K).

On en déduit que si des polynômes $\in A^p(\Lambda)$ *ou plus généralement des fonctions* $F_j(X) \in A^p(\Lambda)$ *convergent dans* L^p *vers* F, *les* $F_j(Z)$ *convergent vers* F(Z) *uniformément dans tout secteur* (ε, K), *et même que dans un tel secteur on a uniformément*

$$\lim e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_n | \mathcal{G}_n < F - F_j > | = 0.$$

L'examen de la démonstration du théorème fondamental du § 9 montre que toute la démonstration résultera de celle de l'inégalité (10 *a*), $\vec{F}$ étant un vecteur de $A^p(\Lambda)$ et les c_ν ses composantes suivant le système libre $\{ e_\nu \}$.

Pour n'avoir pas à utiliser d'intégrations par parties (8 *c*), (8 *d*) et n'avoir besoin que de l'inégalité de Parseval Riesz, nous prendrons $1 \leqslant p \leqslant 2$ et nous démontrerons ensuite le théorème pour p quelconque.

Effectuons une répartition quelconque des λ_ν en une succession de groupements de termes consécutifs $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2, \ldots \mathcal{G}_n \ldots$, le groupement $\mathcal{G}_1$ étant réduit à un seul élément λ_1 et posons

$$\mathcal{G}_n < F(Z) > = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

D'après (8 *h*),

$$c_\nu = \int_0^\infty F(t)\varphi_\nu(t)dt.$$

Si nous posons formellement

$$\varphi(t, Z) = \sum \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z},$$

$$\mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

on a évidemment

$$\mathcal{G}_n < F(Z) > = \int_0^\infty F(t) \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > dt$$

de sorte que l'on a la majoration

$$(10\,b) \qquad | \mathcal{G}_n < F(Z) > | \leqslant \| F \|_p \, \| \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > \|_{p'}$$

et pour prouver la formule (10 *a*) il suffit de prouver

$$(10\,c) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqslant 1} \| \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > \|_{p'} \leqslant C(X, Y)$$

$C(XY)$ restant bornée dans tout secteur (ε, K). C'est une inégalité qui dépend de la suite λ_ν et des groupements $\mathcal{G}_n$, mais non de F. Elle peut s'écrire

$$\| \varphi_1(t) \|_{p'} + e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqslant 2} \| \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > \|_{p'} \leqslant C(X, Y).$$

Les fonctions $\varphi_\nu(t)$ sont définies par leurs transformées de Laplace

$$J_\nu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda t} \varphi_\nu(t) dt, \qquad \lambda = \sigma + i\tau, \qquad \sigma > 0$$

(8e) $$J_\nu(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu) J'(\lambda_\nu)}.$$

Si nous posons formellement

$$J(\lambda, Z) = \sum J_\nu(\lambda) e^{-2\pi\lambda_\nu Z},$$
$$\mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} J_\nu(\lambda) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

on voit que $\mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) >$ est la transformée de Laplace de $\mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) >$. D'ailleurs $\mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \in H^p$, quel que soit $p \geqslant 1$, et

(10d) $$\| \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \|_{H^p} = \| \mathcal{G}_n < J(i\tau, Z) > \|_{L^p(-\infty, +\infty)}$$

L'inégalité de Parseval Riesz donne pour $1 \leqslant p \leqslant 2$:

$$\| \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > \|_{L^{p'}(0, +\infty)} \leqslant \| \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \|_{H^p}$$

de sorte que pour démontrer (10 c) il suffit de démontrer :

(10e) $$e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqslant 1} \| \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \|_{H^p} \leqslant C(X, Y)$$

c'est-à-dire

$$\| J_1(\lambda) \|_{H^p} + e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqslant 2} \| \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \|_{H^p} \leqslant C(X, Y).$$

Cessons une fois pour toutes de nous occuper de $\| J_1(\lambda) \|_{H^p}$, qui ne dépend pas de X, Y ; il nous faut ensuite trouver une majoration du groupe de termes $\mathcal{G}_n$ qui ne le disloque pas en ses différents termes ; nous utiliserons une représentation par une intégrale dans le plan complexe.

On peut écrire

$$(10f)\quad \begin{cases} J_k(\lambda)e^{-2\pi\lambda_k Z} = J(\lambda)\, \dfrac{e^{-2\pi\lambda_k Z}}{(\lambda-\lambda_k)J'(\lambda_k)} \\ \qquad\qquad\quad = J(\lambda)\cdot \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_k} \dfrac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\, d\zeta. \end{cases}$$

Γ_k est une courbe fermée parcourue dans le sens direct, entourant une fois le point λ_k mais n'entourant aucun autre des λ_ν, et n'entourant pas λ [1].

De même

$$(10g)\qquad \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > = J(\lambda)\cdot \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\, d\zeta.$$

$\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ étant une courbe fermée parcourue dans le sens direct entourant une fois les $\lambda_k \in \mathcal{G}_n$ et aucun autre des λ_ν et n'entourant pas λ.

Prenons pour $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ une courbe composée des 2 segments de droite ($R_n \leqslant |\zeta| \leqslant R'_n$, Arg $\zeta = \psi$) et ($R_n \leqslant |\zeta| \leqslant R'_n$, Arg $\zeta = -\psi$), et des 2 arcs de cercle ($|\zeta| = R_n$, $|\text{Arg } \zeta| \leqslant \psi$) et ($|\zeta| = R'_n$, $|\text{Arg}\, \zeta| \leqslant \psi$) ψ est un angle vérifiant $0 < \psi < \pi/2$; cela suppose λ non réel > 0 et R_n, R'_n choisis de telle façon que seuls les λ_k du groupe $\mathcal{G}_n$ soient contenus dans la couronne $R_n \leqslant |\zeta| \leqslant R'_n$. Nous prendrons aussi $R'_n = R_{n+1}$.

D'après ($10\,d$) il suffit de considérer $\lambda = i\tau$ purement imaginaire, de sorte que $|\lambda - \zeta| \geqslant \delta \geq 0$ fixe lorsque ζ parcourt les $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$.

Alors (10 g) permet d'écrire (10 e) sous la forme

$$(10h)\quad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n \geqslant 2} \| \mathcal{G}_n < J(\ , Z) > \|_{H^p} \leqslant \| J(\lambda) \|_{H^p} \times \frac{K(X, Y)}{\delta}$$

K(X, Y) étant la somme de 2 intégrales

$$(10h_1)\qquad K_1(X, Y) = e^{2\pi\lambda_1 X}\, \frac{2}{2\pi} \int_{R_2 e^{i\psi}}^{e^{i\psi}\cdot\infty} \left| \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)} \right| |d\zeta|$$

$$(10h_2)\quad K_2(X, Y) = e^{2\pi\lambda_1 X}\, \frac{2}{2\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \int_{R_n e^{-i\psi}}^{R_n e^{+i\psi}} \left| \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)} \right| |d\zeta|$$

[1] Immédiat par le calcul des résidus. Cette courbe Γ_k doit naturellement se déplacer lorsque λ se déplace.

et nous serons parvenus à la démonstration du théorème si nous majorons $K_1(X, Y)$ et $K_2(X, Y)$ dans tout secteur (ε, K).

Occupons nous d'abord de la majoration de $K_1(X, Y)$ qui est *indépendante du choix des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$.

Nous avons déjà vu que pour $|\zeta| \to +\infty$, $\sigma > 0$, $|J(\zeta)| \geqslant e^{-\eta|\zeta|} |E(\zeta)|$, avec

$E(\zeta) = \prod_\nu (1 - \zeta/\lambda_\nu)$; et cela, quel que soit $\eta > 0$ [1].

Evaluons $|E(\zeta)|$. Déterminons d'abord ν_0 tel que $\nu > \nu_0$ entraîne $\sum_{\nu > \nu_0} 1/\lambda_\nu \leqslant \eta$

$$E(\zeta) = \prod_{\nu \leqslant \nu_0} (1 - \zeta/\lambda_\nu) \times \prod_{\nu > \nu_0} (1 - \zeta/\lambda_\nu).$$

Pour $|\zeta| \to +\infty$, le premier de ces deux produits dépasse $e^{-\eta|\zeta|}$. D'autre part, lorsque ψ est donné, il existe une constante ρ telle que : $\operatorname{Arg} u = \pm \psi$ entraîne $|1 - u| \geqslant e^{-\rho|u|}$; on a alors, pour $\operatorname{Arg} \zeta = \pm \psi$

$$\left| \prod_{\nu > \nu_0} (1 - \zeta/\lambda_\nu) \right| \geqslant e^{-\rho|\zeta| \sum_{\nu > \nu_0} 1/\lambda_\nu} \geqslant e^{-\eta\rho|\zeta|}$$

On a donc pour $|\zeta| \to +\infty$, $\operatorname{Arg} \zeta = \pm \psi$

$$|E(\zeta)| \geqslant e^{-\eta(1+\rho)|\zeta|} ;$$

et cela quel que soit $\eta > 0$.

On a donc finalement

$$|E(\zeta)| \geqslant e^{-\alpha|\zeta|}$$

quel que soit $\alpha > 0$, et aussi

$$(10\,i) \qquad |J(\zeta)| \geqslant e^{-\alpha|\zeta|}$$

quel que soit $\alpha > 0$.

Finalement cela signifie que, quel que soit ψ, et pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver une constante > 0, $K(\alpha, \psi)$, dépendant exclusivement de α et ψ, telle que

$$(10\,i') \qquad |J(\zeta)| \geqslant K(\alpha, \psi) e^{-\alpha|\zeta|}$$

avec $\operatorname{Arg} \zeta = \pm \psi$, $|\zeta|$ quelconque.

[1] Voir formule (9 *f*).

Quant à $e^{-2\pi\zeta Z}$, son module peut s'écrire, si nous posons

$$\zeta = re^{\pm i\psi}, \qquad Z = X + iY :$$

$$(10j) \qquad |e^{-2\pi\zeta Z}| = e^{-2\pi r(X\cos\psi - Y\sin\psi)}.$$

Compte tenu de $|Y| \leqslant K(X - \varepsilon) \leqslant KX$, ce module est majoré par $e^{-2\pi rX}$ $(\cos\psi - K|\sin\psi|)$.

Comme, lorsque ψ tend vers 0, $\cos\psi - K\,|\sin\psi|$ tend vers 1, on peut choisir ψ assez faible pour que $\cos\psi - K|\sin\psi| \geqslant \beta$, pourvu que $0 < \beta < 1$.

On a, dans ces conditions

$$(10k) \qquad |e^{-2\pi\zeta Z}| \geqslant e^{-2\pi\beta rX}.$$

Cette formule est d'ailleurs encore valable si Z reste dans le secteur (ε, K) et ζ dans le secteur $|\operatorname{Arg}\zeta| \leqslant \psi$.

Il vient alors

$$(10l) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X}\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| |d\zeta| \leqslant \frac{e^{2\pi\lambda_1 X - 2\pi\beta rX + \alpha r}}{K(\alpha, \psi)}\, dr$$

quantité certainement majorée par $\frac{1}{K(\alpha, \psi)}e^{-\alpha r}dr$ si

$$X \geqslant \frac{\alpha r}{\pi(\beta r - \lambda_1)} \geqslant \frac{\alpha R_2}{\pi(\beta R_2 - \lambda_1)}$$

pourvu que $\beta R_2 - \lambda_1 > 0$.

Comme $R_2 > \lambda_1$, on peut d'abord choisir β tel que $0 < \beta < 1$, $\beta R_2 - \lambda_1 > 0$; cela nous détermine une borne supérieure de ψ. L'inégalité $X \geqslant \varepsilon$ nous permet ensuite de choisir α tel que $\frac{\alpha R_2}{\pi(\beta R_2 - \lambda_1)} = \varepsilon$; α et ψ étant ainsi choisis, on a

$$(10m) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X}\int_{R_2 e^{i\psi}}^{\infty\cdot e^{i\psi}}\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| |d\zeta| \leqslant \frac{1}{K(\alpha, \psi)}\int_{R_2}^{\infty} e^{-\alpha r}dr,$$

quantité bornée.

Par contre, en ce qui concerne la majoration de $K_2(X, Y)$ intervient d'une façon fondamentale le choix des groupements $\mathcal{G}_n$. En effet sur l'arc de cercle $(|\zeta| = R_n, |\operatorname{Arg}\zeta| \leqslant \psi)$, la majoration (10 k) reste valable, mais la minoration (10 i) ne reste valable que si le cercle $|\zeta| = R_n$ ne passe trop près d'aucun des points λ_ν.

Nous utiliserons le théorème du minimum de HADAMARD sur les fonctions entières sous la forme suivante [1] :

(10 n) *Si* E(λ) *est une fonction entière de genre* 0, *on peut construire une suite de nombres* $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ *croissant indéfiniment, tels que chaque couronne* $r_n \leqslant |\lambda| < r_{n+1}$ *contienne au moins un zéro de* E(λ) *et que l'inégalité :* $\min\limits_{|\lambda|=r_n} |E(\lambda)| \geqslant e^{-\alpha r_n}$ *soit vérifiée pour* n *assez grand, quel que soit* $\alpha > 0$.

Nous prendrons désormais $R_n = r_n$, pour $n \geqslant 2$; $\mathcal{G}_n$ est l'ensemble des λ_ν compris entre r_n et r_{n+1}.

Alors il existe une constante $K(\alpha)$ dépendant exclusivement de α, telle que, pour $|\zeta| = R_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $|J(\zeta)| \geqslant K(\alpha)e^{-\alpha|\zeta|}$; quel que soit $\alpha > 0$.

En déterminant α comme plus haut $\left(\dfrac{\gamma R_2}{\pi(\beta R_2 - \lambda_1)} = \varepsilon\right.$ on a

$$(10\,o) \qquad \int_{R_n e^{-i\psi}}^{R_n e^{+i\psi}} e^{2\pi\lambda_1 X}\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| |d\zeta| \leqslant \frac{2\psi R_n}{K(\alpha)}\, e^{-\alpha R_n}.$$

Comme chaque intervalle (R_n, R_{n+1}) contient au moins un λ_ν, on a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n/n = +\infty$ de sorte que la série $\sum R_n e^{-\alpha R_n}$ converge, et $K_2(X, Y)$ est bien bornée dans le secteur (ε, K), *c. q. f. d.*

Ainsi nous avons bien démontré l'inégalité (10 a), donc le théo rème fondamental, pour $1 \leqslant p \leqslant 2$, avec les $\mathcal{G}_n$ choisis comme l'indique la démonstration : la suite des r_n doit satisfaire au théorème du minimum de HADAMARD, et $\mathcal{G}_n$ est l'ensemble des λ_ν compris entre r_n et r_{n+1}. Le choix de la suite $\{r_n\}$, et par conséquent des groupements $\mathcal{G}_n$ comporte évidemment un certain arbitraire ; mais pour tous les choix possibles (qui ont un certain caractère de constance) des r_n satisfaisant au théorème de HADAMARD, le théorème fondamental s'applique. On pourra, la suite $\{\lambda_\nu\}$ une fois donnée, supposer les $\mathcal{G}_n$ formés une fois pour toutes ; ils sont indépendants de la fonction F, et nous les appellerons dans la suite « les groupements de termes $\mathcal{G}_n$ ».

Comme dans le cas de l'indice de condensation nul, la formule (10 a) peut être étendue par une formule analogue à (9 l).

[1] V. BERNSTEIN [1], note II. Voir aussi VALIRON [1].

Le théorème fondamental et l'inégalité (10 a) n'ont été démontrés que pour $1 \leqslant p \leqslant 2$. Il n'y a aucune difficulté à les étendre à p quelconque.

Si
$$F(X) \backsim \underset{\nu}{S} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X} \in L^p,$$
alors
$$e^{-2\pi\varepsilon X} F(X) \backsim \underset{\nu}{S} c_\nu e^{-2\pi(\lambda_\nu + \varepsilon)X} \in L^1, \quad (\varepsilon > 0)$$
et le théorème (10 a) ayant été démontré pour $p = 1$, on a,
$$\sum \left| \mathcal{G}_n < e^{2\pi\lambda_1 Z} F(Z) > \right| = \sum \left| \mathcal{G}_n < (e^{2\pi(\lambda_1 + \varepsilon)Z})(e^{-2\pi\varepsilon Z} F(Z)) > \right|$$
$$\leqslant C_\varepsilon(X, Y) \| e^{-2\pi\varepsilon X} F(X) \|_1,$$
$C_\varepsilon(XY)$ étant la constante de l'inégalité (10 a), pour $p = 1$ et la suite des $(\lambda_\nu + \varepsilon)$.

Comme
$$\| e^{-2\pi\varepsilon X} F(X) \|_1 \leqslant K(\varepsilon) \| F(X) \|_p,$$
l'inégalité (10 a) est bien montrée pour p quelconque.

Comme dans le cas de l'indice de condensation nul de la suite $\{\lambda_\nu\}$, $F(Z)$ pour $Z = X + iY$ fixe, $X > 0$, est une forme linéaire continue de $\overrightarrow{F} \in A^p(\Lambda)$; et de la même manière on peut former un prolongement à $L^p(0, +\infty)$ (p fini) ou $C'(0, +\infty)$ ($p = \infty$) de cette forme linéaire.

Il s'agit ici encore de déterminer $\varphi(t, Z) \in L^{p'}$ telle que

$$(10p) \qquad F(Z) = \int_0^\infty \varphi(t, Z) F(t) dt.$$

Mais cette fonction $\varphi(t, Z)$ a déjà été écrite au cours de la démonstration : c'est
$$\varphi(t, Z) = \sum \varphi_\nu(t) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}.$$

Nous n'avions vu là qu'une expression formelle ; mais nous savons maintenant que la série $\sum(\mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) >)$ est convergente dans $L^{p'}$ et même que $\sum \| \mathcal{G}_n < \varphi(t, Z) > \|_{L^{p'}} < +\infty$ (d'après (10 c)). Comme d'ailleurs on peut prendre p' quelconque, en particulier $p' = \infty$, $\varphi(t, Z)$ est définie comme série uniformément convergente de fonctions continues.

On peut aussi déterminer $\varphi(t, Z)$ par sa transformée de LAPLACE $J(\lambda, Z) = \sum J_\nu(\lambda)\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$; cette expression également n'avait été utilisée que comme écriture formelle, mais nous savons maintenant que la série $\sum(\mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) >)$ est convergente dans H^p (p quelconque), et même que $\sum \| \mathcal{G}_n < J(\lambda, Z) > \|_{H^p} < +\infty$ (d'après (10 e).) Comme on peut aussi prendre $p = \infty$, $J(\lambda, Z)$ est donnée comme série uniformément convergente de fonctions holomorphes pour $\sigma > 0$ et continues pour $\sigma = 0$. Il existe d'ailleurs une représentation très simple de $J(\lambda, Z)$ par une intégrale dans le plan complexe

$$J(\lambda, Z) = \sum_n J(\lambda)\, \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda - \zeta)}\, d\zeta$$

ou

$$(10q) \qquad J(\lambda, Z) = J(\lambda)\, \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda - \zeta)}\, d\zeta$$

Γ étant la courbe parcourue dans le sens direct, formée des 2 demi-droites $\operatorname{Arg} \zeta = \pm \psi$(ou une déformation de cette courbe, de façon que λ ne soit jamais entouré). On peut d'ailleurs démontrer directement la convergence de cette intégrale; si nous avions commencé par là (ce qui n'aurait exigé que la majoration de $K_1(X, Y)$ dans (10 h) ; aucune étude de groupements de termes n'aurait été nécessaire) nous aurions directement montré la 1re partie du théorème fondamental, sans passer par l'inégalité (10 a) ; nous avons préféré tout faire d'un seul coup.

Pour revoir d'un seul coup l'enchaînement des diverses propriétés, nous redonnons un tableau synthétique des fonctions introduites :

$$(10r) \quad \begin{cases} W(\lambda) = \prod_\nu \left(\dfrac{1 - \lambda/\lambda_\nu}{1 + \lambda/\lambda_\nu}\right) \\[2ex] J(\lambda) = \dfrac{W(\lambda)}{(1 + \lambda)^2} \\[2ex] J(\lambda, Z) = J(\lambda)\, \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda - \zeta)}\, d\zeta; \qquad Z = X + iY,\ X > 0 \\[2ex] \varphi(t, Z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} J(i\tau, Z)\, e^{2i\pi\tau t} d\tau \end{cases}$$

Alors pour toute $F(X) \in A^p(\Lambda)$,

$$F(Z) = \int_0^\infty F(t)\varphi(t, Z)\, dt.$$

Le théorème fondamental peut être énoncé avec les variables x et z, dans $L^p(0, 1)$:

Théorème fondamental II. — *Si les* $\{\mu_\nu\}$ *sont réels,* $\mu_\nu + \frac{1}{p} > 0$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mu_\nu = +\infty$; *si la série* $\sum\limits_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu$ *converge, on peut répartir les* μ_ν *en une infinité de groupes de termes consécutifs* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \cdots \mathcal{G}_n \cdots$ *tels que tout* $f(x) \in A^p(M)$ *possède les propriétés suivantes :*

1° $f(x)$ *est analytique sur* $]0,1[$ *et prolongeable par une fonction* $f(z)$, $z = re^{i\theta}$, *holomorphe sur tout le domaine de la surface de* Riemann *de* $\log z$ *défini par* $r < 1$.

2° $f(z)$ *a le développement en série de puissances (peut être divergent)*

$$f(z) = \sum c_\nu z^{\mu_\nu},$$

où les c_ν *sont les composantes de* $\vec{f}$ *suivant le système libre des* $\{\overrightarrow{x^{\mu_\nu}}\}$

La série $\sum (\mathcal{G}_n < z^{-\mu_1} f(z) >)$ *est normalement convergente dans toute région* (ε, K)

$$r \leqslant 1 - \varepsilon < 1 ; \quad \left| \frac{\theta}{\log r} \right| \leqslant K,$$

(*donc en particulier dans tout compact* $r \leqslant 1 - \varepsilon < 1$; $|\theta| \leqslant \theta_0$), *mais peut pour* ε *assez faible n'être pas uniformément convergente dans* $r \leqslant 1 - \varepsilon$.

3° *On a les inégalités*

$$(10s) \qquad |z^{-\mu_1} f(z)| \leqslant \sum |\mathcal{G}_n < z^{-\mu_1} f(z) > | \leqslant C(r, \theta) \, \|f\|_p,$$

$C(r, \theta)$ *est une constante dépendant exclusivement de* r *et de* θ, *et restant bornée dans toute région* (ε, K).

On en déduit que si des polynômes ou plus généralement des $f_i(x) \in A^p(M)$ *convergent dans* $L^p(0,1)$ *vers* $f(x)$, les $z^{-\mu_1} f_i(z)$ *convergent vers* $z^{-\mu_1} f(z)$ *uniformément dans toute région* (ε, K), *et même que l'on a, uniformément dans une telle région,*

$$\lim_i r^{-\mu_1} \Big[\sum_n |\mathcal{G}_n < f_i - f >|\Big] = 0.$$

Remarquons enfin pour terminer ce paragraphe, que si l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ (ou $\{\mu_\nu\}$) est nul, on peut prendre des groupements $\mathcal{G}_n$ réduits chacun à un seul terme, de sorte que la série de DIRICHLET est absolument convergente pour $X > 0$ (ou $r < 1$) ; elle est alors nécessairement normalement convergente dans $X \geqslant \varepsilon > 0$ (ou $r \leqslant 1 - \varepsilon < 1$). Les théorèmes du § 9 sont ainsi contenus dans ceux du § 10.

§ 11. — Réciproques. Caractérisation de $A^p(\Lambda)$

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si la série* $\sum 1/\lambda_\nu$ *converge ; si la fonction*

$$F(X) \in L^p(0, +\infty)(p \text{ fini}) \quad \text{ou} \quad \in C'(0, +\infty)(p = \infty),$$

possède les propriétés suivantes :

1° $F(X)$ *est analytique* sur $]0, +\infty[$ *et prolongeable par une fonction* $F(Z)$ *holomorphe pour* $X > 0$.

2° $F(Z)$ *a un développement de* DIRICHLET *formel*

$$F(Z) = \sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z} ;$$

la série $e^{2\pi\lambda_1 X} \sum \mathcal{G}_n < F(Z) >$ *est normalement convergente dans tout secteur angulaire* (ε, K) ;

alors $F(X) \in A^p(\Lambda)$, *et les* c_ν *sont les composantes de* $\vec{F}$ *suivant le système libre* $\{ \vec{e_\nu} \}$.

Ainsi les propriétés des $F(X) \in A^p(\Lambda)$ trouvées au § 10 sont caractéristiques.

On pourrait naturellement remplacer les conditions 1° et 2° de cette réciproque par des conditions bien moins restrictives (voir à ce sujet le théorème 1 du § 13) ; nous ne l'avons pas fait ici, n'ayant en vue que la démonstration d'une réciproque.

LEMME : *Si* $F(X) \in L^p(0, +\infty)(p \text{ fini})$ *ou* $\in C'(0, +\infty)(p = \infty)$ *alors*

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \geqslant 0}} \| F(X + \eta) - F(X) \|_p = 0.$$

Cette propriété est évidente lorsque $F(X)$ est continue et nulle pour X assez grand. Dans le cas général, nous approcherons $F(X)$ par $G(X)$ continue et nulle pour X assez grand, de façon que

$\| F(X) - G(X) \|_p \leqslant \varepsilon$ et par suite aussi $\| F(X + \eta) - G(X + \eta) \|_p \leqslant \varepsilon$ quelque soit $\eta \geqslant 0$; si nous choisissons alors η de façon que $\| G(X + \eta) - G(X) \|_p \leqslant \varepsilon$ nous aurons réalisé

$$\| F(X + \eta) - F(X) \|_p \leqslant \| F(X + \eta) - G(X + \eta) \|_p + \| G(X + \eta) - G(X) \|_p + \| G(X) - F(X) \|_p \leqslant 3\varepsilon,$$

ce qui démontre le lemme.

Il résulte de ce lemme que pour prouver que $\overrightarrow{F}(X) \in A^p(\Lambda)$, il suffit de prouver que pour tout $\eta > 0$, $F(X + \eta) \in A^p(\Lambda)$.

Or

$$F(X + \eta) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu = 1}^{\nu = n} \mathcal{G}_\nu < F(X + \eta) >,$$

est limite d'une suite de polynômes $\in A^p(\Lambda)$ car

$$\mathcal{G}_\nu < F(X + \eta) > = \sum_{\lambda_k \in \mathcal{G}_\nu} (c_k e^{-2\pi\lambda_k \eta}) e^{-2\pi\lambda_k X}.$$

Il s'agit bien d'une limite dans $L^p(0, +\infty)$; car la série $\sum \mathcal{G}_n < F(X + \eta) >$ quelque petit que soit η (¹) est uniformément convergente dans $(0, +\infty)$, même après multiplication par $e^{2\pi\lambda_1 X}$, donc elle est aussi convergente elle-même dans $L^p(0, +\infty)$.

Il est intéressant d'étudier un exemple simple qui nous montrera que les diverses propriétés de l'exemple donné au début du § 10 sont universelles, lorsque l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ est $\neq 0$.

Posons

$$\Phi_\eta(Z) = \sum_\nu \frac{e^{-2\pi\lambda_\nu(Z + \eta)}}{J'(\lambda_\nu)} \text{ (²)}. \tag{11 a}$$

Quelque petit que soit $\eta > 0$ (¹), la série au 2ᵉ membre est normalement convergente par les groupements $\mathcal{G}_n$ dans tout secteur angulaire (ε, K), même après multiplication par $e^{2\pi\lambda_1 X}$, donc la série $\sum \mathcal{G}_n < \Phi_\eta(X) >$ est aussi convergente dans

(¹) Mais non en général pour $\eta = 0$.

(²) L'étude de la série (11 *a*), représentable par l'intégrale (11 *b*), est tout à fait analogue à celle qui a été faite sur l'intégrale (10 *q*). De même la démonstration de la convergence normale par groupements est identique à la démonstration du § 10.

$L^p(0, +\infty)$ quel que soit $p \geqslant 1$. On peut d'ailleurs représenter $\Phi_\eta(Z)$ par l'intégrale

$$\Phi_\eta(Z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta(Z+\eta)}}{J(\zeta)}\, d\zeta, \tag{11 b}$$

Γ étant une courbe parcourue dans le sens direct formée des 2 demi droites $\operatorname{Arg}\zeta = \pm\psi$.

Ainsi $\Phi_\eta(X) \in A^p(\Lambda)$; nous allons montrer que pour $\Phi_\eta(X)$ l'introduction des groupements $\mathcal{G}_n$ et des secteurs angulaires est indispensable.

Appelons indice de condensation Δ de la suite $\{\lambda_\nu\}$ le nombre défini par

$$\Delta = \lim_{\nu\to\infty}\cdot\sup \frac{\log|1/E'(\lambda_\nu)|}{\lambda_\nu} \geqslant 0\ (^1), \tag{11 c}$$

où

$$E(\lambda) = \prod\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right).$$

Comme la fonction entière $\prod\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)$ est de genre 0, on a également

$$\Delta = \lim_{\nu\to\infty}\cdot\sup \frac{\log|1/J'(\lambda_\nu)|}{\lambda_\nu}. \tag{11 c'}$$

Dans ces conditions, si nous supposons $\Delta > 0$, pour tout $\Delta' > \Delta$, il existe une infinité de valeurs de ν pour lesquelles $\left|\frac{1}{J'(\lambda_\nu)}\right| \geqslant e^{\Delta'\lambda_\nu}$, ce qui prouve que la série (11 a) est divergente pour $X < \frac{\Delta}{2\pi} - \eta$; ainsi l'introduction des groupements de termes est bien inévitable, le théorème fondamental du § 9 serait faux pour la suite λ_ν.

Sur la verticale $X = \frac{\Delta'}{2\pi} - \eta$, les termes de la série (11 a) ne sont pas bornés dans leur ensemble, donc d'après un raisonnement signalé à la note n° 1 de la page 38, $\Phi_\eta(Z)$ n'est pas bornée sur cette ver-

(1) Vl. BERNSTEIN [1], p. 289. Plusieurs notions utilisées dans ce paragraphe sont d'ailleurs dues à cet auteur. Comparer par exemple la fonction $\Phi_\eta(Z)$ à la fonction $g(s)$ de BERNSTEIN [1], p. 99, représentée par l'intégrale (6), p. 97 de ce livre.

ticale, et la série $\sum \mathcal{G}_n < \Phi_\eta(Z) >$ ne saurait converger uniformément dans aucun demi-plan $X \geqslant \frac{\Delta'}{2\pi} - \eta$; l'introduction des secteurs angulaires est elle aussi inévitable dès que l'indice de condensation n'est pas nul.

Lorsque l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ est un nombre fini Δ, on a quel que soit ν

$$\left|\frac{1}{J'(\lambda_\nu)}\right| \leqslant K(\alpha)e^{(\Delta+\alpha)\lambda_\nu}, \quad \alpha > 0 \text{ quelconque}$$

de sorte que la formule (9 *b*) est encore valable

$$\sum |c_\nu| \, e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_\nu)X} \leqslant C(X) \, \|F\|_p,$$

$C(X)$ restant cette fois borné pour $X \geqslant \frac{\Delta}{2\pi} + \varepsilon$ (il suffit pour le voir de répéter les raisonnements du § 9)'; la série de DIRICHLET de F, qui peut ainsi diverger pour $X < \frac{\Delta}{2\pi}$ comme le montre l'exemple de $\Phi_\eta(X)$, est toujours absolument convergente pour $X > \frac{\Delta}{2\pi}$. Autrement dit $\Delta/2\pi$ *est la distance maxima effective qui peut séparer l'abscisse de convergence par les groupements* $\mathcal{G}_n$ *de l'abscisse de convergence simple* (1).

On peut faire une extension intéressante des suites $\{\lambda_\nu\}$ à indice de condensation $\neq 0$: les suites $\{\lambda_\nu\}$ à éléments multiples. Soient λ_ν, $\lambda_\nu + \varepsilon$, deux éléments voisins ; le plan engendré par les deux vecteurs $e^{-2\pi\lambda_\nu X}$, $e^{-2\pi(\lambda_\nu+\varepsilon)X}$, peut aussi être engendré par les deux vecteurs

$$e^{-2\pi\lambda_\nu X}, \qquad \frac{e^{-2\pi\lambda_\nu X} - e^{-2\pi(\lambda_\nu+\varepsilon)X}}{2\pi\varepsilon};$$

lorsque $\varepsilon \to 0$ ces deux vecteurs deviennent

$$e^{-2\pi\lambda_\nu X}, \quad Xe^{-2\pi\lambda_\nu X}.$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer un élément λ_ν « multiple d'ordre α_ν » comme définissant α_ν vecteurs distincts

$$e^{-2\pi\lambda_\nu X}, \quad Xe^{-2\pi\lambda_\nu X}, \ldots X^{\alpha_\nu - 1}e^{-2\pi\lambda_\nu X}.$$

(1) Voir Vl. BERNSTEIN [1] p. 134, Théorème 1.

L'étude des suites $\{\lambda_\nu\}$ à éléments multiples ne présente aucune difficulté spéciale ; la totalité ou la non totalité du système $\{e_\nu\}$ dépend alors de la série $\sum 1/\lambda_\nu$ où chaque terme $1/\lambda_\nu$ est compté α_ν fois, ce qui revient à considérer la série $\sum \frac{\alpha_\nu}{\lambda_\nu}$, chaque terme n'étant plus alors compté qu'une fois. La fonction $J(\lambda)$ se forme de façon identique, mais $+\lambda_\nu$ et $-\lambda_\nu$ en sont zéro et pôle multiples d'ordre α_ν.

Nous nous contenterons de donner deux applications de cette théorie :

1° Si tous les λ_ν sont confondus avec un même élément λ, le système de vecteurs est total :

$$X^n e^{-2\pi\lambda X} \qquad (n = 0, 1. 2\cdots).$$

C'est un théorème important dans la théorie des polynômes de LAGUERRE (1).

Par le changement de variables $X = u^2$, on verrait aisément que le système de vecteurs

$$X^n e^{-2\pi\lambda X^2} \qquad (n = 0, 1, 2\cdots),$$

est total dans $L^p(-\infty, +\infty)$ ou $C'(-\infty, +\infty)$ (fonctions continues, nulles pour $X = \pm\infty$) théorème important dans la théorie des polynômes d'HERMITE (2).

2° Si la série $\sum 1/\lambda_\nu$ converge, on a pour $F(X) \in A^p(\Lambda)$ un développement du type

$$F(Z) = \sum e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\left(c_{\nu_0} + c_{\nu_1}Z + \cdots + c_{\nu_{\alpha_\nu-1}}Z^{\alpha_\nu-1}\right).$$

normalement convergent dans des secteurs angulaires par groupements de termes appropriés.

Les formules synthétiques (10 r) doivent être remplacées par des formules tout à fait analogues ; signalons en particulier la formule

$$(11\,d) \qquad |F(Z)| \leqslant C(X, Y; \Lambda)\|F\|_p.$$

$C(X, Y; \Lambda)$ restant bornée dans tout secteur angulaire $X \geqslant \varepsilon$, $|Y/(X-\varepsilon)| \leqslant K$, tant que la suite Λ varie de façon que la série

(1) SZEGÖ [2].
(2) TITCHMARSH [1], p. 76-82.

$\sum 1/\lambda_\nu$ (où les λ_ν sont rangés par ordre de grandeurs croissantes, chaque terme répété autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité) reste uniformément convergente et de somme bornée.

Signalons enfin pour terminer ce paragraphe que nous avons répondu, dans le cas du système de vecteurs libres $\vec{e}_\nu = e^{-2\pi\lambda_\nu X}$, à deux questions posées à la fin du § 3 :

1° *Si toutes les composantes du vecteur* $\vec{x}$ *suivant le système libre* $\{\vec{e}_\nu\}$ *sont nulles,* $\vec{x} = \vec{0}$.

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que dans* $L^p(0, +\infty)$, *les* $\{c_\nu\}$ *soient les composantes d'un vecteur suivant le système libre* $\{\vec{e}_\nu\}$ *est la suivante : la série*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{G}_n(Z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \right),$$

doit être, même après multiplication par $e^{2\pi\lambda_1 X}$ *normalement convergente dans tout secteur angulaire* (ε, K) ; *sa somme pour* $Z = X$ *réel* > 0, *doit être* $\in L^p(0, +\infty)$.

§ 12. — Intervalle réel fini et éléments λ_ν de signe quelconque

Nous avons étudié des vecteurs $e^{-2\pi\lambda X}$, $\lambda > 0$, dans $L^p(0, +\infty)$; on aurait pu faire la même étude dans $L^p(A, +\infty)$, A réel quelconque, et l'étude de vecteur $e^{+2\pi\lambda X}$, $\lambda > 0$, dans $L^p(-\infty, B)$, B réel quelconque. Nous allons maintenant étudier des vecteurs $e^{-2\pi\lambda X}$, λ réel de signe quelconque, dans $L^p(A, B)$, $-\infty < A < B < +\infty$.

Soit donc $\Lambda = \{\lambda_\nu\}$ une suite quelconque de nombres réels ; l'indice ν sera supposé varier de $-\infty$ à $+\infty$, les λ_ν seront rangés par ordre de grandeurs croissantes, $\lambda_\nu > 0$ pour $\nu > 0$, $\lambda_\nu < 0$ pour $\nu < 0$; $\lambda_0 = 0$ pouvant éventuellement faire partie de la suite. Nous appellerons $\overset{+}{\Lambda}, \overset{-}{\Lambda}$ les 2 suites partielles $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$, $\{\lambda_\nu\}_{\nu<0}$.

Théorème de Müntz I. — 1° *Si la série* $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu|$ *diverge,* *le système de vecteurs* $e^{-2\pi\lambda_\nu X}$ *est total dans* $L^p(A, B)$ (*p fini*) *et dans* $C(A, B)$ ($p = \infty$), *et chaque vecteur est dépendant des autres.*

2° *Si la série* $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu|$ *converge, le système est non total, mais libre.*

La 1re partie du théorème est évidente ; en effet si $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu|$ diverge, l'une au moins des 2 séries $\sum_{\nu>0} 1/\lambda_\nu$, $\sum_{\nu<0} 1/\lambda_\nu$ diverge, de sorte que ou bien le système $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu>0}$ est total dans $L^p(A, +\infty)$ (et $C'(A, +\infty)$) ou bien le système $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu<0}$ est total dans $L^p(-\infty, B)$ (et $C'(-\infty, B)$) ; en tout cas le système $\{\vec{e_\nu}\}$ est bien total dans $L^p(A, B)$ et $C(A, B)$.

Mais la deuxième partie n'est nullement évidente et n'a pas encore, je pense, été démontrée. D'un seul coup nous démontrerons la 2e partie du théorème de Müntz et nous caractériserons l'adhérence $A^p(\Lambda ; A, B)$ dans $L^p(A, B)$ du sous-espace vectoriel engendré par les $\{\vec{e_\nu}\}$.

Nous démontrerons d'abord un lemme :

Lemme : *Si* $P(X ; \Lambda) = \sum a_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$ *est un polynôme formé avec les* $e^{-2\pi\lambda_\nu X}$, *et si la série* $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu|$ *converge, les polynômes définis par*

$$\overset{+}{P}(X ; \Lambda) = \sum_{\nu>0} a_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$$

$$\overset{0}{P}(X ; \Lambda) = a_0 \text{ [1]}$$

$$\bar{P}(X ; \Lambda) = \sum_{\nu<0} a_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}.$$

vérifient les inégalités

$$(12a) \qquad \begin{cases} \|\overset{+}{P}\|_{L^p(A,+\infty)} \leqslant C\,\|P\|_{L^p(A,B)} \\ |\overset{0}{P}| \leqslant C\,\|P\|_{L^p(A,B)} \\ \|\bar{P}\|_{L^p(-\infty,B)} \leqslant C\,\|P\|_{L^p(A,B)}. \end{cases}$$

[1] Il est entendu une fois pour toutes que si $\lambda_0 = 0$ n'est pas élément de Λ, il ne sera pas question de $\overset{0}{P}$ ni de $\overset{0}{F}$, etc... La décomposition se fera toujours en somme de 2 termes, et non 3.

la constante C *dépendant exclusivement de la suite* Λ *et de l'intervalle* (A, B).

Pour simplifier appelons $\overset{+}{n}$, $\overset{\circ}{n}$, $\overline{n}$ les normes intervenant dans les 1^ers^ membres de (12 *a*), n la plus grande des trois, N la norme intervenant dans les 2^es^ membres. Nous pouvons, en multipliant P par une constante convenable, supposer $n = 1$. Il faut alors montrer que N est borné inférieurement par un nombre > 0 indépendant de P.

Nous allons supposer le lemme en défaut et montrer que nous aboutissons à une contradiction. En effet si le lemme est faux on peut trouver une suite de polynômes $P_j(X)$ pour lesquels

$$n_j = +1 \qquad \lim_j N_j = 0.$$

Mais d'après (10 *a*)

$$e^{2\pi\lambda_1 X}\,|\overset{+}{P}_j(Z)| \leqslant \overset{+}{C}(X, Y)\,\overset{+}{n}_j \leqslant \overset{+}{C}(X, Y).$$

D'après un théorème bien connu sur les familles normales de fonctions analytiques, on peut de la suite P_j extraire une suite partielle que nous appellerons encore P_j, telle que les $e^{2\pi\lambda_1 Z}\,\overset{+}{P}_j(Z)$ convergent uniformément vers une fonction analytique limite, $e^{2\pi\lambda_1 Z}\overset{+}{P}(Z)$ dans tout compact du demi-plan $X > A$; alors quel que soit $\varepsilon > 0$, les $\overset{+}{P}_j(X)$ convergent vers $\overset{+}{P}(X)$ dans $L^p(A + \varepsilon, + \infty)$. D'ailleurs $\overset{+}{P}(Z)$ admet un développement en série de DIRICHLET

$$\overset{+}{P}(Z) = \sum_{\nu > 0} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z},$$

convergent par groupements de termes dans le demi-plan $X > A$.

Comme un raisonnement analogue pourra être fait à propos des $\overset{\circ}{P}_j$ et $\overline{P}_j$, on peut supposer que pour la même suite $P_j(X)$ considérée, les $\overset{+}{P}_j(Z)$, $\overset{\circ}{P}_j$, $\overline{P}_j(Z)$ convergent respectivement vers $\overset{+}{P}(Z)$ holomorphe pour $X > A$, $\overset{\circ}{P}$ constante, $\overline{P}(Z)$ holomorphe pour $X < B$; les $\overset{+}{P}_j(X)$ convergent vers $\overset{+}{P}(X)$ dans $L^p(A + \varepsilon, + \infty)$, les $\overline{P}_j(X)$ vers $\overline{P}(X)$ dans $L^p(-\infty, B - \varepsilon)$. Et l'on a les développements

$$\overset{+}{P}(Z) = \sum_{\nu > 0} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

$$\overset{0}{P} \quad = c_0$$

$$\overline{P}(Z) = \sum_{\nu < 0} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$$

Il en résulte que les $P_j = \overset{+}{P}_j + \overset{0}{P}_j + \overline{P}_j$ convergent dans $L^p(A + \varepsilon, B - \varepsilon)$ vers $P = \overset{+}{P} + \overset{0}{P} + \overline{P}$; mais l'hypothèse $\lim\limits_j N_j = 0$ montre alors que $P(Z) \equiv 0$.

Or $P(Z)$ est une série de DIRICHLET $\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ convergente par groupements dans la bande $A < X < B$; elle ne peut être $\equiv 0$ que si tous ses coefficients c_ν sont nuls (1).

Alors $\overset{+}{P}(Z) \equiv \overset{0}{P} \equiv \overline{P}(Z) \equiv 0$.

Les $\overset{+}{P}_j(X)$ convergent donc vers 0 dans $L^p(A + \varepsilon, + \infty)$; mais $\overset{+}{P}_j = - \overset{0}{P}_j - \overline{P}_j + P_j$, et comme les polynômes $\overset{0}{P}_j$, $\overline{P}_j$, P_j convergent vers 0 respectivement dans $L^p(A, B)$, $L^p(- \infty, B - \varepsilon)$, $L^p(A, B)$, les $\overset{+}{P}_j$ convergent aussi vers 0 dans $L^p(A, B - \varepsilon)$, donc dans $L^p(A, + \infty)$. Ce qui permet d'écrire, compte tenu de la possibilité d'un raisonnement analogue pour $\overset{0}{P}_j$ et $\overline{P}_j$:

$$\lim_j \overset{+}{n}_j = \lim_j \overset{0}{n}_j = \lim_j \overline{n}_j = 0,$$

(1) Cette proposition peut être considérée comme classique dans le cas d'une série de DIRICHLET convergente (voir par exemple Vladimir BERNSTEIN [1], p. 10). Elle est beaucoup moins simple dans le cas de la convergence par groupements. Voici comment on peut le voir dans le cas qui nous occupe. On a $\overset{+}{P} = - \overset{0}{P} - \overline{P}$. D'une part $\overset{+}{P}(Z)$ est holomorphe pour $X > A$ et bornée sur $(A + \varepsilon, + \infty)$; d'autre part comme $\overset{0}{P}$ est constante, et que $\overline{P}$ est holomorphe pour $X < B$ et bornée sur $(- \infty, B - \varepsilon)$, $\overset{+}{P}(Z)$ est nécessairement une fonction entière, bornée sur tout l'axe réel. Nous verrons au § 14 qu'une série de DIRICHLET du type $\sum\limits_{\nu > 0} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ ne peut posséder de telles propriétés que si elle est constante ; le lecteur se convaincra aisément que la démonstration qui sera donnée de cette propriété ne fait intervenir que les résultats du § 10. $\overset{+}{P}(Z)$ est donc constante et même nulle puisque $\overset{+}{P}(+ \infty) = 0$; tous ses coefficients c_ν sont alors nuls à cause de (8 *h*). De même pour $\overset{0}{P}$ et $\overline{P}$.

égalité qui est bien contradictoire avec $n_j = 1$; ainsi le lemme est démontré.

Ce lemme permet de caractériser complètement $A^p(\Lambda\,;\,A, B)$. En effet si des polynômes $P_j(X\,;\,\Lambda)$ convergent vers $F \in A^p(\Lambda\,;\,A, B)$ dans $L^p(A, B)$, les $\overset{+}{P}_j(X)$ ont une limite $\overset{+}{F}(X) \in A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;A, +\infty)$, les $\overset{0}{P}_j$ une limite $\overset{0}{F}$, les $\overline{P}_j(X)$ une limite $\overline{F}(X) \in A^p(\overline{\Lambda}\,;\,-\infty, B)$, et l'on a $F = \overset{+}{F} + \overset{0}{F} + \overline{F}$, les inégalités (12 a) étant satisfaites par $\overset{+}{F}$, $\overset{0}{F}$, $\overline{F}$, F. Réciproquement d'ailleurs, toute fonction $F(X) = \overset{+}{F}(X) + \overset{0}{F} + \overline{F}(X)$, $\overset{+}{F} \in A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;\,A, +\infty)$, $\overline{F} \in A^p(\overline{\Lambda}\,;\,-\infty, B)$ appartient évidemment à $A^p(\Lambda\,;\,A, B)$. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME II (CARACTÉRISATION DE $A^p(\Lambda\,;\,A, B)$). — *Pour qu'une fonction* $F(X)$ *appartienne à* $A^p(\Lambda\,;\,A, B)$, *il faut et il suffit qu'elle admette une décomposition* (*d'ailleurs nécessairement unique*)

$$F(X) = \overset{+}{F}(X) + \overset{0}{F} + \overline{F}(X),$$

$\overset{+}{F} \in A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;\,A, +\infty)$, $\overset{0}{F}$ *constante* (1), $\overline{F} \in A^p(\overline{\Lambda}\,;\,-\infty, B)$. *Ces fonctions vérifient alors les inégalités*

$$(12\,a) \qquad \begin{cases} \|\overset{+}{F}(X)\|_{L^p(A,+\infty)} \leqslant C\|F(X)\|_{L^p(A,B)} \\ |\overset{0}{F}| \leqslant C\|F(X)\|_{L^p(A,B)} \\ \|\overline{F}(X)\|_{L^p(-\infty,B)} \leqslant C\|F(X)\|_{L^p(A,B)} \end{cases}$$

C *étant une constante dépendant exclusivement de la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *et de l'intervalle* (A, B).

En conséquence :

1° $F(X)$ *est analytique sur* $]A, B[$ *et prolongeable par une fonction* $F(Z)$, $Z = X + iY$, *holomorphe dans la bande* $A < X < B$;

2° $F(Z)$ *admet un développement en série de* DIRICHLET-LAURENT (2).

(1) Encore une fois, on devra avoir $\overset{0}{F} = 0$ si 0 n'appartient pas à la suite Λ. Voir note 1, page 55.

(2) Nous employons le terme de série de DIRICHLET-LAURENT lorsqu'il y a des exposants λ_ν des 2 signes, par analogie avec la série de LAURENT qui généralise la série de TAYLOR.

$$F(Z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}.$$

On peut définir un partage des $\{\lambda_\nu\}$ *en une succession de groupes de termes consécutifs* $\left(\mathcal{G}_n\right)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ *dépendant exclusivement de la suite* $\{\lambda_\nu\}$, *tels que la série* $\sum \mathcal{G}_n < F(Z) >$ *soit normalement convergente dans tout compact de la bande* $A < X < B$.

3° *On a les inégalités* ($A < X < B$) :

(12 *b*) $$|F(Z)| \leqslant \sum |\mathcal{G}_n < F(Z) > | \leqslant C(X, Y) \| F \|_{L^p(A,B)}$$

$C(X, Y)$, *étant une constante dépendant exclusivement de* X, Y (*la suite* Λ *étant supposée donnée une fois pour toutes*) *et restant bornée dans tout compact de la bande* $A < X < B$.

Si des $F_j(X) \in A^p(\Lambda\ ;\ A, B)$ *convergent vers* $F(X)$ *dans* $L^p(A, B)$ *les* $F_j(Z)$ *convergent vers* $F(Z)$ *uniformément dans tout compact de la bande, et même dans un tel compact on a uniformément*

$$\lim_j \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\mathcal{G}_n < F_j - F > | = 0.$$

En même temps les $\overset{+}{F}_j(X)$ *convergent vers* $\overset{+}{F}(X)$ *dans* $L^p(A, +\infty)$, *les* $\overset{0}{F}_j$ *vers* $\overset{0}{F}$, *les* $\overline{F}_j(X)$ *vers* $\overline{F}(X)$ *dans* $L^p(-\infty, B)$, *avec toutes les conséquences que cela entraîne* (§ 10).

De ce théorème fondamental résulte bien la 2e partie du théorème de Müntz. Le système $\{\vec{e}_\nu\}$ n'est pas total, puisque tout $F(X) \in A^p(\Lambda\ ;\ A\ B)$ est analytique sur $]A, B[$. Ce système est libre car si à chaque fonction $F(X) \in A^p(\Lambda\ ;\ A, B)$ on fait correspondre son coefficient c_k, on définit sur $A^p(\Lambda\ ;\ A, B)$ une forme linéaire continue prenant la valeur 1 au point $\vec{e}_k$, la valeur 0 en tous les autres points $\vec{e}_\nu$.

Les inégalités (12 *a*) expriment que les 3 transformations linéaires

$$\vec{F} \in A^p(\Lambda\,;\, A, B) \longrightarrow \vec{\overset{+}{F}} \in A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;\, A, +\infty)$$
$$\vec{F} \in A^p(\Lambda\,;\, A, B) \longrightarrow \overset{0}{F} \text{ nombre réel}$$
$$\vec{F} \in A^p(\Lambda\,;\, A, B) \longrightarrow \vec{\overline{F}} \in A^p(\overline{\Lambda}\,;\, -\infty, B)$$

sont continues. On voit ainsi que l'*espace vectoriel* $A^p(\Lambda\,;\,A,\,B)$ *est isomorphe au produit des 3 espaces vectoriels* $A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;\,A\,+\infty)$; *droite réelle* ; $A^p(\overline{\Lambda}\,;\,-\infty\,,\,B)$.

On peut étendre cette propriété ; soit λ un nombre réel > 0, appelons $\overset{\lambda}{F}(X)$ la fonction définie à partir de $F = \sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$ par $\overset{\lambda}{F} = \sum\limits_{\lambda_\nu > \lambda} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu X}$. $\overset{\lambda}{F} \in A^p(\overset{+}{\Lambda}\,;\,A,\,+\infty)$ est transformée linéaire continue de $\overset{+}{F}$ donc de $F \in A^p(\Lambda\,;\,A,\,B)$, et on peut écrire

$$\| \overset{\lambda}{F}(X) \|_{L^p(A,+\infty)} \leqslant C_\lambda \| F \|_{L^p(A,B)} \tag{12c}$$

C_λ dépendant exclusivement de λ, de la suite $\{ \lambda_\nu \}$, de l'intervalle (A, B).

Naturellement lorsque la suite $\{ \lambda_\nu \}$ ne comprend que des éléments > 0, les inégalités (12 *a*) deviennent

$$\| F \|_{L^p(A,+\infty)} \leqslant C \| F \|_{L^p(A,B)}.$$

C dépendant exclusivement de la suite $\{ \lambda_\nu \}$ et de l'intervalle (A, B). On en déduit des améliorations considérables de l'inégalité (10. *a*) :

$$e^{2\pi\lambda_1 X} \sum | \mathcal{G}_n < F(Z) > | \leqslant C(X, Y) \| F \|_{L^p(A,B)}. \tag{12d}$$

C(X, Y) restant bornée (pour une suite Λ et un intervalle (A, B) fixés) dans tout secteur angulaire

$$X \geqslant A + \varepsilon, \qquad | Y/(X - A) | \leqslant K.$$

Les théorèmes de ce paragraphe peuvent être énoncés pour les variables x et z :

THÉORÈME DE MÜNTZ III. — *Si* $\{ \mu_\nu \} = M$ *est une suite de nombres réels rangés par ordre de grandeurs croissantes,* $\mu_\nu + \frac{1}{p} > 0$, *pour* $\nu > 0$, $\mu_\nu + \frac{1}{p} < 0$ *pour* $\nu < 0$, *éventuellement* $\mu_0 = -\frac{1}{p}$:

1° *Si la série* $\sum\limits_{\mu_\nu \neq 0} 1/|\mu_\nu|$ *diverge, le système de vecteurs* $\{ \vec{x}^{\mu_\nu} \}$ *est total dans* $L^p(a, b)$ *(p fini) ou dans* $C(a, b)$ $(p = \infty)$, $0 < a < b < +\infty$, *et chaque vecteur est dépendant des autres* ;

2° *Si la série* $\sum_{\mu_\nu \neq 0} 1/|\mu_\nu|$ *converge, le système de vecteurs est non total mais libre.*

Théorème IV (Caractérisation de $A^p(M;\, a, b)$). — *Pour que la fonction* $f(x)$ *appartienne à* $A^p(M;\, a, b)$, *il faut et il suffit qu'elle admette une décomposition (d'ailleurs nécessairement unique)*

$$f(x) = \overset{+}{f}(x) + \overset{0}{f}(x) + \overset{-}{f}(x),$$

$\overset{+}{f}(x) \in A^p(\overset{+}{M};\, 0, b)$, $x^{\frac{1}{p}} \overset{0}{f}(x) =$ *constante*, $\overset{-}{f}(x) \in A^p(\overset{-}{M};\, a, +\infty)$ (¹).

Ces fonctions vérifient alors les inégalités

$$(12e) \qquad \begin{cases} \| \overset{+}{f}(x) \|_{L^p(0,b)} \leqslant C \| f(x) \|_{L^p(a,b)} \\ | x^{\frac{1}{p}} \overset{0}{f}(x) | \leqslant C \| f(x) \|_{L^p(a,b)} \\ \| \overset{-}{f}(x) \|_{L^p(a,+\infty)} \leqslant C \| f(x) \|_{L^p(a,b)} \end{cases}$$

C *dépendant exclusivement de la suite* $\{ \mu_\nu \}$ *et de l'intervalle* (a, b).

En conséquence :

1° $f(x)$ *est analytique sur* $]a, b[$ *et prolongeable par une fonction* $f(z)$, $z = re^{i\theta}$, *holomorphe dans tout le domaine de la surface de* Riemann *de* $\log z$ *défini par* $a < r < b$;

2° $f(z)$ *admet un développement en série de puissances de* Laurent

$$f(z) = \sum c_\nu z^{\mu_\nu}.$$

On peut partager la suite $\{ \mu_\nu \}$ *en une succession de groupes de termes consécutifs* $\left(\mathcal{G}_n\right)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ *dépendant exclusivement de la suite* $\{ \mu_\nu \}$, *tels que la série* $\sum \mathcal{G}_n < f(z) >$ *soit normalement convergente dans tout compact de la couronne* (²) $a < r < b$.

3° *On a les inégalités* $(a < r < b)$

$$(12f) \qquad |f(z)| \leqslant \sum | \mathcal{G}_n < f(z) > | \leqslant C(r, \theta) \| f \|_{L^p(a,b)}$$

(¹) $\overset{+}{f}(x)$ correspond aux $\mu_\nu > -\frac{1}{p}$, $\overset{-}{f}(x)$ aux $\mu_\nu < -\frac{1}{p}$.

(²) La couronne désigne ici toujours le domaine $a < r < b$ de la surface de Riemann de $\log z$.

$C(r, \theta)$ *étant une constante dépendant exclusivement de* r *et* θ (*la suite* M *et l'intervalle* (a, b) *étant supposés donnés une fois pour toutes*) *et restant bornée dans tout compact de la couronne.*

Si des $f_j(x) \in A^p(M\,;\, a, b)$ *convergent vers* $f(x)$ *dans* $L^p(a, b)$, *les* $f_j(z)$ *convergent vers* $f(z)$ *uniformément dans tout compact de la couronne, et même dans un tel compact on a uniformément*

$$\lim_{j} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\mathcal{G}_n < f_j - f > | = 0.$$

En même temps les $\overset{+}{f}_j(x)$ *convergent vers* $\overset{+}{f}(x)$ *dans* $L^p(o, b)$, *les* $x^{1/p}\overset{0}{f}_j(x)$ *vers* $x^{1/p}\overset{0}{f}(x)$, *les* $\overset{-}{f}_j(x)$ *vers* $\overset{-}{f}(x)$ *dans* $L^p(a, +\infty)$, *avec toutes les conséquences que cela entraîne* (§ 10) [1].

§ 13. — Applications à la théorie des fonctions analytiques : domaine d'existence

Dans tout ce paragraphe et le suivant, $\Lambda = \{\lambda_\nu\}$ est une suite donnée une fois pour toutes de nombres réels $\geqslant 0$, rangés par ordre de grandeurs croissantes, et la série $\sum\limits_{\lambda_\nu \neq 0} 1/\lambda_\nu$ est supposée convergente. Les $\mathcal{G}_n$ sont les groupements de termes définis au § 10.

THÉORÈME I. — *Si par un procédé de sommation linéaire régulier la série de* DIRICHLET $\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *converge uniformément vers* $F(Z)$ *sur un segment horizontal* $(X_1 + iY_0, X_2 + iY_0)$; *la série*

$$\sum \mathcal{G}_n(Z) \qquad \left(\mathcal{G}_n(Z) = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\right)$$

[1] On pourrait aussi faire l'étude des systèmes $\{\vec{x}^{\mu_\nu}\}$ dans $L^p(a, b)$ ou $C(a, b)$, $a < 0 < b$; elle ne présenterait aucune difficulté et nous ne la ferons pas ici. L'étude n'aurait de sens que pour μ_ν rationnel à dénominateur impair ; il faudrait alors séparer la suite $\{\mu_\nu\}$ en 2 suites partielles $\{\mu_\nu'\}$ à numérateurs pairs, $\{\mu_\nu''\}$ à numérateurs impairs ; les $x^{\mu_\nu'}$ sont des fonctions paires, les $x^{\mu_\nu''}$ des fonctions impaires. Le système n'est total que si chacune des 2 séries $\sum 1/\mu_\nu'$, $\sum 1/\mu_\nu''$ diverge. Si seule la première de ces 2 séries est divergente, le système est total dans le sous-espace vectoriel des fonctions paires, non total dans celui des fonctions impaires, etc...

converge uniformément vers F(Z) *sur tout segment* $(X_1 + \varepsilon + iY_0, X_2 + iY_0)$; *et en outre converge normalement dans tout secteur angulaire*

$$X \geqslant X_1 + \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{X - X_1}\right| \leqslant K \qquad \varepsilon, \text{K réels} > 0.$$

Ce théorème est très important ; d'une part il montre que pour des séries de DIRICHLET du type étudié, aucun procédé de sommation linéaire ne peut être plus puissant que le procédé de groupements défini par les $\mathcal{G}_n$; d'autre part il montre que si la série $\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ diverge partout, il est logique de lui attribuer la somme $\sum \mathcal{G}_n(Z)$ puisqu'aucun procédé de sommation linéaire régulier (en particulier aucun autre procédé de groupements de termes) ne pourrait lui en donner une autre.

La démonstration n'est pas difficile.

Le procédé de sommation linéaire sera défini par exemple par

$$F(Z) = \lim_{j} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \alpha_\nu(j) c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \text{ (1)}$$

La série au 2e membre est supposée uniformément convergente ; soit $F_j(Z)$ sa somme ; on suppose aussi que les $F_j(Z)$ convergent uniformément vers F(Z).

On a manifestement $F_j(Z) \in A^\infty(\Lambda\,;\, X_1 + iY_0, X_2 + iY_0)$ et par suite aussi $F(Z) \in A^\infty(\Lambda\,;\, X_1 + iY_0, X_2 + iY_0)$.

Alors d'après le théorème fondamental II du § 12 on a $F(Z) = \sum d_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, la série $\sum \mathcal{G}_n < F(Z) >$ étant normalement convergente dans tout secteur angulaire

$$X \geqslant X_1 + \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{X - X_1}\right| \leqslant K$$

On a d'ailleurs, pout tout ν, $d_\nu = \lim\limits_{j} \alpha_\nu(j) c_\nu$; comme le procédé de sommation est supposé régulier (cela veut dire que si une série est convergente et a pour somme S, le procédé de sommation réussit et lui donne aussi la somme S), on a nécessairement lim $\alpha_\nu(j) = +1$, donc $d_\nu = c_\nu$, *c. q. f. d.* (2).

(1) Voir par exemple Emile BOREL [3], p. 220.

(2) L'hypothèse de l'uniformité de la convergence n'est pas nécessaire. R. BAIRE a en effet montré que si une suite de fonctions continues est conver-

THÉORÈME II. — *Si* A *est le plus petit nombre réel tel que la fonction* F(Z) *soit représentable par la série de* DIRICHLET $\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *normalement convergente par le procédé des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$ *dans tout secteur angulaire*

$$X \geqslant A + \varepsilon, \qquad |Y/(X-A)| \leqslant K, \qquad \varepsilon > 0, K > 0,$$

la droite $X = A$ *est une coupure du domaine d'existence de* F(Z) [1].

Supposons le théorème faux et montrons que nous aboutissons à une contradiction. Si la droite $X = A$ n'est pas une coupure, elle contient un point, que nous pourrons supposer être le point A lui-même, où F(Z) est holomorphe, et de rayon de convergence $R > 0$. Alors en tous les points de la demi-droite réelle $Y = 0$, $X \geqslant A$, le rayon de convergence du développement de Taylor est $\geqslant R$.

On a alors uniformément, sur $(A, +\infty)$

$$F\left(Z - \frac{R}{2}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{R}{2}\right)^n \frac{d^nF(Z)}{dZ^n}.$$

Mais quel que soit n, $\dfrac{d^nF(Z)}{dZ^n} \in A^\infty(\Lambda;\ A, +\infty)$ donc aussi $F\left(Z - \dfrac{R}{2}\right)$. Alors d'après le théorème fondamental I du § 10, le développement de DIRICHLET de $F(Z - R/2)$, qui est $\sum \left(c_\nu e^{2\pi\lambda_\nu \frac{R}{2}}\right) e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ est normalement convergent par le procédé des groupements $\mathcal{G}_n$ dans tout secteur angulaire $X \geqslant A + \varepsilon$, $|Y/(X-A)| \leqslant K$; et le développement de F(Z) est normalement convergent par le procédé des groupements $\mathcal{G}_n$ dans tout secteur angulaire

$$X \geqslant A - R/2 + \varepsilon, \qquad |Y/(X - A + R/2)| \leqslant K,$$

ce qui est bien contraire à l'hypothèse faite sur le nombre réel A.

Nous désignerons désormais par $A(\Lambda)$ la famille des fonctions analytiques définies par des développements de DIRICHLET

gente, il existe un ensemble d'intervalles partout denses, dans chacun desquels les fonctions sont bornées dans leur ensemble ; dans le cas qui nous occupe, la convergence uniforme en résultera.

(1) Vl. BERNSTEIN [1], p. 139-141.

$\sum c_\nu e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$; le domaine de convergence par le procédé des groupements $\mathcal{G}_n$ n'est pas spécifié, mais c'est toujours la totalité du domaine d'existence. La suite Λ est toujours supposée donnée une fois pour toutes.

THÉORÈME III. — *Les fonctions* $F(Z) \in A(\Lambda)$ *qui sont bornées en module par un même nombre* M *sur un segment horizontal* $(X_1 + iY_0, X_2 + iY_0)$, *forment une famille normale dans le demi-plan* $X > X_1$.

En effet ces fonctions sont, en module, bornées dans leur ensemble, dans tout compact de ce demi-plan d'après (12 *d*).

Ainsi l'étude que nous avons faite introduit un nouveau critère de normalité : la combinaison d'une majoration sur un arc de courbe *non fermé* et d'une suffisante lacunarité du développement de DIRICHLET.

§ 14. — Applications à la théorie des fonctions analytiques : fonctions entières

Lorsque la fonction $F(Z) \in A(\Lambda)$ est entière, son développement de DIRICHLET est convergent par le procédé des groupements $\mathcal{G}_n$ dans tout le plan complexe.

Posons :

$$M(X, +\infty\,; Y) = \max_{\xi \geqslant X} |F(\xi + iY)|$$

$$M(X, +\infty\,; Y_1, Y_2) = \max_{\xi \geqslant X\,;\, Y_1 \leqslant \eta \leqslant Y_2} |F(\xi + i\eta)|.$$

Dans le cas où la série de DIRICHLET est absolument convergente (par exemple dans le cas d'un indice de condensation fini de la suite $\{\lambda_\nu\}$), nous poserons aussi $M(X, +\infty) = \max\limits_{\substack{\xi \geqslant X \\ -\infty < \eta < +\infty}} |F(\xi + i\eta)|$.

THÉORÈME I. (MAJORATION DES COEFFICIENTS). — *Il existe une constante* $C(k)$ *dépendant exclusivement de l'indice* k, *telle que*,

$$|c_k| \leqslant C(k)\, e^{2\pi\lambda_k X} M(X, +\infty\,; Y) \text{ (1)} \tag{14 a}$$

(1) Une formule d'un type analogue, mais correspondant à des conditions très différentes, est donnée par M. MANDELBROJT [1] p. 14. Pour situer cette formule par rapport à la nôtre, consulter la note historique du mémoire annoncé dans notre Introduction.

En effet $c_k e^{-2\pi\lambda_k X} e^{-2\pi i\lambda_k Y}$ est le coefficient de $e^{-2\pi\lambda_k Z}$ dans le développement de la fonction $F(X + iY + Z)$, qui est continue lorsque Z parcourt le demi-axe réel $\geqslant 0$ et bornée par $M(X, +\infty\ ; Y)$; il suffit alors d'appliquer (8 i). On voit même que $C(k) \leqslant \frac{C}{|J'(\lambda_k)|}$, C dépendant exclusivement de la suite Λ.

Ce théorème est tout à fait comparable au théorème de Cauchy qui borne les coefficients d'une série de Taylor dont on connaît la fonction

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| :$$

$$|c_k| \leqslant \frac{M(r)}{r^k}.$$

Cette formule de Cauchy est d'ailleurs valable pour des séries de Dirichlet absolument convergentes sous la forme

$$|c_k| \leqslant M(X, +\infty) e^{2\pi\lambda_k X}.$$

La formule que nous avons démontrée ici est bien plus intéressante : elle majore les coefficients non pas en fonction de $M(X, +\infty)$, mais de $M(X, +\infty\ ; Y)$.

De même que la formule de Cauchy démontre les théorèmes de Liouville sur les fonctions entières, le théorème I montre que :

Une fonction entière $F(Z) \in A(\Lambda)$ *ne peut être bornée sur une horizontale sans être une constante* (1) ;

Une fonction entière $F(Z) \in A(\Lambda)$ *ne peut, sur une horizontale, croître moins vite que* e^{-AX} $(A > 0)$ *pour* $X \to -\infty$, *sans se réduire à un polynôme de* Dirichlet.

Théorème II (Croissance sur diverses horizontales). — *Il existe une constante* $C(\varepsilon, h)$ *dépendant exclusivement de* ε, h *réels* > 0 *telle que*

$$(14\,b)\qquad \frac{1}{C(\varepsilon, h)} M(X+\varepsilon, +\infty\ ; Y \pm h) \leqslant M(X, +\infty\ ; Y) \leqslant C(\varepsilon, h) M(X-\varepsilon, +\infty\ ; Y \pm h).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer l'inégalité (10 a) aux fonctions

(1) Telle est la proposition utilisée à la note 1 de la page 57. La fonction $\overset{+}{P}(Z)$ est entière donc son développement de Dirichlet est convergent par le procédé des groupements $\mathcal{G}_n$ dans tout le plan complexe, elle est bornée sur l'axe réel, donc constante.

$F(X + iY + Z)$ et $F[X - \varepsilon + i(Y \pm h) + Z]$ qui appartiennent à $A^{\infty}(\Lambda\,;\,0, +\infty)$. Ce théorème montre que les croissances de $M(X, +\infty\,;\,Y)$ lorsque $X \to -\infty$ sont du même ordre de grandeur pour les diverses valeurs de Y.

THÉORÈME III (CROISSANCE DANS DES BANDES HORIZONTALES). — *Il existe une constante* $C(\varepsilon, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$ *dépendant exclusivement de* ε, *réel* > 0, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2' *telle que*

$$(14, c)\quad \begin{cases} M(X,+\infty\,;\,Y_1,Y_2) \leqslant C(\varepsilon,Y_1,Y_2,Y_1',Y_2')M(X-\varepsilon,+\infty\,;\,Y_1',Y_2') \\ M(X,+\infty\,;\,Y_1,Y_2) \geqslant C^{-1}(\varepsilon,Y_1,Y_2,Y_1',Y_2')M(X+\varepsilon,+\infty\,;\,Y_1'Y_2') \end{cases}$$

Démonstration identique à celle du théorème II. Ce théorème montre que les croissances de $|F(Z)|$ pour $X \to -\infty$ sont du même ordre de grandeur dans 2 bandes horizontales (Y_1, Y_2), (Y_1', Y_2'), quelles que soient leurs positions, et leurs épaisseurs $\geqslant 0$.

THÉORÈME IV. — *Si l'indice de condensation de la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *est nul, il existe une constante* $C(\varepsilon)$ *dépendant exclusivement de* ε *réel* > 0 *telle que*

$$(14d)\qquad \frac{M(X+\varepsilon, +\infty)}{C(\varepsilon)} \leqslant M(X, +\infty\,;\,Y) \leqslant M(X, +\infty).$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'inégalité (9 *a*). Il montre que la croissance de $|F(Z)|$ sur une horizontale, pour $X \to -\infty$, est du même ordre de grandeur que la croissance totale définie par $M(X, +\infty)$. Pour utiliser un langage classique ([1]), l'ordre et le type de F(Z) sur une horizontale sont les mêmes que l'ordre et le type globaux. En particulier *si* F(Z) *est d'ordre infini, c'est à-dire si* $\limsup_{X\to-\infty} \dfrac{\log\log M(X, +\infty)}{|X|} = +\infty$ *elle est aussi d'ordre infini sur toute horizontale ; cela entraîne* d'après un théorème de BIEBERBACH ([2]) *que toute horizontale soit une horizontale de Julia* ([3]).

Nous n'insistons pas sur les autres applications possibles de la

([1]) Voir par exemple NEVANLINNA [1], chap. VIII.
([2]) BIEBERBACH [1].
([3]) POLYA [1] p. 627. Une horizontale de JULIA $Y = h$ est une horizontale telle que dans toute bande horizontale $h - \varepsilon \leqslant Y \leqslant h + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, F(Z) prenne une infinité de fois toutes les valeurs sauf 2 au plus.

théorie. On pourrait donner quelques théorèmes utilisant l'inégalité (12 *d*), et montrant que l'on peut remplacer les demi-droites horizontales $\xi \geqslant X$ par des segments horizontaux $X \leqslant \xi \leqslant X + h$ de longueur fixe h ; et les demi-bandes horizontales $\xi \geqslant X$, $Y_1 \leqslant \eta \leqslant Y_2$ par des rectangles $X \leqslant \xi \leqslant X + h$, $Y_1 \leqslant \eta \leqslant Y_2$, de longueur fixe h.

Nous ne démontrerons pas non plus ici le théorème :

THÉORÈME V. — *Toute droite horizontale* $\eta = Y$ *est une horizontale de Julia, à moins que dans une bande horizontale* $Y - \varepsilon \leqslant \eta \leqslant Y + \varepsilon$ *assez mince* $|F(Z)|$ *ne tende uniformément vers* ∞ *pour* $X \rightarrow -\infty$.

En ce qui concerne la portée et la nouveauté des applications démontrées aux § 13 et 14, voir la note historique du mémoire annoncé dans l'Introduction.

CHAPITRE II

MAXIMA DES COEFFICIENTS D'UNE SOMME D'EXPONENTIELLES RÉELLES

§ 15. — Position du problème

A la suite d'une question posée en 1889 par MENDELEIEFF et en partie résolue par MARKOFF ([1]), Serge BERNSTEIN ([2]) a complètement résolu le problème suivant :

Quelles sont les valeurs absolues maxima des coefficients a_0, a_1, a_2,... a_n *d'un polynôme de degré* n, $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, *borné en module par 1 dans l'intervalle* $[0,1]$?

BERNSTEIN a donné la valeur maxima exacte de chaque coefficient :

$$(15a) \qquad \begin{cases} |a_0| \leqslant 1 \\ |a_1| \leqslant 2n^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |a_k| \leqslant 2^{2k}\dfrac{n(n+k-1)!}{(n-k)!\,(2k)!}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |a_{n-1}| \leqslant n\cdot 2^{2n-2} \\ |a_n| \leqslant 2^{2n-1} \end{cases}$$

La méthode repose sur un fait assez particulier. On démontre que c'est le même polynôme $P(x)$ qui réalise les maxima de tous les coefficients ; ce polynôme, dit *polynôme oscillateur* de degré n, est caractérisé par le fait qu'il atteint sa valeur absolue maxima $+1$ en $n+1$ points de l'intervalle (0,1), successivement avec le signe $+$ et le signe $-$. Or ce polynôme est connu : c'est $\cos 2n\left(\text{arc}\cos\sqrt{x}\right)$; il ne reste plus qu'à en calculer les coefficients pour trouver (15 *a*).

([1]) MARKOFF [1].

([2]) S. BERNSTEIN [1], p. 30, formules 52 *bis* et 53.

Posons-nous maintenant le problème suivant : $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_n$, *étant* $n+1$ *nombres réels* $\geqslant 0$, *distincts, quelles sont les valeurs absolues maxima des coefficients* $a_0, a_1, \ldots a_n$, *d'un polynôme généralisé* (¹) $P(x) = a_0 x^{\mu_0} + \cdots + a_n x^{\mu_n}$, *borné en module par 1 dans l'intervalle* [0,1] ? La condition $\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \leqslant 1$ peut d'ailleurs être remplacée par une condition moins restrictive : $\| P(x) \|_{L^p(0,1)} \leqslant 1$ $(p \geqslant 1)$; dans ce cas les μ_ν au lieu d'être $\geqslant 0$, devront être $> -\frac{1}{p}$.

Pour $p = \infty$, c'est encore un même polynôme oscillateur qui réalise les maxima de tous les coefficients, mais ce polynôme n'est pas connu, et ses coefficients semblent difficilement accessibles ; pour $p < \infty$, les valeurs maxima des divers coefficients sont réalisées par des polynômes différents.

Nous aborderons ce problème avec des méthodes nouvelles, tirées de l'analyse fonctionnelle, et très analogues à celles qui ont été utilisées dans le premier chapitre. Sauf pour $p = 2$ (espace de Hilbert) nous ne trouverons pas des valeurs exactes des maxima, mais des valeurs approximatives, qu'on pourra considérer comme satisfaisantes en envisageant le problème d'un point de vue *asymptotique.*

Soit $M = \{ \mu_\nu \}_{\nu > 0}$ une suite de nombres réels, rangés par ordre de grandeurs croissantes, $\mu_\nu + 1/p > 0$ (²), $\lim_{\nu \to \infty} \mu_\nu = +\infty$; appelons M_n la suite section $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$. $P(x\,;\,M_n)$ désignant un polynôme $a_1 x^{\mu_1} + \cdots + a_n x^{\mu_n}$, posons

$$N_p(k\,;\,n\,;\,M) = \operatorname{Max} \frac{|a_k|}{\| P(x\,;\,M_n) \|_{L^p(0,1)}} \tag{15 b}$$

et cherchons seulement une *valeur asymptotique* de $N_p(k\,;\,n\,;\,M)$ pour une suite M donnée, pour k fixe, et pour $n \to +\infty$.

Dans le cas où M est la suite des entiers $\geqslant 0$, $p = \infty$, les formules de Bernstein (15 *a*) donnent

$$N_\infty(k\,;\,n) \sim \frac{2^{2k}}{(2k)!} n^{2k}. \tag{15 c}$$

(¹) Nous dirons désormais polynôme, conformément à la définition de la page 23.

(²) Pour $p = \infty$, on peut prendre $\mu_0 = 0$; mais c'est sans intérêt, car le maximum de $|a_0|$ est trivial : c'est $+1$.

Remarquons que $N_p(k\,;\,n\,;\,M)$ n'est autre que la norme de la forme linéaire continue $(\overrightarrow{a_k})$, définie sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}_n$ de $L^p(0, 1)$ engendré par les $\vec{x}^{\mu_\nu}$, $\nu \leqslant n$, et qui à chaque polynôme $P(x\,;\,M_n)$ fait correspondre son coefficient a_k ; cette forme prend les valeurs $\delta_{k\nu}$ aux divers points $\vec{x}^{\mu_\nu}$, $\nu \leqslant n$ (1). Nous effectuerons la transformation définie au § 7, de sorte que nous aurons à résoudre un nouveau problème.

$\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ étant une suite strictement croissante, de nombres réels > 0, appelons Λ_n la suite section $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$; nous considérerons des « polynômes » $P(X\,;\,\Lambda_n) = a_1 e^{-2\pi\lambda_1 X} + \cdots + a_n e^{-2\pi\lambda_n X}$, et poserons

$$N_p(k;\,n;\,\Lambda) = \operatorname{Max} \frac{|a_k|}{\|P(X;\,\Lambda_n)\|_{L^p(0,+\infty)}}. \tag{15d}$$

Si les λ_ν sont reliés aux μ_ν par $\lambda_\nu = \mu_\nu + 1/p$, $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ est relié à $N_p(k\,;\,n\,;\,M)$ par

$$N_p(k;\,n;\,\Lambda) = (2\pi)^{1/p} N_p(k;\,n;\,M). \tag{15e}$$

Il s'agit d'étudier la valeur asymptotique de $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ pour une suite Λ donnée, pour k fixe, $n \to \infty$.

THÉORÈME. — *Toute fonction* $\varphi_k(X) \in L^{p'}(0, +\infty)$ $(p' = p/(p-1)$, *p fini* $\geqslant 1)$ *qui vérifie*

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\lambda_\nu X} \varphi_k(X)\,dX = \delta_{k\nu} \qquad (\nu \leqslant n,\ k \leqslant n) \tag{15f}$$

vérifie

$$\|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}(0,+\infty)} \geqslant N_p(k;\,n;\,\Lambda) \tag{15g}$$

De plus il existe une fonction $\varphi_k(X) \in L^{p'}$ *vérifiant* (15 *f*), *et pour laquelle l'inégalité* (15 *g*) *est remplacée par une égalité.*

On aurait un théorème analogue pour $\Phi_k(X) \in V[0, +\infty[$ $(p = \infty)$ *à condition de remplacer* $\varphi_k(X)dX$ *par* $d\Phi_k(X)$.

Démontrons ce théorème pour p fini ; pour $p = \infty$, la démonstration n'en diffère que par l'écriture.

La fonction $\varphi_k(X) \in L^{p'}$ définit sur $L^p(0, +\infty)$ une forme linéaire continue ; les égalités (15 *f*) prouvent que cette forme pro-

(1) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j, \\ 1 \text{ pour } i = j. \end{cases}$

longe à tout l'espace L^p la forme linéaire $(\overrightarrow{a_k})$ définie seulement sur $\mathcal{E}_n$; la norme $\| \varphi_k \|_{L^{p'}(0, +\infty)}$ de la forme linéaire prolongée à tout l'espace L^p ne peut que dépasser la norme $N^p(k\ ;\ n\ ;\ \Lambda)$ de la forme linéaire $(\overrightarrow{a_k})$ sur $\mathcal{E}_n$.

D'autre part, d'après le théorème de HAHN-BANACH [1] la forme linéaire $(\overrightarrow{a_k})$ définie sur $\mathcal{E}_n$ admet un prolongement sur tout l'espace L^p, qui a la même norme ; ce prolongement est défini par une fonction $\varphi_k(X) \in L^{p'}$, vérifiant (15 f) et pour laquelle l'inégalité (15 g) devient une égalité. On peut d'ailleurs démontrer qu'une telle fonction $\varphi_k(X)$ est unique.

§ 16. — Evaluation exacte de N_2 $(k\ ;\ n\ ;\ \Lambda)$

D'après le théorème du § 15, $N_2(k\ ;\ n\ ;\ \Lambda)$ est le minimum de $\| \varphi_k(X) \|_{L^2(0, +\infty)}$ lorsque $\varphi_k(X)$ vérifie (15 f). ($k \leqslant n$).

Effectuons la transformation de LAPLACE

$$(16a) \qquad J_k(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda X}\varphi_k(X)dX\,; \qquad \lambda = \sigma + i\tau, \quad > 0.$$

D'après ce qui a été vu au § 5, les relations « $\varphi_k(X) \in L^2(0, +\infty)$ » et « $J_k(\lambda) \in H^2$ » sont équivalentes; $\| \varphi_k(X) \|_{L^2(0, +\infty)} = \| J_k(\lambda) \|_{H^2}$; enfin les relations

$$(15f) \qquad \int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda_\nu X}\varphi_k(X)dX = \delta_{k\nu}, \qquad \nu \leqslant n$$

sont équivalentes aux relations.

$$(16b) \qquad J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu},\ \nu \leqslant n.$$

Nous pouvons donc dire que $N_2(k\ ;\ n\ ;\ \Lambda)$ est le minimum de $\| J_k(\lambda) \|_{H^2}$ lorsque la fonction $J_k(\lambda) \in H^2$ vérifie (16 b).

Soit $W_k(\lambda)$ la fonction de BLASCHKE [2] relative aux zéros λ_ν, $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$;

$$W_k(\lambda) = \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left(\frac{1 - \lambda/\lambda_\nu}{1 + \lambda/\lambda_\nu} \right).$$

[1] Théorème 2 du § 3.

[2] Voir note 1, p. 25.

Cette fonction vérifie, quel que soit ν, $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$: $W_k(\lambda_\nu) = 0$; quel que soit τ réel, $|W_k(i\tau)| = 1$.

On peut écrire

$$J_k(\lambda) = \frac{W_k(\lambda)}{W_k(\lambda_k)} U_k(\lambda); \tag{16c}$$

$U_k(\lambda)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$ et vérifie $U_k(\lambda_k) = +1$. Mais

$$\text{(16) } d \begin{cases} \| J_k(\lambda) \|_{H^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | J_k(i\tau) |^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{|W_k(\lambda_k)|} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | U_k(i\tau) |^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|W_k(\lambda_k)|} \| U_k(\lambda) \|_{H^2}. \end{cases}$$

Le minimum de $\| J_k(\lambda) \|_{H^2}$ lorsque $J_k(\lambda)$ vérifie les relations (16 *b*) est donc identique au produit de $\frac{1}{|W_k(\lambda_k)|}$ par le minimum de $\| U_k(\lambda) \|_{H^2}$ lorsque $U_k(\lambda)$ vérifie la seule relation $U_k(\lambda_k) = 1$. Nous allons calculer exactement ce dernier minimum.

$U_k(\lambda) \in H^2$ est représentable par l'intégrale de Cauchy :

$$U_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_k(i\tau)}{\lambda - i\tau} d\tau. \tag{16e}$$

Faisons $\lambda = \lambda_k$ dans cette formule et majorons l'intégrale par l'inégalité de Hölder-Schwarz :

$$1 = | U_k(\lambda_k) | \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | U_k(i\tau) |^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\lambda_k^2 + \tau^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$1 \leqslant \| U_k(\lambda) \|_{H^2} / \sqrt{4\pi\lambda_k} \tag{16f}$$

l'inégalité devenant une égalité si (et seulement si)

$$U_k(\lambda) = \frac{2\lambda_k}{\lambda + \lambda_k}. \tag{16g}$$

On voit donc que l'on peut écrire

$$\min \| U_k(\lambda) \|_{H^2} = \sqrt{4\pi\lambda_k}, \tag{16h}$$

et par suite

$$\text{(16}\,i\text{)}\qquad N_2(k;\, n;\, \Lambda) = \sqrt{4\pi\lambda_k} \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left| \frac{1 + \lambda_k/\lambda_\nu}{1 - \lambda_k/\lambda_\nu} \right| \text{(1)}$$

Non seulement nous avons obtenu la valeur exacte de $N_2(k\,;\, n\,;\, \Lambda)$, mais nous avons le polynôme extrémal $P_k(X\,;\, \Lambda_n)$ qui réalise le maximum de $\dfrac{|a_k|}{\|P\|_{L^2(0,\,\infty)}}$. Ce polynôme est celui pour lequel l'inégalité de Hölder-Schwarz

$$|a_k| \leqslant \|P_k(X)\|_2\, \|\varphi_k(X)\|_2$$

appliquée à la formule

$$a_k = \int_0^\infty P_k(X)\varphi_k(X)dX,$$

devient une égalité ; donc à un facteur constant près $P_k(X) = \varphi_k(X)$, $\varphi_k(X)$ étant la fonction vérifiant (15 *f*) et qui réalise le minimum de $\|\varphi_k(X)\|_{L^2(0,\,+\,\infty)}$. Il est facile de la calculer :

$$\text{(16}\,j\text{)}\qquad \begin{cases} U_k(\lambda) = \dfrac{2\lambda_k}{\lambda + \lambda_k} \\[2mm] J_k(\lambda) = \dfrac{2\lambda_k}{\lambda + \lambda_k}\dfrac{W_k(\lambda)}{W_k(\lambda_k)} \\[2mm] P_k(X) = \varphi_k(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda_k}{i\tau + \lambda_k}\frac{W_k(i\tau)}{W_k(\lambda_k)}\, e^{2i\pi\tau X} d\tau, \quad \text{ou} \end{cases}$$

$$\text{(16}\,k\text{)}\qquad P_k(X\,;\, \Lambda_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda_k}{i\tau + \lambda_k} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left(\frac{1 - i\tau/\lambda_\nu}{1 + i\tau/\lambda_\nu}\right)}{\displaystyle\prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left(\frac{1 - \lambda_k/\lambda_\nu}{1 + \lambda_k/\lambda_\nu}\right)}\, e^{2i\pi\tau X} d\tau.$$

On vérifierait aisément, par une décomposition de la fraction $\dfrac{W_k(\lambda)}{\lambda + \lambda_k}$ en éléments simples, et intégration terme à terme, que l'expression trouvée est un polynôme. Mais la méthode même qui a été employée et le résultat trouvé montrent que ce n'est pas le

(1) Cette formule a été trouvée par MM. Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 86-90. La méthode utilisée est tout à fait différente, et n'est pas généralisable au cas $p \neq 2$. Elle a d'ailleurs uniquement pour but de démontrer le théorème de Müntz et n'a pas été appliquée à des recherches analogues aux nôtres.

polynôme extrémal $P_k(X\,;\,\Lambda_n)$ qui a une expression simple, mais sa transformée de LAPLACE $J_k(\lambda)$.

Cherchons une évaluation asymptotique de $N_2(k\,;n\,;\Lambda)$, la suite Λ étant donnée, et k fixe, pour $n \to +\infty$. Nous supposerons la série $\sum 1/\lambda_\nu$ divergente, sans quoi $N_2(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ admet une limite pour $n \to \infty$, qui est donnée par le produit convergent

$$\sqrt{4\pi\lambda_k}\prod_{\nu\neq k}\left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_\nu}{1-\lambda_k/\lambda_\nu}\right|.$$

Nous poserons $S_n = \sum_{\nu \leqslant n} 1/\lambda_\nu$ et supposerons donc $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Déterminons $\eta > 0$ assez faible pour que $|u| \leqslant \eta$ entraîne $\dfrac{1+u}{1-u} = e^{2u[1+\varepsilon(u)]}$, $|\varepsilon(u)| \leqslant \varepsilon$. Nous pourrons alors trouver $\nu_0 > k$ assez grand pour que $\nu \geqslant \nu_0$ entraîne $\dfrac{\lambda_k}{\lambda_\nu} \leqslant \eta$, et nous aurons

$$(16l)\quad N_2(k;n;\Lambda) = \Bigg(\sqrt{4\pi\lambda_k}\prod_{\substack{\nu\leqslant\nu_0\\ \nu\neq k\\ \nu\leqslant n}}\left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_\nu}{1-\lambda_k/\lambda_\nu}\right|\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{\nu>\nu_0\\ \nu\leqslant n}} e^{2\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}[1+\varepsilon(\lambda_k/\lambda_\nu)]}\Bigg)$$

Le premier de ces 2 facteurs est indépendant de n (pour $n \geqslant \nu_0$) ; le deuxième est compris entre $e^{2\lambda_k S_n(1+\varepsilon)}$ et $e^{2\lambda_k(1-\varepsilon)(S_n - S_{\nu_0})}$; comme pour $n \to \infty$, $S_n - S_{\nu_0} \sim S_n$, on peut dire que, quelque petit que soit $\alpha > 0$, on a pour n assez grand

$$(16m)\qquad e^{2\lambda_k(1-\alpha)S_n} \leqslant N_2(k\,;n\,;\Lambda) \leqslant e^{2\lambda_k(1+\alpha)S_n},\ \text{ou encore}$$

$$(16n)\qquad \log N_2(k\,;n\,;\Lambda) \backsim 2\lambda_k S_n.$$

Nous pouvons obtenir une évaluation plus précise lorsque la série $\sum (1/\lambda_\nu)^2$ est convergente.

En effet dans ce cas la série

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq k}}^{\nu=\infty}\left(\log\left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_\nu}{1-\lambda_k/\lambda_\nu}\right| - 2\frac{\lambda_k}{\lambda_\nu}\right)$$

est convergente ; soit $\log D_k$ sa somme.

On peut écrire

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant n\\ \nu\neq k}}\log\left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_\nu}{1-\lambda_k/\lambda_\nu}\right| = 2\lambda_k S_n + \log D_k + o(1),$$

et par suite

$$\prod_{\substack{\nu \neq k \\ \nu = n}} \left| \frac{1 + \lambda_k/\lambda_\nu}{1 - \lambda_k/\lambda_\nu} \right| \sim D_k e^{2\lambda_k S_n}.$$

Il existe donc une constante $C_k = D_k\sqrt{4\pi\lambda_k}$, dépendant exclusivement de k et de la suite Λ, telle qu'on ait, pour k fixe, et $n \to \infty$

$$(16o) \qquad N_2(k\,;\, n\,;\, \Lambda) \sim C_k e^{2\lambda_k S_n}.$$

RÉCAPITULATION :

Formule exacte

$$(16i) \qquad N_2(k\,;\, n\,;\, \Lambda) = \sqrt{4\pi\lambda_k} \prod_{\substack{\nu \neq k \\ \nu \leqslant n}} \left| \frac{1 + \lambda_k/\lambda_\nu}{1 - \lambda_k/\lambda_\nu} \right|$$

Formule asymptotique générale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\right)$

$$(16n) \qquad \log N_2(k\,;\, n\,;\, \Lambda) \sim 2\lambda_k S_n.$$

Formule asymptotique spéciale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\ ;\ \sum (1/\lambda_\nu)^2 < +\infty\right)$

$$(16o) \qquad N_2(k\,;\, n\,;\, \Lambda) \sim C_k e^{2\lambda_k S_n}.$$

Formules relatives aux polynômes en x^{μ_ν}. Il suffit de faire le changement de variables ; comme

$$\sum_{\nu \leqslant n} 1/\lambda_\nu = \sum_{\nu \leqslant n} \frac{1}{\mu_\nu + 1/p} = \sum_{\substack{\mu_\nu \neq 0 \\ \nu \leqslant n}} \frac{1}{\mu_\nu} - O\left(\sum \frac{1}{\mu_\nu^2}\right),$$

nous pourrons poser $S_n' = \sum_{\substack{\mu_\nu > 0 \\ \nu \leqslant n}} 1/\mu_\nu$ et écrire :

Formule exacte

$$(16p) \qquad N_2(k\,;\, n\,;\, M) = \sqrt{2\mu_k + 1} \prod_{\substack{\neq k \\ \nu \leqslant n}} \left| \frac{1 + \dfrac{\mu_k + \frac{1}{2}}{\mu_\nu + \frac{1}{2}}}{1 - \dfrac{\mu_k + \frac{1}{2}}{\mu_\nu + \frac{1}{2}}} \right|$$

Formule asymptotique générale $\left(\sum_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu = +\infty\right)$

$$(16q) \qquad \log N_2(k\,;\, n\,;\, M) \sim (2\mu_k + 1)S'_n.$$

Formule asymptotique spéciale

$$\Big(\sum_{\mu_\nu>0} 1/\mu_\nu = +\infty \; ; \; \sum_{\mu_\nu>0} (1/\mu_\nu)^2 < +\infty\Big)$$

$$\text{(16}r) \qquad N_2(k;\, n;\, M) \backsim C'_k e^{(2\mu_k+1)S'_n}$$

§ 17. — Evaluation asymptotique de $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ pour $p \leqslant 2$

La majoration de $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ sera aisée, grâce à l'inégalité de PARSEVAL-RIESZ [1]. Nous utiliserons le théorème du § 15.

Soient, d'après une méthode développée au § 8,

$$W(\ ) = \prod_{\nu \leqslant n} \left(\frac{1-\lambda/\lambda_\nu}{1+\lambda/\lambda_\nu}\right)$$

$$J(\lambda) = W(\lambda)/(1+\lambda)^2$$

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)J'(\lambda_k)}$$

$$\text{(17}\,a) \qquad J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu \leqslant n,\ k \leqslant n.$$

Mais $J_k(\lambda) \in H^p$, quel que soit $p \geqslant 1$; comme ici $p \leqslant 2$, on peut écrire d'après ce qui a été vu au § 5

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X}\,\varphi_k(X)dX, \qquad \varphi_k(X) \in L^{p'}(0,\infty).$$

Les égalités (17 a) sont, pour $\varphi_k(X)$, équivalentes à (15 f), de sorte que, d'après le théorème du § 15

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \leqslant \|\,\varphi_k(X)\,\|_{L^{p'}(0,+\infty)} \leqslant \|\,J_k(\lambda)\,\|_{H^p} \leqslant \frac{C}{|J'(\lambda_k)|},$$

calcul d'ailleurs déjà fait au § 8 (Formule (8 i)). C est indépendant de k et de n, et dépend exclusivement de Λ.

Cette majoration est en tout point analogue à celle de la formule (16 i) et peut aussi s'écrire

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \leqslant D_k \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left|\frac{1+\lambda_k/\lambda_\nu}{1-\lambda_k/\lambda_\nu}\right|$$

[1] Voir § 5, formule (5 d).

On pourra sur ce produit faire à nouveau les évaluations asymptotiques du § 16 et trouver, lorsque la série $\sum 1/\lambda_\nu$ diverge,

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \leqslant e^{2\lambda_k(1+\alpha)S_n} \tag{17 b_1}$$

pour n assez grand, quel que soit $\alpha > 0$; et si de plus $\sum(1/\lambda_\nu)^2$ converge,

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \leqslant B_k e^{2\lambda_k S_n}. \tag{17 c_1}$$

Au contraire la minoration de $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ est beaucoup plus délicate. Nous utiliserons encore le théorème du § 15. Il existe $\varphi_k(X) \in L^{p'}(0, +\infty)$ satisfaisant aux égalités (15 f) et telle que $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) = \|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}(0,+\infty)}$.

Posons

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X}\varphi_k(X)dX.$$

On a pour ε réel > 0

$$J_k(\lambda+\varepsilon) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X}(e^{-2\pi\varepsilon X}\varphi_k(X))dX.$$

Ainsi $J_k(\lambda+\varepsilon)$ apparait comme la transformée de Laplace de $(e^{-2\pi\varepsilon X}\varphi_k(X)) \in L^2(0, +\infty)$.

On en déduit d'après l'égalité de Parseval

$$\|J_k(\lambda+\varepsilon)\|_{H^2} = \|e^{-2\pi\varepsilon X}\varphi_k(X)\|_{L^2(0,+\infty)}.$$

Mais l'inégalité de Hölder, appliquée au produit $e^{-4\pi\varepsilon X}\varphi_k^2(X)$, avec les exposants conjugués $q = \frac{p}{2-p}$, $q' = \frac{p'}{2}$, donne

$$\|e^{-2\pi\varepsilon X}\varphi_k(X)\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{(2-p)/2p}}\|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}(0,+\infty)}.$$

et par suite

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \geqslant \frac{\varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}}{C}\|J_k(\lambda+\varepsilon)\|_{H^2}. \tag{17 d}$$

ε pouvant être pris quelconque, fixe ou variable avec n. C est une constante universelle.

Mais les égalités (15 f) pour $\varphi_k(X)$ sont équivalentes pour $J_k(\lambda)$ à

$$J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu \leqslant n,\ k \leqslant n. \tag{17 a}$$

Il nous faut donc minorer $\| J_k(\lambda + \varepsilon) \|_{H^2}$ sachant que $J_k(\lambda)$ satisfait aux égalités (17 *a*).

Appelons $W_{\varepsilon,k}(\lambda)$ le produit de BLASCHKE pour les zéros λ_ν, $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$, pour le demi plan $\sigma > \varepsilon$ (ce qui nécessite $\varepsilon < \lambda_1$)

$$W_{\varepsilon,k}(\lambda) = \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left(\frac{1 - \dfrac{\lambda - \varepsilon}{\lambda_\nu - \varepsilon}}{1 + \dfrac{\lambda - \varepsilon}{\lambda_\nu - \varepsilon}} \right)$$

On a $W_{\varepsilon,k}(\lambda_\nu) = 0$, pour $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$; et quel que soit τ réel, $| W_{\varepsilon,k}(\varepsilon + i\tau) | = 1$.

On peut écrire $J_k(\lambda)$ sous la forme

$$J_k(\lambda) = \frac{W_{\varepsilon,k}(\lambda)}{W_{\varepsilon,k}(\lambda_k)} U_{\varepsilon,k}(\lambda)$$

pour $\sigma \geqslant \varepsilon$; $U_{\varepsilon,k}(\lambda)$ est holomorphe et bornée pour $\sigma \geqslant \varepsilon$, et vérifie $U_{\varepsilon,k}(\lambda_k) = +1$

$$(17\,e) \quad \left\{ \begin{aligned} \| J_k(\lambda + \varepsilon) \|_{H^2} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | J_k(\varepsilon + i\tau) |^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{| W_{\varepsilon,k}(\lambda_k) |} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | U_{\varepsilon,k}(\varepsilon + i\tau) |^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\| U_{\varepsilon,k}(\lambda + \varepsilon) \|_{H^2}}{| W_{\varepsilon,k}(\lambda_k) |} \end{aligned} \right.$$

Nous sommes donc ramenés à minorer $\| U_{\varepsilon,k}(\lambda + \varepsilon) \|_{H^2}$ sachant que $| U_{\varepsilon,k}(\lambda_k) | = 1$.

La démonstration du § 16 est encore valable ; il suffit de représenter $U_{\varepsilon,k}$ par l'intégrale de CAUCHY $U_{\varepsilon,k}(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_{\varepsilon,k}(\varepsilon + i\tau)}{\lambda - \varepsilon - i\tau} d\tau$ pour trouver

$$(17\,f) \qquad \| U_{\varepsilon,k}(\lambda + \varepsilon) \|_{H^2} \geqslant \sqrt{4\pi(\lambda_k - \varepsilon)} \geqslant h,$$

constante dépendant de Λ et de ε, et bornée tant que $\varepsilon \leqslant \lambda_1' < \lambda_1$.

La combinaison de (17 *e*) et (17 *f*) donne

$$\| J_k(\varepsilon + \lambda) \|_{H^2} \geqslant \frac{h}{| W_{\varepsilon,k}(\lambda_k) |} ;$$

h est une constante dépendant seulement de la suite Λ et de ε, restant bornée tant que $\varepsilon \leqslant \lambda_1' < \lambda_1$; en portant dans (17 *d*) on obtient la formule définitive

$$(17g) \quad N_p(k;\, n;\, \Lambda) \geqslant h\frac{\varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}}{C}\left|\frac{1}{W_{\varepsilon,k}(\lambda_k)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}h}{C}\prod_{\substack{\nu\leqslant n\\ \nu\neq k}}\left|\frac{1+\dfrac{\lambda_k-\varepsilon}{\lambda_\nu-\varepsilon}}{1-\dfrac{\lambda_k-\varepsilon}{\lambda_\nu-\varepsilon}}\right|.$$

On peut sur ce produit faire les mêmes évaluations asymptotiques que précédemment, et les résultats sont les mêmes, à condition de remplacer tous les λ_ν, $\nu \leqslant n$, par $\lambda_\nu - \varepsilon$. En particulier la somme $\sum\limits_{\nu\leqslant n} 1/\lambda_\nu$ doit être remplacée par $\sum\limits_{\nu\leqslant n}\dfrac{1}{\lambda_\nu-\varepsilon}$; mais cette quantité est $> S_n$.

On a donc, dans le cas général $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\right)$

$$(17h) \qquad N_p(k;\, n;\, \Lambda) \geqslant \varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}\, e^{2(\lambda_k-\varepsilon)(1-\alpha)S_n},$$

pour $n \to \infty$, quel que soit $\alpha > 0$; et si de plus $\sum(1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$

$$(17i) \qquad N_p(k;\, n;\, \Lambda) \geqslant \frac{1}{C_k}\varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}\, e^{2(\lambda_k-\varepsilon)S_n}.$$

Il est d'ailleurs possible dans ces formules de prendre ε variable avec n, pourvu que $\varepsilon \leqslant \lambda_1' \leqslant \lambda_1$.

Nous choisirons ε de façon à rendre aussi grande que possible la quantité $\varepsilon^{\frac{2-p}{2p}}\, e^{-2\varepsilon S_n}$; il suffit par exemple de prendre $\varepsilon S_n = 1$, et nous aurons les formules asymptotiques cherchées :

Dans le cas général $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\right)$

$$(17b_2) \qquad N_p(k;\, n;\, \Lambda) \geqslant e^{2\lambda_k(1-\alpha)S_n},$$

pour $n \to \infty$, quel que soit $\alpha > 0$;

si de plus $\sum(1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$

$$(17c_2) \qquad N_p(k;\, n;\, \Lambda) \geqslant A_k\frac{e^{2\lambda_k S_n}}{(S_n)^{\frac{2-p}{2p}}}$$

En réunissant ces minorations aux majorations (17 b_1) et (17 c_1) nous pouvons récapituler :

RÉCAPITULATION :

Formule asymptotique générale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\right)$

$$\log N_p(k\,;\, n\,;\, \Lambda) \sim 2\lambda_k S_n. \tag{17 b}$$

Formule asymptotique spéciale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\ ;\ \sum (1/\lambda_\nu)^2 < +\infty\right)$

$$A_k e^{2\lambda_k S_n} S_n^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant N_p(k\,;\, n\,;\, \Lambda) \leqslant B_k e^{2\lambda_k S_n}. \tag{17 c}$$

Formules relatives aux polynômes en x^{μ_ν}.

En posant toujours $S_n' = \sum\limits_{\substack{\mu_\nu > 0 \\ \nu \leqslant n}} 1/\mu_\nu.$

Formule asymptotique générale $\left(\sum\limits_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu = +\infty\right)\cdot$

$$\log N_p(k\,;\, n\,;\, M) \sim 2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S_n'. \tag{17 j}$$

Formule asymptotique spéciale $\left(\sum\limits_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu = +\infty\ ;\ \sum\limits_{\mu_\nu > 0} \left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)^2 < +\infty\right)$

$$A'_k e^{2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S'_n} S_n'^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant N_p(k\,;\, n\,;\, M) \leqslant B'_k e^{2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S'_n}. \tag{17 k}$$

§ 18. — Evaluation asymptotique de $N_p(k\,;\, n\,;\, \Lambda)$ pour $p \geqslant 2$

Cette fois c'est la majoration qui sera beaucoup plus délicate que la minoration. Aussi commencerons-nous par la minoration. Nous ferons la démonstration pour p fini ; pour $p = \infty$, il n'y a qu'une différence d'écritures.

D'après le théorème du § 15, il existe une fonction $\varphi_k(X) \in L^{p'}(0, +\infty)$, vérifiant les égalités (15 f) et telle que

$$N_p(K\,;\, n\,;\, \Lambda) = \| \varphi_k(X) \|_{L^{p'}(0, +\infty)}\cdot$$

Si comme précédemment nous posons

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X} \varphi_k(X)\, dX,$$

on a $J_k(\lambda) \in H^p$, puisque $p' \leqslant 2$, et

$$N_p(k\,;\, n\,;\, \Lambda) = \| \varphi_k(X) \|_{L^{p'}(0, +\infty)} \geqslant \| J_k(\lambda) \|_{H^p}, \tag{18 a}$$

de plus $J_k(\lambda)$ satisfait aux égalités (17 *a*). Nous introduirons alors la fonction de Blaschke $W_k(\lambda)$ relative aux zéros λ_ν, $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$, et au demi plan $\sigma \geq 0$; pour tout $\nu \leqslant n$, $\nu \neq k$, on aura $W_k(\lambda_\nu) = 0$; et quel que soit τ réel, $|W_k(i\tau| = 1$

$$W_k(\lambda) = \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left(\frac{1 - \dfrac{\lambda}{\overline{\lambda}_\nu}}{1 + \dfrac{\lambda}{\overline{\lambda}_\nu}} \right)$$

et nous poserons

$$J_k(\lambda) = \frac{W_k(\lambda)}{W_k(\lambda_k)} U_k(\lambda)$$

de sorte que $U_k(\lambda)$ est une fonction holomorphe pour $\sigma > 0$ et $\in H^p$, vérifiant $U_k(\lambda_k) = 1$, et que l'on a

$$\| J_k(\lambda) \|_{H^p} = \frac{1}{|W_k(\lambda_k)|} \| U_k(\lambda) \|_{H^p} \text{ et par suite} \tag{18 b}$$

$$N_p(k ; n ; \Lambda) \geqslant \frac{1}{|W_k(\lambda_k)|} \| U_k(\lambda) \|_{H^p} \tag{18 c}$$

Mais l'application de la formule (5 *l*) [1] donne ici

$$1 = | U_k(\lambda_k) | \leqslant K(\lambda_k) \| U_k(\lambda) \|_{H^p} \tag{18 d}$$

K étant la fonction définie dans cette formule.

Il suffit alors de porter dans (18 *c*) pour obtenir la formule définitive

$$N_p(k ; n ; \Lambda) \geqslant \frac{h}{|W_k(\lambda_k)|} \geqslant h \prod_{\substack{\nu \leqslant n \\ \nu \neq k}} \left| \frac{1 + \lambda_k/\overline{\lambda}_\nu}{1 - \lambda_k/\lambda_\nu} \right| \tag{18 e}$$

h étant une constante dépendant exclusivement de λ_k.

Nous avons déjà donné les valeurs asymptotiques d'un tel produit :

Si $\sum 1/\lambda_\nu < +\infty$

$$N_p(k ; n ; \Lambda) \geqslant e^{2\lambda_k(1-\alpha)S_n} \tag{18 f_1}$$

pour n assez grand, quel que soit $\alpha > 0$; si de plus, $\sum (1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$

$$N_p(k ; n ; \Lambda) \geqslant A_k e^{2\lambda_k S_n}. \tag{18 g_1}$$

[1] Ou, ce qui revient au même, la représentation de U_k par une intégrale de Cauchy et l'application de l'inégalité de Holder.

Passons maintenant à la majoration.

Nous poserons comme précédemment

$$(18h) \quad \begin{cases} W(\lambda) = \prod\limits_{\nu \leqslant n} \left(\dfrac{1 - \lambda/\lambda_\nu}{1 + \lambda/\lambda_\nu}\right) \\ J(\lambda) \ = W(\lambda)/(1 + \lambda)^2 \\ J_k(\lambda) = \dfrac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) J'(\lambda_k)} \end{cases}$$

de sorte que $J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu}$, $\nu \leqslant n$, $k \leqslant n$.

Comme $p' \leqslant 2$, il n'est pas évident que $J_k(\lambda)$ soit transformée de Laplace d'une fonction de $L^{p'}$.

Mais $J_k(\lambda - \varepsilon) \in H^2$, ε réel > 0, $\varepsilon < \lambda_1$.

En effet, la quantité $\left|\dfrac{1 - \lambda/\lambda_\nu}{1 + \lambda/\lambda_\nu}\right| = \left|\dfrac{1 - (\sigma + i\tau)/\lambda_\nu}{1 + (\sigma + i\tau)/\lambda_\nu}\right|$ atteint sa valeur maxima, lorsque $\sigma = -\varepsilon$, pour $\tau = 0$, cette valeur est $\left|\dfrac{1 + \varepsilon/\lambda_\nu}{1 - \varepsilon/\lambda_\nu}\right|$; si on choisit ε assez faible devant λ_1, on peut écrire $\left|\dfrac{1 + \varepsilon/\lambda_\nu}{1 - \varepsilon/\lambda_\nu}\right| \leqslant e^{3\varepsilon/\lambda_\nu}$ et par suite

$$| J(-\varepsilon + i\tau) | \leqslant \frac{e^{3\varepsilon S_n}}{(1 - \varepsilon)^2 + \tau^2}$$

On a donc

$$(18i) \qquad \| J_k(\lambda - \varepsilon) \|_{H^2} \leqslant O(1) \frac{e^{3\varepsilon S_n}}{| J'(\lambda_k) |}.$$

$J_k(\lambda - \varepsilon)$ est alors transformée de Laplace d'une fonction $\psi_{\varepsilon, k}(X) \in L^2(0, +\infty)$, et d'après l'égalité de Parseval

$$(18j) \qquad \| \psi_{\varepsilon, k}(X) \|_{L^2(0, +\infty)} \leqslant O(1) \frac{e^{3\varepsilon S_n}}{| J'(\lambda_k) |}.$$

On en déduit

$$(18k) \qquad J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X} \varphi_k(X) dX \ ^{(1)}$$

$$(18l) \qquad \varphi_k(X) = e^{-2\pi\varepsilon X} \psi_{\varepsilon, k}(X).$$

Cette dernière égalité montre que $\varphi_k(X) \in L^{p'}(0, +\infty)$ comme nous voulions l'obtenir ; il suffit en effet d'appliquer au produit

[1] La fonction $\varphi_k(X)$ est évidemment indépendante de ε.

$e^{-2\pi p'\varepsilon X}\,|\psi_{\varepsilon,k}(X)|^{p'}$ l'inégalité de HÖLDER avec les exposants conjugués $q = \dfrac{2p-2}{p-2}$, $q' = \dfrac{2}{p'}$ pour avoir

$$(18m)\quad \|\varphi_k(X)\|_{L^{p'}(0,+\infty)} \leqslant \frac{O(1)}{\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}}\,\|\psi_{\varepsilon,k}(X)\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant C\frac{e^{3\varepsilon S_n}}{\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}}\frac{1}{|J'(\lambda_k)|}.$$

D'après le théorème du paragraphe 15, on peut conclure, compte tenu de l'évaluation de $J'(\lambda_k)$:

$$(18n)\qquad N_p(k;n;\Lambda) \leqslant C_k\frac{e^{3\varepsilon S_n}}{\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}}\prod_{\substack{\nu\leqslant n\\ \nu\neq k}}\left|\frac{1+\dfrac{\lambda_k}{\lambda_\nu}}{1-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_\nu}}\right|.$$

On en tire les formules asymptotiques : si $\sum 1/\lambda_\nu = +\infty$

$$(18o)\qquad N_p(k;n;\Lambda) \leqslant \frac{e^{3\varepsilon S_n}}{\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}}\,e^{2\lambda_k(1+\alpha)S_n}$$

pour n assez grand, quel que soit $\alpha > 0$; si de plus $\sum(1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$

$$(18p)\qquad N_p(k;n;\Lambda) \leqslant D_k\frac{e^{3\varepsilon S_n}}{\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}}\,e^{2\lambda_k S_n}.$$

Nous pouvons maintenant choisir ε variable avec n de façon à rendre aussi petite que possible l'expression $e^{3\varepsilon S_n}/\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}$; il suffit de prendre $\varepsilon\, S_n = 1$, ce qui conduit aux formules asymptotiques définitives :

Si $\sum 1/\lambda_\nu = +\infty$

$$(18f_2)\qquad N_p(k;n;\Lambda) \leqslant e^{2\lambda_k(1+\alpha)S_n}$$

pour n assez grand, quel que soit $\alpha > 0$; si de plus $\sum(1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$

$$(18g_2)\qquad N_p(k;n;\Lambda) \leqslant B_k e^{2\lambda_k S_n} S_n^{\frac{p-2}{2p}}.$$

En combinant ces majorations aux minorations $(18\,f_1)$ et $(18\,f_2)$, nous pouvons récapituler :

RÉCAPITULATION :

Formule asymptotique générale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty\right)$

$$\text{(18}f\text{)} \qquad \log N_p(k; n; \Lambda) \backsim 2\lambda_k S_n$$

Formule asymptotique spéciale $\left(\sum 1/\lambda_\nu = +\infty \ ; \sum (1/\lambda_\nu)^2 < +\infty\right)$

$$\text{(18}g\text{)} \qquad A_k e^{2\lambda_k S_n} \leqslant N_p(k; n; \Lambda) \leqslant B_k e^{2\lambda_k S_n} S_n^{\frac{p-2}{2p}}$$

Formules relatives aux polynômes en x^{μ_ν}.

Formule asymptotique générale $\left(\sum_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu = +\infty\right)$

$$\text{(18}q\text{)} \qquad \log N_p(k; n; M) \backsim 2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S_n'.$$

Formule asymptotique spéciale $\left(\sum_{\mu_\nu > 0} 1/\mu_\nu = +\infty ; \sum_{\mu_\nu > 0} \left(\frac{1}{\mu_\nu}\right)^2 < +\infty\right)$

$$\text{(18}r\text{)} \qquad A_k' e^{2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S_n'} \leqslant N_p(k; n; M) \leqslant B_k' e^{2\left(\mu_k + \frac{1}{p}\right) S_n'} S_n'^{\frac{p-2}{2p}}.$$

§ 19. — Conclusion

Nous avons d'abord trouvé une formule relative à une suite $\Lambda = \{ \lambda_\nu \}$ quelconque (sans autre hypothèse que $\sum 1/\lambda_\nu = +\infty$; l'hypothèse contraire n'étant pas intéressante, puisque quand elle est réalisée, N_p a une limite, d'ailleurs inconnue, pour $n \to \infty$).

Cette formule est indépendante de p :

$$\log N_p(k; n; \Lambda) \backsim 2\lambda_k S_n.$$

L'équivalence est d'ailleurs uniforme par rapport à p ; quel que soit $\alpha > 0$, on peut trouver n_0 assez grand (dépendant exclusivement de k et de la suite Λ) tel que $n \geqslant n_0$ entraîne

$$e^{2\lambda_k(1-\alpha)S_n} \leqslant N_p(k; n; \Lambda) \leqslant e^{2\lambda_k(1+\alpha)S_n}$$

quel que soit $p \geqslant 1$, fini ou infini.

Si nous prenons pour Λ la suite des entiers naturels,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n,$$

a formule trouvée s'écrit

$$\log N_p(k; n) \backsim 2k \log n$$

équivalence conforme aux résultats de BERNSTEIN (donnés pour $p = \infty$).

En faisant l'hypothèse supplémentaire $\sum (1/\lambda_\nu)^2 < +\infty$, nous avons pu améliorer les résultats et intercaler $N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda)$ entre les 2 quantités

$$C_k e^{2\lambda_k S_n}, \qquad D_k e^{2\lambda_k S_n} S_n^{\frac{p-2}{2p}},$$

la deuxième de ces quantités étant plus grande ou plus petite que la première selon que $p \geqslant 2$ ou $p \leqslant 2$; pour $p = 2$, ces 2 quantités sont du même ordre de grandeur et conformes au résultat du § 16.

Mais la valeur asymptotique exacte de N_p doit pouvoir être située avec plus de précision entre ces 2 infiniment grands ; il faudrait pour cela employer des méthodes plus puissantes que celles qui furent précédemment exposées. Il y a là un problème que nous n'avons pas pu résoudre ; nous pensons qu'il doit en réalité exister pour p quelconque comme nous l'avons vu pour $p = 2$ une constante $C_p(k, \Lambda)$ telle que

$$N_p(k\,;\,n\,;\,\Lambda) \backsim C_p(k, \Lambda) e^{2\lambda_k S_n}.$$

Si nous considérons le cas $p = \infty$, la suite Λ étant la suite des entiers, la formule (18 g) donne

$$A_k n^{2k} < N_\infty(k\,;\,n) \leqslant B_k n^{2k} \sqrt{\log n}$$

alors que les formules de S. BERNSTEIN donnaient

$$N_\infty(k\,;\,n) \backsim \frac{2^{2k}}{(2k)!} n^{2k}$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BANACH. — [1] *Théorie des opérations linéaires.* Monografje matematyczne, Varsovie, 1932.

S. BERNSTEIN. — [1] *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Paris, 1926.

VL. BERNSTEIN. — [1] *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, 1933.

BIEBERBACH. — [1] *Ueber eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung.* Mathematische Zeitschrift, *3* (1919), p. 175-190.

BLASCHKE. — [1] *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali uber Folgen analytischer Funktionen.* Leipziger Berichte, *67* (1915), p. 194.

BOREL. — [1] *Sur les zéros des fonctions entières.* Acta Mathematica, t. 20.
[2] *Leçons sur les fonctions entières.* Paris, 1921.
[3] *Leçons sur les séries divergentes.* Paris, 1928.

BOURBAKI. — [1] *Topologie générale* Chap. I et II, Paris, 1940.
[2] *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats).* Paris, 1939.

CARLEMAN. — [1] *Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen.* Arkiv for Matematik, Astro nomi och Fysik. Svenska Vetenskapsakademien, Bd 17, n° 9, 1923.

DOETSCH. — [1] *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.* Ber lin, 1937.

HADAMARD. — [1] *Etude sur les fonctions entières et en particulier sur une fonction considérée par Riemann.* Journal de Mathématiques, 4e série, tome 9 (1893), p. 171 215.

HARDY. — [1] *The mean value of the modulus of an analytic function.* Proceedings of the London Mathematical Society, *14* (1914), p. 269 277.

KACZMARZ UND STEINHAUS. — [1] *Theorie der Orthogonalreihen.* Monografje Matematyczne, Varsovie Lwow, 1935.

LEVINSON. — [1] *Gap and density theorems.* American Mathematical Society Colloquium Publications. New York, 1940.

LINDELOF. — [1] *Mémoire sur les fonctions entières de genre fini.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, *31* (1902), n° 1, p. 1 79.

A. MARKOFF. — [1] *Sur une question posée par Mendeleieff.* Bulletin de l'Académie de Saint Pétersbourg, 1889.

MANDELBROJT. — [1] *Séries lacunaires*, Paris, 1936.

MÜNTZ. — [1] *Ueber den Approximationssatz von Weierstrass.* Mathematische Abhandlungen (Schwarzes Festschrift). Berlin 1914, p. 303-312.

NEVANLINNA. — [1] *Eindeutige analytische Funktionen.* Berlin, 1936.

PALEY AND WIENER. — [1] *Fourier transforms in the complex domain.* American Mathematical Society Colloquium Publications. New-York, 1934.

POLYA. — [1] *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Mathematische Zeitschrift, *29* (1929), p. 549-640.

SZASZ. — [1] *Ueber die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen.* Mathematische Annalen, *77* (1916), p. 482-496.

SZEGO. — [1] *Ueber dichte Funktionenfamilien.* Berichte der Math. Phys. Kl. d. sächsischen Akademie der Wissenschaften, *78* (1926), p. 373 380.

[2] *Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome.* Mathematische Zeitschrift, *25* (1926), p. 87 115.

TITCHMARSH. — [1] *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford, 1937.

VALIRON. — [1] *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière.* Thèse, Paris, 1914 et Annales de Toulouse, 1913.

ZYGMUND. — [1] *Trigonometrical series.* Monografje Matematyczne. Varsovie-Lwow, 1935.

TABLE DES MATIÈRES