

この電磁気学の講義ノートは、筑波大学物理学系の2・3年生に対して10年以上前に行った20コマ(75分)×2の講義の記録である。講義のタイトルは2年生用が”電磁気学”、3年生用が”電磁物理学”となっていた。学生は、1年生の時期に簡単な電磁気学の導入部分の授業を受けている。従って、前半はいくらか中途半端な始まり方をしている。後半は従って、電磁気学を如何に物理現象や実験装置に適用するかに主眼が置かれる。この部分が、どちらかと言うとこの講義の特徴であろう。但し学内事情に依り、電磁物理学という講義は今も行われていない。

最後の多重極場以外では、量子力学は使用していない。

この講義ノートの中では、スカラー・ベクトル・行列に対して、その値が常識的な意味で0である時には、次元やその構造が無視されている。

青木は、筑波大学の第1学群に学生用のLANを立ち上げる作業をした。この後、学生に計算機を使用させる目的もあって、出来るだけ講義ノートは電子化して、ホームページに載せる事とした。

2004年に、LAN設置以前に行われたこの講義ノートの電子化に協力しても良いという以下の8名の学生の申し出があった。僕は、この申し出を喜んで受け入れ、電子化が実現した。手書きの講義ノートは、担当が決まってから急こしらえて書かれたものであり、読みにくく間違いも多々あったのに、tex入力を実現してくれた学生の名前を以下に挙げて、感謝を表した。名前は、あいうえお順とした。

飯島正史(いじま まさし)	石川泰士(いしかわ たいじ)
伊藤雄司(いとう ゆうじ)	加藤晴子(かとう はるこ)
千葉明子(ちば あきこ)	土屋雅尚(つちや まさなお)
三柴寛行(みしば ひろゆき)	安野琢磨(やすの たくま)

この原稿以外に、多くの原稿の電子化に必要であった、計算機環境を整えてくれた 現長野高専の 奥村紀浩さん、及び筑波大学研究基盤センター加速器部門の木村ひろみさんにも感謝しておきたい。

2005年11月

青木保夫

その後 猪股 大悟君 が入力ミスを多数指摘してくれた。

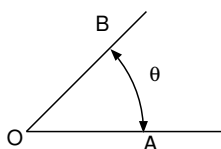
目次

第1章 立体角、微分 その他	4
第2章 電磁気学の法則	17
第3章 Coulomb の法則	23
第4章 電流	43
第5章 静磁気	49
第6章 電場と磁場	51
第7章 磁場と電荷の相互作用	53
第8章 場のエネルギー-運動量密度	58
第9章 輻射	66
第10章 電気的雙極子からの輻射	74
第11章 Lienard-Wiechert の potential	78
第12章 輻射の反作用	86
第13章 特殊相対論	89
第14章 Laplace の方程式を解く	114
第15章 もう一度電流について	138
第16章 磁気能率と磁性	152
第17章 電磁場中での荷電粒子の軌跡	162
第18章 円筒対称な場の中の荷電粒子の運動	166
第19章 導波管	191
第20章 光源の物理	204

第 21 章 光の散乱	216
第 22 章 多重極展開	234

第1章 立体角、微分 その他

2次元空間での角度の復習



$\angle AOB$ の大きさ θ は、 O を中心とし任意の半径 r の円を描いた時、2本の半直線 AO 、 BO が切り取る円弧の長さ l を用い $\theta = l/r$ で定義された。 θ の単位はラジアン (rad) であり、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の値をとる。 2π の等号は駄目だという人が多いだろう。逆に多価関数にしてしまえという人もいるかも。

ベクトル $\vec{OA} = \mathbf{a}$ 、 $\vec{OB} = \mathbf{b}$ が与えられたならば、ベクトルの内積を利用すると簡単に角度は計算出来る。

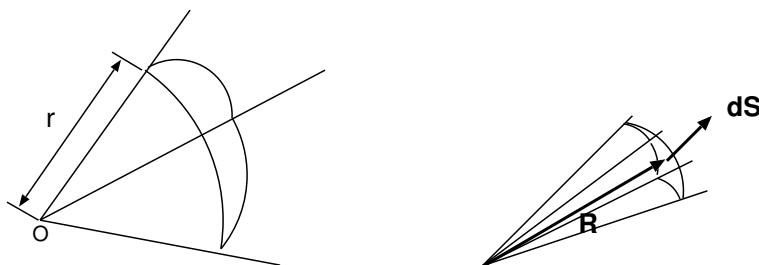
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (1.1)$$

この式は、3次元空間でも使用できる。一方、角度の符号も定義している。即ち、角度は加算的である。

3次元空間での角度 (立体角) 中心 O 、半径 r の球面上に面積 S の曲面を与えたとき、 S が O を見込む立体角 Ω は

$$\Omega = S/r^2 \quad (1.2)$$

で定義される。 $0 \leq S \leq 4\pi r^2$ に対し、 $0 \leq \Omega \leq 4\pi$ の値をとる。この Ω を立体角と名付け、単位はステラジアン (sr) とする。無次元量ではあるが、単位をつけておく。もしも単位をつけないと、無次元量であるから、 $1 \text{ rad} + 2 \text{ sr}$ といった計算を禁止出来なくなる。



定義の拡張 微小面積要素 dS に向きを持たせてベクトルとする。向きの定義: 小さな人間が微小面積要素の周上を内部を左手に見る様に反時計周りに一周するとしよう。この人間の足から頭の方 (向きを含む) を面の向きとする。

面要素ベクトル $d\mathbf{S}$ は大きさ dS を持ち、上の述べた方向と向きを持つとする。この面要素ベクトルの定義を用いて、

$$\Omega = \int \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3} \quad (1.3)$$

を立体角の積分表示とすればよい。積分は立体角を計算したい面について行う。

この定義では、立体角は負にもなる。例えば、 x, y 方向に無限に広がる無限大の面積を持つ平面を考える。この平面の一方側に立ってこの平面を見る。面からの距離に拘らず立体角は 2π である。ところが、ある意味で距離を負にする（平面を突き抜けて平面の向こう側へ行く）と突然立体角は -2π となる。立体角の符号が定義に加わるとは、このような事情を認める事である。

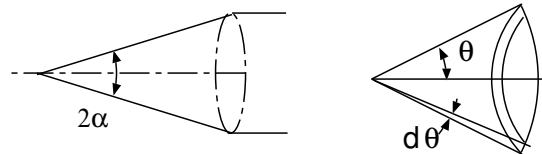
立体角の概念を確認するために、幾らかの例を考えよう。

点光源からの光の受光 点光源からの光を平面で受光する場合を考える。

- 光の進行方向に垂直に面を置く。光源から同じ距離に置いたとき、受光面積の広い方が受光量は多い。
- 異なる距離に置いた受光面では、(距離)² に反比例して受光量は変化する。
- 受光面を傾けると、光の直進方向と面の法線方向のなす角の余弦に比例して受光量は変化する。
- 有限の広がりを持つ光源や受光面に対しては、端の方では面の法線は光の進行方向と平行でないから、微小部分に分けて積分すればよい。

この受光量の多少に関係する概念として、立体角を考えればよいだろう。

GM 管の立体角 1 年生の物理実験でガイガー管の実験をし、立体角の概念を学んだ。練習の為に、少し考えておこう。中心軸からの半頂角が α の円錐で切取られる球面の面積を計算する。今の場合、ベクトル \mathbf{R} と $d\mathbf{S}$ はいつも直交しているので計算は単純になる。角 $\theta, \theta + d\theta$ の幅のはちまき部の面積は、 $2\pi R \sin \theta R d\theta$ 。これを区間 $[0, \alpha]$ で積分すると、



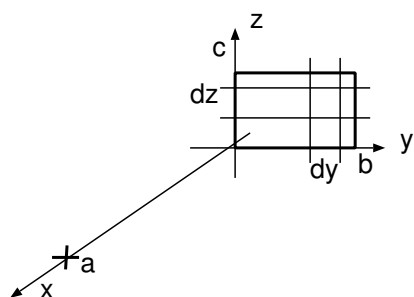
$$2\pi \int_0^\alpha R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) \quad (1.4)$$

立体角 $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ で与えられる。半頂角 α は GM 管の半径を d とすると、 $\alpha = \tan^{-1}d/R$ で計算可能である。 $|\alpha| \ll 1$ ならば $\cos \alpha \simeq 1 - \alpha^2/2 + \alpha^4/24 \dots$ と展開できるから $\Omega \simeq 2\pi\alpha^2 \simeq \pi d^2/R^2$

即ち立体角は GM 管の表面積 πd^2 と距離 R の二乗の比で近似できる。

実験との関係 γ 線の吸収の実験で、GM 管が直接検出しているのは、 γ 線ではない。 γ 線が GM 管の窓や壁にあたった時に、主に光電効果により、ある確率で吸収され二次電子を放出する。この電子を検出している訳である。従って、実際の γ 線検出効率は、有効な電子放出面の立体角以外に、壁(金属)と窓(雲母)とで光電効果の起る確率や電極での電子検出確率に依存するから、ここで計算したような立体角だけで決まるような単純なものにはならない。

例 x 軸上の点 $(a, 0, 0)$ から yz 面内の長方形を見込む立体角



図を見ながら考える。点 $(a, 0, 0)$ から点 $(0, y, z)$ の近くの $dy dz$ の微小部分を見込む立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \frac{dy dz}{a^2 + y^2 + z^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.5)$$

これを $0 \leq y \leq b$ 、 $0 \leq z \leq c$ で積分すればよい。

$$\Omega = \int_0^b dy \int_0^c dz \frac{a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.6)$$

少し面倒な計算の後、

$$\Omega = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{bc}{a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \quad (1.7)$$

となる。

この式を組み合わせれば、ある程度複雑な形状の平面の場合にも、立体角の計算は簡単だろう。

上の積分を計算する時に、以下の指針を与えておこう。

- $\int dt \frac{1}{(t^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{t}{a^2(t^2 + a^2)^{1/2}}$
- $\int ds \frac{1}{(s^2 + a^2)\sqrt{s^2 + a^2 + b^2}}$ は $\sqrt{s^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} - su$ として $s \rightarrow u$ へ独立変数を変換し、分母を因数分解し被積分関数を部分分数に分ける。その後
- $\int du \frac{1}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{Tan}^{-1}(u/a)$ を利用する。最後に、次式を用いて簡単化する。
- $\text{Tan}^{-1}p - \text{Tan}^{-1}q = \text{Tan}^{-1} \frac{p - q}{1 + pq}$

微分

勾配 ∇ (nabla、Hamilton の記号、grad 記号)

スカラー量の勾配は一次元の微分を多次元に拡張したものである。偏微分という概念があるのに何故、勾配という概念を物理学者は使うのだろうか？ という疑問をもつ人もいるだろう。

偏微分という概念は座標(系)という概念を抜きにしては考えられない。これは実際に微分を計算しようとするときどうしても座標がなければ始まらない事から自明であろう。ところが勾配という概念は座標系からは距離を置いている事に気付くだろう。これは幾何学をデカルト座標

で取り扱ってみると、ベクトルを使って考える時の相違と同じであるのに気付く。勾配ベクトルは、傾斜が一番大きい方向を持ち、その傾斜の大きさに比例する大きさを持つベクトルとし、向きは山の高い方向を向いている。例えば水は標高の高いほうから低いほうへ、その勾配の大きな方向に(逆向きに)流れるだろう。色々な物理量(その他の量)の移動(率)が他の量の勾配に比例する場合がある。ニュートンの運動方程式は、ポテンシャル勾配の逆向きに運動量が変化すると述べている。運動方程式をこう述べるとき、座標系という概念は使用していない。

デカルト座標を用いてスカラー関数 ϕ の勾配 $\nabla\phi$ は以下の様に表現される。

$$\nabla\phi = \left\{ \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \phi \quad (1.8)$$

ここで、 \hat{e}_i は第 i ($i = 1, 2, 3$) 成分の基本単位ベクトルとする。この式の右辺、中括弧で囲まれた部分を、勾配演算子と考えて、独立した量とみなす場合もある。即ち、右辺は勾配演算子とスカラー関数 ϕ の積の様に考える。

他の座標系での勾配の表現はこの節の後で紹介しよう。スカラー量 ϕ の勾配 $\nabla\phi$ は(共変)ベクトルとなる。

ベクトル量 \mathbf{A} の微分は、発散 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ($div\mathbf{A}$) と回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ ($rot\mathbf{A}$ または $curl\mathbf{A}$) の二つがある。 ∇ とベクトル \mathbf{A} の内積と外積(ベクトル積)の形に書かれる事が多い。

流体力学でよく利用された概念である。

発散とは言葉の通り、”無限小の体積要素”から出ていく量を表す。入って来る部分には負号をつける。体積要素の内部に”湧き口”があれば当然発散は正だろうし、”吸い込み口”があれば負になる。

デカルト座標でのベクトル \mathbf{A} の発散は、以下の様に表現される。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.9)$$

二つのベクトル量 ∇ と \mathbf{A} のスカラー積の形で表現される通り、発散はスカラー量である。極(軸)性ベクトルの発散は(擬)スカラーになる。

座標系の座標の向きを逆転する操作を考え、これをパリティ変換と呼ぶ。例えば位置ベクトルや運動量ベクトルはこのパリティ変換に対して符号を変える。一方、角運動量は、位置ベクトルと運動量ベクトルのベクトル積であるから、パリティ変換に対して符号を変えない。この様にパリティ変換に対して符号を変えるベクトルと符号を変えないベクトルに分類出来る。パリティ変換に対して符号を変える(変えない)ベクトルを極性(軸性、擬)ベクトルと名づける。

もしも、パリティ変換にたいして符号を変える様なスカラーがあれば、このスカラーを擬スカラーと呼ぶ。

位置、速度、角速度ベクトル (\mathbf{r} , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$) の間に $\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ という関係があるとしよう。ここで、 \mathbf{r} , \mathbf{v} は極性ベクトルである。この式にパリティ変換を施すと、 $\boldsymbol{\omega}$ は軸性ベクトルである事がわかる。このように、物理法則を観察する事で、物理量の性質を識別する事が可能である。これから電磁気学に登場する物理量がどのような性質を持っているか、新しい式が登場するたびに分類する習慣をつけておくとよいだろう。

ついでに言うと、時間の向きを変えた時に符号が変化するか、しないかも非常に大切な概念である。物理の次元と同様に、何時も注意しておくことと失敗を減らす事が可能であるばかりでなく、物理に対する興味が深まるだろう。

単純な流れが、体積要素をただ通過するだけならば発散は0になるし、入ってきた”流れ”の一部がこの体積要素に蓄積されるならば、蓄積量の増加率と流れの発散の間には連続の方程式が成立する。思い出す為に、連続の方程式を確認しておこう。ある微小空間に、電流密度 \mathbf{i} で電流が流れ込み、その内の幾らかがこの空間に蓄積され、残りの部分は流れ出すとする。この時の電荷の保存則を書き下してみよう。この微小部分をデカルト座標系で、 dx, dy, dz の辺長を持ち、 x, y, z 軸に各辺が平行な直方体領域だとしよう。

この領域に存在する電荷は、電荷密度 ρ を用い、 $\rho(x, y, z, t) dx dy dz$ で与えられる。従って、単位時間当たりの増分は $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$ である。

一方、この空間の x 軸に直交する2面を通過する電流は、電流密度の x 成分 i_x を用いて次の様に書ける。

$$\{i_x(x + dx, y, z, t) - i_x(x, y, z, t)\} dy dz = \frac{\partial i_x}{\partial x} dx dy dz \quad (1.10)$$

他の y, z 軸に垂直な面を通過する電流も考慮し、全体として電荷が保存する事を要求すると、以下の連続の方程式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (1.11)$$

ベクトル場 \mathbf{X} が与えられたとし、有限領域を隙間の無く無限小領域に分割してみる。一つの無限小領域でのベクトル \mathbf{X} を考える。この無限小領域から出て行くベクトル \mathbf{X} 、即ち $\nabla \cdot \mathbf{X}$ のこの微小領域での体積分は、この無限小領域に隣接する隣の無限小領域のどれかへ入って行くはずである。隣接領域でも同じ事情にあるはずだから、 $\nabla \cdot \mathbf{X}$ を与えられた有限領域で積分すると、隣接微小領域を持たない表面から入って来る(出て行く) \mathbf{X} の和(面積分)で与えられるはずである。これがガウスの定理である。

$\nabla \times \mathbf{A}$ をベクトル \mathbf{A} の”回転”と呼ぶ。この名前に付いては少し異論があるが、それは後で述べる。回転という概念は渦と直接に関係している様に思える。例えば三次元空間の渦巻きを思いうかべてみよう。渦には、回転の中心となる回転(中心)軸があり、この軸のまわりの回転の”強さ”を指定することになる。”軸”はよく知れた概念だとすると、回転の強さを次に常識と矛盾しないように定義せねばならぬ。回転ならば、軸に垂直な面内での運動の角速度を利用すればよい。

単純な場合として、 z 軸を回転軸とし角速度 ω の回転に対し、 ω を使わずに(消去して)角速度に対する式を作ってみよう。

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \omega(y, -x, 0) \quad (1.12)$$

と書く。これから

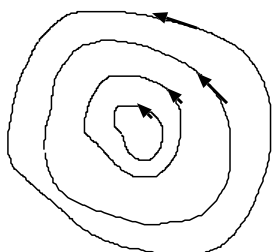
$$-2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1.13)$$

であるから、この量は回転を記述する量になっている。因子(-2)は定数だからひとまず目をつむっておこう。すなわちベクトル \mathbf{v} の回転の z 成分、 $(\nabla \times \mathbf{v})_z = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ 、と定義すれば、他の成分に関しては cyclic に定義できる。この定義では、回転は角速度の -2 倍を時間の概念を使わずに表している。

微分演算子 ∇ は極性ベクトルだから、極(軸)性ベクトルの回転は軸(極)性ベクトルである。

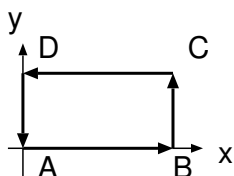
$\nabla \times \mathbf{v}$ の z 成分は v_y を x で偏微分したものと v_x を y で偏微分したものの差だから、二つの成分に関係している。即ち、 $(\nabla \times \mathbf{v})_z$ を $(\nabla \times \mathbf{v})_{xy}$ と2つの足をつけて書く方が合理的であるかも知れない。(3次元だから $(x, y) \rightarrow z$ と書けるが、4次元だったらどうしよう?!) 即ち、 $\nabla \times \mathbf{v}$ は2階のテンソルと書く方が良いだろう。又、 $(\nabla \times \mathbf{v})_z$ は、 $x \leftrightarrow y$ という交換に対し符号を変えるので、反対称テンソルである。

$\nabla \times \mathbf{A}$ は \mathbf{A} が極(軸)性ベクトルならば軸(極)性ベクトルになっている。先に書いた通り、角速度は擬ベクトルであるが、2階の反対称テンソルとも書ける。



渦はこれを軸方向から見て図に描くと誰にでも簡単に認識できる概念である。マクロにこれを特徴づける量に、周回積分がある。即ち渦があると、軸を中心として一周回った速度ベクトルの線積分は0ではないが、渦がないと一周回った線積分は0である。渦の強さは、この周回積分と関係づけられる。

微小面積要素を考え、あるベクトル \mathbf{A} を、この面要素の周囲を一回りする経路に沿って積分する。この積分結果は周長に比例すると考えたいが、積分経路には必ず逆向きの成分を含むので、もう一つ微量の次数が上がり、面積に比例する。



従って、ベクトルの周回積分と面積の比は有限の大きさを持つ。積分結果が面要素の向きを持つとするならば、この比がベクトルの回転と直接関係している。ベクトル \mathbf{A} を上図のような ABCDA という微小領域での周回積分を考えよう。

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} &= \int_A^B A_x(x, y) dx + \int_B^C A_y(x + dx, y) dy + \int_C^D A_x(x, y + dy) dx + \int_D^A A_y(x, y) dy \\ &= \int_A^B \{A_x(x, y) - A_x(x, y + dy)\} dx - \int_A^D \{A_y(x, y) - A_y(x + dx, y)\} dy \\ &= \nabla \times \mathbf{A}_z(x, y) dx dy \end{aligned} \tag{1.14}$$

この式が上に述べた事である。これより、 $(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ だとすると、(1.13) に登場した '(-2)' というある意味で不都合な因子は登場しないだけ、理解しやすい。

ベクトルの回転という概念は、周回積分と面積の比の無限小面積への極限として定義されると覚えておく方が良いだろう。

上の式を見ると、ベクトルの回転という概念は、周回積分と面積の比で決まり、先に説明し

た様な時間依存は全く持たない。例えば台風の目の衛星写真を見ても、台風が渦をまいているのは分かるが、これは写真だから(理想的には)時刻を止めて観測している。もう一つの例として巻毛を挙げよう。台風の目や巻毛の"まき"に沿ってある種の流れベクトルを定義し、巻の中心を中心として、この流れベクトルを周回積分してみると0ではない有限の値を得る事が出来ると思われる。ここで大切な事は、時間に依存しない物理量を考えても、ベクトルの"回転"という概念は成立するという事である。即ち、一般には渦の強さと角速度とは異なる概念である。

一方 rotation や回転という言葉は何となく運動を伴った様に思われる。時間に依存しないベクトル場の"回転"というのは日本語でもおかしな感じがするだろう。ある種の教科書では rotation と呼ばずに curl と書く理由がここにある。curl は、巻毛という意味であるから、時間の概念はどこにも感じられない。周回積分すると、0でない値を有するという特徴で定義出来る。即ち、ベクトルの回転と呼ばれる概念は、時間に依存する概念では無いので、回転と呼ぶのは誤解を招く名前である。つむじ, curl と訳す方が妥当かと思う。

ベクトル場 X が定義され、有限の大きさを持つ面を無限小の面積をもつ微小領域に分割する。箇別の微小面積上での $\nabla \times X$ の面積分は、上の説明により、この微小面を巡る、ベクトル X の周回積分で与えられる。ここで、有限面上での $\nabla \times X$ の面積分を考える。これは、各無限小領域での $\nabla \times X$ にその面積を掛けて、全無限小領域について和をとったものである。一方、上での説明により、これは無限小領域毎の X の周回積分の和でもある。隣接する無限小領域を区別する周上での線積分は、異なる向きに対する積分が必ず対になって登場するから、相殺する。したがって、有限領域の外周に沿っての X の周回積分のみが残る。則ち、有限の大きさを持つ面上での $\nabla \times X$ の面積分は、周上での X の周回積分に等しい。これは、Stokes の定理として知られている。もう少し後で、別の略証を与える。

回転という概念は、周回(線)積分とも関係しているので、流体力学やこれをモデルとした電磁気学のみならず、保存力の場として質点力学にも登場する概念である。

力 F が与えられた空間でエネルギーの散逸がなければ $\nabla \times F = 0$ が成立し、これが保存力の条件とされ、又はこれから $F = -\nabla\phi$ で potential ϕ が定義された事を思い出そう。

直交曲線座標系・微分

デカルト座標を (x, y, z) のかわりに $(x_1, x_2, x_3) = \{x_i, i = 1, 2, 3\}$ と書く。別の座標系 $\{q_i, i = 1, 2, 3\}$ を1つ持ってくる。 q_i は $\{x_i; i = 1, 2, 3\}$ の関数になっている。 $q_1 = const.$ とおくと、一つの曲面を与える。 $q_2 = const.$ 、 $q_3 = const.$ という2枚の曲面の交わりは一本の曲線を与える。この曲線を座標軸に対応させる事ができる。 $q_1 = const.$ 、 $q_2 = const.$ 、 $q_3 = const.$ とすると、空間の一点を与える事ができる。うまく関数 $q_i(x_1, x_2, x_3)$ を工夫する必要があるが、これで座標系を構成でき、曲線座標系 と呼ばれる。

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.15)$$

変位 dr をデカルト座標系で表わすと、 i 軸方向の単位ベクトルを \hat{x}_i として、

$$dr = dx_1 \hat{x}_1 + dx_2 \hat{x}_2 + dx_3 \hat{x}_3 = \sum_i dx_i \hat{x}_i \quad (1.16)$$

これを $\{q_i\}$ 系で書くと、

$$dr = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_i h_i \hat{q}_i dq_i \quad (1.17)$$

$|\partial \mathbf{r} / \partial q_i| = 1$ とは限らないので、大きさを与える部分と、方向を与える部分に分割して、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{q}_i \quad (1.18)$$

逆に、単位ベクトルは

$$\hat{q}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (1.19)$$

$(dr)^2$ を計算すると、 $\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j (i \neq j)$ の様な交差項が登場するが、単位ベクトルは、位置に依らず直交する様に座標系を選択する。このように、任意の位置で座標軸方向の単位ベクトル \hat{q}_i がお互いに直交する様に選んだ座標系を 直交曲線座標系 と呼ぶ。

$$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.20)$$

この結果

$$h_i^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2 \quad (1.21)$$

h_i はこの平方根の正の方を採用する。ついでに、 $\{\hat{q}_i\}$ の向きと番号付けは、

$$\hat{q}_1 \times \hat{q}_2 = \hat{q}_3 \quad (1, 2, 3 \text{ の cyclic 変換}) \quad (1.22)$$

となる様にしておく。即ち、右手系 を採用する。

線要素 ds^2 を $\{q_i\}$ 系で書くと

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\sum_i h_i \hat{q}_i dq_i \right) \cdot \left(\sum_j h_j \hat{q}_j dq_j \right) = \sum_i (h_i dq_i)^2 \quad (1.23)$$

ベクトル \mathbf{A} を与えて、デカルト座標系での単位ベクトル $\{\hat{x}_i\}$ との内積 $\mathbf{A} \cdot \hat{x}_i$ は \mathbf{A} の第 i 成分を与えた。同様に考えると、

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{q}_1 + A_2 \hat{q}_2 + A_3 \hat{q}_3 = \sum_i A_i \hat{q}_i \quad (1.24)$$

と成分に分けると、

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \hat{q}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.25)$$

ここで \hat{q}_i はベクトル \mathbf{A} の i 軸方向への射影 A_i を与える演算子と考える事ができる。この様に、ある対象から特定の性質を持つ成分だけを取り出す演算子を 射影演算子 (projection operator) と呼ぶ。

$\hat{\mathbf{q}}_i(\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{A})$ は $\hat{\mathbf{q}}_i$ 方向を向き、大きさが A_i のベクトルである。従ってベクトル

$$\mathbf{A} - \hat{\mathbf{q}}_i(\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i) - \hat{\mathbf{q}}_i(\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{A}) = \hat{\mathbf{q}}_i \times (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{q}}_i) \quad (1.26)$$

は、ベクトル \mathbf{A} の $\hat{\mathbf{q}}_i$ に直交成分を表現している。

∇q_1 は q_2, q_3 を固定して、 q_1 のみが微小量変化するような微分であるから、 $\hat{\mathbf{q}}_1$ に平行である。(1.18) 式から $|\nabla q_1| = 1/h_1$ は自明だろう。

$$\nabla q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{h_1} \hat{\mathbf{q}}_1 \quad (1.27)$$

$\{q_i\}$ 系で $\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{q}}_3)$ は辺長 1 の立方体の体積を与えるから、

$$1 = \hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{q}}_3) = h_1 h_2 h_3 \nabla q_1 \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) = h_1 h_2 h_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

Jacobian $\nabla q_1 \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3)$ はデカルト系と $\{q_i\}$ 系の体積要素の比を与えるから、 $h_1 h_2 h_3$ はその逆方向の体積比を与えている。(1.23) 式より、 h_i は q_i 軸の長さの単位を与えているから、これは当然であろう。

今までのところを行列を用いて書くと、 $q^i(x^1, x^2, x^3)$ が与えられたとして、

$$dq^i = \sum_j \frac{\partial q^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_j g_j^i dx^j, \quad g_j^i = (g)_{ij} \equiv \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \quad (1.29)$$

$\det(g) \neq 0$ ならば逆に dx^j について解ける。 $g^{-1} = G$ と書くと、

$$dx^j = \sum_i G_i^j dq^i \quad (1.30)$$

$$d\mathbf{r} = \sum_j \hat{\mathbf{x}}_j dx^j = \sum_j \hat{\mathbf{x}}_j \sum_i G_i^j dq^i = \sum_i h_i \hat{\mathbf{q}}_i dq^i \quad (1.31)$$

最後の式は、(1.18) を利用した。これが任意の dq^i について成立するから、

$$\sum_j \hat{\mathbf{x}}_j G_i^j = h_i \hat{\mathbf{q}}_i \quad \text{or} \quad \hat{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{h_i} \sum_j \hat{\mathbf{x}}_j G_i^j \quad (1.32)$$

上の式 (1.31) の dq^i にもう一度 $\sum_j g_j^i dx^j$ を代入すると、

$$\sum_j \hat{\mathbf{x}}_j dx^j = \sum_{ij} h_i \hat{\mathbf{q}}_i g_j^i dx^j \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_j = \sum_i h_i \hat{\mathbf{q}}_i g_j^i \quad (1.33)$$

dx^j と $\hat{\mathbf{x}}_j$ の変換性 (1.30, 1.33) は異なる事に注意! そのために足を上につけたり、下につけたりした。

又、和は必ず上の足と下の足が同じ時にとられている事に注意すると覚え易い。

但し、この変換性を行列で書いた部分では、単位ベクトル $\{\mathbf{q}_i, ; i = 1, 2, 3\}$ の直交性は使用していない事に注意しよう。

纏めておこう。

$$\begin{aligned} dq^i &= \sum_j g_j^i dx^j, & dx^j &= \sum_i G_i^j dq^i \\ h_i \hat{\mathbf{q}}_i &= \sum_j G_i^j \hat{\mathbf{x}}_j, & \hat{\mathbf{x}}_j &= \sum_i g_j^i h_i \hat{\mathbf{q}}_i \end{aligned} \quad (1.34)$$

直交性の条件

$$\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_j = \frac{1}{h_i h_j} \sum_k \hat{\mathbf{x}}_k G_i^k \cdot \sum_l \hat{\mathbf{x}}_l G_j^l = \frac{1}{h_i h_j} \sum_k G_i^k G_j^k = \delta_{ij} \quad (1.35)$$

$$\therefore \sum_k G_i^k G_j^k = h_i^2 \delta_{ij} \quad (1.36)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j = \sum_k h_k \hat{\mathbf{q}}_k g_i^k \cdot \sum_l h_l \hat{\mathbf{q}}_l g_j^l = \sum_k h_k^2 g_i^k g_j^k = \delta_{ij} \quad (1.37)$$

Jacobian は $\det(g) = 1/\det(G) = 1/h_1 h_2 h_3$

微分

スカラー関数 ϕ が与えられているとすると、

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{デカルト座標}) \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \right) \hat{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\phi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \right) \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \nabla q_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \nabla q_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \nabla q_3 \quad ((1.27) \text{ を用いると}) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \frac{1}{h_1} \hat{\mathbf{q}}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \frac{1}{h_2} \hat{\mathbf{q}}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \frac{1}{h_3} \hat{\mathbf{q}}_3 \\ \nabla\phi &= \left\{ \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \hat{\mathbf{q}}_i \right\} \phi \end{aligned} \quad (1.38)$$

ベクトル $\mathbf{A} = \sum_i A_i \hat{\mathbf{q}}_i$ が与えられた時、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \nabla \cdot (A_i \hat{\mathbf{q}}_i) \quad ; i \text{ について対称だから 1 つだけやってみる。} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A_1 \hat{\mathbf{q}}_1) &= \nabla \cdot A_1 (\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{q}}_3) \\ &= \nabla \cdot \{A_1 h_2 h_3 (\nabla q_2) \times (\nabla q_3)\} \\ &= \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot \{\nabla q_2 \times \nabla q_3\} + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot \{(\nabla q_2) \times (\nabla q_3)\} \end{aligned}$$

前半は (1.38) を利用できる。

$$\begin{aligned} \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \hat{\mathbf{q}}_1 \cdot \left(\frac{1}{h_2} \hat{\mathbf{q}}_2 \times \frac{1}{h_3} \hat{\mathbf{q}}_3 \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \end{aligned}$$

後半で $(\nabla q_2 \times \nabla q_3)$ は $\hat{\mathbf{q}}_1$ に平行だから、第1成分のみ取り出してよい。

$$\nabla \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) = \nabla q_3 \cdot (\nabla \times \nabla q_2) - \nabla q_2 \cdot (\nabla \times \nabla q_3) = 0 \quad (\nabla \times \nabla \phi = 0 \text{ より}) \quad (1.40)$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 A_2 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3} \right\} \quad (1.41)$$

ラプラシアンを計算するために、 $\mathbf{A} = \nabla \phi$ とし、(1.38) を利用する。

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right\} \phi \quad (1.42)$$

次に、ベクトル \mathbf{A} の回転を計算しよう。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum_i \nabla \times (A_i \hat{\mathbf{q}}_i) \quad (1.43)$$

特に $i = 1$ ならば (1.27) を用い、

$$\begin{aligned} \nabla \times (A_1 \hat{\mathbf{q}}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla q_1) \\ &= \nabla(A_1 h_1) \times (\nabla q_1) + A_1 h_1 \nabla \times \nabla q_1 \quad (\nabla \times \nabla = 0) \\ &\nabla q_1 // \hat{\mathbf{q}}_1 \text{ だから } \nabla(A_1 h_1) \text{ の第1成分は消えるから、(1.38) を用い、} \\ &= \left\{ \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} \hat{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3} \hat{\mathbf{q}}_3 \right\} \times \nabla q_1 \\ &= -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_2} \hat{\mathbf{q}}_3 + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial q_3} \hat{\mathbf{q}}_2 \end{aligned} \quad (1.44)$$

他成分も同様だから、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{q}}_1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_3} \right\} + \frac{\hat{\mathbf{q}}_2}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{q}}_3}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_2} \right\} \end{aligned} \quad (1.45)$$

行列式を用いて書くと、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{q}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{q}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

特に円筒座標では式 (1.23) を用いて、スケール因子を計算すると $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$

であり、

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (1.47)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (1.48)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.50)$$

極座標では $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$ だから、

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\mathbf{e}_\psi \quad (1.51)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\psi^2} \quad (1.52)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right\}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\psi)\right\}\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\mathbf{e}_\psi \end{aligned} \quad (1.54)$$

これらの公式は、以後頻繁に使用される。

積分公式

Gauss の公式

ベクトル \mathbf{A} 、閉曲面 S で囲まれた体積 V に対し、

$$\int_V dV\nabla\cdot\mathbf{A} = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \quad (1.55)$$

略証: 左辺の1つの項だけ取り上げてみる。

$$\int_V dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \int dx_2 dx_3 \{A_1(x_{1max}, x_2, x_3) - A_1(x_{1min}, x_2, x_3)\} \quad (1.56)$$

右辺の意味は、 x_2, x_3 をどこかに固定した時、 x_2, x_3 面に柱を立て、閉曲面 S との上、下の交点を x_{1max}, x_{1min} とし、その時の値を採用し、上半分の面に対してはそのまま x_2, x_3 で面積分

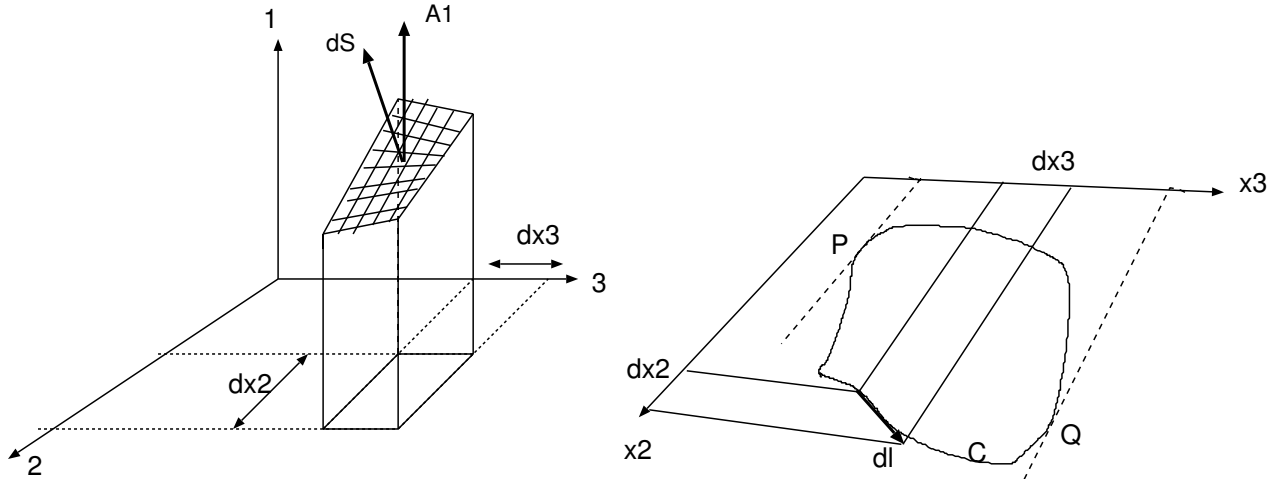
し、下半分の面では符号を変えて面積分せよと言っている。 \hat{e}_1 を第 1 軸方向の単位ベクトルとすると、 $dx_2 dx_3 = dS \cdot \hat{e}_1$ であるから、

$$A_1(x_{1max \text{ or } 1min}, x_2, x_3) dx_2 dx_3 = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S})_1 \quad (1.57)$$

である。又は

$$\int_V dV \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \left(\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right) \text{ の第一成分の寄与} \quad (1.58)$$

この積分公式は成分ごとにも成立している。



Stokes の定理

ベクトル \mathbf{A} 、閉曲線 C で囲まれた面 S に対し、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.59)$$

右辺は C に沿っての線積分

略証: 第 1 成分の寄与のみ考えると、左辺は、

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 &= \int \{ A_3(x_1, x_{2max}, x_3) - A_3(x_1, x_{2min}, x_3) \} dx_3 \\ &\quad - \int \{ A_2(x_1, x_2, x_{3max}) - A_2(x_1, x_2, x_{3min}) \} dx_2 \end{aligned} \quad (1.60)$$

右辺第 1 積分で x_3 を 1 つ決めると C 上の一点が決まってしまう。 x_3 を最小値から最大値まで動かすと、第 1 項は x_2 の大きい側、第 2 項は x_2 の小さい側を通して各々が C を半周する積分になっている。上右図で説明すると、右辺第 1 (2) 項の積分は、図に示した曲線 C の内の、 $P(Q)$ から x_2 の値の大きい(小さい)方を經由して $Q(P)$ へ至る経路に沿っての A_3 を線積分したものになっている。符号は丁度 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ の符号に一致する。第 2 積分も同様。全項を加えると、Stokes の定理を導ける。

第2章 電磁気学の法則

Coulomb の法則 実験室で静止した二つの電荷 q_1 、 q_2 間に働く力 F は

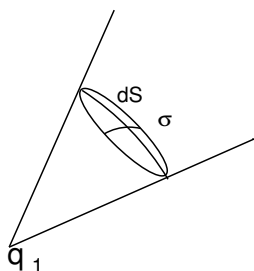
$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

最後の式で、力の方向を与える為に、単位ベクトル \mathbf{r}/r がついている。同 (異) 符号の電荷間には斥 (引) 力が働く。但し、電荷は真空中に置かれていると仮定する。

電荷を磁荷に置き換えても、同じ形の法則が成り立つ。この磁荷の場合には、比例係数の誘電率 ϵ_0 を透磁率 μ_0 で置き換える。

(電荷や磁荷の単位をどのように選ぶか？ という問題と関連しているので ϵ_0 、 μ_0 という真空の性質を表すパラメータの選択や定義はそれなりに問題がある。)

ここで、 $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$ と書き、電場 \mathbf{E} を定義する。即ち、電荷 q_2 の位置には、 q_2 の有無に拘らず、電荷 q_1 の影響が電場という形で伝わると考える。磁荷の場合には、電場のかわりに磁場 \mathbf{H} で置き換えて考える。この "場" というアイデアは Michel Faraday にはじまり、力が真空中を伝わるという場合に、電荷はその周囲の空間に電場という仮想的な場をつくり、この場が真空中を伝わると思ったわけである。電場は電気力線を抽象化している。



点電荷 q_1 を中心とする球面上の微小面積要素 dS に載せられた面電荷密度 σ の電荷 σdS で q_2 を置きかえる。

$$q_2 = \sigma dS \quad (2.2)$$

この時に、点電荷 q_1 と面電荷 σdS に働く力は

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 \sigma}{\epsilon_0} \frac{dS}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.3)$$

面を q_1 を中心とする半径 r の球面上にとると、力の大きさ F は r に依存せず、立体角に依存する。

$$F = \frac{q_1 \sigma}{\epsilon_0} \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (2.4)$$

電 (磁) 力線は無限遠方まで、消える事なく広がりながら伝わっていく。

- 了解出来る事 :

1. 我々はユークリッド空間に住んでいる。

上の立体角の例で説明したように、クーロン力はユークリッド空間の立体角という概

念を用いて説明が出来るという事は、電磁気現象が生起する空間がユークリッド空間 (即ち、一様な空間) である事の証拠である。

別の説明の仕方をする、ユークリッドの原論で述べられたという平行線の公理 (作業仮説と呼んだ方が良さそう) や基本直交座標を導入したデカルト以来、我々は空間の一様性を作業仮説として暗黙の内に仮定していた。この Coulomb の法則が成立する事を認める事は、この空間構造の作業仮説を正しい自然認識として、実験により確認するという非常に大切な意味がある。

Einstein, Eddington による反証。万有引力を考慮すると、我々が住んでいる空間が等方的ではなくなると Einstein が予想し、この予想を Eddington 達は日食の時に、等方的な空間構造では見えるはずが無い星が観測されたという事実を報告した。定量的には、水星の近日点移動を引用しておこう。二質点間の万有引力だけを考慮すると、軌道は楕円であり、完全に閉じている。即ち、近日点は固定されている。実際には、水星の近日点は1世紀の間に角度にして約5600秒だけ変化する。ほとんどは木星等の惑星の影響であり、この内の約41秒が一般相対論で説明されている。

空間の万有引力による歪みが、クーロンの時代に検出出来なかったのは何故だろうという疑問が生ずる。興味ある人は、例えば水素原子における陽子と電子間に働くクーロン力と万有引力の強さを比較し、クーロン力が万有引力を40桁近く凌駕する事を確認すると良いだろう。

そんなにクーロン力が強いならば、逆に、日常生活では何故クーロン力は顔をださないのだろう? という問の答えを次に考えてみよ。そうすると、Madelung 定数の意味が判るだろう。

現在利用している、物理定数には一般相対論的な効果は取り入れられていない。議論はされているようなので、近い将来に取り入れられる可能性はある。 -- > 2005年現在、考慮の後が見られる。

2. 重ね合わせの原理

電荷間に働く力が、電荷 q_1, q_2 に比例しているから当然である。詳しく言うと、例えば $q_1 = \alpha q_1 + (1 - \alpha) q_1$ という風に二つに分けて考えると、 q_2 に働く力は二対の電荷 $(\alpha q_1, q_2), ((1 - \alpha) q_1, q_2)$ 間に働く力の和 (重ね合わせたもの) になっている事は明らかだろう。

力が立体角に比例するから $1/4\pi$ が分母に持って来てあると、全体のどれくらいの割合が実際に”見えて”いるのかが分かりやすさそう。

⇒ 有理化単位系を定義・採用する理由の一端である。

● なぜ分母に ϵ_0 が入っているのだろうか?

⇒ 真空をも”真空物質”という物質だと考えてしまう。エーテルではないが、真空という物質の中を光は伝播する。(光の伝播は真空の電氣的性質であって力学的性質ではない!)

真空も電気偏極する。例えば、点電荷間の散乱現象は Rutherford により説明され、放物軌道である事が知られている。陽子・陽子の弾性散乱の散乱確率は真空偏極を考慮すると、約0.5%程度散乱確率増える。頑張ると精度を上げると、観測可能な大きさである。

● 素磁荷を有する粒子は現在のところ存在しない。

幾らかの雑談：

二つの対象間に逆 2 乗の力が働く事を言い出したのは、質量を対象にした時にはフックの法則で名を残したフックで、その後ニュートンがこれを出版し、世に知らしめたいらしい。

質量には負の質量という概念は無いが、電荷や磁荷には存在する。両符号の電荷が存在すると、電荷の相殺や静電遮蔽と言う概念が作られる。我々の身体を構成する電子と陽子の数を計算してみよ。この相殺という事が良く分かるだろう。

電荷の担体は、当面は電子と陽子であるとしておこう。両者の電荷は符号を除くと非常に良い精度で等しい。この大きさは、電気素量と呼ばれる事がある。

電気素量の 1/3、2/3 倍等の荷電粒子を発見したと言う報告もあるが、信用しない人の方が多いようだ。

素磁荷という概念もある。磁気単極を検出したという報告は、複数あるが、その多くは実験ミスと確認されているが、一つだけ (1982 or 1983) 論理的に否定できない報告がある。この実験も信用しない人が多い。

この二つの実験 (どちらも Fairbank に依る) は、追試をする必要があると思う。Fairbank のミスなのか、彼が世紀を越えた有能な実験者なのか、僕には判定出来ない。

クーロンの法則に現れる電荷を、 $Q = q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ で定義する事も可能であると思われる。変な定数が無いだけ単純であるという理由で、支持する人も多いただろう。このような単純明解な単位系を採用しない理由を考えよう。この単位系では、電荷は [力]^{1/2} [長さ] という力学的概念だけで表現できる。これでは、電荷は力学的に定義できるという意味で、力学に従属する概念となる。一方、新しい物理定数を含んで電荷が定義されるならば、電氣的物理量は力学的物理量だけでは定義出来ない、全く新しい物理量であるという主張 (認識) が込められている事に気付くだろう。

では "磁荷" は? と発想するのが自然だろう。磁場は、磁荷により作られると考えても良いが、電流が流れて (電荷が運動しても) も作られる。どちらがより本質的か? という問には断定的に答えられる状態には無いとしておこう。少なくとも、磁荷が存在しないと考えても、現在の物理と矛盾しないとは言えるので、磁荷の為に新しい名前や単位を準備しておかねばならない状態には無いとしておこう。

Lorentz 力 電荷 q 、速度 v で運動する物体は磁束密度 B から、次の力 F を受ける。

$$F = qv \times B \quad (2.5)$$

電荷に力を及ぼすのは、電場であると仮定するならば $v \times B$ も電場と考える事が出来る。

クーロンの法則だけからは、磁場のパリティや時間反転変換性は不明だが、この Lorentz 力を見ると、変換性が理解出来る。

電磁気学のこの段階で、速度に関係する力という概念が登場した (整理された)。摩擦力は速度の関数だと言う意見はあるが、ミクロに摩擦力を見た時にも、速度の関数かどうかは怪しい。経験式としての意味しかないだろうと思う。

問：物の本によっては、Lorentz 力に関係している '磁場' を B のかわりに H を使っている。実験的に H であるのか B であるのかを区別する方法を考えよ。

歴史的には、磁荷が作る‘磁場’として、 H が導入された。電流の近傍に置かれた方位磁針が振れる原因としても発想された。

一方、磁束密度 B は外部磁場 H に誘起されて物質中に発生する磁気能率の効果を取り入れたものとして定義された。 $B = \mu_0 H + M$ とする。但し M は単位体積当たりの磁気能率である。この B の定義を見ると、次元が異なるだけで、 H と B とは、実質的に同じではないかと考える人も沢山いるだろう。

物理学者により、 H , B の一方だけが物理的実在であると強く主張する人もいる。真空中の現象を中心に考える人や、物質中の磁気能率を研究する人もいるので意見が収束していないのだと考えておこう。

Faraday の電磁誘導の法則 コイルには磁束の時間的变化に比例する起電力が発生する。少し抽象化し、磁場が時間的に変化すると、電場を発生すると言い替えても良いだろう。

問：自転車の発電機、電柱の上に置かれたトランス、ベータトロンの原理を述べよ。

M. Faraday は、電流の近くには磁場が作られるならば、磁場の近くでは電流が発生するのではないかと意味の発想をしたがそうはなっていなかった。この発想の何処がおかしいのだろうか？ 歴史を調べてみると面白いよ。ともかく、磁場が時間的に変化すると、近くの電線に電流が流れた。電流が流れるという事は、電線の両端に電位差が発生するという事である。電位差は、電線に沿って、電線の位置での電場を線積分したものであるから、場という概念の立場からは、電線の位置に電場が発生していると言える。電場があり、自由に動き得る電荷が存在すれば、電流が流れる。

保存力に対して、力の線積分により位置エネルギーを定義した事を覚えているだろう。静電気の問題では、電氣的な力を線積分したものは、電氣的な意味でのポテンシャルエネルギーである。このポテンシャルエネルギーを電荷で割ったものを電位と呼び、2点間の電位の差を電位差と呼ぶ。通常はこの電位差を電圧と呼んでいる。

電荷保存の法則 電荷は、増えも減りもしないと考えられている。現在、磁荷は存在しないと仮定されているので、磁荷の保存則は考えない。

Maxwell は、アンペールの法則として知られていた事実、即ち、‘電流が流れているとその近くには磁場が発生する’、という事実を表した場の微分方程式 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$ に対して、変位電流密度を追加し、以下の様書き換えた。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を変位電流と呼んでいる人もいるようだが、右辺の次元を考えると、変位電流密度と呼ぶべきだろう。この式の発散をとり、 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$ を利用すると、 $\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$ 。この式に、静電気に対するクーロンの法則 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を代入すると、次の連続の方程式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

これが、電荷保存を表す微分方程式である。

この講義ノートでは、磁場と運動する電荷に働く力を Lorentz 力として、独立な実験事実としているので、アンペールの法則は、独立な法則と言う地位を与えられていない。

電荷が保存するからといって、電荷が作られる事は無いと言っているのでは無い。電荷が作られる時には正と負の電荷が等量ずつ作られる(消滅する)。

作られる例として、約 1 MeV 以上のエネルギーの α 線が原子核に衝突する時、ある確率で、正と負の電荷を持つ電子(負電荷の方が通常の電子であり、正電荷の電子は陽電子と呼ばれる事もある)が作られ、対生成と呼ばれる。この逆の例。例えば ^{22}Na が崩壊して、陽電子が作られる場合を取り上げる。ここで作られた陽電子が、通常物質中に入射し、他の原子核や電子と衝突し停止する。この陽電子と通常の電子が無くなり、2本の α 線が発生し、お互いに逆方向に出ていく。この現象を対消滅と呼ぶ。

これだけで電磁気学の大原則はおしまい。

これらの知識を、Faraday の発想した場の方程式で表現したものが、Maxwell の方程式と呼ばれる。但し、我々が現在見る形にまで洗練するには Heaviside の寄与が大きかった様である。

微分方程式に書き換える時、クーロンの法則は $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ と書き換えられた。この法則は、もともとは時間的に変化する状態は想定されていなかった。しかし、電気変位ベクトル \mathbf{D} や電荷密度 ρ の時間依存性を許容する形に拡張されてる。

Maxwell の方程式 上に述べた実験結果は、以下の4つの場の方程式にまとめられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.8)$$

この二つの式は以下の様に纏められる。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (2.9)$$

これらの式は、広義の電場や磁場がどのような原因から作られるかを述べていると解釈出来る。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.10)$$

この二つの式は、広義の電磁場が相互に影響しあう事を述べているが、この式には、上に述べた意味での電磁場の原因となる電荷や電流が登場していない事に着目しておこう。ある意味で、電磁場に対する境界条件という意味を持つと解釈出来る。

この二つの式も、以下の様に纏められる。

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.11)$$

何故纏められるかは、後のお楽しみとしておこう。

注意：基本方程式のどこにも物理学者の好きな c (光速) という概念は登場していないことに注意せよ。逆に、あまり注目されない、真空の透磁率 μ_0 が顔を出している。

問：永久磁石の近くに電荷 q が止っている(実験室系では全て止っている)。これを速度 \mathbf{v} で動く系から見ると電荷は $-\mathbf{v}$ で動いているから、永久磁石の作る磁場 \mathbf{B} により力 $-q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を

受けて動きだす。(そんな馬鹿な!!)

Maxwell 方程式と、この観測者による現象の相違とはどうして整合性を保っているのだろうか？

湧き口がある時の Coulomb の法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m \quad (2.12)$$

と書かれる。E が極性、H が軸性ベクトルであるから ρ_e はスカラー、 ρ_m は擬スカラーである。但し現在のところ ρ_m を与える物理量の存在は確認されていない。

Maxwell の方程式は、場の変数 E, D, H, B に対して、時間及び空間の連立 1 階微分方程式になっている事に注意せよ！

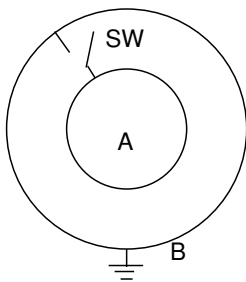
第3章 Coulombの法則

- Coulomb はねじれ秤を用い、電荷間の相互作用が距離の2乗に反比例する事を見出した。

$$F_Q \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3.1)$$

r のべきを $2 + \epsilon$ とおくと $|\epsilon| \leq 4 \times 10^{-2}$ とした。

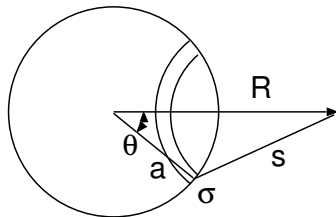
- 半径が a と b の同心導体殻の内殻電荷を測定する実験は Coulomb 以前に Cavendish により、更に Maxwell により改良され、現代も行われ、上に登場した $|\epsilon| \leq 2.7 \times 10^{-16}$ という結果になっている。



ここに挙げた実験に対するの測定手順は次の通りである。半径が a, b の同心導体を A, B とする。

- (1) A を帯電させる。
- (2) A, B を導線でつなぎ、しばらくして switch を切る。
- (3) A の残留電荷 Q_a を測定する。
- (4) $Q_a = 0$ ならば、相互作用は $1/r^2$ に比例する。

説明:



単位電荷が距離 r の位置につくる potential を $U(r)$ と仮定する。面電荷密度 σ_a 、半径 a の帯電球殻の中心から R の点の potential $V(R)$ は次の様にして計算される。

$$\begin{aligned} V(R) &= \int 2\pi a^2 \sigma_a \sin\theta d\theta U(s) \\ &\text{ここで、} s^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta \rightarrow 2s ds = +2aR \sin\theta d\theta \text{ より、} \\ &= 2\pi a^2 \sigma_a \times \frac{1}{aR} \int_{r_{min}}^{r_{max}} s U(s) ds \\ &= \frac{2\pi a \sigma_a}{R} \{f(r_{max}) - f(r_{min})\} \\ &\text{ここで、} f(r) = \int^r s U(s) ds \text{ と置いた。} \end{aligned} \quad (3.2)$$

外殻上の potential $\phi(b)$ は、内、外殻からの寄与を加えればよいから、

$$\phi(b) = \frac{2\pi a \sigma_a}{b} \{f(b+a) - f(b-a)\} + \frac{2\pi b \sigma_b}{b} \{f(2b) - f(0)\} \quad (3.3)$$

同様に内殻の電位 $\phi(a)$ は

$$\phi(a) = \frac{2\pi a\sigma_a}{a}\{f(2a) - f(0)\} + \frac{2\pi b\sigma_b}{a}\{f(b+a) - f(b-a)\} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{導線をつなぐと、等 potential になるから } f(a) = f(b) \\ \text{内殻に電荷がなくなるから } \sigma_a = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

これらを代入すると、

$$a\{f(0) - f(2b)\} = b\{f(b-a) - f(b+a)\} \quad (3.6)$$

2回 a で微分すると、

$$0 = b\{f''(b-a) - f''(b+a)\} \quad (3.7)$$

この式が任意の a, b ($b > a$) に対して成立するためには、 $f''(r)$ は r に依存しない定数 c_0 に等しい。1度積分して、

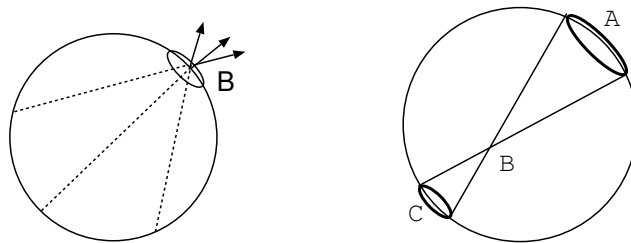
$$f'(r) = c_0 r + c_1 = rU(r) \rightarrow U(r) = \frac{c_1}{r} + c_0 \quad (3.8)$$

$r \rightarrow \infty$ で $U(r) \rightarrow 0$ だから、 $c_0 = 0$ 。即ち potential が $1/r$ に比例する。

従って、電荷間に働く力は、 $F(r) \propto 1/r^2$

直感的説明 先ず内殻のみが存在し、外殻は存在しない場合を考える。下左図参照。一点 B の電荷に働く球面上の他の電荷からの斥力は、力が二点を結ぶ方向に働くならば絶対に相殺しない。図の矢印の合力は必ず中心から外に向かっている。全ての電荷は外向きの圧力を受けているので、外部とつながると必ず外へ逃げていく。"外部の影響が内部に伝わらなければ"、内殻の電荷は 0 になる。どんな r 依存性でもこうなるだろう。

外殻が存在しても、内殻の電荷は全て外殻に逃げて行くというのが実験的に確認された事である。下右図参照。即ち、外殻の電荷は内殻の電荷の運動に何の影響も与えていない。外殻の内部には、外殻の電荷に起因する電気力が働かない(いはゆる静電遮蔽)というのが $1/r^2$ 力の本質的に大切な点である。



外殻の内部に力の働かない特別な点が存在するというのではなく、右図の任意の点 (B) で力が働かないためには、内点 B をはさんで向かい合う部分で力が完全に相殺していなければならない。 外殻上には、一様な電荷分布を仮定した時、(面要素 A を見込む立体角からの力)=(面要素 C を見込む立体角からの力)となっているとよい。

即ち力は $1/r^2$ に比例する。

次の様にも考えられる。点電荷を考える。電気力線は四方八方へ等しく出ていくであろう。点電荷から距離 r の点での電気力線の密度は $1/r^2$ に比例して少なくなる。だから力は $1/r^2$ に比例する。電気力線が力を伝達する途中で減衰しなければ(光子の質量が 0 ならば)、そして空間が完全に等質であるならばこの考え方も成立しそうである。

静電気に関する Coulomb の法則を次のように書く。

電荷 q_1 が q_2 から r の位置にある電荷 q_2 に働く力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = q_2 \mathbf{E} \quad (3.9)$$

\mathbf{E} を電荷 q_1 が点 r に作る 電場 と呼ぶ。電場という概念は、電荷 q_2 がそこに無くとも電荷 q_1 があればその周囲に必ず作られていると考える。

電場を伝えるのに、特にエーテルの存在を仮定していない。

最後に、クーロン力は中心力、即ち力の方向が r の方向と同じ、である事を強調しておこう。この事は、強いて言えば縦波を真空が伝えているという事である。

Coulomb の法則の微分形 $r \neq 0$ ならば

$$\frac{4 \pi \epsilon_0}{q} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \left\{ \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} \right\} = \left\{ -\frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} + \frac{3}{r^3} \right\} = 0 \quad (3.10)$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.11)$$

この式は空間の微小部分考えた時、この表面を通過して入ってきた電場は、この微小体積で吸収される事無く必ず出て行く事を示している。

$r = 0$ を含ませるには、発散に対処するために電荷を電荷密度で置き換える。場の湧き口を含む空間では場が作られているから、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ は湧き口を含む微小表面を通して外へ出て行く電場の総和を計算する事になる。この結果

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.12)$$

が導かれる。

問: 点 r に置かれた電荷 q の作る電場 $\mathbf{E} = q(\mathbf{R} - \mathbf{r}) / \{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3\}$ を半径 $R (R \geq |\mathbf{r}|)$ の球面で面積分し、

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (R \text{ や } \mathbf{r} \text{ に依存していない!)} \quad (3.13)$$

が成立する事を導け。

c.f. Gauss の積分定理を使うと、

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad (3.14)$$

電場が時間に依存しない時には、エネルギーの保存側が成立すべきだから、

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.15)$$

問: (3.9) によって作られる電場に対し、(3.15) が成立する事を計算で確認せよ。

何故、電場が時間に依存しない時には、エネルギーの保存側が成立すべきかと問う学生には、時間とエネルギーが共役な座標だからと答えておこう。

ϕ を 2 階微分可能な関数とすると、 $\nabla \times \nabla \phi = 0$ という恒等式が成立する。従って、(3.15) から電場は potential ϕ から導かれる事がわかる。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (3.16)$$

このようにして、静電場 \mathbf{E} は potential ϕ から計算出来る (与えられる) 事がわかる。(3.9) により作られる電場に対しては、次式により potential は与えられる。

$$\phi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.17)$$

ここで、 ϕ には微分すると 0 になる定数だけの不定さが残っている。

物質が存在する場合

1. 電場の存在により、自由電子があるとこれが動いて安定状態を作る。金属の場合、電場による自由電子の反応は人間の時間感覚で言えば非常に速い。この反応は良い近似で、次のオームの法則で記述される。

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.18)$$

ここで \mathbf{i} は、単位時間、単位面積あたりに流れる電荷量であり、電流密度と呼ばれる。 σ は電気伝導度と呼ばれる。

2. 自由電子が存在しなければ電流は流れない。このような物質を絶縁体と呼ぶが、物質には電氣的内部構造があり、このために電場に反応する。物質内部では、正・負に帯電した部分があり、お互いに引力を及ぼしあって "物質" として存在している。外部から電場がかかると、正・負の電荷の重心位置がずれて見掛け上物質の表面に電荷が生じ、物質内部への外部電場の効果を弱める方向に作用する。逆に言うと、物質内部に一部の電場の力が応力として蓄えられる。この効果は当然、物質の性質と形状に依存する。無限大の大きさの物質を考えた時、電場の弱められ方を $1/\epsilon_r$ ($\epsilon_r > 1$) になると考え、この ϵ_r の事を物質の相対誘電率と呼ぶ。この時、(3.12) は次の様に修正される。

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.19)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (3.20)$$

この件は節を変えてもう一度やる。

Laplace, Poisson の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.21)$$

を出発点とする。結晶構造を有する場合、外部からかけられた電場 \mathbf{E} の方向と内部で電荷が変位する方向とは必ずしも一致しないが、ここでは簡単のために ε は定数 (スカラー) であるとしておく。 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ より、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と 3次元ベクトル \mathbf{E} のかわりにスカラー関数 ϕ で置き換えると、問題が解き易い場合がある。(3.17) を (3.19) に代入し、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.22)$$

特に電荷が存在しなければ

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.23)$$

(3.22) を Poisson の方程式、(3.23) を Laplace の方程式と呼ぶ。

2階微分はある意味で曲率と密接に関係している。Poisson の方程式 (3.22) は、電荷が存在すると曲率が変わると言っている。

問: 発散と回転が与えられたベクトル場には、どれだけの自由度が残っているだろうか。

Laplace 方程式の解の性質 Potential 問題を解く時の指針として、知っておくと便利であるから、Laplace の方程式の解が満足する性質を幾らか書いておこう。

- 周囲の値の平均値が中央の値である

点 (x, y, z) から、 x, y, z 軸方向に微小量 $\pm h$ だけ離れた点での値を Taylor 展開により評価し、

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \{ \phi(x+h, y, z) + \phi(x-h, y, z) \} + \frac{1}{2} \{ \phi(x, y+h, z) + \phi(x, y-h, z) \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \{ \phi(x, y, z+h) + \phi(x, y, z-h) \} \right] + O(h^4) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$O(h^4)$ という記号は、この項は大きさが h^4 に比例し、 $h \rightarrow 0$ の極限で、他の項よりも小さくなるので、無視出来るという意味を含めた記号である。(ランダウの記号と呼ばれる) $\{\dots\}$ の項は h の偶数次のみが残るが、Laplace 方程式を用いると、2次の項は消え、右辺は4次の項から始まる。[] 中の3項は各々 x, y, z 軸方向の "平均値" になっている。その "平均値" をもう一度平均したものが非常に良い近似で中央の値になっている。c.f. 正則な複素関数 (即ち、実部と虚部が夫々二次元の Laplace 方程式を満足する) に対して、次の積分表示が成立する。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (3.25)$$

最右辺で、 $\zeta = z + \epsilon e^{i\theta}$ と置いた。中心の値が、周囲の値の平均値になっているという事が理解出来るだろう。

この性質は、SOR(successive over-relaxation) 法で、Laplace 方程式を解く場合の基礎になっている。

- 定義域の内部では極値をとらない。

”平均値 ”が周囲のいかなる値よりも大きかったり、小さかったりする事はないから。これから、静電場の定義域内部に荷電粒子を置くと、この荷電粒子は必ず、定義域の境界まで移動してしまう。但し、この荷電粒子の電荷は、ポテンシャルを与えている電荷量に較べて非常に小さいと仮定する。アーンショウの定理と呼ばれる事もある。

逆に言えば、potential が極値をとる場所には、電荷 (の集合) が存在する。

c.f. 正則な複素関数の絶対値は、定義域の内部で極値を取らないと言う最大値、最小値の定理を思い出そう。

- 点 (x, y, z) を通る面で切った時、この面内で ϕ が上に凸ならば、点 (x, y, z) を通り、 ϕ が下に凸になる面も必ず存在する。

例えば、 $x = const.$ という面で切った ϕ のグラフが下に凸ならば $\partial^2 \phi / \partial x^2 > 0$ である。この時、 $(\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) \phi = -\partial^2 \phi / \partial x^2 < 0$

境界上での ϕ の値を与えて、 $\nabla^2 \phi = 0$ を解く問題を Dirichlet 問題、 $\nabla \phi$ を与えた場合を Neuman 問題、両方あわせて境界値問題と呼ぶ。

- 境界条件を満足する関数 (当然2階微分可能な) の内、デコボコの一番少ない関数が Laplace の方程式を満足する

変分法を思い出そう。Laplace の方程式は、以下の変分原理を満足する。

$$\delta \int (\nabla \phi)^2 dV = 0 \quad (3.26)$$

勾配 (従って微分) の2乗を定義域全体に対して加えたものが、極値をとるとというのが、この式の直接要求している事である。極値というだけでは、最大値か最小値かの判断はつかないが、定義域の内部で関数値のグラフに皺を増やすと微分は増加するから、最大値をとるという事はあり得ない。皺を減らすと、上の積分値は減る事は明らかだろう。

境界を針金で作って、この針金を枠として石鹼液でいわゆるシャボン面を作れば、シャボン面はピンと張っているはずだから、これが Laplace の方程式を満足する面のはずである。石鹼液のかわりに、任意に延びるゴム面 (風船のゴム) を想像しても良いだろう。このようにして、Laplace 方程式の解をイメージすれば良いだろう。この風船面に小さいオモリを置くとその場所がいくらか沈む。このオモリを電荷と思えば、これが Poisson 方程式の解のイメージを与えてくれるだろう。

この性質は、有限要素法で Laplace 方程式を解く場合の基礎となっている。

変分法に慣れていない学生への助言。 ϕ が境界条件を満足するラプラス方程式の正解であると仮定する。 ϵ を任意に取った小さな数、 f を境界では0となる任意の関数だとする。 $\psi = \phi + \epsilon f$ を作る。この ψ は正解をほん

の少しだけ変更した関数になっている。この関数の勾配の2乗を定義域の内部で積分してみる。

$$\int (\nabla\psi)^2 dV = \int \{(\nabla\phi)^2 + 2\epsilon\nabla\phi \cdot \nabla f\} dV + O(\epsilon^2) \quad (3.27)$$

右辺の第2項の積分は、 ∇f の微分記号を、部分積分により ϕ に移す。この時、 f は境界上で0になる事を利用する。

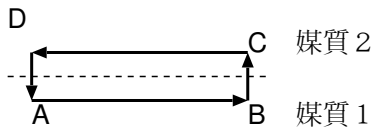
$$\int (\nabla\psi)^2 dV = \int \{(\nabla\phi)^2 - 2\epsilon f \nabla^2 \phi\} dV \quad (3.28)$$

ここで、 $\nabla^2\phi = 0$ を仮定したから、積分結果は $O(\epsilon)$ の範囲で ϵ に依存しない。別の言葉で言えば、積分は正解の近くで関数をちょっとぐらい変えても変化しない。即ち、積分は正解付近で極値をとる。この事を $\delta \int (\nabla\phi)^2 dV = 0$ と書いた。 ϕ に小さな膨らみをくっつけると、積分は必ず増えると解釈すると、Laplace方程式の解は一番ピンと張ったような振舞いをすると言える。すぐ上で、Laplaceの方程式の解(調和関数)は定義域の内部で極値をとらないと説明した事を思い出そう。

境界条件

- $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を2種類の媒質の境界面に描いた細長い長方形 ABCD に対して積分する。但しここで $|AB \text{の長さ}| \gg |BC \text{の長さ}|$ とする。

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{DC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.29)$$

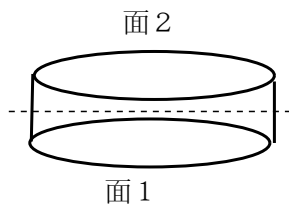


1, 2の媒質の境で AB 方向の \mathbf{E} の成分と DC 方向(向きを含む) \mathbf{E} の成分は(面 ABCD を無限小とした極限で)等しい。

$$\underline{\mathbf{E} \text{の境界への接線成分は連続}} \quad (3.30)$$

物質境界では、電場の面に平行な成分は変化しない。逆に言えば、電場の面に垂直な成分は変化しても良い。

- $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を、図の様な、胴が面のサイズに対して十分小さい微小体積に対し積分する。



$$\int \nabla \cdot \mathbf{D} dV \cong \int_{\text{面1}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{面2}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ = Q = \text{境界面上の電荷}$$

但し、側面からの寄与は厚さが充分薄いと仮定して無視する。面の向きを考慮すると、

$$\underline{(\mathbf{D}_2 \text{の法線成分}) - (\mathbf{D}_1 \text{の法線成分}) = \text{表面電荷密度}} \quad (3.31)$$

帯電していない境界面では、電気変位(電束)ベクトル \mathbf{D} の境界面に垂直な成分は変化しない。もしも表面電荷が存在すれば、その分だけ電気変位ベクトルの垂直成分が変化する。後から出て来るかも知れないが、表面電荷密度 σ に帯電した金属表面を考えよう。金属の内部では電場は0であるから、その接線成分も法線成分も0である。接線成分の連続性

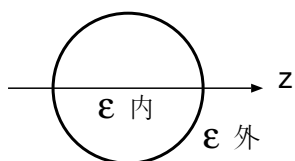
から、金属外部での電場の接線成分も0。即ち、金属外部では電場は法線成分だけが0でない。別の言葉で言えば、電場は金属表面に直交している。この法線成分の大きさを E_n 、外部での誘電率を ϵ とすると、 $\epsilon E_n = \sigma$ 、即ち面電荷密度が σ ならば、金属表面の電場は金属表面に垂直であり、その大きさは次式で与えられる。

$$E_n = \sigma/\epsilon \quad (3.32)$$

この式は、後で何回か登場する。

例 一様電場の中へ帯電していない誘電率 $\epsilon_{内}$ の球を置く
 球の半径を a とし、potential 問題を頭から解いてみる。球の中心を原点とし、極座標を用いると、球の内・外で $\nabla^2 \phi = 0$ 、球の表面では ϕ は連続。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.33)$$



ϕ は図の z 軸に関して回転対称だから、方位角には依存しない。 $z = 0$ 面で $\phi = 0$ だとすると ϕ は $z = 0$ 面に関して反対称でなければならない。従って ϕ を $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ で展開したとすると、 $\sin n\theta$ は不採用。 $\theta = 0 \sim 2\pi$ と一周した時、2回以上の周期性は持たないから、 $n = 1$ のみを採用する。

$\phi(r, \theta) = \cos \theta \cdot f(r)$ とおいて (3.33) に代入すると、

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0 \quad (3.34)$$

$f = r^m$ とおいてみると、

$$r^m(m^2 + m - 2) = r^m(m + 2)(m - 1) = 0 \quad (3.35)$$

$m = 1$ 又は $m = -2$ と決定した。一般解は、 A, B を定数として、

$$\therefore \phi = (Ar^{-2} + Br) \cos \theta. \quad (3.36)$$

定数 A, B を境界条件から以下の手法で決定する。

外部解: $r \rightarrow \infty$ で $\phi = -Ez = -Er \cos \theta$ とならないと一様電場を与えないから、 $B_{外} = -E$ と決まる。 $A_{外}$ はこの条件からは決まらない。

内部解: $r \rightarrow 0$ で $\phi = 0$ となるべきだから、 $A_{内} = 0$ 、 $B_{内}$ は未定。

• $r = a$ で $\phi_{内} = \phi_{外}$ の条件をつけると、

$$\phi_{外}(r = a) = \left(A_{外} \frac{1}{a^2} - Ea \right) \cos \theta = B_{内} a \cos \theta = \phi_{内}(r = a) \quad (3.37)$$

• もう一つの境界条件 ; D の法線成分は連続

$$\epsilon_{外} \frac{\partial \phi_{外}}{\partial r}(r = a) = \epsilon_{内} \frac{\partial \phi_{内}}{\partial r}(r = a) \quad (3.38)$$

従って、

$$\varepsilon_{外} \left(-\frac{2A_{外}}{a^3} - E \right) = \varepsilon_{内} B_{内} \quad (3.39)$$

(3.37) と (3.39) を連立させて、 $B_{内}$, $A_{外}$ について解くと、

$$B_{内} = -\frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E, \quad A_{外} = \frac{\varepsilon_{内} - \varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E a^3 \quad (3.40)$$

従って、ポテンシャルは

$$\phi = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E r \cos \theta & (r \leq a) \\ \left(\frac{\varepsilon_{内} - \varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} \frac{a^3}{r^2} - r \right) E \cos \theta & (r > a) \end{cases} \quad (3.41)$$

電場を計算すると、

• 内部電場:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E \cos \theta, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E \sin \theta \quad (3.42)$$

$$E_{内} = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E = \text{一定} \quad (3.43)$$

• 外部電場:

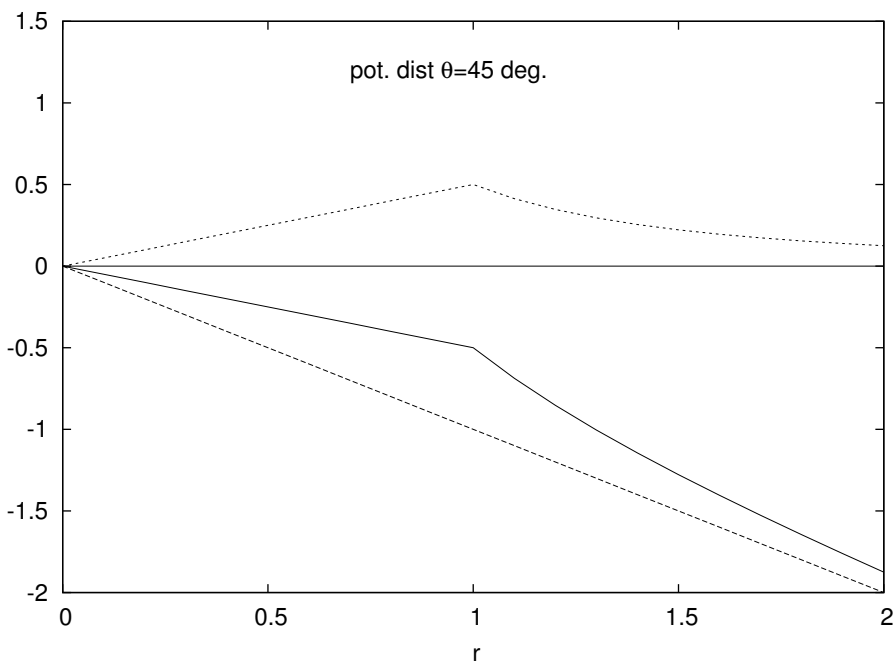
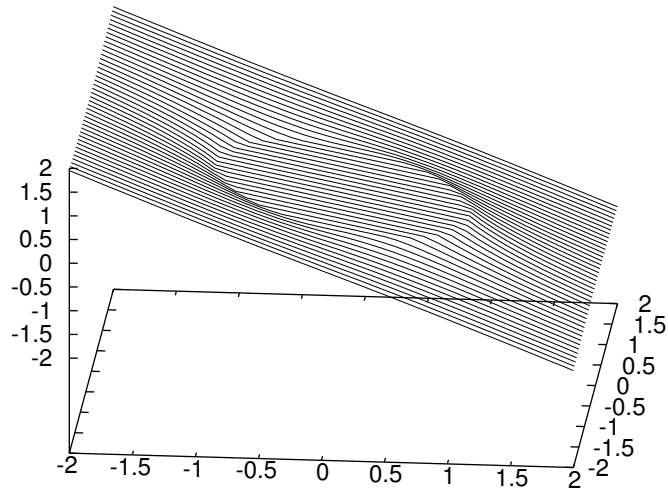
$$E_r = \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \frac{\varepsilon_{内} - \varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} \right) E \cos \theta, \quad E_\theta = \left(-1 + \frac{\varepsilon_{内} - \varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} \frac{a^3}{r^3} \right) E \sin \theta \quad (3.44)$$

$E_{内}$ は、 r にも θ にも依存しないから一様電場となっている。 $\varepsilon_{内} > \varepsilon_{外}$ ならば (真空中に絶縁球を置いた様な場合) $3\varepsilon_{外}/(\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}) < 1$ だから、内部電場は絶縁球の存在により弱くなっている。絶縁球が電気変位を起こし、変位した電荷 (電気双極子能率) が作る場が $E_{内} - E = (\varepsilon_{外} - \varepsilon_{内})/(\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}) E$ (逆電場) となっている。

$D_{内} = \varepsilon_0 E_{内} + P = \varepsilon_{内} E_{内}$ と書くと

$$P = (\varepsilon_{内} - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_{外}}{\varepsilon_{内} + 2\varepsilon_{外}} E \quad (3.45)$$

$\varepsilon_{内}/\varepsilon_{外} = 4$ という場合のポテンシャル分布を z 軸を含む面に表示すると、図のようになる。



$\theta = 45^\circ$ とした時の potential の値 ($E = \sqrt{2}$ ととってある)

- 図で、下半分の破線が絶縁球の存在しない時のポテンシャル
- 球があると、内部では実線の様に、外では破線を漸近線とする曲線の様になる。 $r = a$ でポテンシャル線が折れ曲がっている。
- r 軸の上に書いた部分は絶縁球が分極したために作られたポテンシャルと考えられる。(これを微分すると電場になる電場の法線成分は不連続である。 ϵ をかけた、電束密度 D の法線成分は連続であることを確かめよ。)

多重極能率 Laplace の方程式の解を微分したものはやはり Laplace の方程式の解である。更に微分しても解である…。Laplace の方程式は線形であるから、重ね合わせが成立する事も自明である。先の絶縁体球の計算に、 a^3/r^2 に比例する項があったのはこの例になっている。

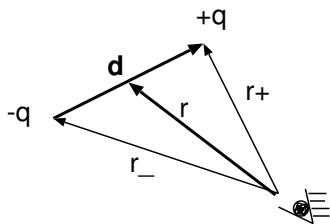
potential 問題を解く時に、この様な高次微分項を追加して、解の精度を上げるという手法が考えられる。しかし、微分項を追加するたびに全電荷が変化するのは好ましくないで、一次ずつ高次の微分項を追加しても、全電荷は変化せず、高次項は電荷系の複雑な内部構造に対応させる工夫としてモーメントの方法がある。

0 次のモーメント: 全電荷 = $\sum_i q_i = Q$ (i は点電荷の集まりに対し、点電荷毎につけた番号)

1 次のモーメント: $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i'$ (\mathbf{r}_i は点電荷 i の位置座標)

これはベクトルになる。但し、先のコメントに対応し、 $\sum_i q_i' = Q' = 0$ という条件をつけておく必要がある。

簡単な場合



図の様に $\pm q$ の電荷が d だけ離れて置かれているのを遠くから観察する場合を想定して、この系の potential を評価しよう。

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = q \mathbf{d} \quad \text{:電気双極子モーメント} \quad (3.46)$$

potential ϕ_p の計算には重ね合わせの原理が使用できる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right\} \quad (3.47)$$

少し抽象化するために $|d| \rightarrow 0$ ($|\mathbf{p}| = p$ は有限) という条件を付けてみる。 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-)/2$ と書くと、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} \right\} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}} \right\} + O(d^2) \quad (3.48)$$

$1/\sqrt{r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}} \simeq 1/r(1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}/2r^2)$ と近似すると、

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \quad (3.49)$$

これは観測点から \mathbf{r} の位置にあるモーメント \mathbf{p} が原点に作る potential。逆にモーメント \mathbf{p} から \mathbf{r} だけ離れた点に作る potential $\phi_p(\mathbf{r})$ は

$$\phi_p(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.50)$$

このポテンシャルが Coulomb pot. の微分になっている事は、式 (3.48) は、Taylor 展開を適用

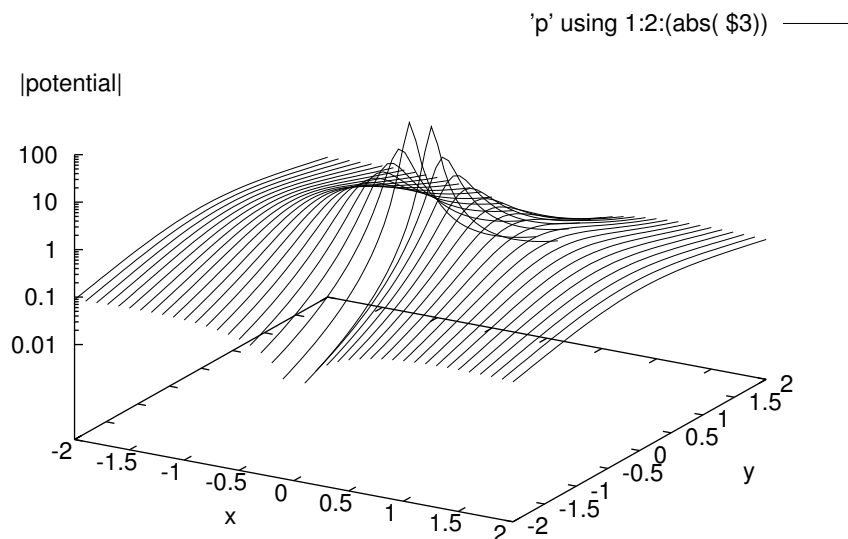
しただけだと思うと、了解出来る。(3.50) を r で微分すると電場が計算できる。

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^5}\mathbf{r}$$

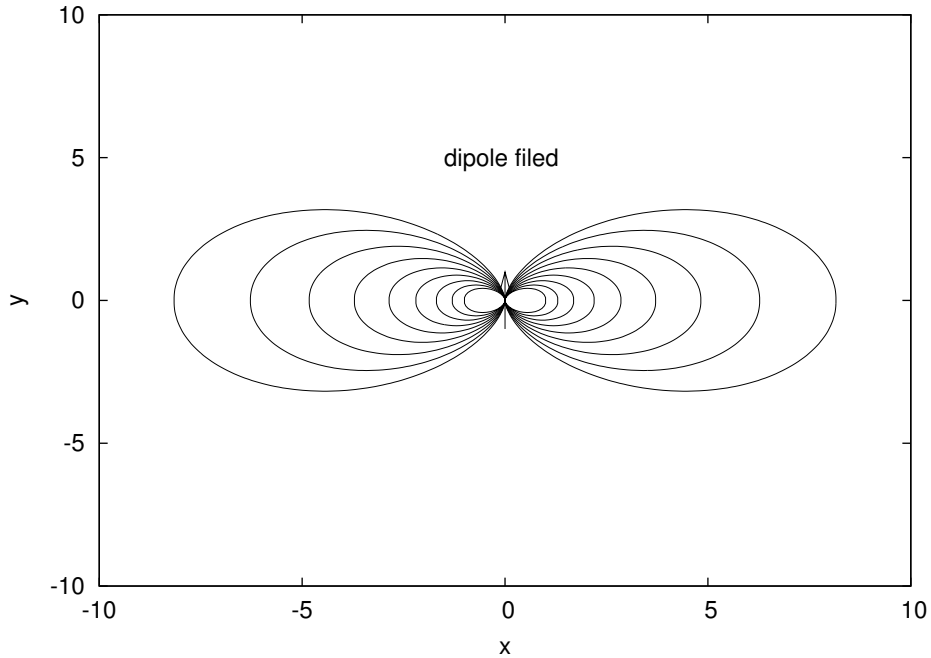
$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \nabla \times \mathbf{r}(\nabla \times \mathbf{p}) + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{p} \quad (3.51)$$

を利用すると、

$$\mathbf{E}_p = -\nabla\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} \quad (3.52)$$



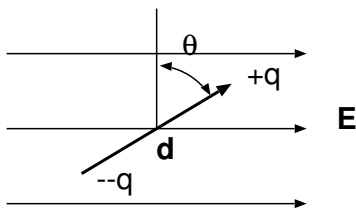
図には、原点に置かれた双極子能率がつくるポテンシャルの絶対値の対数をとったものが示されている。双極子能率の向き的一方ではポテンシャルの符号を負としたものが、本当の分布である。



図は、原点に大きさ 1 の双極子能率を xy 面内で y 軸に平行に置いた時の電場の様子を描いたものである。 x 軸上で、小さい方から順に 1.3 倍ずつ x 座標を増やした点から描いた。

電磁力線に沿って曲線を描くには、原理的には、 $dx/E_x = dy/E_y$ という微分方程式を解けば良いが、これでは E_x や E_y が 0 の時にトラブルが発生する。そこで、以下の様に変形すると良い。 $dx/ds = E_x/|E|$, $dy/ds = E_y/|E|$ この連立方程式は、2次元曲線の定義を $x(s)$, $y(s)$ という曲線の長さ s を助変数として書いた事に相当する。

電場 E とモーメント p の相互作用



モーメント p を拡大した図を描き、エネルギー U_p を計算する。
 図で、 E は一様電場であり、 d は $\pm q$ の位置ベクトルの差とする。両電荷の重心は固定してあるとする。

$+q$ の受ける力は qE 。電荷の重心は固定してあると、回転する自由度でエネルギーが変化する。 E と d が直交する場合の角度を $\theta = 0$ とし、この時のエネルギーを $U_p = 0$ ととっておくと、 θ だけ回転する時の仕事は、 $+q$ の部分に対し、

$$\int_0^\theta q E \cos \theta \frac{d}{2} (d\theta) = \frac{q E d}{2} \sin \theta \quad (3.53)$$

両方の電荷に対してならば 2 倍になるから、potential は負号をつけて、

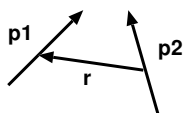
$$U_p = -2 \times \frac{q E d}{2} \sin \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (3.54)$$

電場 \mathbf{E} からモーメント \mathbf{p} が受ける偶力 (トルク) \mathbf{N}

図から明らか。

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (3.55)$$

2つのモーメント $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の相互作用 U_{12}



$$U_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_{p_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)}{r^5} \right\} \quad (3.56)$$

この相互作用は dipole-dipole 相互作用と呼ばれる。

複雑な電荷分布の場合

この場合に、 \mathbf{p} が原点のとり方に依存しない様にしておかねばならないから、電荷の重心

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum \mathbf{r}_i q_i}{\sum q_i} \quad (3.57)$$

からのベクトルを改めて \mathbf{r}_i としておく。

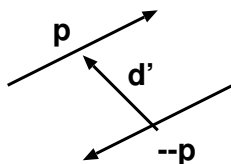
(3.57) の分母をを見ると判るように、全電荷 $\sum q_i = Q$ が 0 か 0 でないかを考えておかねばならない。

電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられている時には、

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (3.58)$$

と定義しておくといよい。このように定義しておく、物質固有の電磁氣的性質を記述するパラメータとして利用できる。

簡単な四重極能率の例



2つの点電荷を距離 d だけ離して置いた場合を電気双極子能率 $\pm q$ として抽象化する。少しこれを複雑化するには $\pm \mathbf{p}$ の2つの双極子能率を距離 d' だけ離して置けば良い。この時、 \mathbf{p} はその大きさ p と方向の自由度を持ち、 d' も大きさと方向の自由度を持つので、自由度が多くなり、もはやベクトルでも記述できなくなる。

この場合の potential ϕ_Q は、 ϕ_p (式 3.48) が電荷 q の作る potential の \mathbf{p} 方向への方向微分になった事から、 ϕ_p の d' 方向への方向微分で与えられる事が想像できよう。

$$\phi_Q = \mathbf{d}' \cdot \nabla \phi_p \quad (3.59)$$

更に高階のモーメントも順次作れよう。球面調和関数を利用の方がスマートに定義できるので、ここではこれ以上はやらない。

ある種の原子核は電氣的四重極能率や、電氣的八重極能率を有する。

Poisson の方程式の解の積分表示

delta 関数 素直な関数 $f(\mathbf{r})$ に対し、 \mathbf{r}_0 を含む空間での体積に対し、

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0) \quad (3.60)$$

を満足する関数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ を Dirac の delta 関数と呼ぶ。 δ 関数は \mathbf{r}_0 でのみ無限大の値を有し、他の点では 0、積分すると 1 という値を持つ。任意の関数 $f(\mathbf{r})$ に作用し、点 \mathbf{r}_0 での値をひっぱり出す関数になっている。3次元の場合、

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r) \quad (3.61)$$

という性質がある。この式を確認しておこう。

$r \neq 0$ ならば、 $\nabla^2 (1/r) = \nabla \cdot (-\mathbf{r}/r^3) = (3/r^4) (\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{r} - 1/r^3 \nabla \mathbf{r} = 0$ だから、積分範囲から原点を中心とする無限小半径 ε の球をくりぬいておくと、次の積分は 0 である。

$$\int_{V-\varepsilon} f(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = \int_V f(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV - \int_\varepsilon f(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = 0 \quad (3.62)$$

従って、 $\int_V f(\mathbf{r}) \nabla^2 (1/r) dV$ を $r = 0$ を含む空間で積分し、 $-4\pi f(0)$ を導けばよい。

$$\int_\varepsilon f(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = f(0) \int_\varepsilon \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = -f(0) \int_{\varepsilon'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi f(0) \quad (3.63)$$

Gauss の定理を用い、体積積分を表面積分にし、 $\int_{\varepsilon'} \mathbf{r}/r^3 \cdot d\mathbf{S}$ は立体角だから 4π であることを用いた。

$$\therefore \int_V f(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi f(0) \quad \text{O.K.} \quad (3.64)$$

式 (3.61) を知っているのと、式 (3.12) を確認するのは非常に簡単になる。

式 (3.61) に 4π が登場する事は、有理化単位系を採用する (静電 (磁) 気に関するクーロンの法則の分母に 4π が登場する) 形式的な理由である。先に述べたが、3次元空間の立体角が 4π である事が本質的な理由である。

問: $\ln r$ は 2次元の Green 関数に比例している事を示し、比例係数を評価せよ。上の3次元の例では、全立体角として、 4π が登場したが、2次元の場合には、全角度 2π が登場する。

問: delta 関数のいろいろな表現を探してみよ。

Green の定理、Green 関数

2つの素直な関数 $\phi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$ に対し、次の恒等式が成り立つ。

$$\int (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.65)$$

右辺は、左辺の体積分を実行する体積の表面に対して面積分を行う。これを Green の定理と呼ぶ。この式は部分積分で簡単に確認できよう。

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.66)$$

を満足する関係を Poisson の方程式に対する Green 関数と呼ぶ。ここで ∇ は \mathbf{r} についての微分を表す。(3.61) より、この様な関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ が存在する事は理解出来る。この時点では、 \mathbf{r}' は定ベクトルである。

Poisson 方程式の解の積分表示

Poisson 方程式を以下の様を書く。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (3.67)$$

Green 関数を (3.66) で定義しておく。具体的表式は次式とする。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.68)$$

ϕ として potential ϕ 、 ψ として (3.68) の G を (3.65) に代入し、少し並べかえると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' \\ - \frac{1}{4\pi} \int \phi(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{S}' \end{aligned} \quad (3.69)$$

右辺第3項の勾配部分は、あらわに書くと、

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.70)$$

従って、

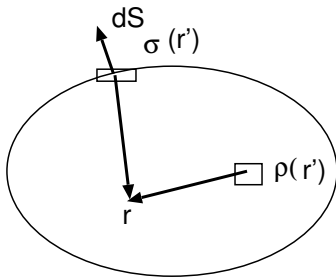
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nabla' \phi(\mathbf{r}') + \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \phi(\mathbf{r}') \right\} \cdot d\mathbf{S}' \quad (3.71)$$

右辺で、potential を計算したい点は \mathbf{r} であり、 \mathbf{r}' は積分変数である。第1項は Coulomb の法則を連続分布した空間電荷密度の場合に書いたものになっている。この項を

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left\{ -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \right\} dV' \quad (3.72)$$

と書き (3.66) と比較すると、空間の一点 \mathbf{r}' に "1 単位" の湧き口があった時の potential 問題の解が Green 関数であり、空間分布が $\{-\rho(\mathbf{r}')/\varepsilon_0\}$ の原因に対する解は原因となる (湧き口の) 強さを荷重として単位解 ($G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) を重ね合わせたものが、本物の解を与える事を示している。

右辺第2項は $\nabla\phi = -\mathbf{E}$ と書き換え、(3.31) を用いると、表面電荷密度 $\sigma(\mathbf{r}')$ で置き換えられる。従って表面積分の対象は $\{\sigma(\mathbf{r}')/\epsilon_0 \times 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}$ と書き換えられ、この項も実は Coulomb の法則を書いただけの事である。



ここまでを図示する。内部空間を V 、境界表面 S とし、potential を計算したいのは内部の点 \mathbf{r} とする。第1項は内点の電荷分布、第2項は表面電荷密度、第3項は、次の節で詳しく説明するが、境界表面の双極子能率の面分布からのからの寄与を与える。ポテンシャルの原因がどの様に観測点に影響するか、という事を原因の全分布について加える(積分する)と求める結果が得られる。

重ね合わせの原理が働いている事が理解出来るだろう。右辺第3項は、境界表面での potential の値 $\phi(\mathbf{r}')$ があると、点 \mathbf{r} では、この面要素を見込む立体角分だけ potential の値が影響を受ける事を述べている。

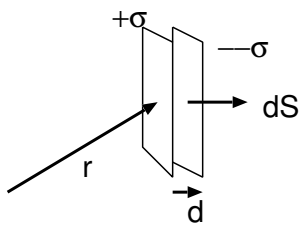
(3.71) は湧き口の分布 $\rho(\mathbf{r}')$ を与えた時、内点での値と境界上での値およびその法線微分は独立には決定できない事を示している。下手な境界条件を与えると potential $\phi(\mathbf{r})$ は解を持たない。

$\phi = \int \rho dV' + \int \phi \cdot dS + \int \nabla\phi \cdot dS$ と変形し、中括弧の物理的意味を無視すると、この事情ががよくわかる。中括弧の部分は、例えば内点 \mathbf{r}' の電荷の効果が、点 \mathbf{r} にどの様に伝わるかを記述している。

この potential の積分表示は、境界要素法で Laplace、Poisson 方程式を数値的に解く時の出発点である。

電気双極子の分布 双極子 \mathbf{p} から \mathbf{r} の位置に作られる potential $\phi_p(\mathbf{r})$ は(3.50)により与えられる。もう一度書くと、

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \quad (3.73)$$



ある面上に双極子が密度 τ で分布している時の potential を考えよう。これは面電荷密度 $\pm\sigma$ 、厚さ d の電荷分布で近似すると、図を参照し、

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r}|} - \frac{\sigma dS}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right\} \quad (3.74)$$

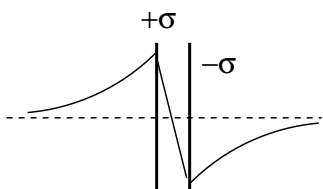
ここで $|\mathbf{r}| \gg d = |\mathbf{d}|$ として、右辺第2項を近似する。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{r^2}}} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2}\right) \quad (3.75)$$

$$\therefore d\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} dS = \frac{\sigma d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.76)$$

右辺に原点から点 \mathbf{r} にある面要素 dS を見た立体角が登場した事に注意

(3.71) の第 3 項と比較すると、 $\phi(\mathbf{r}') = \tau/\epsilon_0$ とおくと良い対応をなしているから、面電気双極子能率の分布状態からの potential の寄与だという解釈になる。(3.76) を積分すると、電気的双極子の面分布からの potential の寄与が与えられる。



面に垂直に、この面に近付くと、 $d\Omega$ は 0 から 2π まで変化する。面に厚さがあると、この内部ではコンデンサーだと考えて、一様電場で近似すると、potential は直線的に変化し、面を通り抜けると、立体角は -2π となり、さらに直進すると、 $1/r^2$ で 0 に近づく。

厚さ 0 の極限では τ/ϵ_0 だけ potential が jump する。一様電場中に置かれた絶縁体球の例に従って、 z 軸上の potential をグラフに描いてみよ。

問: (3.50) を利用し、直接 (3.76) を導け。

双極子の空間分布

単位体積当たり \mathbf{P} の電気双極子能率が分布している空間を想定する。

点 \mathbf{r}' にある $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$ のモーメントが観測点 \mathbf{r}_0 に作るポテンシャル $d\phi(\mathbf{r}_0)$ は (3.50) より、

$$d\phi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^3} dV' = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \right) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.77)$$

ここで ∇' は \mathbf{r}' についての微分を表す。微分公式、

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{A} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.78)$$

を利用すると、

$$d\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right\} - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right] dV' \quad (3.79)$$

この式をモーメントの存在する空間 V について積分すると、 S を V の表面として、

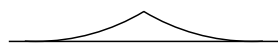
$$\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.80)$$

(3.80) を次の様に解釈する。

第 1 項は S の表面に面電荷密度 $\sigma = P_n$ (n は法線方向の成分を表す) の電荷が誘起され、この電荷が点 \mathbf{r}_0 に作るクーロンポテンシャルである。双極子能率は $+-$ の電荷対であるから、一様に分布していると、内部ではお隣のモーメントと電荷が相殺して効果は見えないが、表面では相殺する相棒がないからポテンシャルを作るという直感ともよく一致している。

第 2 項は $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ の体積電荷密度の電荷と解釈すればよい。上で述べた様に一様に分布していれば相殺して何も無いのと同じだが、分布に濃淡があると相殺されずに効果が残る事になる。

$\nabla \cdot \mathbf{P} > 0$ という事は体積要素の中へ向かっているモーメントベクトルよりも外へ出て行く方が多いという事だから、負の電荷の効果が残る事になり、 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ の符号を変えたものが、電荷密度の符号になっている。ポテンシャルは電荷が存在しなければ滑らかに変化し、電荷が存在すればそこで折れ曲がる。



一様電場中の絶縁体球の例では "電荷がない" としたのにポテンシャルが球面上で図の様に折れ曲がっていた。

その理由は $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ だけの等価面電荷密度が球表面にあり、そのために、傾き一定のポテンシャルに図のようなポテンシャルが加わっていた訳である。

電気変位 物質が存在する空間に電場をかけると、クーロン力が $\varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon_r$ 倍だけ弱められると先に述べた。実際、 $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ の球の内部では電場が $3/4$ 倍になっていた。(有限の大きさだと ε_r そのものにはならない。形状にも依存する。) これは電場をかけたために見掛け上表面にしみ出した電荷に依るものと解釈できた。非一様物質の場合は更に $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ の電荷密度を考える事ができた。

物質の内部で考えてみると本当の電荷密度 ρ_{true} 、誘起された電荷密度 $\rho_i = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ があり、 ρ_{true} に対しては (3.12) より $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{true}/\varepsilon_0$ が成立している。

ここで \mathbf{E} に対し ρ_{true} と ρ_i を区別しないための拡大解釈を行う。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{true} + \rho_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{true} - \nabla \cdot \mathbf{P}) = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.82)$$

により電気変位 \mathbf{D} を定義すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{true}, \text{ or } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{total} \quad (3.83)$$

\mathbf{E} は何らかの電荷による電場、 \mathbf{P} はこの電場により誘起された双極子モーメント (の体積密度) とすると、この両者には関係がある。この \mathbf{E} と \mathbf{P} の関係は物質の電氣的性質を反映している。電場が弱ければ、 \mathbf{P} は電場に比例するだろう。又、物質に方向性がなければあるスカラー量 χ を用いて、(χ は電氣的感受性、electric susceptibility)

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.84)$$

と書かれよう。(3.82) に代入すると、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi \quad (3.85)$$

注意:(3.84) 右辺の \mathbf{E} は (3.81) にある様に暗黙のうちに \mathbf{P} を含んでいる。 \mathbf{E} が \mathbf{P} に "比例している" 事の意味は (3.84) を見た以上に複雑である。

表面電荷密度について 実電荷以外に $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ も、物質の内部では、電荷密度として採用する事とした。この影響は物質表面にどう反映されるだろうか？ 今までは実電荷表面密度 σ の存在を認めていて、境界条件として (3.31) を要求した。その時 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を認めたが、これは (3.83) そのものだから変更はない。(最初からその様を書いておいたというべきだ)

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を認めると、 E の接線成分が連続という式 (3.30) はそのまま成立する。

まとめておくと、

	旧型式	新型式
Coulomb の法則	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 但し \mathbf{E} と \mathbf{D} を関係式が必要。 簡単な構成方程式 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$
境界条件		
(法線成分) jump 量	E には σ/ε_0	D には表面電荷密度
(接線成分)	E のは連続	同左

以上が静電気(電流のない場合、従って時間変化も無い場合)のまとめ

第4章 電流

空間的な電荷の移動を電流と呼ぶ。簡単には金属製の細い線の両端に電位差を与えてやれば電流を実現できる。電荷を運ぶのはこの場合は電子であると単純に考えておく。水中にイオン質のものを溶かした時には、何が本当に電荷を運んでいるのかは難しい。ガス放電の場合には、電位差の小さい時の方が放電電流が多い場合が経験されていて、負性抵抗と呼ばれる。超電導状態では、電位差が無いのに流れ続ける事もある。

ここでは非常に簡単な場合のみを取り上げる。ある種の物質には電導性があり、他の物質には無いとだけしておく。

電流密度 空間に分布した電流がある時、この電流の面密度(単位面積当たりの電流)を電流密度と呼び、 \mathbf{i} で表す。電流の方向を持つベクトルである。 q なる電荷を持った粒子が単位体積当たり n 個あり、これら全部が同一の速度 \mathbf{v} で運動しているならば、

$$\mathbf{i} = n q \mathbf{v} \quad (4.1)$$

で与えられる。 q に正、負の区別があるから、 \mathbf{v} の向きと \mathbf{i} の向きは平行になったり、反平行になったりする。

電荷の保存と連続の式 空間に体積要素 dv を考えた時、ここに存在する電荷 dq は電荷密度を ρ とすると $dq = \rho dv$ であり、外部から流入があると、単位時間当たり $dq/dt = (d\rho/dt)dv$ だけ増加する。他方この dv を囲む面を通過して流出する電荷は単位時間当たり、 $(\nabla \cdot \mathbf{i})dv$ である。電荷に湧き口や吸い込み口がなければ電荷は保存するから、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

一般に発散と時間変化の和が一定という式は連続の式と呼ばれている。電荷密度の部分の偏微分の形にしたのは、体積要素 dv の位置は固定している事を明示するためである。この式は電荷が保存する限り成立せねばならぬ式であり、今後の拡大解釈は許されない。

オームの法則 電場 \mathbf{E} と電流密度 \mathbf{i} とは広い物質、周波数範囲で比例する事が経験的に知られている。これをオームの法則と呼ぶ。

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.3)$$

比例係数 σ は電気伝導度と呼ばれ、物質に依存し非常に広い範囲にわたって変化する。常温の通常物質でも $10^8 \sim 10^{-15}$ 程度変化している。(銀 ~ 絶縁物)

ここでは微分形でオームの法則を表したが、工学的には \mathbf{i} を電路断面で面積分した量を I と

し、 E は電路に沿った線積分を V (電位差) とし、 σ も全電路にわたって体積積分した値 $= 1/R$ とすると $V = IR$ という式で書かれる事が多い。

オームの法則は経験則であると述べたが、数密度 n の帯電体 (イオンと呼んでおこう) が速度 v で流れている時、イオンの電荷を q とすると、このイオン群には単位体積当たり、 nqE の力が働く。ゆえに (4.3) の右辺はイオン群に働く力に比例している。他方 (4.1) より、(4.3) 左辺は速度に比例している。即ち (4.3) は力と速度が比例するという式である。一方 Newton の法則は力と比例するのが加速度であると述べているから、どこかに妥協を導入しなければいけない。速度と力が比例する例は、最終速度という概念と共に知っている。ここでも Stokes の粘性の法則を真似て、速さに比例する抵抗を受けて最終速度を実現した時に (4.3) が成立するものだと考えてみよう。この時、運動方程式は次の様になる。

$$nm \frac{dv}{dt} = nqE - n\alpha v \quad (4.4)$$

m はイオン 1 個の質量、 α はある意味の抵抗を表す定数である。この方程式を解くと、

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{q}{\alpha}E \quad (4.5)$$

$t \rightarrow \infty$ とすると、最終速度 $v_\infty = qE/\alpha$ を得る。これを (4.3) の形に書くと、

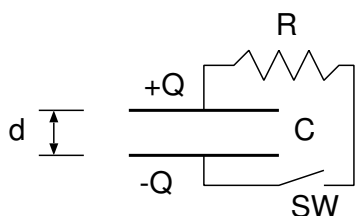
$$nqv_\infty = \frac{n}{\alpha}q^2E = \sigma E, \quad \alpha = \frac{nq^2}{\sigma} \quad (4.6)$$

導線に電流を流すと発熱する理由がこの摩擦抵抗にある。

注: (4.3) 右辺は時間反転に対し符号を変えないが、左辺は符号を変える事に注意。

問: 銀の場合に対し、原子 1 個に "イオン" (電子) が 1 個あると仮定し、時定数 m/α を評価せよ。この時定数よりもゆっくりとした変化に対してはオームの法則は成立すると考えてよい。

電流に関する雑談 図の様に電荷 Q に充電されたコンデンサー C 、抵抗 R 、スイッチ sw から構成された回路を考える。



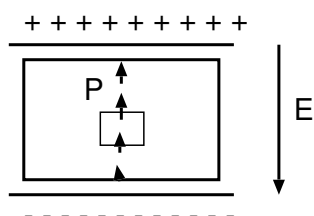
コンデンサーの極板間に誘電率 ϵ の物質が詰まっている。sw を閉じた瞬間からコンデンサーは放電を開始し、 $\exp(-t/RC)$ という時間依存性で電荷は減少していく。ここでの問題は極板間にはさまれた誘電体にある。

初期には $V = Q/C$ の電位差、 $E = V/d$ の電場がかかっているから、 $P = (\epsilon_r - 1)E\epsilon_0$ の分極をしていた。即ち極板に面した絶縁体表面には P だけの面電荷密度の電荷があった。放電開始と共に極板から電荷量が減っていく。これにしたがって P の値も減っていくから面電荷

も減る。この絶縁物の表面に誘起された電荷は、電荷が保存する以上、絶縁物を通して反対側に誘起された電荷と中和したと考えるのが自然であろう。絶縁物の表面で $\partial P/\partial t$ の電流密度の電流が絶縁物を通して反対側へ流れた! 絶縁物の内部では?

$\rho_i = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ の誘起電荷密度の存在を認めたから、 $\partial P/\partial t$ の電流分だけの電流の存在を認める事になる。 $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\partial/\partial t(\nabla \cdot \mathbf{P})$

超高速カメラで内部の \mathbf{P} の変化をとらえると、各場所での分極 \mathbf{P} の大きさが少しずつ短くなり、この変化が波の様に伝わるのだろう。



体積要素を考えると上面では \mathbf{P} が下面の \mathbf{P} より小さくなっていると $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ だから、この波が伝わると、 $\partial/\partial t(\nabla \cdot \mathbf{P}) \neq 0$ で電流が流れている様に感じられる。

外部導線に電流が流れている時、絶縁物の内部でも同じ様に電流が流れている。絶縁物の内部では電荷自体は動かないはずなのに、ベクトル \mathbf{P} の長さはどのような機構で、短くなるのだろう? ミクロな観点から考えてみよ。

オームの法則を次の様に書きかえる。

$$v = \frac{\sigma}{ne} E = \mu E \quad (4.7)$$

μ を易動度 (mobility) と呼ぶ。(表音記号は移動度。易動度と移動度では意味が全く異なる!)

物質中の電荷 静電気に関する Coulomb の法則を述べる時に、”導体中には電荷が存在しない”(表面には存在する) とよく言われる。この事情を調べておこう。

電荷保存の式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$

Ohm の法則 $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{i} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}$ (一様物質とする)

電気変位があると $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{D} / \epsilon$

Coulomb の法則 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

これらを逆に代入していくと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (4.8)$$

この微分方程式は簡単に解ける。

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right) \quad (4.9)$$

この解の右辺に登場した $\rho(\mathbf{r}, 0)$ は $t = 0$ での電荷分布である。これから電荷は(もし導体中に注入されても) ϵ/σ の時定数で消滅してしまう。電荷の分布が横へ広がって、分布の中心での電荷密度が減少する訳ではない。別の言い方をすると、電流とは電子のような荷電粒子が移動しているのではない。

因みに、電気伝導度として常温での銅の値、 $\sigma = 10^8/1.7 [\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$ 、誘電率として真空の値 $\varepsilon = 8.8 \times 10^{-12} [F \cdot m^{-1}]$ を使用すると、 $\varepsilon/\sigma = 1.5 \times 10^{-19}$ [秒] と非常に短い。このような短い時定数で起こる電磁気現象に、オームの法則を適用するのは間違っているだろう。

絶縁物の場合、この時定数は人間の感覚と比較しても長くなる。高圧をかけた絶縁物を短絡した後、暫くすると電荷がにじみだしてきて感電する事がある。

この事情をもう少し詳しく調べる為に、 $t = 0$ の瞬間に半径 R の球の内部に様に電荷を載せた場合の電流を計算してみよう。先ず、電荷密度の初期値を以下の様に仮定する。

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (4.10)$$

動径方向にしか電流は流れないと仮定すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 i_r) = \frac{d i_r}{dr} + \frac{2}{r} i_r = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (4.11)$$

この方程式を解くと、 $r > R$ ならば $\rho = 0$ だから、

$$\frac{d i_r}{dr} + \frac{2}{r} i_r = 0 \quad i_r = \frac{const.}{r^2} \quad (4.12)$$

内部領域 $r \leq R$ ならば、

$$\frac{d i_r}{dr} + \frac{2}{r} i_r = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_0 \quad (4.13)$$

の解は

$$i_r = \frac{\sigma \rho_0}{3 \varepsilon} r \quad (4.14)$$

である。 $r = R$ で、内外の解が連続であるという条件をつけると、 $const. = \frac{\sigma \rho_0 R^3}{3 \varepsilon}$ ときまる。纏めると、

$$i_r(r, t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) \times \begin{cases} \frac{\sigma \rho_0}{3 \varepsilon} r & r \leq R \\ \frac{\sigma R^3 \rho_0}{3 \varepsilon r^2} & r > R \end{cases} \quad (4.15)$$

外部領域では r^{-2} で r とともに減少するから、電流は無限遠方まで、面積分の意味で減衰する事無くずっと続く。

次に、エネルギーに付いて考えよう。先ず、一様帯電球の持つ静電エネルギーを計算しよう。一様に帯電したタマネギの皮を一枚ずつ重ね合わせて、半径が 0 から R まで増やす事にしよう。半径が r の時のポテンシャルは

$$\left(\frac{4 \pi r^3 \rho}{3}\right) \frac{1}{4 \pi \varepsilon r} = \frac{\rho r^2}{3 \varepsilon} \quad (4.16)$$

追加すべき電荷は $4 \pi r^2 \rho dr$ であるから、全エネルギー E は

$$E = \int_0^R \frac{\rho r^2}{3 \varepsilon} \times 4 \pi r^2 \rho dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4 \pi \varepsilon R} \quad (4.17)$$

但し、 $Q = 4\pi R^3 \rho/3$ は、球上にある全電荷である。全エネルギーの時間的変化率は、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{5} \frac{2Q}{4\pi\epsilon R} \frac{dQ}{dt} = -2\frac{\sigma}{\epsilon} E \quad (4.18)$$

この一様帯電球がつくるポテンシャルは $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を、半径 r の球で体積分を実行すると、簡単に計算出来る。

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \times \begin{cases} \frac{1}{2R} \left\{ 3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\} & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r > R \end{cases} \quad (4.19)$$

ポテンシャルが計算できると、動径方向の電場 E_r はこの式を微分すればよいから、

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \times \begin{cases} \frac{r}{R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & r > R \end{cases} \quad (4.20)$$

流れる電流と電場が計算できると、単位時間当たりの発熱量 P は $E_r \times i_r$ を全空間にわたり、体積分すれば計算出来る。

$$P = \int_0^\infty E_r(r) i_r(r) 4\pi r^2 dr \quad (4.21)$$

この積分を $r \leq R$ と $r > R$ の二つの部分に分ける。

$$P_{in} = \int_0^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon R^3} \frac{\sigma\rho r}{3\epsilon} 4\pi r^2 dr = \frac{\sigma}{5\epsilon} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \quad (4.22)$$

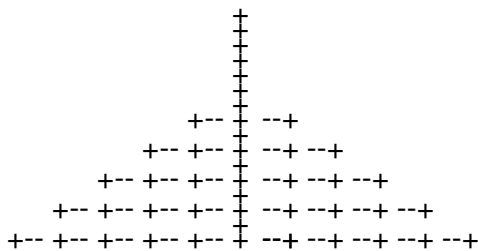
$$P_{out} = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} \quad (4.23)$$

両者を加えると、

$$P = P_{in} + P_{out} = \frac{6\sigma}{5\epsilon} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R} = \frac{2\sigma E}{\epsilon} \quad (4.24)$$

P と dE/dt の和は0である。即ち、球状電荷分布の持つ静電的なエネルギーの減少部分は、電流の Ohmic loss により、消費されている。即ち、エネルギー保存則は満たしている。

次に、電流が流れると言う事を考えよう。この計算の前半では、最初に与えた電荷分布の形は崩れないと言った。一方後半では、電流は流れているせいで、最初に与えた電荷分布を作るのに要したエネルギーは通常の意味での電流による発熱に消費されると言った。この両者と矛盾しない形での電流を説明しなければならない。この説明として、次の様に考えてはどうだろうか？



図では、中央に正の電荷が集積している。その正電荷を取り巻いて沢山の電気的雙極子能率が配向している。次の瞬間には正電荷の一部は、配向した雙極子能率の内の負電荷と合体して雙極子能率の一部が、向きを変えた状態となる。その次の瞬間には、この向きを変えた雙極子能率が更に向きを変える。

この向きを変える原因の一部は、中央の帯電した部分の電荷が作る電場であり、残りの原因は、近所の双極子能率が作る電場である。即ち、最初に与えた電荷は、近隣に作られた双極子能率の向きを変える事で電氣的に中和される。中和に使われた双極子能率は、更に隣の双極子能率に影響を与えて、自分を中和しようとする。即ち、電流として流れているのは、この場合、変位電流である。

電流に対するこのようなイメージは、次の計算により補強される。断面積が 1 mm^2 の銅線に 1 A の電流が流れているという、日常的によく経験される場合に、銅線中を電子が運動して電流を運んでいると仮定して、電子の速度を推定してみよう。一秒間にこの断面積を通過する電子数は、 $1/(1.6 \times 10^{-19})$ 個である。銅原子 1 個につき自由電子が 1 個ずつあると仮定する。銅の密度を 8 g/cm^3 、核子の質量を $1.67 \times 10^{-24}\text{ g}$ 、銅の平均原子量を 63.5 とすると、自由電子の数は、 7.5×10^{22} 個/ cm^3 となる。従って、平均漂動 (drift) 速度は $83\text{ }\mu\text{ m/s}$ となる。この速度は、次の意味で我々の経験に反する。すなわち、電気のスイッチを入れると、 10 メートル先の電灯はすぐに点灯する。一方、上の推定値を用いると、 $10\text{ m}/83\text{ }\mu\text{ m/s} = 1.2 \times 10^5\text{ s}$ だから、スイッチを入れてから点灯するまでに、1 日以上かからねばならない事になる。

変位電流というのは、日常的に経験される電磁氣的現象にも登場しているという解釈である。

第5章 静磁気

Coulomb の法則 Coulomb は磁荷間に働く力を測定し、相対距離の2乗に反比例する事を見出した。

磁荷を q_m, q'_m とすると

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m q'_m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.1)$$

この法則は静電気に関する Coulomb の法則と非常に良い対称性を有する。例えば電荷 \leftrightarrow 磁荷、誘電率 \leftrightarrow 透磁率、など。故に静電気に対応する静磁気の公式は全て、同じ考え方で導ける。

$$\begin{aligned} \text{磁場} \quad \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m \mathbf{r}}{r^3} \\ \text{磁気能率} \quad \mathbf{m} &= q_m \mathbf{d} \\ \text{磁気分極} \quad \mathbf{M} &: \text{単位体積あたりの磁気能率} \\ \text{磁束密度} \quad \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{\rho_m}{\mu_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{aligned} \quad (5.2)$$

しかしその後大きな相異がある事が分かった。

- (1) 磁荷は存在しない。現在のところ磁荷を発見したという報告は1例あるのみ。ただしその後の大規模追試では見出されていない。追試が正しいのか何か見落としているのかは不明。現在のところ是否定的追試の方が受け入れられている。磁荷 $q_m = 0$ だとすると、磁気能率 $\mathbf{m} = 0$ 。磁氣的現象全てが0になるように見えるが、そうではない。ある種の素粒子は固有の磁気能率を有するので、磁気能率を基本にした式は物理的実在として意味がある。この立場からは、概念と実在を使い分けるならば、磁荷を使用しても良い事になる。実磁荷の存在を否定すると、磁荷としては分極磁荷、 $M_n, -(\nabla \cdot \mathbf{M})$ が面磁荷・体積磁荷密度として残る。磁荷が無い以上磁流も概念として、使用されていない。
- (2) 時間反転性。電荷は時間軸の向きを変えても変化しない。これは静電気に関する Coulomb の法則が時間に依存していないから当然だ。静磁気だって同様に思えるが、そのうちにそうでない事が分かる。電流が流れると磁場を作る事は経験的に知っているでしょう。一巻きのコイルに流した電流の作る磁場は、磁気能率の作る磁場とある極限では同じである。

(区別がつかない。) \mathbf{m} の作る磁場は静電気との類推で

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} \right] \quad (5.3)$$

である事はすぐに分かる。さて、時間の向きを反転するとコイルの電流の向きが反転し、 \mathbf{H} の向きも反転する。対応関係を保つためには (5.3) の両辺ともに時間反転に対し符号を変えねばならぬ。概念として磁気能率の定義 $\mathbf{m} = q_m \mathbf{d}$ で、位置ベクトルに対応する \mathbf{d} は符号を変えないから、 q_m が時間反転に対し符号を変える。

- (3) 空間反転について。電気的双極子能率は空間反転に対し符号を変えるが、磁気双極子能率は符号を変えない。Ampere の法則を思い出したら、理解できるかな？ 電荷はスカラーだが、磁荷は擬スカラーである。
- (4) 時間的に変化しない外場に対して、相対誘電率 $\epsilon_r (= \epsilon/\epsilon_0)$ は必ず 1 よりも大きい ($\epsilon_r \geq 1$) が、相対透磁率 $\mu_r (= \mu/\mu_0)$ は 1 よりもほんの少しだが小さな値をとる物質があり、反磁性体と呼ばれる。

透磁率と誘電率の起源は必ずしも同じではないと思われる。

相対誘電率と相対透磁率の大きい方を比較すると、日常的物質で大きいのは水の誘電率が約 80、鉄の透磁率だと 10、000 程度であり、透磁率の方が大きな物質がある。誘電率の大きなものでは、チタン酸バリウムやロッシェル塩等で、約 5、000。透磁率の大きなものは、何と言ってもスーパーマロイの 1、0000、000 であろう。この物性の相違は、電磁気学とどのような特徴を表しているかを考えてみよ。

このように外見的にはどちらも $1/r^2$ の法則に従うが、本質的な部分では両者は大きく異なる。確認の為にもう一度書いておくと、

Coulomb の法則	$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
保存力	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	
双極子の作る磁場	(5.3)	
境界条件	H の接線成分は連続	
	B の法線成分は連続	

注意: 真空中では $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ 、磁気分極があると $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とする。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は磁荷の不存在と関連して語られる事が多いが、力線の伝わり方や空間構造と密接に関連している事を強調しておく。(力線が途中で減衰しない! 又は我々がユークリッド空間に住んでいる)

$\nabla \times \mathbf{H} = 0$ だと磁気 potential ϕ_m を用いて、 $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ と書け、磁気分極に関連した "磁荷密度" M_n , $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ を用い、 ϕ_m は次式で与えられる。

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' \quad (5.4)$$

第6章 電場と磁場

これまでのところでは電気と磁気は理論形式は似ているが全く独立な現象であった。電流がその周囲に磁場を作る事が理解されてから、この両者は関係がある事が分かってきた。今迄の Coulomb の法則は原理的に "点" と "点" との間の力関係であったから、この両者の点をつなぐ方向が即ち力の方向であった。電流が作る磁場の場合は電流要素の "方向" と電流要素と場の点をつなぐ方向の "二つの方向" が論理的に登場する。この二つの方向から一つの方向を作るベクトル積が力に関連して登場する事になる。電流が磁場を作るならば、逆に考えると磁場も電流を作ると発想されよう。しかしこの考えは、このままでは不可である。なぜならば、一度磁場を作っておくと、今の考えならば永久に電流が流れ従って磁場から無限にエネルギーが取り出せる事になりエネルギー保存則と矛盾するからである。もう一工夫必要である。 $\partial B/\partial t$ が電流 (これは電場が作られた結果であるが) を作る事を Faraday は見出した。

電流要素の方向と電流要素から場の点への方向の二つの方向から、電流要素が作る磁場という一つの方向を作るには、ベクトル積を導入すれば良いという発想は短絡的でないだろうか? と考える学生への助言。二つのベクトル i, r から特定できる一つの方向 (ベクトル) を作れという問題設定は認めよう。新しいベクトルは、両ベクトルが対等に入っていないといけな。両ベクトルの次元が異なるから和や差の採用はあり得ない。次に考えられるのは、両ベクトルの成分を用いて双 1 次形式を採用する事である。双 1 次形式 $i_j \times r_k$, ($j, k=1, 2$, 又は 3) で作る事が出来るベクトルはベクトル積しか無い事が証明出来る。但し、右手系を採用するか左手系を採用するかという自由度は残る。我々は右手系を採用すると決めたので、この自由度はもう使っている。

上記事実の証明に興味があれば、群論やこれを具体化した角運動量の量子論を勉強しよう。勿論、双 1 次形式から作られる 2 階反対称テンソルがベクトル積と等価である事は知っているよね。

Faraday の電磁誘導の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.1)$$

一巻きのコイルに対し積分をすると

$$\text{右辺} \quad - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{左辺} \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V$$

左辺の積分結果は起電力と呼ばれる。右辺の $\Phi (= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$ は磁束と名付けられている。名前の順番としては、 \mathbf{B} が磁束密度と呼ばれるのは、この積分に由来すると考えるのが自然だろう。ところで、Faraday の電磁誘導の法則の積分形は、次式で与えられ、

$$(\text{起電力}) = -(\text{磁束の時間変化}) \quad (6.2)$$

(6.2) は多くの発電機の原理を与える。この式が微分形 (6.1) でも成立する事は変圧器 (トランス) による交流電圧の昇降圧により、日常的に確認されている。またベータトロンという加速器は直接 (6.2) を利用している。即ち、電線の有無に拘らず、(6.1) により、電場は作られている事が確認できる。電場 \mathbf{E} は元来点電荷に対して考えられ、極性ベクトルである。ところで、微分演算子も極性ベクトルであるから (6.1) 左辺は座標系の反転により、符号を変えない。従って磁束密度 \mathbf{B} は軸性ベクトルである。力学では角速度や角運動量が軸性ベクトルとして登場した。磁気分極 \mathbf{M} も軸性ベクトルである事は先に示唆しておいた。

(6.2) 式を移項し、次の保存則を得る。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

この式は、 \mathbf{E} と \mathbf{B} のある種の部分は相互に転換可能であることを示している。これをもう少し考えてみよう。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 \mathbf{B} は極性ベクトル \mathbf{A} の回転として与えられる。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.4)$$

問 一様磁場 \mathbf{B} に対し $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$ と与えられることを示せ。

(6.4) を (6.3) に代入すると、

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.5)$$

回転が 0 であるベクトルはスカラー関数の勾配で与えられるから、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.6)$$

静電場に対する式 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ に時間依存性を含ませると (6.5) や (6.3) の様に拡張された。 \mathbf{E} や ϕ も時間に依存するようになっている。静的な場では ϕ は定数の自由度があった。時間依存性を導入すると、自由度は少し増える。(6.4) より \mathbf{A} にも自由度があるから両方で持ちつ持たれつとできる。(6.6) を $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ に代入すると

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.7)$$

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} に $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ という条件をつけると、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.8)$$

この式は時間依存性を有するのに、一見して静電場の時の式と同じになっているので Coulomb gauge と呼ばれている。この話は輻射に関して、もう一度する予定である。

第7章 磁場と電荷の相互作用

我々は今まで静電・磁気に関する Coulomb の法則、電荷保存の法則、電磁誘導の法則を基本法則としてきた。もう一つの基礎法則として運動する点電荷と磁場との相互作用、Lorentz 力を採用しよう。

磁場密度 B が与えられたとき、電荷 q 、速度 v の運動体は B から次の力をうける。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.1)$$

力の原因は B か H かは真空中の磁場を調べるだけでは判断できないが、磁化された鉄材中を通過する荷電粒子の軌跡を調べれば、 B である事が判断できる。真空中では B と H は比例関係にあり、鉄材中でも比例関係にあるとして良いが、比例係数が異なるので軌跡の曲率半径が異なる。 H を変えながら軌跡を観測すると余計はつきりする。

B と一緒に E も存在すれば、(7.1) には更に qE という項が加わる。ただしこう言えるのは、 E の存在が B に影響を与えない、逆に B が E に影響を与えない事を暗黙に仮定している。(7.1) の大きな特徴の一つは、 B が時間に依存しない時は、Lorentz 力は荷電粒子に仕事をしない事である。仕事率を $\frac{dw}{dt}$ とすると

$$\frac{dw}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.2)$$

時間依存のある磁場による荷電粒子の加速としては宇宙線の Fermi-Chandrasekar の加速が有名である。電荷に作用を及ぼすのは電場であるという考え方をすれば、(7.1) は、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は等価電場とも見られる。

電流と磁場との相互作用 電荷の集合が一様に運動している時、微小体積を dv 、電流密度を i とすると、電流要素 idv に働く力 dF は

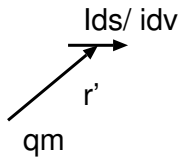
$$dF = idv \times B \quad (7.3)$$

と書くのは (7.1) の簡単な拡張であろう。又、細い電線に I という電流が流れているならば、 ds という線素に働く力 dF は

$$dF = I ds \times B \quad (7.4)$$

と書ける事からも明らかだろう。

電流要素の作る磁場



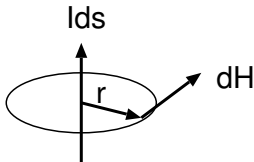
磁荷 q_m が点 r' に作る磁場 $H(r')$ は次式とする。

$$H(r') = \frac{q_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{r'}{r'^3}$$

電流要素 $I ds$ は、この $H(r')$ から F の力を受けるとすると

$$F = I ds \times \left(\frac{q_m}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{r'}{r'^3} \right) \times \mu_0$$

ここで作用反作用の法則を仮定すると、 $I ds$ は $r(= -r')$ の点にある q_m に $-F$ の力を及ぼす。

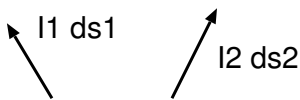


即ち $I ds$ は点 r に $dH(r)$ の磁場を作るとすると

$$dH = \frac{I ds}{4\pi} \times \frac{r}{r^3} \quad (7.5)$$

この式はある種の推量から導かれたものだから本当かどうかは実験で確認しなければならない。一定電流の閉回路に沿って ds を積分した式が正しい事はすぐに check された。これを Biot と Savart の法則と呼ぶ。

問 2つの電流要素 $I_1 ds_1$ 、 $I_2 ds_2$ を考える。

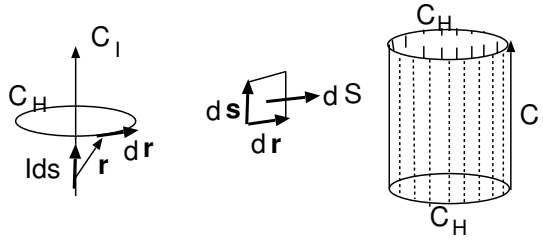


この場合、(7.4), (7.5) を用いて、お互いに働く力を計算し、作用反作用の法則が 成立しない事 を確かめよ。

但し、閉電流路や両端が無限に延びた電流路にわたって積分をすると、作用・反作用の法則は恢復する事も check せよ。この問から、運動する2つの電荷間の磁氣的相互作用として、(7.5) をそのまま使用する事は危険である事が分かる。

(7.5) は一見微分方程式のように見えるが、原点に置かれた電流要素と場の点が r だけへだっているのでは場の方程式を作れない。少し許り細工をする必要がある。時間に依存しないベクトルの回転の定義や静磁場が満足する方程式 $\nabla \times H = 0$ を思い出し、図を見ると分かるように、この場の方程式は $\nabla \times H$ と電流 (回転ベクトルの向き及び作られる磁場の源) を関係付けるべきである。

無限に大きな一様電流密度が作る電流場の中に、細い流管 C_I を仮想的に取り出し、この流管に流れる電流が作る磁場 H を、流管を取り巻く軌道 C_H に対して線積分する。換言すれば、 C_H に沿って単位磁荷を動かす、その仕事 W を計算する。



上左図で、電流要素を $I ds$ 、電流要素から C_H 迄の位置ベクトルを \mathbf{r} 、 C_H に沿っての微小変位を $d\mathbf{r}$ とする。仕事量 W は次式で計算出来る。

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_H} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi} \int_{C_H} d\mathbf{r} \cdot \int_{C_I} \left(d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{I}{4\pi} \int_{C_H C_I} (d\mathbf{r} \times d\mathbf{s}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{C_H C_I} d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \int d\Omega \end{aligned} \quad (7.6)$$

ここで、 $d\mathbf{r} \times d\mathbf{s} = d\mathbf{S}$ は、中央の図から分かるように、両微小要素の作る面積要素である。第2行目の式は、位置 \mathbf{r} の始点からこの面積要素を見た立体角になることを示している。最後の積分は、 $d\mathbf{s}$ を C_I に沿って動かし、 $d\mathbf{r}$ を C_H に沿って $d\mathbf{s}$ とは独立に動かした時の面積分であるが、これは C_I 上の全ての点を C_H に沿って動かした時に描かれる面積について積分するのと等価である。上右図での円筒側面が作る立体角は、円筒の外から見ると、手前側と向こう側の面では、立体角の絶対値は同じだが符号が異なるから0である。一方、円筒の中から見ると 4π である。場の方程式を作る立場からは、電流が流れている点へ入って行かねばならないから、内部から側面の立体角を見る。

$$\int_{C_H} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi} \times 4\pi = I = \int_{C_H} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.7)$$

右辺は C_H で閉まれた面についての面積分。 $(d\mathbf{A}$ は C_H で囲まれた微小部分の面積要素。) 左辺は Stokes の定理より $\nabla \times \mathbf{H}$ の面積分になるから、任意の面に対して面積分が等しいから、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (7.8)$$

これにより、電流密度が原因で磁場がつけられるというイメージが出来た。しかしこの式は、Biot-Savart の式から出発した。Biot-Savart の式は上で与えた問で示した欠陥があり、(7.8) にもこの欠陥はうけつがれているはずである。例えば (7.8) の発散を計算すると、 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ であるから $\nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ となり、電荷保存の法則と矛盾する。従って、何らかの補正が必要である。

Maxwell の補正　　今までの方程式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, $\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ と矛盾しないように (7.8) を修正するために、Maxwell は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.9)$$

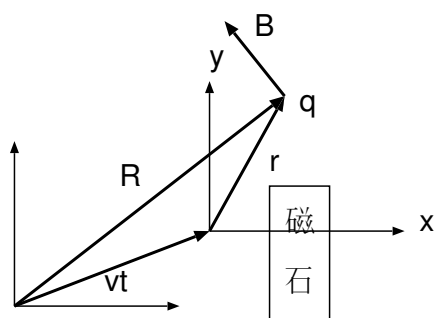
と書きかえた。

$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$ という対応をつけながら考えると、(7.9) で磁流はないとし、 $\mathbf{i}_m \rightarrow 0$ とす

ると $\partial/\partial t$ の符号を除いて電磁誘導の法則になる事に気付くだろう。静磁気の所で述べたように、電荷と磁荷の時間反転に対する性質の相違が顔を出しているから、上の符号の変化が生じたと思っておけばよい。この符号の相違は、次の理論の発展で、非常に大切な役割をする。 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ の項は変位電流密度と呼ばれている。誘電体が分極し、且つ時間変化があると、 $\partial\mathbf{P}/\partial t$ 、 $\partial/\partial t(\nabla\cdot\mathbf{P})$ といった分極電流が誘電体の内部を流れているとしたが、真空も相対誘電率 $\epsilon_r = 1$ の "物質" を考えよ、と Maxwell は言った事になる。この "真空物質" が Coulomb 力を伝えている。

この補正により、電磁場もエネルギーや運動量を有する存在となる。即ち上の問で、エネルギーや運動量を担うのは2つの電流要素だけでないのに、あたかも2つの電流要素だけで全系が閉じていると仮定した事が矛盾の源であった訳である。場がエネルギーや運動量を持つとすると、運動する点電荷によって作られた場は慣性を持つ事になり、場は源の点電荷が急に運動状態を変えると、源の運動に追従できなくなり、勝手に自由空間を電磁波(光子)としてたどる事になる。これが輻射である。

余談



固定点 r に電荷 q があり、 q の近くに永久磁石が置いてある。点 r での磁場を $\mathbf{B}(r, t)$ と書くと、これは一定である。 $t=0$ に原点が一致し、 $-v$ で運動している座標系 (v 系) を考える。 v 系から見ると磁石も電荷も一定速度 v で動いている。 v 系では Lorentz 力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_v(\mathbf{R}, t)$ が電荷に働いているが、静止系で見て電荷に力は働いていないから、 v 系でも電荷に力が働いては困る。

回転座標系では遠心力が見掛けの力として働いたように、 v 系では見掛けの電場 $\mathbf{E}_v(\mathbf{R}, t) = -v \times \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)$ が発生し上記 Lorentz 力を打ち消すと考えられる。実質的に \mathbf{B}_v が一定である事を式で書くと

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) = \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)$$

左辺を Taylor 展開すると

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) + \Delta t \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) + \frac{\partial \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{\partial t} \right] = \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)$$

これが任意の Δt に対して成立するから

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla_R) \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) + \frac{\partial \mathbf{B}_v(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \quad (7.10)$$

見掛けの電場の回転をとり、 v が一定である事を考慮すると

$$\nabla_R \times (-v \times \mathbf{B}_v(\mathbf{R}, t)) = -v(\nabla_R \cdot \mathbf{B}_v) + (\mathbf{v} \cdot \nabla_R) \mathbf{B}_v$$

上の関係式と、 $\nabla_R \cdot \mathbf{B}_v = 0$ を用いると

$$\nabla \times \mathbf{E}_v(\mathbf{R}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \quad (7.11)$$

これは v 系で見た Faraday の電磁誘導の法則の微分形である。
 ここでは時刻 t は静止系、 v 系に共通であるからたとえ形が同一でも証明としては不十分だと思ふ。逆に電場を動いてみると磁場が見えるのであろうか？ と考えてみると面白い。

余談 2

○ 先ず電荷保存を認めよう。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.12)$$

○ Maxwell の方程式から次の二つを認めよう。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.14)$$

電気変位の発散の時間微分を計算してみよう。(7.14) と $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$ を利用すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{i}) = -\nabla \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0 \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = C_1$$

○ 磁束密度の発散の時間微分を計算すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{B} = C_2$$

○ Coulomb の法則は (7.12)、(7.13)、(7.14) を認めた時に導かれる二つの保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (7.15)$$

の積分定数 C_1, C_2 がどちらも 0 である事を述べている。ある意味で C_1, C_2 は天地創造の瞬間に決まった定数であり、これが (7.15) の保存則に従い現在も続いている事になる。 C_1, C_2 両者が同時に 0 と言う何か意味あり気な数になるのはもっと深い基礎法則のなせる業のような気がする。

Maxwell の法則に rank をつけるならば、(7.12) と (7.14) は天下りに認める。(7.13) は \mathbf{E} と \mathbf{B} の関係を決める保存則、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は $t = 0$ での初期条件を与える式となる。

第8章 場のエネルギー運動量密度

電場のエネルギー 有限な領域 V に電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で分布した電荷の作る場のクーロンエネルギー W_E を計算する。点 \mathbf{r} にある電荷 $\rho(\mathbf{r})dv$ が ”見る” potential energy dW_E は

$$dW_E(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (8.1)$$

右辺の積分は全電荷領域から点 \mathbf{r} への potential の寄与である。ここで \mathbf{r} を領域 V に対して積分すれば良いが、点 $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ の寄与を計算しているの、即ち同一の寄与を2回ずつ取り入れて計算しているの、2で割っておく必要がある。

$$W_E = \frac{1}{2} \int dW_E(\mathbf{r})dv = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dv \rho(\mathbf{r}) \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.2)$$

$\rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{D}$ 、及び任意の素直な関数に対し $\varphi(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{D}$ であるから、

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dv \{ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \} \left\{ \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dv \nabla \cdot \left\{ \mathbf{D}(\mathbf{r}) \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dv \mathbf{D} \cdot \nabla \left\{ \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

第1項は面積分に直すと、大きな表面積に対し $|\mathbf{D}| \rightarrow \frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{1}{r}$ である。一方、面積分は r^2 でしか増えないので、 $r \rightarrow \infty$ とすると0になる。第2項の微分を実行すると、 $-\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ となり、電荷密度 $\rho(\mathbf{r}')$ が点 \mathbf{r} に作る電場の符号を変えたものだから \mathbf{r}' で積分すると電場を与える。

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dv' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (8.4)$$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2} \int dv (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (8.5)$$

この式はエネルギー密度 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})/2$ で空間にエネルギーが充満していて、それらを加え合わせたものが系のエネルギーであると解釈できる。近接作用の立場に立つと、場を作った原因には依らないから、このエネルギー密度という概念は静的なクーロン場のみならずもっと一般に成立すると考えておく。また、仮想的に磁荷を考えて静磁場のエネルギー W_H を計算すると

$$W_H = \frac{1}{2} \int dv (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (8.6)$$

となる事も明らかだろう。

静電容量 電荷 q_i 、電位 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ の導体が分布した空間を考える。場の方程式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ は湧き出しの強さと \mathbf{E} が比例する事を示すから、電位の原点を適当にとると

$$q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \quad (8.7)$$

と書ける。展開係数 C_{ij} を容量係数とよぶ。 C_{ij} は幾何学的な形状や配置に依存する。勿論、誘電率 ϵ の分布にも依る。容量係数の符号は、次の様にしてきまる。第 i 番目の物体のみを残し他をグラウンドに落すと、 $(\phi_j = 0; i \neq j)$, $q_i = C_{ii} \phi_i$ 。ここで、 $q_i > 0$ ならば ϕ_i も正であるから $C_{ii} > 0$ である。 i, j 以外の物体を ground に落とし、 q_i を δq_i だけ増すと、 ϕ_i は $\delta \phi_i$ 、 ϕ_j は $\delta \phi_j$ だけ増す。物体 j の電荷は固定したままだから、 $\delta q_j = C_{ji} \delta \phi_i + C_{jj} \delta \phi_j = 0$ 。ここに $C_{jj} > 0$, $\delta \phi_i > 0$, $\delta \phi_j > 0$ を代入すると $C_{ji} < 0$ が出てくる。(8.5) を積分しこの状況下のエネルギー W を計算してみる。

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv = -\frac{1}{2} \int (\nabla \phi) \cdot \mathbf{D} dv = \frac{1}{2} \int \{\phi \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot (\phi \mathbf{D})\} dv$$

右辺第一項で、 ϕ は各導体で一定値 ϕ_i をとり、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を積分すると q_i になる。第二項は面積分になり、体積 (積分域) を十分大きく取ると、 $\phi \simeq \frac{1}{R}$ 、 $|\mathbf{D}| \simeq \frac{1}{R^2}$ だから 0 になる。

$$\therefore W_E = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_i C_{ij} \phi_j \quad (8.8)$$

W の値は最右辺 i, j の和の順序には当然依存してはいけないから、 $C_{ij} = C_{ji}$ である。

問 球の静電容量を求めよ。特に地球の静電容量はいくらか？

インダクタンス 定電流系が磁場を作る場合の磁場のエネルギーを計算してみよう。

$$W_H = \frac{1}{2} \int dv \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

ここへ、(7.5) Biot-Savart の式を代入すると

$$W_H = \frac{1}{2} \int dv \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{4\pi} \int dv' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

ここで

$$\mathbf{B} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \mathbf{i} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{B} \right\}$$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\}$$

$\nabla_{\mathbf{r}}$ は \mathbf{r} についての微分演算子であるから

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left\{ \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

定常状態では $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ であるから、

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r})$$

等を順次利用すると

$$W_H = \frac{\mu_0}{8\pi} \int dv \int dv' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{8\pi} \int dv \int dv' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \times \left\{ \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\}$$

第二項は \mathbf{r} 微分については $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ は定ベクトルだから、微分の中に入れてもよいから

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \times \left\{ \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right\}$$

その結果 Gauss の定理により体積分 $\int dv$ は面積分 $\int dS$ におきかえられる。充分大きく取ると、第二項は消えるから

$$W_H = \frac{\mu_0}{8\pi} \int dv \int dv' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.9)$$

電流がすべて線要素で表せる時は、線積分で置きかえると

$$W_H = \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij} I_i I_j \quad (8.10)$$

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl_i \int dl_j \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (8.11)$$

磁場エネルギーは各電路に流れる電流の双一次形式であたえられる。

(8.8)、(8.10) を比較すると電・磁場で電流 $I_i \leftrightarrow$ 電位 ϕ_i 、容量係数 C_{ij} と相互インダクタンス L_{ij} とが対応している。 L_{ii} を自己インダクタンスと呼ぶ。対象がはっきり分かっている時には C_{ii} や L_{ii} は C, L と略記され、コンデンサーやコイルの特性を表す。電気工業上重要なパラメータである。二本の電路の相互インダクタンスは (8.10) による線積分だから、電流の向きにより符号を変える。

場のエネルギー・運動量密度 次式で定義された Poynting Vector \mathbf{S} の発散の計算を試みる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (8.12)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

Maxwell 方程式を代入し、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ であるとする、次の保存則を得る。

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (8.13)$$

第二項は前節で知った電磁場のエネルギー密度である。第三項は電場が電流を流す事によって消耗したエネルギー（いわゆる Joule 熱）である。もしも Joule 熱の項 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = 0$ ならば (8.13) は連続の式であるから、第一項は体積要素から流れ出すエネルギー流の密度を表している。

例えば $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 1 [W/m^3]$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{2} [W/m^3]$ ならば、(8.13) より $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = -\frac{3}{2} [W/m^3]$ だから、電場または磁場が弱くなり、1 秒間 $1 m^3$ あたり $1 / 2 J$ の発熱があり $1 J$ は外に逃げている事になる。

特に、乾電池と棒磁石とを直交させて置いておくと、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq 0$ であるからエネルギーが永久的に流れているように思われる。このような静的な場合には (8.13) の導き方からわかるように、 $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} = 0$ であるから $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0$ となりエネルギー流には湧き口や吸い込み口が全然ないから、エネルギー流に全然変化がないので流れていないのと何の変わりもない。但しこの装置の近くには本当にエネルギー密度が蓄えられているので、このような配置を作る時に、力学的エネルギー以上のエネルギーが必要であり、又この装置から乾電池と棒磁石を遠ざける時に、蓄えられていたエネルギーは開放される。

この様に場を実在と考え、弾性体と考えると場の歪みに伴う圧力（一般には応力）や運動量なども考えたくなる。

応力テンソル 物質内部の点 \mathbf{r} を中心とする面要素 ds を考える。この面要素の負の側から正の側に働く力 df は、面要素が小さければその面積に比例するであろう。面要素をいろいろの向きに取ると、比例係数は変化する。特に面要素が x 軸の方向を向いている時、これを ds_x と名付ける。 y, z に付いても同様。この時

$$\begin{aligned} df_x &= T_{xx} ds_x + T_{xy} ds_y + T_{xz} ds_z \\ df_y &= T_{yx} ds_x + T_{yy} ds_y + T_{yz} ds_z \\ df_z &= T_{zx} ds_x + T_{zy} ds_y + T_{zz} ds_z \end{aligned}$$

又は

$$df = T ds \tag{8.14}$$

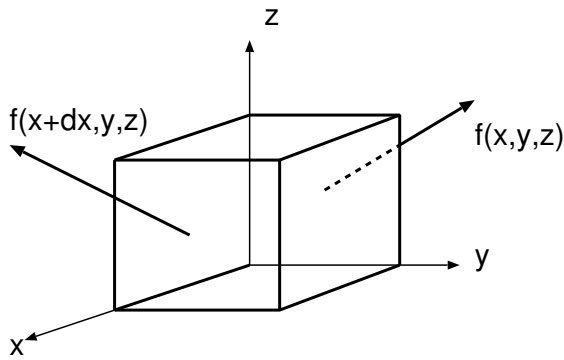
と書き、 T を応力テンソルと呼ぶ。9 ヶの成分 T_{xx}, \dots, T_{zz} を有する。応力テンソルは以下のように、対角要素、非対角要素に分けられ、非対角要素は対称、反対称テンソルに分けられる。

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & & O \\ & T_{yy} & \\ O & & T_{zz} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & T_{xy} + T_{yx} & T_{xz} + T_{zx} \\ T_{xy} + T_{yx} & 0 & T_{yz} + T_{zy} \\ T_{xz} + T_{zx} & T_{yz} + T_{zy} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & T_{xy} - T_{yx} & T_{xz} - T_{zx} \\ T_{xy} - T_{yx} & 0 & T_{yz} - T_{zy} \\ T_{xz} - T_{zx} & T_{yz} - T_{zy} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

* 上段左の行列が対角テンソル, 上段の二つ目の行列が対称テンソル, 下段の行列が反対称テ

ンソルである。



完全流体では対角成分だけが0でなく、内圧がかかって膨らんだテニスボールを想像すると、力の方向と面要素の方向が平行だからこの時、対角成分は正になる。

物質内に体積要素を考える。この体積要素を駆動する力は上に考えた df そのものではなく、対向する六面に働く力から計算される。

x 成分については、外向き法線の方向を正とするので

$$\begin{aligned} & \{df_x(x+dx, y, z) - df_x(x, y, z)\} + \{df_x(x, y+dy, z) - df_x(x, y, z)\} \\ & + \{df_x(x, y, z+dz) - df_x(x, y, z)\} = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dv \end{aligned} \quad (8.17)$$

ここで、 $ds_x = dydz$ を用いた。

これが微小体積 dv に働く力の x 成分である。 y, z 成分も同様。(8.17) は T_x をベクトルだと考えると、ベクトルの発散の形をしている。

Maxwell の応力と場の運動量密度　　今までに、場のエネルギー密度の話があった。エネルギーを空間に閉じ込めると、内部圧力が上昇し、外部へ逃げ出そうとするだろう。又エネルギーが $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で流れているならば、場が運動量を持つべきだろう。これまでに登場した力学的運動量と場の運動量を統一的に理解したい。場の体積要素 dv を考える。ここには電荷密度 ρ 、電流密度 \mathbf{i} 、電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{H} とこれに付随し電気変位 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} があり、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ と与えられているとする。この体積要素に働く Lorentz 力を $\mathbf{f}_L dv$ とすると

$$\mathbf{f}_L = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (8.18)$$

この式を応力テンソルの発散の形で書いてみたい。 x 成分のみを暫く考える。

$$\begin{aligned} \text{前半 } (\rho \mathbf{E})_x &= (\nabla \cdot \mathbf{D}) E_x = E_x \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \\ &= \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} E_x^2 \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) - E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} \right] \end{aligned}$$

____ 部は発散になったが余分な項が出て来た。少し細工をする。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})\}_x &= E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} (E_y^2 + E_z^2) \right\} - \left\{ E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (8.19)$$

これを上式に代入し $(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)/2 = E_x^2 - \mathbf{E}^2/2$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ を利用すると

$$(\rho \mathbf{E})_x = \frac{\partial}{\partial x}(E_x D_x - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x D_z) - \left(\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_x \quad (8.20)$$

(8.18) の後半は、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$$

ここで $\{(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B}\}_x$ は (8.19) と同じ形をしているから

$$\{(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B}\}_x = -\{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})\}_x = -\mu \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(H_y^2 + H_z^2) - H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} - H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right]$$

次の式

$$\begin{aligned} H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}(H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_x H_z) - H_x \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_x^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_x H_z) - H_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

但し

$$\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を代入すると

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial}{\partial x}(H_x B_x - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2) + \frac{\partial}{\partial y}(H_y B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_x B_z) - \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right)_x \quad (8.21)$$

ここまですを纏めると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_L)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(E_x D_x - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x D_z) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}(H_x B_x - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2) + \frac{\partial}{\partial y}(H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_x B_z) \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x \end{aligned} \quad (8.22)$$

ここで $\varepsilon\mu = 1/c^2$ とおいた。後から分かるように c は光速である。他の成分も同様である。単位体積当たりの電磁力の式 (8.22) に $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2$ の時間変化が登場した。力学の一般原理として、運動量の時間微分の事を力と呼んだのだから、

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (8.23)$$

は運動量密度と考えられる。
これまでのことをまとめると

(i) 力には

$$\left. \begin{array}{l} \text{力学的な Lorentz 力 } \mathbf{f}_L = \rho \mathbf{E} + \mathbf{i} \times \mathbf{B} \\ \text{場の変化による力 } \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{H}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (8.24)$$

がある。

(ii) 応力テンソル T を電氣的部分 T_E 、磁氣的部分 T_M の和とする。

$$T = T_E + T_M$$

$$\left. \begin{array}{l} T_E = \left(\begin{array}{ccc} E_x D_x & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z \end{array} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ T_M = \left(\begin{array}{ccc} H_x B_x & H_x B_y & H_x B_z \\ H_y B_x & H_y B_y & H_y B_z \\ H_z B_x & H_z B_y & H_z B_z \end{array} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (8.25)$$

(iii) 力の密度は Maxwell の応力 T の発散として導かれる。

$$\left(\mathbf{f}_L + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)_i = \frac{\partial T_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial T_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{iz}}{\partial z} \quad (8.26)$$

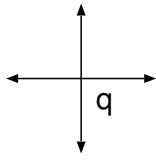
i は x, y, z のどれかであり、 $T_{ix} = (T_E)_{ix} + (T_M)_{ix}$ など

これでエネルギーの流れがあると $\frac{1}{c^2}$ 倍の運動量の流れがこれに伴う事が分かった。但し静電的な電磁場ではこれは場の力にはならない。

簡単な例として、静電場を考えてみる。電場の方向に x 軸を取ると応力テンソルは

$$T_E = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\varepsilon}{2} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{2} E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} E^2 \end{array} \right) \quad (8.27)$$

$(T_E)_{xx} > 0$ だから、風船を膨らませる方向に力が向かっている。ところが $(T_E)_{yy} = (T_E)_{zz} < 0$ だから電場に垂直方向には逆向きの力がかかっている。(8.26) でテンソルの発散を左辺へ移項して考えると、全体では力は0なのだから、逆に電気力線は電場方向に縮もうとし、これに垂直方向には膨らもうとして全体でバランスを保っていると言える。静磁場についても同様。電磁場が運動量を持つ事は太陽からの輻射圧で彗星の尾が必ず太陽の反対側に流れている事で実証されている。(太陽風の影響もあるが...) 又、光子(光波)ロケットとして漫画の世界でははやくから利用されている。但し S.F. の世界では大体エネルギーの保存則が無視されている。



点電荷がつくる電気力線を2次元面内で4本描けという問いに大体の人は図の様に90度の角度をおいて、長さの等しいベクトルを4本描く。この時、何故90度の角度を選んで描くのか？と問うと多くの人が答えに詰まってしまう。ここで紹介したMaxwellの応力を知っていれば、電気力線同志はお互いに斥力を及ぼすからと説明がつく。

場の観点からすると、1本の電気力線は自分の近傍の場の様子だけを知っている。何故、近傍しか知らないのに、電気力線全体としては調和が保たれた形になるのだろうか？という問いに対し、近所同志の電気力線が相談して、Maxwellの方程式を解いて、旨く調節しているのだと考えておこう。別の言葉で言えば、電気力線同志がお互いに斥力を及ぼし合い、全体が吊合ったところが安定点である。

注意・・・エネルギー保存の式 $E \cdot D/2$ は元来、静電場についてつくったものだ。ところが、いつの間にか時間に依存する場合にも用いられている。

第9章 輻射

ポテンシャル ϕ 、 \mathbf{A} の満足すべき方程式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と vector potential を用いて \mathbf{B} は表わせる。 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ に代入すると $\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ 。これから scalar potential ϕ を導入する。

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (9.1)$$

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ だけでは情報が不足している。 ϵ 、 μ を定数として、次の構成方程式 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定する。但し、 $\epsilon \mu = 1/c^2$ とおく。

残りの二つの Maxwell の方程式を、potential (ϕ , \mathbf{A}) を用いて表現する。天下りであるが、以下の量を定義する。

$$\Psi \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (9.2)$$

微分演算子 \square を d'Alembertian と呼ぶ。

クーロンの法則は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\square \phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

即ち、

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (9.3)$$

ここで、次の作業の準備として、ベクトル \mathbf{A} の回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ の回転 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ に関する式を与えておこう。 x 成分をあらわに書き下してみる。

$$\begin{aligned} \{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}\}_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{A} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} A_x \\ &= \{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\}_x \end{aligned} \quad (9.4)$$

従って

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (9.5)$$

式 (9.5) と、(9.2) より、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \left\{ \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

一方、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ にこの式を代入すると、

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{i} + \nabla \Psi \quad (9.6)$$

ここで Lorentz の条件

$$\Psi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (9.7)$$

を仮定すると、(9.3) と (9.6) は

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (9.8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{i} \quad (9.9)$$

という対称的な形になる。Lorentz 条件を満足するポテンシャルを Lorentz gauge と呼ぶ。

potential の選択には自由度がある \mathbf{E} 、 \mathbf{B} を与える potential をひとつ見つけて来て、これを (ϕ_1, \mathbf{A}_1) と書いたとする。この時、

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= \phi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1 - \nabla \chi \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

も同じ \mathbf{E} 、 \mathbf{B} を与える。 $\nabla \times \nabla \chi = 0$ であるから、

$$\nabla \times \mathbf{A}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_1 - \nabla \times (\nabla \chi) = \mathbf{B}, \quad (9.11)$$

及び、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \nabla \phi_2 = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \chi}{\partial t} + \nabla \phi_1 + \frac{\partial \nabla \chi}{\partial t} = -\mathbf{E} \quad (9.12)$$

(ϕ_1, \mathbf{A}_1) を Lorentz gauge だとすると、

$$\Psi_2 = \nabla \cdot \mathbf{A}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \Psi_1 - \square \chi = -\square \chi$$

であるから、変換 (9.10) において $\square \chi = 0$ ならば、変換後の potential も Lorentz gauge である。

$\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla^2 \chi = 0$ 、即ち、 $\nabla^2 \chi = \nabla \cdot \mathbf{A}_1$ となるように χ を選ぶと、(9.3) は次の様になる。

$$\nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (9.13)$$

この式を見ると potential ϕ は、Coulomb potential と同じように、電荷だけで作られている様に見える。電流も電場だけで出来ている。この様に選んだ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) gauge を Coulomb gauge と呼ぶ。

(9.2) で定義した Ψ に \square を演算してみよう。

$$\square\Psi = \nabla \cdot \square\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \square\phi = -\mu(\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) + \square\Psi, \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9.14)$$

電荷の保存則が登場してくる。この意味で、gauge 不変という性質は、電荷の保存と密接に関係している。

potential に関する余談　これまでのところでは、電磁気学における物理学的実在として、電場と磁場を主役と考えて来た節がある。例えば、Maxwell の方程式は、場の湧き口としての電荷密度と電流密度を認め、これらの湧き口により電磁場がどのような振舞いをするか、電磁場の一方の存在が他方の振舞いに如何に影響を与えるかという記述をしていると読めた。

この節では、potential (ϕ, \mathbf{A}) を導入し、電磁場は potential から $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ により計算可能な付加的物理量となった。これにより、Lorentz gauge では、Maxwell の4個の方程式が次式で与えられる2個の方程式になった。

$$\square\phi = -\rho/\epsilon, \quad \square\mathbf{A} = -\mu\mathbf{i}$$

potential、特に vector potential の導入に否定的な気分を持つ学生もいるだろうから、少し言葉を加えておこう。

先ず、力学の場合を思い出そう。Newton の運動方程式を習い、ここでは力と加速度が主役を演じたとしておこう。ところが、例えば2重振り子の問題では、運動方程式をたてるだけでも結構骨がおれた。この骨折りの負担を軽減する手法として、Lagrange により解析力学が作られた。解析力学では、力にとって代わり potential が主役を演じた。即ち、ある独立変数の関数として potential が与えられると、運動方程式を書き下す事は自明であり、循環座標を認識し保存則を簡単に書き下す事も出来た。

電磁気学に目を戻そう。ここで述べた様に、主役の交替により従属変数が \mathbf{E}, \mathbf{B} の6個から ϕ, \mathbf{A} の4個になったのは、思考の経済になっているかも知れない。しかし potential が物理学的実在かどうかを問題とする必要がある。先ず、保存則との関連では静電気の問題に対しエネルギー保存則との関連で、potential が意味があると思えるだろう。では、ベクトルポテンシャルは？と問う。後で登場するが、軸対称磁場と荷電粒子の相互作用の場合に、角運動量の保存則との関係で vector potential が重要な役割を果たす。更に進んだ例として、アハラノフ・ボーム効果を引用しておこう。potential は、粒子の波動性を記述する位相に密接に関係している。磁場 $\mathbf{H} = 0$ と考えられる空間を走った異なる電子軌道間の位相差が実際に観測されている。この位相差はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の直接の効果として説明される。

荷電粒子と電磁場の相互作用を Lagrangian や Hamiltonian を用いて表現する場合がある。力学の場合と同様に、ポテンシャルが主役を演じると想像するのは自然だろう。この場合 Hamiltonian には、運動量とベクトルポテンシャルとが対等な形で登場する。(13.102) 迄のお楽しみとしておこう。

実際の物理的な問題を解くのは、力学的な力を考える方が便利だと主張する人もいるだろう。しかし、問題が解ける又は解けたとはどういう場合を言うのか考えてみる。一つの考え方は、与えられた問題に対し、必要十分な数の積分(運動の恒量)が確立する事であるという主張があ

る。即ち、個々の積分に、個別の問題の初期値や境界条件に対応する具体的な数値を代入すれば良いというところまで、問題を煮詰めておけば問題は解けたと考える。この場合には、従属変数の数を前もって減らしておく事は、思考の経済以上の意味を有する。

自由場の解 何も無い空間、従って $\mathbf{i} = \rho = 0$ では potential ϕ 、 A は次の形の方程式を満足する。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{ \phi(\mathbf{r}, t) \text{ 又は } A(\mathbf{r}, t) \} = 0 \quad (9.15)$$

今後、暫くは ϕ を取り上げる。解を調べるために、 ϕ は x, y に依存しないと仮定してみよう (∇^2 は 3次元空間の回転に対し scalar として変換する。即ち、方向の情報は本質的ではないと考える。) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ だから、次の様に微分演算子を“因数分解”してみよう。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(z, t) = 0 \quad (9.16)$$

積が 0 だから、次の一方の式が成立すれば良い。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

この因数分解により 2 階偏微分方程式が 1 階偏微分方程式になった。 z で微分したものと、 t で微分し更に c で割ったもの ('ct' で微分したもの) は、符号を除いて等しいと (9.17) は教えている。これから、(9.16) の一般解は、

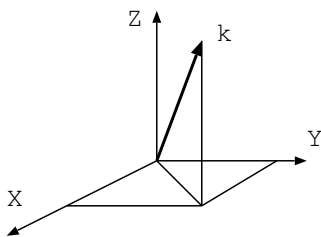
$$\phi(z, t) = f(z + ct) + g(z - ct) \quad (9.18)$$

である事が分かる。 f は (9.17) の下の式の解、 g は上の式の解であることに注意。

f の方を例にとると、 f の独立変数を $p = z + ct$ と書くと、 $p = \text{一定}$ ならば当然 $f(p) = \text{一定}$ である。 $p = \text{一定}$ という式を t で微分すると、

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -c. \quad (9.19)$$

これから $f = \text{一定}$ という点は (9.17) で与えられる様に光速 c で z の減る方向に走っていることが分かる。(9.15) は c を平方の形で含むから、 c の符号は何でもよいといっている。 g は c を $(-c)$ で置き換えればよいから g は z の正方向に c で伝わる波を表す。こういう訳で (9.17) は伝播の向きを決めた波動方程式、(9.15) は向きを問わない波動方程式と了解できる。



(9.16) の解、(9.18) を知って (9.15) の解を知るために、 z 軸を単位ベクトル $\hat{\mathbf{k}}$ の方向に向ける座標回転を考えよう。 $\hat{\mathbf{k}}$ の方向余弦を \hat{k}_x 、 \hat{k}_y 、 \hat{k}_z とすると、当然

$$\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 = 1 \quad (9.20)$$

旧座標の z をベクトルで書くと $z\hat{e}_z$ は新座標系では、

$$z\hat{e}_z = X\hat{e}_X + Y\hat{e}_Y + Z\hat{e}_Z = (\mathbf{r})_{\text{新}} \quad (9.21)$$

と書ける。ここで \hat{e}_X 、 \hat{e}_Y 、 \hat{e}_Z はそれぞれ X 、 Y 、 Z 軸方向の単位ベクトルである。 $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_X = \hat{k}_x$ etc. であるから、 $z = (\mathbf{r})_{\text{新}} \cdot \hat{e}_z$ を代入し、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) + g(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} - ct) \quad (9.22)$$

これが、(9.15) の波動方程式の解だと想像がつく。実際に計算してみると、

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) &= \hat{\mathbf{k}} f'(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) \\ \nabla \cdot \nabla f(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) &= \hat{\mathbf{k}}^2 f''(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) = f''(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) &= c^2 f''(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct) \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

ここで f' は f をその変数 $(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + ct)$ で微分することを示す。

これから (9.22) が (9.15) の解であることが分かる。波の進行方向 $\hat{\mathbf{k}}$ は任意であるから、(9.17) では固定していた波の進行方向を不問にした波動方程式が (9.15) であることが分かる。

(9.15) の解は任意の伝播方向の波を重ね合わせてもよいし、任意の振動数の波を重ね合わせても良い。特定の振動数の波を一つ pick up してみよう。又、 $\hat{\mathbf{k}}$ に正、負の向きを含めると、(9.17) の f の項は無視しても良い。従って、(9.15) の解を次の様に書こう。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

ϕ 、 \mathbf{A} は実数でなければいけないので、実際の観測量が欲しい時には (9.24) の実部 (又は虚部) のみを利用する。(9.24) が (9.16)、(9.17) を満足するためには、波数ベクトル \mathbf{k} と角速度 ω (角周波数とも呼ばれる事がある) との間には

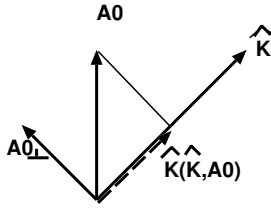
$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (9.25)$$

の関係式があればよい。又、Lorentz 条件から、 ϕ_0 と \mathbf{A}_0 の関係がつけられる。

$$\phi_0 = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = c \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_0 \quad (9.26)$$

(9.15) は線形な微分方程式である定数項を含み得る。しかし積分定数は無視する (静的な場に対応する)。 ϕ と \mathbf{A} から電場 \mathbf{E} を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = i\omega \mathbf{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] - i\mathbf{k} \phi_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ &= i \left\{ \omega \mathbf{A}_0 - c \mathbf{k} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_0) \right\} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ &= i \mathbf{E}_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (9.27)$$



ここで、

$$\mathbf{E}_0 = \omega(\mathbf{A}_0 - \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_0)) \quad (9.28)$$

\mathbf{E}_0 は \mathbf{A}_0 の内、“光”の進行方向の成分を除いたものの ω 倍であると読める。即ち \mathbf{E}_0 は \mathbf{k} に直交している。これは、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ からもっと直接的に導ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = 0 \quad \therefore \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k} \quad (9.29)$$

i が登場したから、電場とポテンシャルは位相が 90 度ずれている。

次に \mathbf{B} を計算しよう。

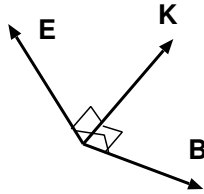
$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = +i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ &= i\mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{aligned} \quad (9.30)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0) \quad (9.31)$$

これから \mathbf{B} も \mathbf{k} に垂直であることがわかる。(9.24) で \mathbf{A}_0 の \mathbf{k} 方向の成分 $A_{0\parallel}$ は \mathbf{E} に何の効果も及ぼさないことが知られたが、(9.31) からは $A_{0\parallel}$ は \mathbf{B} にも効果がない事を示している。(9.26) より $A_{0\parallel}$ とは ϕ_0 のことだから、最初から $\phi = 0$ という gauge 変換で計算すればよかったのだ！

そうすると \mathbf{A}_0 と \mathbf{E}_0 は平行であり、 \mathbf{E} は \mathbf{k} と直交し、 \mathbf{B} は \mathbf{E} にも \mathbf{k} にも直交する。



$$\mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 \quad (9.32)$$

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c}|\mathbf{E}_0| \quad (9.33)$$

\mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{k} はこの順に右手系を作り、Poynting vector $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はたしかに波の進行方向を向いている。“電磁場ベクトル \mathbf{E} 、 \mathbf{B} が光の進行方向に直交している”という事を別の言葉で“光は横波である”と呼んでいる。(9.27)、(9.30) で $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とすると明らかに光の横波性が導ける。

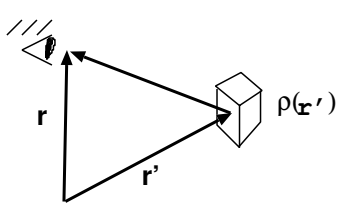
ところで、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は Coulomb の法則である。別の言葉で言えば、Coulomb の法則は、縦方向に力が伝わる。ここでは、自由場は真空中を横波として光の速さで伝わりと述べている。

(9.33) より電場と磁場が電荷に及ぼす力の比は $qE_0 : qvB_0 = 1 : v/c$ である。 $|v/c| \ll 1$ の非相対論的領域では電場だけを考えればよい。又、相対論的効果は (v/c) の 1 次である点にも注意せよ。

(9.33) を利用すると、場のエネルギー密度 $e = \epsilon_0 E^2$ 、運動量密度 $mc = E^2/(\mu_0 c)$ と書けるから、 $e = mc^2$ の関係が導ける。この式は Einstein の特殊相対論よりも古くから知られていた。

解の積分表示、advanced potential と retarded potential

式 (9.8) 即ち $(\nabla^2 - \partial^2/\partial(ct)^2)\phi = -\rho/\varepsilon$ の特解の積分表示を考える。 $c \rightarrow \infty$ とすると Poisson の方程式となり、解は Coulomb potential $\phi_C(\mathbf{r}, t)$ で与えられる。



$$\phi_C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.34)$$

この式は点 \mathbf{r}' 、時刻 t にある電荷 $\rho(\mathbf{r}', t)$ から発生した電気力線が無敵大の早さで点 \mathbf{r} に影響を及ぼしていると解釈される。

c が有限ならば、距離 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を c の速さで伝わるのに要する時間 $\Delta t = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ だけ過去の電荷 $\rho(\mathbf{r}', t - \Delta t)$ が、現在の potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ に影響を持っていると考えるのが自然であろう。この様にして試行解 $\phi_t(\mathbf{r}, t)$ を次の様に書く。

$$\left. \begin{aligned} \phi_t(\mathbf{r}', t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ t' &= t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

(9.35) が (9.8) を満足することは直接計算すれば確認できる。この時、次の関係式が利用できる。 ∇ は \mathbf{r} についての微分だから、積分の中へ入れられる。 t' は \mathbf{r} にも依存する。

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.36)$$

より、

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}', t') - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \quad (9.37)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^2} - 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t') \quad (9.38)$$

即ち、(9.35) は (9.8) の解の積分表示になっている。ところで、(9.8) は c を 2 乗の形で含むから c の符号は \pm のどちらでも良いので、(9.35) で $c \rightarrow -c$ と書いたものも解である。(9.22) を思い出そう。この様にして、(9.8)、(9.9) の方程式の解の積分表示を得る。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}', t'_{\pm})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t'_{\pm})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ t'_{\pm} &= t \pm |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

t'_- の方を採用した解は retarded potential , 一方 t'_+ の方を採用した解は advanced potential と呼ばれる。advanced potential は因果関係が逆転しているとの理由で採用されないことが多い¹。電荷の保存が成立すれば、(9.39) は Lorentz 条件を満足する事は簡単に示される。

Hertz potential (9.8)、(9.9) では場の湧き口を与える量として ρ 、 \mathbf{i} 合わせて4個、又、場の量も ϕ 、 \mathbf{A} 合わせて4つの自由度がある様に見える。しかし、連続の式および Lorentz 条件を満足せねばならぬから実際に独立なのは3つである。Hertz は以下のようにして (9.8)、(9.9) 合わせて4つの式を3つの式に書き換えた。

先ず、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c^2} \right) = 0$$

は同じ形の式であり、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, & \rho &= \nabla \cdot \mathbf{p} \\ \mathbf{A} &= -\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, & \frac{\phi}{c^2} &= \nabla \cdot \mathbf{\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

と書くと、連続の式及び Lorentz 条件は自動的に満足される事に注目する。ここで、分極ベクトル \mathbf{p} は電流の節で述べた誘起電荷、誘起電流に類似している。但しここでは実電荷を記述している所以形式的類似である。

(9.9)、(9.40) を利用すると、 $\mathbf{\Pi}$ 、 \mathbf{p} は次の方程式を満足することが分かる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{\Pi} = -\mu \mathbf{p} \quad (9.41)$$

$\mathbf{\Pi}/c^2$ を Hertz ベクトルと呼ぶ。方程式の形は (9.8)、(9.9) と同じだから、解の積分表示は (9.39) で与えられる。

¹時間の向きを変えたり、電荷の符号を変えたらどうなるだろうか？ 電子が右へ動くことと陽電子が左へ動くことは等価だろうか。時間の向きと電荷の符号を変える操作を混じえて考えてみると面白そうだ。

第10章 電気的雙極子からの輻射

potential の積分表示 (9.39) の内 retarded potential から電磁場 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} を計算する。先ず、遅延時間を定義する。湧き口の4次元座標 (\mathbf{r}', t') を出た情報が、場の点 (\mathbf{r}, t) に影響を及ぼすと考えている。

$$t' \equiv t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (10.1)$$

先ず、 \mathbf{E} を計算する。 t' は場の点にも依存しているから、

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dv' \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dv' \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial\rho}{\partial t'} \nabla_{\mathbf{r}} t' \right\} \quad (10.2)$$

次に $\partial\rho/\partial t'$ は電荷の保存を用い、電流密度を用いて表す。電荷の保存は湧き口 \mathbf{r}' を中心とした体積要素に対し (任意の) 現地時間 t' を固定したときに成立する関係であるから

$$\nabla_{\mathbf{r}'\bullet} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial\rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} = 0 \quad (10.3)$$

ここで $\nabla_{\mathbf{r}'\bullet}$ は t' を固定した \mathbf{r}' による微分演算子である。これから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'} = -\nabla_{\mathbf{r}'\bullet} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') = -\nabla_{\mathbf{r}'\bullet} \cdot \mathbf{i} - \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} t' = -\nabla_{\mathbf{r}'\bullet} \cdot \mathbf{i} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'} \quad (10.4)$$

と書ける。よって上の $\nabla\phi$ の式 (10.2) の右辺第2項に (10.4) を代入すると、

$$\int \frac{\nabla_{\mathbf{r}} t'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ -\nabla_{\mathbf{r}'\bullet} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}', t) + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'} \right\} dv' \quad (10.5)$$

と書ける。さらに Gauss の発散定理を用い、無限遠方では電流密度は0だと仮定すると、(10.5) は

$$\int (\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right\} dv' - \frac{1}{c^2} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'} dv' \quad (10.6)$$

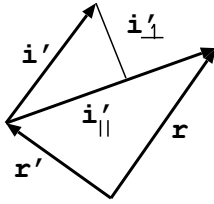
他方

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t} \quad (10.7)$$

$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ だから

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dv' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon c} \int dv' (\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[-\frac{\partial\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\partial\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right] \end{aligned} \quad (10.8)$$

第1項は今迄の Coulomb 力に対する電場、第2項は $r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ に対し $1/r^2$ 、第3項は $1/r$ という依存性を有する。



第3項中括弧の中は、 $\frac{\partial\mathbf{i}_\perp}{\partial t'}$ と書ける事は図から理解できよう。即ち、湧き口と場の点をつなぐ方向 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ にいくら電流が時間的に変化してもそれでは電場をつくらぬといっている。又、 $1/4\pi\epsilon c^2 = \mu/4\pi$ と書いてみると、磁場が原因で作られた様に見える事も注意しておく。

B の計算

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \left[\left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{i} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \right] \end{aligned} \quad (10.9)$$

ここで電流の回転の x 成分は

$$[\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')]_x = \frac{\partial i_z}{\partial y} - \frac{\partial i_y}{\partial z} = \frac{\partial i_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} - \frac{\partial i_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} = \left(\nabla t' \times \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} \right)_x \quad (10.10)$$

であるから

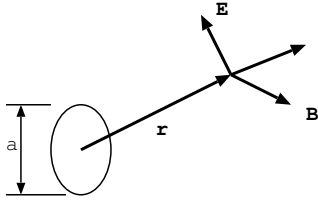
$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right] \quad (10.11)$$

第1項は Biot-Savart の式である。第2項は (10.8) の第3項と同一の原因 (即ち $\partial\mathbf{i}_\perp/\partial t'$) であることに注目しよう。 r 依存性も $r \rightarrow \infty$ ならば $1/r$ になる。どちらも “遅延時間” というものの存在がそもそもの原因であることは式をさかのぼっていけば理解できよう。

ここで湧き口が分布している範囲は半径 a の球内に限定される場合を考えよう。 $r = |\mathbf{r}| \gg a$ ならば、 \mathbf{E} および \mathbf{B} の leading term は $1/r$ に比例する項だからこの項のみを取り出してくる。一番簡単には $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim 1/r$ とする事である。

この時

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \int dv' \frac{\partial \mathbf{i}_\perp}{\partial t'} \\ \mathbf{B}_1 &= \frac{\mu}{4\pi c} \frac{1}{r} \left(\frac{-\mathbf{r}}{r} \right) \times \int dv' \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} = \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \mathbf{E}_1 \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$



この式から、 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{B}_1 、 $\frac{\mathbf{r}}{r}$ がこの順に右手系をつくり、

$$|\mathbf{B}_1| = \frac{|\mathbf{E}_1|}{c} \quad (10.13)$$

という関係は自由空間の輻射場の場合と同一である。

湧き口の電荷分布 $\rho(\mathbf{r}', t')$ (t' は現地時間と思えば良い) が与えられた時、電気的雙極子能率 \mathbf{p} は次式で与えられる。

$$\mathbf{p}(t') = \int dv' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t'). \quad (10.14)$$

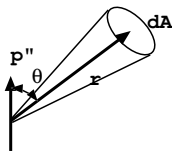
\mathbf{p} の時間微分は、 ρ のみを微分する (\mathbf{r}' は積分変数)。

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t'} = \int dv' \left(\mathbf{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right) = - \int dv' \mathbf{r}' [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')] = - \int \mathbf{r}' \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \cdot d\mathbf{s}' + \int dv' \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \quad (10.15)$$

最後の式で第 1 項の面積分を電流が流れていない領域まで十分に広げると、0 になる。もう一度微分すると、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t'^2} = \int dv' \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} \quad (10.16)$$

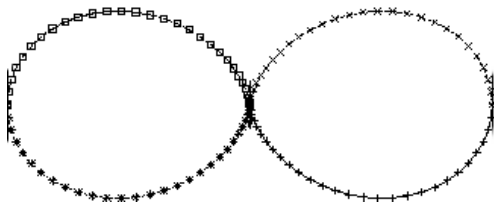
と書くと、(10.12) の $\int dv' (\partial \mathbf{i}_\perp / \partial t')$ は電気的雙極子能率の時間についての 2 階微分と解釈できる。



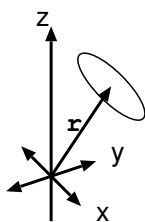
$\mathbf{E}_1 = \frac{\mu}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}_\perp$, $\mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{r}}{cr} \times \mathbf{E}_1$ とすると \mathbf{r} を中心とする面積 $d\mathbf{A}$ を単位時間に通過するエネルギー dW は

$$\begin{aligned} dW &= (\mathbf{E}_1 \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_1) \cdot d\mathbf{A}, & d\mathbf{A} &= (\mathbf{r}/r) r^2 d\Omega \text{ とすると} \\ &= \frac{\mu}{16\pi^2 c} |\ddot{\mathbf{p}}_\perp|^2 d\Omega \\ dW &= \frac{\mu}{16\pi^2 c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta d\Omega \end{aligned} \quad (10.17)$$

z 軸方向に一次元の振動電流が流れていると、 $\theta = 0^\circ$ と 180° 方向には輻射は放出されず、 $\theta = \pi/2$ の x, y 面内で最大強度となる。図では電気雙極子能率は上下に振動している。雙極子が 1 個だけ時間的に振動している時には、 \mathbf{E} は $\ddot{\mathbf{p}}$ と \mathbf{r} の両ベクトルの作る面内では振動している。



このような場合を 直線偏向 していると呼ぶ。振動数が可視光又はこの近くでは、偏光 という文字が使用される (歴史的にはこちらが古い)。2つの強度の等しい双極子が直交して置かれ、90度の位相差では単振動している場合を考えよう。



$E_2 = \mu(\ddot{p}_x + \ddot{p}_y)_\perp / 4\pi r$ だから、電場ベクトル E_2 は r に垂直な面内で回転している。このような場合を 円偏向 (光) と呼ぶ。円偏向には回転の向きにより左右の区別がある。直線偏向した輻射を重ね合わせて円偏向を作ったが、湧き口の運動を重ね合わせてみると、2つの単振動を1つの円運動とも理解できる。双極子を位置、位相、強度をずらして重ね合わせると面白そうだ。

輻射強度、振動数、角分布、偏向面 (振動面) 等は湧き口の情報を持っているから、“光源”からの輻射の性質を測定する事により“光源”の物理的性質が理解できる。 γ 線から超長波の測定まで、現代物理の非常に広い範囲はこれで語られてしまう。

双極子輻射が言えるためには $r \gg a$ を仮定したが、時間的条件からも制限が1つ出てくる。単振動の状態を考えると、 E 等は $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t/c)]$ という依存性を示す。 $\partial/\partial t'$ から $i\omega/c$ という因子が登場し、 $\omega = ck$ だから k が $1/r$ の r 依存性に効果を与えては困る。この結果をまとめて、 k を波長で書くと

$$r \gg a, \quad r \gg \lambda (= \lambda/2\pi) \tag{10.18}$$

この条件が成立している領域を 波動帯 (wave zone) と呼ぶ。波動帯よりも湧き口に近づくと電場は $1/r$ だけでなく $1/r^2$ やもっと複雑な r 依存性を有する。輻射を伴っている場合は電磁的エネルギーだけではエネルギーの保存則を満足しない。湧き口を駆動するエネルギー源の存在がどうしても必要だ。

(10.8)、(10.11) で $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を $1/r$ で近似し、電気的雙極子時間変動 $\ddot{\mathbf{p}}$ が輻射の原因だと言った。このような輻射を電気的雙極子輻射と呼ぶ。雙極子を重ね合わせると、多重極を作ることができる事は静電場の場合と同様である。これは (10.8) の中で t' に含まれている r' 依存性を Taylor 展開であらわに書くことで実現できる。 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ も r' 依存性を有するが、これを Taylor 展開すると (r'/r) のべきになり $1/r^2$ ect. と $1/r$ の高いべきになり、これから輻射は出てこない。輻射はいつも時間遅れの項から出てくる。

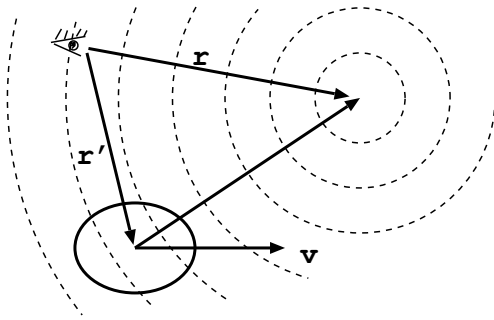
電荷と電流が存在する時の potential ϕ 、 \mathbf{A} の式から輻射を導いた。輻射には ρ は実質的には関係しなく (消去できたから)、 $\partial i/\partial t$ が存在しさえすればよかった。 $\partial i/\partial t$ は雙極子能率が時間的に変化すれば作れる事を知った。ここで電気と磁気を対応させてみると、磁荷密度 ρ_m は常に0であるが、どっちみちこれは輻射の原因にはならない。磁流 i_m は実磁荷が存在しない以上、実磁流は存在しない。しかし変位電流に対応した変位磁流の様なものは存在するだろう。これを実現する方法は $\ddot{\mathbf{p}}$ に対応し、磁気雙極子能率 μ を持ち出して、 $\ddot{\mu}$ を作れば良いと想像つけられる。これは棒磁石を回転させれば簡単に実現できる。棒磁石放送局 (磁气的雙極子輻射) は自然界でどこに発見できるだろうか。

第11章 Lienard-Wiechert の potential

retarded potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ は、(9.39) の \square - 』 符号で与えられる。もう一度書くと

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (11.1)$$

過去の異なる時刻での電荷密度からの寄与を加え合わせた形になっている。



場の点 (\mathbf{r}, t) を固定して考える。Doppler 効果と考えた時と同じ様に湧き口が \mathbf{r} の方へ運動していると、湧き口が静止しているときよりも電荷の効果が大きく評価され、逃げていく時には逆に小さく評価される様な式になっている。時刻 t に場の点 \mathbf{r} に湧き口の効果を伝える波が光速で湧き口を通過する。

図の場合、湧き口の大きさはこの情報波から見ると静止している場合に比較し、 $1/(1-\alpha)$ 倍だけ長くなっている様に見える。ここで、次式で α を定義した。

$$\alpha \equiv \frac{\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.2)$$

従って湧き口が点電荷 q の場合にはこの因子分だけ実効的に多くの電荷を感じてしまう。電流についても同様

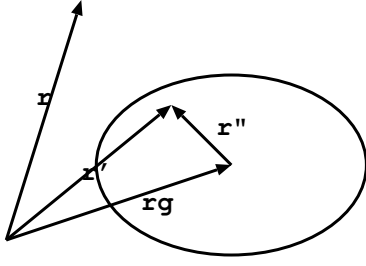
$$\phi_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|(1-\alpha)} \quad (11.3)$$

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|(1-\alpha)} \quad (11.4)$$

この potential を Lienard-Wiechert の potential と呼ぶ。ここで、次式が成り立つ。

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}, \quad t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (11.5)$$

他の導き方：式 (11.1) の積分を同時刻に行いたいと考えてみる。湧き口の代表点を電荷の重心 \mathbf{r}_g にとり、 t_g での時刻に積分を実行する。 $\mathbf{r}'(t)$ を $\mathbf{r}'(t_g)$ で表したい。時刻 t_g に \mathbf{r}' は $\mathbf{r}'(t_g)$ よりも \mathbf{r}'' だけ離れていたとする。 \mathbf{r}' は時刻 t には $\mathbf{r}_g(t_g) + \mathbf{r}''$ から速度 \mathbf{v}_g (これは湧き口に共通とする) で $(t' - t_g)$ の時間動いている。



$$t_g = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)|/c$$

$$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c$$

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}_g(t_g) + \mathbf{r}'' + (t' - t_g)\mathbf{v}_g$$

ここで、 $(t' - t_g)$ を消去し、 $\mathbf{r}'(t')$ と \mathbf{r}'' の関係を導く。

$$c(t' - t_g) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g) - \mathbf{r}'' - \mathbf{v}_g(t' - t_g)|$$

$$= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)|} \cdot (\mathbf{r}'' + \mathbf{v}_g(t' - t_g)) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}'' + \mathbf{v}_g(t' - t_g))$$

ここで、 $|\mathbf{r}|$ に比較して電荷の存在領域は非常に小さいと仮定し、次の単位ベクトルを定義した。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_g(t_g)|} \quad (11.6)$$

従って、

$$t' - t_g = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''}{c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''}{D}, \quad D = c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g \quad (11.7)$$

$$\therefore \mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}_g(t_g) + \mathbf{r}'' + \mathbf{v}_g \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}''}{D} \quad (11.8)$$

積分の独立変数を $\mathbf{r}'(t') \rightarrow \mathbf{r}''$ とすると

$$\int \rho d\mathbf{r}' = \int \rho(\mathbf{r}'') \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}''} \right) d\mathbf{r}'' \quad (11.9)$$

ここで、

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}''} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x''} & \frac{\partial x'}{\partial y''} & \frac{\partial x'}{\partial z''} \\ \frac{\partial y'}{\partial x''} & \frac{\partial y'}{\partial y''} & \frac{\partial y'}{\partial z''} \\ \frac{\partial z'}{\partial x''} & \frac{\partial z'}{\partial y''} & \frac{\partial z'}{\partial z''} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g}{D} \quad (11.10)$$

又は、

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}''} \right) = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g}{c}} \quad (11.11)$$

他方、 $\int \rho d\mathbf{r}'' = q$ etc. より (11.3, 11.4) は導ける。

猶、 $|\mathbf{r}''| \ll |\mathbf{r}|$ ならば、 $\mathbf{v}'(t') = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = v_g + (1 \text{ 次小})$ と書け、 $t' - t_g$ も 1 次小ならば \mathbf{v}_g に対する補正は 2 次小となり無視しても良い。 \mathbf{r}' 、 \mathbf{r}'' 変数に対する $\det \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}''} \right)$ は Jacobian と呼ばれていて、体積要素の比を表す。

これで運動する点電荷がつくる Lorentz gauge での potential が作れた。(9.39) は potential の積分表示であったが、今度は積分は実行されている。 \mathbf{n} は湧き口 $\mathbf{r}_g(t_g)$ から場の点 $\mathbf{r}(t)$ への単位ベクトルである。向きも間違えないように。各ベクトルの時刻も間違えないように書いてある。

複数の荷電粒子からの寄与は重ね合わせの原理に従う。

Lienard-Wiechert の potential から電磁場を計算する

湧き口 (\mathbf{r}', t') にある電荷 q が速度 $\mathbf{v}(t')$ でうごいている時、場の点 (\mathbf{r}, t) につくる potential は

$$\left. \begin{aligned} \phi_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s}, & \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t')}{4\pi s} \\ s &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), & \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{v}(t')/c, & t' &= t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

で与えられ、電磁場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ はこれ等の微分を用いて計算できる。 \mathbf{B} は磁束密度であるが、広義には \mathbf{H} と \mathbf{B} をひっくるめて磁場と呼ぶ。

電場の計算 $\mathbf{E}_L = -\nabla\phi_L - \frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t}$ だから先ず $\nabla\phi_L$ を計算する。

$$\nabla\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}\nabla s = -\frac{1}{s^2}\{\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \nabla\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} \quad (11.13)$$

ここで t' も \mathbf{r} に依存するから ∇ は t' を固定した部分 $\nabla_{\mathbf{r}\bullet}$ と $(\nabla_{\mathbf{r}'})\frac{\partial}{\partial t'}$ の和になる。

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}\bullet} + (\nabla_{\mathbf{r}'})\frac{\partial}{\partial t'} \quad (11.14)$$

\mathbf{r}' から \mathbf{r} への単位ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ を定義しなそう。

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.15)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'t'} = -\frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{r}}|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t')| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'t'} \quad (11.16)$$

$\nabla_{\mathbf{r}'t'}$ について解くと

$$\nabla_{\mathbf{r}'t'} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\left(-\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}\right) \quad (11.17)$$

$$\therefore \nabla = \nabla_{\mathbf{r}\bullet} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}\frac{\partial}{\partial t'} \quad (11.18)$$

(11.13) 第1項の計算

$$\begin{aligned} \nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (-\mathbf{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ &= \frac{\hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \end{aligned} \quad (11.19)$$

(11.13) 第2項の計算

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) &= \left(\nabla_{\mathbf{r} \cdot \bullet} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{r} \\ \nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}') &= \left(\nabla_{\mathbf{r} \cdot \bullet} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}') = -\frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{r}' + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

この差を作ると、第2項は、

$$\text{第2項} = \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\beta^2}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{n}} \quad (11.20)$$

(11.19,11.20) を加えると

$$\begin{aligned}-\nabla\phi_L &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} - \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\beta^2}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{n}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{s^2} \left[\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \left\{ \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \beta^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c} \right\} \right]\end{aligned} \quad (11.21)$$

第1項は Coulomb part である。

次は、ベクトルポテンシャルの微分を計算する。

$$\frac{\partial \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}}{s} \right) \quad (11.22)$$

\mathbf{v} は t' で微分する方が楽だから独立変数を t' にする。 $\frac{\partial t'}{\partial t}$ を先ず計算する。(11.12) から、 t' を t で微分すると

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (-\mathbf{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad \therefore \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (11.23)$$

従って、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_L}{\partial t'} = \frac{\mu q}{4\pi} \left(-\frac{1}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t'} \mathbf{v} + \frac{1}{s} \dot{\mathbf{v}} \right) \quad (11.24)$$

次に、 s を t' で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'} \{ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (-\mathbf{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} \\ &= -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

$\frac{\mu}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2}$ だから、 \mathbf{A}_L の微分は

$$\frac{\partial \mathbf{A}_L}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\left\{ \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2}{c} + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c^2} \right\} \cdot \frac{\mathbf{v}}{s^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} + \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{s c} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right] \quad (11.25)$$

$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_L}{\partial t} - \nabla\phi_L$ に代入すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{s c (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{s^2} \left[\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} + \frac{\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \left\{ \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \beta^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c} \right\} \right]\end{aligned} \quad (11.26)$$

ここで $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{s} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}$, $1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})$ を利用すると、

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1 - \beta^2}{s^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{sc(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \left\{ (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \right\} \right] \quad (11.27)$$

ベクトル積を用いて表現を簡略化でき、

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1 - \beta^2}{s^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{sc(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\} \right] \quad (11.28)$$

$1/s$ に比例する項が輻射に対応し必ず加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を含む。

次に磁場の計算をする。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_L = \frac{\mu q}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{v}}{s} \right) = \frac{\mu q}{4\pi} \left\{ \nabla \left(\frac{1}{s} \right) \times \mathbf{v} + \frac{1}{s} \nabla \times \mathbf{v} \right\} \quad (11.29)$$

$$\text{ここで } \nabla \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{4\pi\epsilon}{q} \nabla \phi_L,$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{r}\cdot} \times \mathbf{v} + \nabla t' \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} = \nabla t' \times \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (11.30)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{B} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon c s^2} \left[\left\{ \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \left(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \beta^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c} \right) \right\} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{s(\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon c s^2} \frac{(1 - \beta^2)\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}} + \frac{q}{4\pi\epsilon s(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 c^2} \left\{ (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \right\} \end{aligned}$$

ここでもベクトル積で表現すると、最終的に \mathbf{B} は、

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon c s} \left[\frac{1 - \beta^2}{s(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})} (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ \hat{\mathbf{n}} \times \left((\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right\} \right] \quad (11.31)$$

(11.28) と比較すると、 \mathbf{B} は簡単になる。

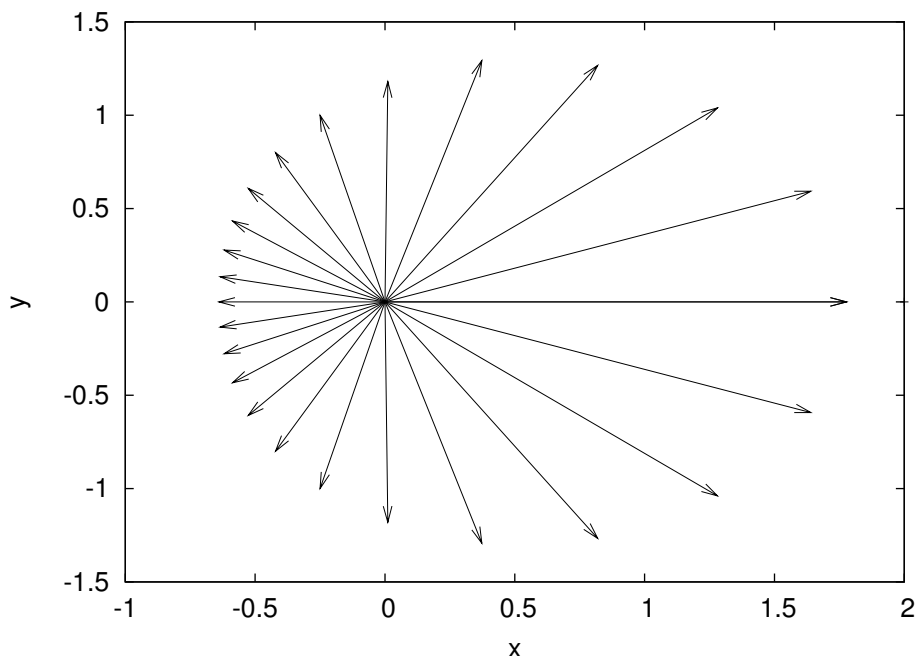
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \quad (11.32)$$

しかし、(11.28) の第1項は $-\boldsymbol{\beta}$ ではなく $\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}$ になっているから $|\mathbf{B}| \neq \frac{1}{c} |\mathbf{E}|$ 、 $\hat{\mathbf{n}}$ の項は通常の意味の Coulomb field だネ。

$\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ の場合を少し考えてみる。 \mathbf{r} を原点にとり、 $\boldsymbol{\beta}$ の方向を x 軸、 \mathbf{r} を $x - y$ 面内 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ととると、 $s = r(1 - \beta \cos \theta) = r(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})$ だから

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left\{ (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y \right\} \quad (11.33)$$

中括弧 $\{\dots\}$ の中は時刻 t での、荷電粒子の位置から場の点の方向を向いている。 \hat{e}_x 、 \hat{e}_y は x 、 y 軸方向の単位ベクトル Coulomb 力による場が $\beta \neq 0$ の時、等方的でない。 $\beta \geq 1$ とすると、おかしな事が起きるから、 $0 \leq \beta < 1$ に限定し、図示してみよう。 β が小さいと等方的だった場が、 β と共に前方が著しくなり、 $\beta = 0$ の時、 \hat{n} であったものが、 $\hat{n} - \beta$ で置き換わる。 \hat{n} をきめた時 \mathbf{E} は \hat{n} よりも大きな角度の方向を向いている。この傾向は前方で著しい。下図は $\beta = 0.25$ の時 θ を 15° 間隔にして、 \mathbf{E} の強度と向きを示したものである。電荷が静止した座標系では \mathbf{E} は等方的に見えるのに、走って見ると歪んで見える。



荷電粒子による輻射の角分布と強度 電磁場を与える (11.28)、(11.31) の $\dot{\beta}$ に比例する項は分母に s を 1 次で含むから、Poynting vector は $r \rightarrow \infty$ とした時 $1/r^2$ に依存して減少する。即ち荷電体を中心とする大きな球面上で面積分を行うと一定値になり、輻射としてエネルギーが放出されていることが分かる。

\mathbf{E} 、 \mathbf{B} の内 $\dot{\beta}$ に比例する項を \mathbf{E}_r 、 \mathbf{B}_r と書くと、

$$\mathbf{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s c (1 - \beta \cdot \hat{n})^2} \hat{n} \times \{(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}\} \quad (11.34)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s (1 - \beta \cdot \hat{n})^2} \hat{n} \times [\hat{n} \times \{(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}] \quad (11.35)$$

ここでも自由空間での輻射の時の式

$$|\mathbf{B}_r| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_r| \quad (11.36)$$

および、 \mathbf{E}_r 、 \mathbf{B}_r 、 \hat{n} はこの順で右手系をなしている。Poynting vector \mathbf{S}_r は

$$\mathbf{S}_r = \frac{\hat{n}}{\mu c} |\mathbf{E}_r|^2 \quad (11.37)$$

電荷から r の距離にある微小面積 $r^2 d\Omega$ を微小時間 dt に通過するエネルギー dW は

$$dW = |\mathbf{S}_r| r^2 d\Omega dt \quad (11.38)$$

輻射は現地時間 dt' で見ると

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11.39)$$

であるから、輻射強度 p は

$$p = \frac{dW}{dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon c} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^5} |\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2 d\Omega \quad (11.40)$$

この式は荷電粒子から見て、 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向への輻射の角分布を与える。 $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ ならば、(11.40) で $\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}$ 、 $\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rightarrow 0$ とおくと、

$$p \rightarrow \frac{(q \dot{v} \sin \theta)^2}{16\pi \epsilon c^3} \quad (11.41)$$

これは $q\dot{v} = \ddot{p}$ とおくと (10.17) に一致する。

X 線発生用クーリッジ管の様に直進する電子を金属中で止める時、平均的には $\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ は平行であろう。この時には $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ を代入すると、 $|\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})| = |\dot{\boldsymbol{\beta}} \sin \theta|$ となるから

$$p = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (11.42)$$

β が小さい時は dipole 輻射と同じだが、 β が大きくなると、分母が大きくなってきて、前方に傾く角分布を与える。

$$\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad \text{は} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} \quad (11.43)$$

で最大値をとる。

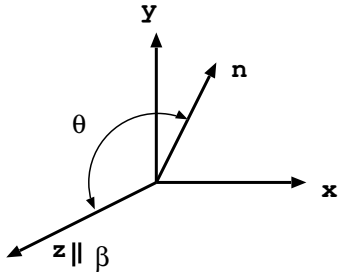
単振動的な加速以外の方法で工業的に輻射を実現する方法としてこの方法は利用されていて、制動輻射 (Bremsstrahlung) と呼ばれている。(11.42) に $2\pi \sin \theta$ をかけて θ で積分すると、

$$2\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \quad (11.44)$$

であるから出力 P は、

$$P = \frac{q^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{6\pi \epsilon c (1 - \beta^2)^3} \quad (11.45)$$

荷電粒子が円運動をする場合 レーダーや電子レンジに使用されるマグネトロン、(電子)円型加速器の大きさの下限、シンクロトロン放射等の原理を決めるのはこの様な場合である。



高速のイオンの運動方向に直角に一様磁場をかけて円運動している場合を想定するとよい。”円運動”の特徴は β 、 $\dot{\beta}$ が一定であり、 β 、 $\dot{\beta}$ が直交するところにある。 β の方向に z 軸、円運動の中心向に x 軸、 x 、 y 、 z の順に右手系を作る様に y 軸をとる。場の点 $r = \hat{n}r$ と見える。

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \beta &= (0, 0, \beta) \\ \dot{\beta} &= (-\dot{\beta}, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (11.46)$$

を利用し、(11.40) の登場する以下の量を計算する。

$$|\hat{n} \times \{(\hat{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}|^2 = \dot{\beta}^2 \{ (1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \}$$

方位角 ϕ に付いて積分すると、

$$\pi \dot{\beta}^2 \{ 2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \}$$

最後に、 $\sin \theta$ を掛け θ で積分すると、出力 P は次式となる。

$$P = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{6 \pi \epsilon c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \quad (11.47)$$

この式を次の場合に適用してみよ。

1. 陽子のまわりを電子が周回しているとき。特に 1s 軌道ではどうか?
2. 1C (クーロン) の電荷を地球が持っているとする、一年の長さはどれくらいの割合で変化するか。
3. KEK のトリスタンは半径 960m で 30GeV の電子を加速するという。1周当たりどれだけのエネルギーが失われるか? 半径を倍にするとどうなるか?

第12章 輻射の反作用

古典電子半径 半径 r_0 の一様帯電球のエネルギー E を計算する。球対称だから全電荷を原点に集めた時の r_0 での potential は $\phi(r_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ で与えられるから、(8.8) より

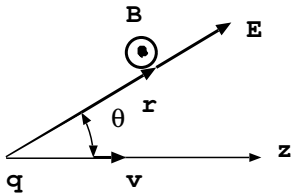
$$E = \frac{q}{2}\phi(r_0) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \quad (12.1)$$

特殊相対論の有名な Einstein の式 $E = mc^2$ を認めたとし、ひとまず因子 $1/2$ は忘れてこのエネルギーが全部質量の原因だとすると、電子の電荷と質量を e, m_e として

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad (12.2)$$

この r_e を古典電子半径と呼ぶ。 ($\sim 2.82 \times 10^{-13}$ cm)

電子の電磁質量



電荷 q が $v(|v/c| \ll 1)$ でゆっくりと z 軸方向に走っているとす。電荷から r の位置の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ はクーロン力によるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (12.3)$$

(11.28) で $s \rightarrow r, \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r, \beta = 0$ としても良い。

同様に $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は (11.31) で $\beta \times \hat{\mathbf{n}}$ の項のみを残すと、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (12.4)$$

この \mathbf{E}, \mathbf{B} を用い場の運動量密度 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ を (8.23) を用いて計算すると、

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{c^4 \mu_0} \mathbf{E} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^4 \mu_0} \{ \mathbf{v} E^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \} \quad (12.5)$$

これを全空間にわたって積分すると場の運動量が出てくる。方位角には依らないから、右辺第1項は

$$\int_{r_0}^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} 2\pi \sin \theta d\theta E^2 = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \frac{1}{r_0} \quad (12.6)$$

右辺第 2 項 z 成分は、

$$\int_{r_0}^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} 2\pi \sin\theta \frac{1}{r^6} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}_z = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{4\pi}{3} \frac{v}{r_0} \quad (12.7)$$

従って、場の運動量の z 成分は、

$$G_z = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} v \quad (12.8)$$

G の x 、 y 成分は 0 である。“場”の運動量が“電子”の速さ v に比例している。“電子”を加速しようとするとき当然電子が作っている“場”も一緒に加速されねばならない。たとえ電子に質量がなくとも電荷を持っているから、電子に場がくっついてくるので少なくとも場の運動量分だけは力積を与えないと電子を加速できなくなる。質量がなくとも等価的に質量をもってしまふ。この概念を電磁質量 (m_{em}) と名付ける。

$$m_{em} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} \quad (12.9)$$

(12.2) では因子 $1/2$ を無視したが、ここでは因子 $2/3$ は残っている。いい加減な習慣だ！ここで (12.6) を導く時、全空間にわたって積分すると言っておいて r_0 は 0 としていないが、もしも 0 にとると m_{em} は発散してしまう！発散したら電子に電場をかけても動かない(加速できない)。これは深刻な問題である。現在も本質的に解決していない。我と思う人は考えてもらいたい。

輻射の反作用

前節よりももう少し speed を上げると輻射が効いてくる。(11.47) で分母の β^2 を 1 に比較して落とすと出力は、

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (12.10)$$

という事は、これだけの割合で荷電粒子の運動エネルギーが輻射として失われていく事を意味する。即ち荷電粒子の運動にブレーキがかかる。この力を \mathbf{F}_r と書くと、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_r$ がこの仕事率でこれが P に等しいと都合がよい。荷電粒子のエネルギーを W だとすると、

$$-\frac{dW}{dt} = P = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\{ \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} \right\} \quad (12.11)$$

もしも荷電粒子が周期運動をしている様な時には $\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})$ の 1 周期にわたる平均値は 0 になるから、その様な時には \mathbf{F}_r は次の様に書ける。

$$\mathbf{F}_r = \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (12.12)$$

を輻射の反作用と呼ぶ。

単振動をしている電子は輻射を放出する。この時、(12.12)により少しづつ振幅が減衰する。この減衰により輻射の振動数が幅を持つ事になるが、(12.12)はこの様な現象に対し一つの目安を与える(量子力学的考察をしていないので、なかなか正しいとは言いがたい)。興味があったら、作用がないのに反作用のみが存在するとして、(12.12)を Newton の運動方程式を解いてみよ。ナンセンスな結果を与えるのに驚くだろう。

第13章 特殊相対論

光速の基準となる座標系 自由空間ではポテンシャル ϕ , \mathbf{A} は三次元の波動方程式を満足する。

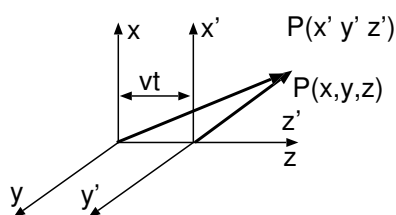
$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

但し、ここで以下の Lorentz 条件 (9.7) が暗黙に仮定されている。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(13.1) から、 ϕ や \mathbf{A} の一階微分 (の和) で定義される \mathbf{E} や \mathbf{H} (or \mathbf{B}) も波動方程式を満足し、真空中を c の速さで伝播していく。ところで速度と言うのは座標系に依存する概念であり、進行方向に対し追いかけて観測すると遅く見えるし、追跡速度を上げて追い越してしまうと向きさえも変わって見える。この様に速度という概念は物理法則を記述するのに少し頼りない所がある。速度と言う概念を物理法則に取り込むと、Newton が考えていたと想像される全宇宙の重心を原点とする特別な座標系を考えるか、又は、固定点が無いと言う意味で天動説を唱えることになる。Newton は運動方程式を、速度でなく加速度 (運動量の時間変化) を用いて書き、これは次の Galilei 変換に対して形を変えない (不変である)。

固定座標系 S とこれに対し z 軸方向に一定速度 v で進んでいる座標系 S' を考える。



$t = 0$ に両系の原点が一致していたとすると、両系の座標の関係は、

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

S 系では

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (13.3)$$

力 \mathbf{F} が速度に依存しなければ

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d^2 \mathbf{r}'}{d(t')^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

だから、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{d(t')^2} = \mathbf{F}'(\mathbf{r}', t') \quad (13.4)$$

一つの座標系で成立する運動方程式は、これに対して一定速度で運動する任意の座標系 (慣性系) で成立する。これをガリレイの相対性と呼ぶ。

Galilei 変換 (13.2) を波動方程式 (13.1) にほどこしてみよう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

であるから、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial z'} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial z'} \right) \right\} \right] \phi(x', y', z') = 0 \quad (13.6)$$

x', y' に依存しない解は、微分演算子に対して因数分解をし、

$$\left\{ \left(1 - \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\} \left\{ \left(1 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\} \phi = 0$$

より、

$$\phi = f \left(\frac{z'}{1 - v/c} - ct' \right) + g \left(\frac{z'}{1 + v/c} + ct' \right) \quad (13.7)$$

(独立変数) = const. という式を t' で微分すると

$$\frac{\dot{z}'}{1 \mp v/c} \mp c = 0 \quad \text{or} \quad \dot{z}' = v'_z = \pm c(1 \mp v/c) = \pm(c \mp v) \quad (13.8)$$

すなわち、 z' 軸方向に $(c - v)$ 又は $(-c + v)$ という速さで進む波を表すという常識的な結論になる。勿論、(13.1) の波動方程式の解は c で伝わる波動を記述する。

下に示した要求精度を満足する Michelson と Morley の実験は、この結論と矛盾するものであった。

⇒ 波動方程式、従って Maxwell の方程式は、Galilei 変換に対し不変はでない。

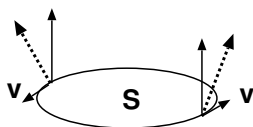
$$\text{Galilei 変換} \begin{cases} \text{Newton の運動方程式} & \dots \text{O.K.} \\ \text{Maxwell の方程式} & \dots \text{No!} \end{cases} \begin{cases} \text{どの様な座標系で成立するか?} \\ \text{どの様な座標変換が不変にするか?} \end{cases} \quad (13.9)$$

最初の問にはすぐ答えられる。地球人が火星の上で成立する方程式を最初に発見するはずがない。Maxwell の方程式は個別の実験が行われた地球上の実験室で成立するのだ。問題の設定がまちがっている。(13.8) を見ると、速さをチェックすれば良い。Maxwell の方程式はどの程度の精度で地球上では成立するのだろうか？ これは実験せねばならぬ。大きな速度の一つの基準として地球の公転速度を持って来よう。地球の公転速度と光速を比較するならば、地球の公転半径を R とすると $\frac{R}{c} \sim 500$ 秒だから

$$\frac{v}{c} = \frac{2\pi R}{\text{一年}} \frac{1}{c} = \frac{2\pi \times 500 \text{ 秒}}{\text{一年}} = 9.96 \times 10^{-5} \sim 10^{-4} \quad (13.10)$$

v/c の一次を検出する実験ならば有効数字 4 桁、 $(v/c)^2$ を検出するならば精度は 8 桁以上必要。光速に関しては、次のような観測事実も知られている。

(公転) 光行差 図で、S は太陽、 v は半年間隔での二つの地球の位置での速度を表す。細い実線は恒星の方向、破線は当該恒星を見る望遠鏡の方向を示す。



非常に遠くの恒星を望遠鏡で観測すると、一年周期で楕円運動をしている (Bradley, 1727)。その長軸の視角は $41''$ であり、地球の公転面近くの恒星ではほぼ直線、この面に垂直方向の恒星はほぼ円軌道を描く。

光速を c 、公転速度を v とすると、 $41''$ という数字は、次式で説明される。

$$2 \tan^{-1} \frac{v}{c} \cong 41'' \quad (13.11)$$

Fizeau の実験 屈折率 n 、流速 v の流体中の光速 c を観測した (1853)。

$$c = \frac{c_0}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (13.12)$$

ここで c_0 は真空中の光速である。Galilei 変換だと $\frac{c_0}{n} \pm v$ とならねばならぬ。

正しい理論は (13.11)、(13.12) 等を説明するべきである。

(13.9) の第二の問いに付いて考えてみる。Maxwell の方程式 (特に波動方程式) を不変にする座標変換は存在するのだろうか? Voigt や Lorentz は Galilei 変換の (13.2) の代わりに次の座標変換が Maxwell の方程式を不変にすることを見出した。

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

ここで

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad (13.14)$$

Maxwell の方程式は時刻 t と位置 \mathbf{r} についての一階の連立偏微分方程式だから \mathbf{r} だけ変えるわけにはいかないから、時刻 t も同時に変えねばならないのだ。この変換を (特殊) Lorentz 変換と呼ぶ。波動方程式に対して簡単に check してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial z} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(-v \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

であるから

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \quad (13.15)$$

確かに Lorentz 変換 (13.13) は波動方程式を不変にする変換である。当然のことながら Lorentz 変換は Newton の運動方程式を不変にしない。

問題の設定は Newton の運動方程式 (Galilei 変換) と Maxwell 方程式 (Lorentz 変換) のどちらをより原理的なものとして採用するか? という事であろう。もしも Maxwell 方程式だとすると、(13.13) は時刻は三次元的な位置に依存することになるが、これも認めるのか? という事になる。

昔の人は、光を伝える媒質としてエーテルという仮想的な物質が、真空を満たしていると考えた。ところで、

1. 真空は一様に思える。(光速は等方的である) ならば縦波はなぜ存在しないのだろうか? 上に説明した様に波の伝播は波源には依存せずその媒質に依存することに注意しなければならない。また前節の輻射の議論から理解できる様に、 $\frac{1}{r}$ で減衰する項を除けば E や B には縦波の成分も存在するのである。エーテルは縦波を減衰させ、横波を減衰させない?

2. 光の横波性は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ というクーロンの法則から導かれたものである。クーロンの法則は第一章で説明した様に、(1) 我々が等方的な三次元空間に住んでいる。(2) 電気(磁)力線は湧き口の電(磁)荷から等方的に減衰せずに無限遠にのびている。という二つの事実だけから導かれる。この二つの主張は“数学”ではあっても媒質の性質を反映した“物理”がどこにあるかと問うてみると面白い。この主張は物理というよりも、その中で物理現象が生起する舞台装置を定義しているのだと理解したい。

少し無責任な言い方をするならば、真実とはそんなものですよ! これに関して面白いはなしを一つ。(非)相対論的量子力学の Dirac (Schrödinger) 方程式を水素原子に対して解くと、 $2p_{3/2}$ ($2p$) 準位のエネルギーは精度良く計算できる。原理的には無限の精度で! 即ち $2p_{3/2}$ ($2p$) 準位のエネルギー不確定性は 0 である。不確定性原理を知っていれば、 $2p_{3/2}$ ($2p$) 準位は $1s_{1/2}$ ($1s$) 準位へ自然に遷移することではない! こんなことを言えば高校生に笑われる。やはり真空とはそんなものですよ。

エーテル(真空)には、未知の性質がある!

3. 真空中を伝播する光には分散と言う現象が知られていない。光速 c が振動数(又は波長)に依存するならば、これを分散があると言うが、この様な事は知られていない。一方、通常の物質の誘電率 ϵ や透磁率 μ は振動数に依存する。分散には二つの原因が考えられよう。(1) 媒質の質量効果 (2) 媒質自身が有する基本単位の大さの有限性

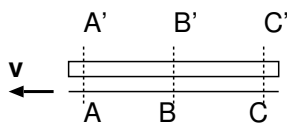
(1) 質量が有限ならば、これを動かすのにはある時間がかかるから非常に急激な振動には追従できなくなる。

(2) 物質の構造に伴う粒子間の最小距離を考えることが出来よう。最小距離よりも短い波長の光をどうやって伝えるのか?

エーテルの大きさは無限小で質量は0なのか!?

同時の相対性　ここで Einstein の登場となるわけだが、大切な変化の糸口は Maxwell 方程式を不変にする (少し曖昧な表現だが) 座標変換として Lorentz 変換の存在を認めると時間と言う概念を見直さなければならないというところにある。時刻とは (1) 正確な時計の存在、(2) 事象の発生、(3) 発生の瞬間にそこにある時計と比較し同時である。という三つの判断によって保証されると考えられる。前二つの判断は自明として次の思考実験を考えよう。

直線のレール上を走る列車を考える。レールの傍に等間隔に A、B、C の三点をこの順に取り、A、B、C 三人の人間をここに配置する。



A、B、C の三人は “同時” に列車に記号 A'、B'、C' をつける。記号をつけた瞬間に A と C に同時に落雷があったとする。A と C への落雷の影響 (例えば雷光) は左右から同時に B に到着するから、地上では同時に落雷があったことは確認できる。

列車内では落雷の瞬間に発生した信号は A' および C' から発生し B' に伝えられる (他にも伝わるが)。光信号だとすると、B' は図の場合、A' からの光信号を迎えるように、逆に C' の光信号から逃げる様に動いているから、A' からの信号の方が C' からの信号よりも早く到着する。即ち、B' では二つの落雷を同時刻とは判断しない。

一つの座標系 (地上) の異なる座標 (地点 A、C) で同時に起こった二つの事象 (落雷) は異なった座標系 (列車) では必ずしも同時とは限らない。この思考実験を認めると (今の場合 光速 (情報伝達速度) の有限性)、同時刻というのは座標系に依存する概念である事になる。十九世紀迄は時刻は座標系に依存しない (時刻の絶対性) と考えられていたが、二十世紀になると時刻も座標系に依存すると考えねばならなくなった。これを受け入れると Lorentz 変換に時刻が独立量として登場することは不自然ではなくなる。

問　　静止座標系 S とこれに対し Z 軸方向に一定速度 v で動く座標系 S' を考える。S 系の原点を時刻 $t = 0$ に発射した光の波面の方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ を不変にする S \rightarrow S' 系への一次変換の内、時刻の向きや座標軸の向きを変えないものは、座標軸の向きを両系で平行にとると Lorentz 変換以外にないことを示せ。

問　　相対性という事を常識的に考えると、上の問で逆に S' \rightarrow S の座標変換はただ v を $v' = -v$ と入れかえれば良いはずだと思われる。Lorentz 変換の逆変換を実際に計算しこの常識通りになっていることを確認せよ。

相対性原理　Einstein は次の二つの指導原理を基礎としてそれまでの物理法則を見直した。

(1) 相対性原理 座標系は人間が勝手に選べるものであるが、物理法則は人間が勝手には作れないから物理法則は座標系に依存しない筈である。即ち物理法則は座標変換に対し (ある意味で) 不変な形に書ける。

二つの座標系を考えた時、両座標系の相対速度が一定という特殊な場合に付いて上記の原理を特殊相対性原理と呼び、一般の運動をしている時にも上記の要請が成立する事を要求する場合、これを一般相対性原理と呼ぶ。

今まで多くの物理法則は $A = B$ という様な方程式に書かれていたのに比較し、非常に表現が変わっているので戸惑うかも知れないが、影響する所は広範囲に渡る。

この相対論と良く似た物理法則に、良く知られているが名前の付いていないものとして、次元の保存則がある。即ち $A = B$ という法則の右辺及び左辺の次元は等しいというものである。次元も座標変換に依存しない。

Newton の運動方程式は Galilei 変換に対し、Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対し不変になっているので確かに相対性原理は成立している様に思える。しかし $|v/c| \rightarrow 0$ の極限では両変換は一致するが、 $|v/c| \rightarrow 1$ では相矛盾する。もう一つ指導原理を作らないといけない。今後は特殊相対論に話を限定する。

この特殊相対性の原理を最初に物理法則に対して要請したのは Poincare であるらしい。更に、Lorentz 変換の名付け親も Poincare らしい。そうすると、相対論を作り上げた人物として、Einstein に光が当たりすぎて、Poincare を逆に軽視しすぎている様に思える。

- (2) 光速不変の原理 慣性系 (加速度が働いていない系) では光速は座標系によらない。この原理は Lorentz 変換とは整合が取れているが、Galilei 変換とは矛盾する。この原理は慣性系では Maxwell の方程式が成立すると言いかえた方が良く個人的には考えている。いわゆる c というのは、現在の立場からすると、質量が 0 の粒子の伝播速度と理解されているからである。

Lorentz 変換 静止系 (もう少し一般的には慣性系) $S; (x, y, z, t)$ と S に対して Z 軸方向に速度 v で運動している座標系 $S'; (x', y', z', t')$ の間の座標変換を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

但し、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v/c$ とする。

又は、変数の次元を揃えるために次の定義を用いる。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (13.17)$$

ダッシュ系にも同じ定義を用い、Lorentz 変換を次の様に書く。

$$x'^{\mu} = L_{\nu}^{\mu} x^{\nu} (\equiv \sum_{\nu} L_{\nu}^{\mu} x^{\nu}) \quad (13.18)$$

但し、

$$(L^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (13.19)$$

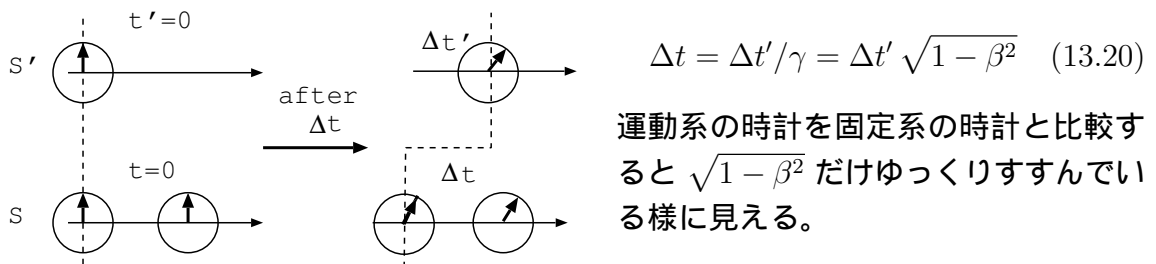
ここで上と下に斜めに一回ずつ表れる指標、(13.18)では ν については $0 \sim 3$ に対して和を取る。(Einsteinの規約)

(13.13)又は(13.18)を(特殊)Lorentz変換と呼ぶ。 $t=0$ に両系の原点が一致し v の方向が座標軸の方向に取られている点が特殊と名付ける理由の一部である。

Lorentz変換は、以下の様な性質を示す。

(1) 時間の短縮 S' 系の原点にある時計を S 系の一点($z_1 = z_2$)で観察すると、

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) - v\gamma(z_2 - z_1)/c^2 = \gamma \Delta t$$



(2) Lorentz収縮 S' 系で長さ $\Delta z' (= z'_2 - z'_1)$ の棒を S 系の時刻 t に測定すると(S 系で同時刻に測定する, $t_2 - t_1 = 0$)

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1 = \gamma(z_2 - z_1 - c\beta(t_2 - t_1)) = \gamma \Delta z$$

$$\Delta z = \Delta z' / \gamma = \Delta z' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (13.21)$$

運動系の棒は固定系では $\sqrt{1 - \beta^2}$ だけ短く見える。

種明かしをしよう。この時、 $t'_2 = t'_1 - \Delta z' v / (c^2)$ という関係があるから、 S 系で z'_2 と z'_1 を同時刻に測定しているが、 S' 系では z'_2 を時刻 t'_2 に測定し $\Delta z' v / (c^2)$ だけ時間が経過してから z'_1 を測定している。動いている物体の先頭 z'_2 を先に測定し、後尾 z'_1 は後の時刻に測定している。この様な測定では短く測定されるのは当然である。

即ち、同時性の相対性又は時刻の相対性が本質である。

運動方向に直角に置かれた場合は長さに変化はない。

(3) 速度の合成則 S' 系で速度 $u' (= dz' / dt')$ で動いている点を S 系から見ると

$$\left. \begin{aligned} dz' &= \gamma(dz - v dt) \\ dt' &= \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dz) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dz}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (13.22)$$

この式が S 系と S' 系で見た z 方向 (z' 方向) に動く粒子の速度の関係式である。 $u = dz/dt$ について解くと

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (13.23)$$

(13.22、13.23) を速度の合成則と呼んでいる

(13.20)、(13.21) は $\beta (= v/c)$ の平方にのみ関係しているから、 β の符号を変えても式は変化しない。即ち S' から S を見ると S 系が $(-v)$ の速さで z' 軸方向に運動している。 ($S \Leftrightarrow S'$, $v \Leftrightarrow -v$) という置き換えに対し不変である。

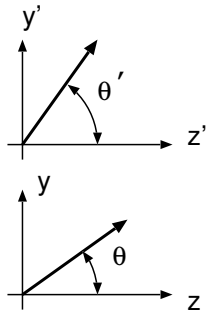
問 光行差や Fizeau の実験を (13.22) を用いて説明せよ。

問 (13.22) より $|u| < c$, $|v| < c$ ならば $|u'| < c$ を導け。

即ち、光速以下の速度をいくら加えても、光速を越える事は出来ない。

(4) 傾く直線 S 系で z 軸と θ をなす直線を S' 系で見る。
S 系では

$$y = m z, \quad m = \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$



ととり、S' 系では $y' = m \gamma (z' + \beta ct')$ $= m'(z' + \beta ct')$ ととる。

$m' = \gamma \tan \theta = \tan \theta'$ とおくと、

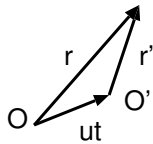
$$\theta' = \tan^{-1}(\gamma \tan \theta) \quad (13.24)$$

$\theta \neq 0, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ ならば $\theta' > \theta$ だから直線が立ってみえる。

特に原点から等方的に放射状に出ている電気力線は図の様に見えるであろう。この観点から、Lienard-Wiechert の potential を思い出してみるとよいだろう。

(5) u が任意方向の場合の Lorentz 変換

図の様にある特定の点を



$$\left. \begin{array}{l} S \text{ 系の原点 } O \text{ から見ると } r \\ S' \text{ 系の原点 } O' \text{ から見ると } r' \end{array} \right) \quad (13.25)$$

と書く。

r の u に平行 (垂直) 成分を $r_{\parallel} (r_{\perp})$ という記号を用いる。 r' についても同様とする。 $\beta (= u/c)$ に垂直な空間成分は変化せず、平行成分のみが影響をうけるから、

$$r'_{\perp} = r_{\perp}, \quad r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - \beta ct) \quad (13.26)$$

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}) = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \quad (13.27)$$

平行、垂直という添字を持つベクトルを消去して \mathbf{r} と \mathbf{r}' の関係にしたい。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\mathbf{r}_{\parallel} - \gamma\boldsymbol{\beta}ct \quad (13.28)$$

但し、 $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$ と書いた。

ここで、

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{\beta} \right) \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta}, \quad \gamma - 1 = \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}(1 + \sqrt{1 - \beta^2})}$$

と書くと

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \gamma\boldsymbol{\beta} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) - ct \right) \\ ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

分子を有理化した方が数値計算上誤差が入りにくい事に注意。

この一般方向の速度に対する Lorentz 変換を、以下の様に機械的に導く事も出来る。 z 軸と \mathbf{u} のなす角度を α とし、 z と \mathbf{u} のなす面内に y 軸をとり、次の3個の操作を順に行う。

1. x 軸の周りに角 $-\alpha$ だけ座標系を回転する。この変換行列を $R_x(-\alpha)$ と書く。
2. 新 z 軸方向は \mathbf{u} は向いているから (13.18) により Lorentz 変換は行える。この変換行列を $L_z(\beta)$ と書く。
3. 新 x 軸 (これは旧 x 軸でもある) のまわりに $+\alpha$ だけ回転して元へ戻す。この変換行列を $R_x(+\alpha)$ と書く。

この三回の変換をしたものは、(13.29) で $\boldsymbol{\beta} = (0, \beta_y, \beta_z)$ としたものと一致する。

$$\begin{aligned} (13.29) &= R_x(+\alpha)L_z(\beta)R_x(-\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y\gamma & 0 & 1 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}\beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}\beta_y\beta_z \\ -\beta_z\gamma & 0 & \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}\beta_y\beta_z & 1 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}\beta_z^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.30)$$

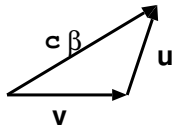
量子力学を学ぶと、演算子のユニタリー変換として、この種の操作はお馴染みになる。

(6) 相続く Lorentz 変換

3つの座標系 S, S', S'' を考え、これらは以下の様な関係にあるとする。但し、 $t = t' = t'' = 0$ に3者の原点は一致していたとする。

$$\left. \begin{aligned} S' \text{ 系は } S \text{ 系に対し } z \text{ 軸方向に } \mathbf{v} \text{ で運動している} \\ S'' \text{ 系は } S' \text{ 系に対し } y', z' \text{ 面内で } \mathbf{u} \text{ で運動してる} \end{aligned} \right\} \text{とする。}$$

但し、 $\beta = \sqrt{\beta_y^2 + \beta_z^2}$ とし、 $S \rightarrow S''$ 系への Lorentz 変換は $L(\mathbf{u})L_z(\mathbf{v})$ で与えられるとする。実際計算としてみると、 $L(\mathbf{u})L_z(\mathbf{v}) \neq L_z(\mathbf{v})L(\mathbf{u})$ である (但し、 $u_y \neq 0$)。Lorentz 変換は変換の順番に依存する (行列は一般に交換可能でないから当然だ!)。



更に面白いことは $L(\mathbf{u})L_z(\mathbf{v})$ と同一の Lorentz 変換はどんな β を選んでも (13.29) では表せない。即ち直感的なベクトル和の図を満足する β は存在しない事が直接計算すると分かる。

しかし (13.30) の導き方を思い返すと、座標系の回転が関与しているので、以下の様に見える。

$$L(\mathbf{u})L_z(\mathbf{v}) = L(c\beta)R_x(\theta), \quad \text{又は} \quad (13.31)$$

$$= R_x(\phi)L(c\beta')$$

となる様な R_x や $L(c\beta), L(c\beta')$ は存在しそうである。直接計算すると $\theta = \phi$ であり、 β や β' は存在することが解る。

座標系の回転も Lorentz 変換の仲間に入れてしまうと、特殊 Lorentz 変換だけを考えるより便利そうだと気がつくだろう。今後は座標回転も Lorentz 変換だとする。

この結果 Lorentz 変換を二つ連続して行なったものも又 Lorentz 変換となる。恒等変換や逆変換も当然存在するから Lorentz 変換だけで閉じている事になる (Lorentz 変換群を作っている)。

z 軸の回りの角度 α の回転は三次元空間では一次の行列で与えられる。

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.32)$$

$\alpha = i\theta$ と書くと、 ct, z に垂直な軸の回りの回転 $R(i\theta)$ は

$$R(i\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & i \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (13.33)$$

$\cosh \theta = \gamma$ ととると、(13.16) に非常によく似た式が作られる。Lorentz 変換 (13.16) は (ict, z) 軸に垂直な軸の回りに回転とも考えられる。但し、虚数の角度や座標を導入しなければならない。実数は 1 元数であり、虚数は 2 元数である。異なる次元数 (従って異なる属性) の対象を混ぜ合わせることは、非常に抵抗を感じる。

(問) 平均寿命が 2.2×10^{-6} 秒の μ 中間子が地表から 10 km 上空で作られた。運動エネルギーが、50 MeV であり、空気中でのエネルギー損失を無視する。この中間子は崩壊するまでに何 km 走るか?

(問) $x(y)$ 軸方向への $\beta_x (\beta_y)$ の Lorentz 変換を $L_x(\beta_x)(L_y(\beta_y))$ と書く。 $\beta_y = a \delta t/c$ (δt は無限小) として、

$$L_y(a \delta t)L_x(\beta_x) = R_z(\alpha)L(\beta) \quad (13.34)$$

と書いた時の α と β を求めよ。但し、 $L(\beta)$ は β の Lorentz 変換とした。

これから運動方向に垂直な加速度 a が加わると系を $va/2c^2$ の角速度で \mathbf{v} と \mathbf{z} に垂直な軸 ($\mathbf{v} \times \mathbf{z}$ の方向) の回りに系を回転している事になる (Thomas precession)。

コメント: z 方向への特殊 Lorentz 変換の行列は、対称行列である。一方、異なる方向への二つの相続く変換 (行列で言えば両者の積で与えられる行列) の非対角要素には、必ず反対称成分が登場する。変形する物体の力学で学んだ様に、座標変換の反対称成分は座標系の回転を引き起こす事を思い出そう。そのつもりのなってみると、(1.13) も反対称になっているのが分かるだろう。

別の見方も紹介しておこう。具体的にするために、異なる二つの方向を x, y 軸だとしよう。Lorentz 収縮を思い出すと、 $x (y)$ 方向には、 $\sqrt{1 - \beta_x^2}, (\sqrt{1 - \beta_y^2})$ だけ短くなる。収縮率が異なるので、ネジれが生じる (即ち回転が導入される)。

(問) 長さが 1 m の棒を x 軸に沿って走らせる。一方、直径 1 m の穴があいた板を、円の中心が y 軸に一致するよう置き、 xz 面に平行に y 軸に沿って走らせる。両者の中心は静止系から見て、原点で一致するように、両者の運動は同期されている。棒から見ると、Lorentz 収縮の為に、穴の直径は 1 m よりも小さく見えるから棒が穴を通過出来ない。一方、穴からは棒の長さが 1 m よりも短く見えるから、棒は穴を通過するはずである。

さて、衝突するのか? 又は通過するのか?

斜交座標のベクトル Maxwell の方程式で \mathbf{B} と \mathbf{D} の時間微分は、異なる符号で登場する為に、4次元時空はユークリッド空間ではなくなる。そこで、斜交座標でのベクトル表現に関する復習を簡単にしておこう。

ある空間に斜交座標系を想定し、この空間で任意のベクトルを展開するために、原点を共有する二つの基本ベクトル系 ($\hat{e}_i, i = 1, 2, \dots, n$) と ($\hat{e}'_i, i = 1, 2, \dots, n$) を考える。両者をダッシュの有無で区別する。一方の基本ベクトルで他方の基本ベクトルを展開できるから、

$$\hat{e}'_j = \sum_i \hat{e}_i a_{ij}^i, \quad \hat{e}_i = \sum_j \hat{e}'_j b_i^j \quad (13.35)$$

a_i^j と b_j^i を成分とする行列はお互いに逆行列の関係にある。即ち、

$$\hat{e}'_j = \sum_i \hat{e}_i a_{ij}^i = \sum_{i,k} \hat{e}'_k b_i^k a_{ij}^i \quad (13.36)$$

一方、左辺は $\sum_k \delta_{jk} \hat{e}'_k$ と書ける。従って、

$$\sum_i b_i^k a_j^i = \delta_{jk}, \quad \sum_i a_i^k b_j^i = \delta_{jk} \quad (13.37)$$

後半の式も、同様に導ける。

この式は、 a と b をどちらが先に来て良いから、対角添字が等しい時、この添字に付いて和をとると、Cronecker の δ 関数が登場すると言っている。

任意のベクトル \mathbf{r} をこの 2 系統の基本ベクトルで展開する。

$$\mathbf{r} = \sum_i \hat{e}_i x^i = \sum_j \hat{e}'_j x'^j \quad (13.38)$$

上と同じ手法により、次のベクトルの成分に関する関係式を得る。

$$x^i = \sum_j a_j^i x'^j, \quad x'^j = \sum_i b_i^j x^i \quad (13.39)$$

式 (13.35) と (13.39) を比較すると、基本ベクトルは行列 (a_j^i) で変換されるが、ベクトルの成分はその逆行列 (b_i^j) で変換される。即ち、両者は異なる変換性を有する。この意味で指標は上に付けたり、下に付けたりする。

指標の上げ下げ 式 (13.38) に基本ベクトル \hat{e}_j を掛け、ベクトルの下付き指標成分 x_j を次式で導入する。

$$x_j \equiv \hat{e}_j \cdot \mathbf{r} = \sum_i \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i x^i = \sum_i g_{ji} x^i \quad (13.40)$$

ここで次の新しい記号を導入した。

$$g_{ji} = g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad (13.41)$$

デカルト座標だと、Cronecker の δ 関数となるが、斜交座標ではそうとはならない。

式 (13.40) を逆に解くと

$$x^i = \sum_j g^{ij} x_j \quad (13.42)$$

この式は、(13.40) 式と一緒にするとベクトル成分の指標の上げ下げの規則を教えている。

ここで、上付き指標の g は下付き指標の g の逆行列になっている。従って、(13.37) と同様に、以下の逆行列の関係式を満足する。

$$\sum_i g^{ji} g_{ik} = \sum_i g_{ji} g^{ik} = \delta_{jk} \quad (13.43)$$

次に、少し頭ごなしであるが、以下のベクトルを、ベクトル成分の指標の上げ下げの規則を参照して作る。

$$\hat{e}^j \equiv \sum_i g^{ji} \hat{e}_i \quad (13.44)$$

これから、(13.40)、(13.43)、(13.44) を利用すると、次の計算が出来る。

$$\sum_j \hat{e}^j x_j = \sum_{ijk} g^{ji} \hat{e}_i g_{jk} x^k = \sum_{ijk} g^{ji} \hat{e}_i g_{kj} x^k = \sum_{ik} \delta_{ik} \hat{e}_i x^k = \sum_i \hat{e}_i x^i = \mathbf{r}$$

即ち、任意のベクトル \mathbf{r} を表現する方法が二つになった。

$$\mathbf{r} = \sum_i \hat{\mathbf{e}}^i x_i = \sum_j \hat{\mathbf{e}}_j x^j \quad (13.45)$$

式 (13.41) に対応して、以下の関係式が導ける。

$$g^{ji} = g^{ij} = \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j \quad (13.46)$$

下付き指標の基本ベクトル $\hat{\mathbf{e}}_i$ と同一の変換性を持つ物理量を共変、上付き指標のベクトル成分 x^i と同じ変換性を有する物理量には反変という形容詞をつける。

指標を上げ下げするには、上げ(下げ)たい指標を i とすると、 $g^{?i}$ を掛けて i で和をとる。

この操作は、2階以上のテンソルに対してもそのまま適用出来る。この、対角に登場する共通の指標について和をとる操作を縮約 (contraction) と呼ぶ。縮約操作は、対角に共通の指標が登場するならば特に和記号 (\sum) を書かずとも、実行するという規約は Einstein の規約と呼ばれる。

共変ベクトルと反変ベクトルを縮約した量はスカラーである。従って、 $\sum_i x^i y_i$ は座標系の回転に対して値を変えない。

二つのベクトル x^i と y^j の積から、2階反変テンソル T^{ij} が作られる。 $T^{ij} = x^i y^j$ 。共変ベクトルからならば、2階の共変テンソルが作られ、 x と y の一方が共変、他方が反変ベクトルならば、混合テンソルと呼ばれる。

これらの操作により、複雑なテンソルを作ったり、その次数を下げたり出来る。

通常の3次元空間での斜交ベクトルの例を次に挙げておこう。例えば水晶の結晶を想定しよう。この結晶の基本ベクトルは、常識から決まるとする。六角形の面内に2個と、これに垂直な軸に沿って1個を取るだろう。これらの3個のベクトルを $\hat{\mathbf{e}}_i$, ($i = 1, 2, 3$) としよう。これらは、共変ベクトルである。これらに対応する(双対 {そうつい} と呼ばれる事もある)反変ベクトルは次式で与えられ、結晶学者は逆格子ベクトルと呼ぶ。

$$\hat{\mathbf{e}}^1 \equiv \frac{\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3)}, \quad 1, 2, 3 \text{ は cyclic に変化する}$$

ここで、分母は、3個の基本ベクトルが作る体積である。

この時、以下の関係も成立する。

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^2 \times \hat{\mathbf{e}}^3}{\hat{\mathbf{e}}^1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}^2 \times \hat{\mathbf{e}}^3)}$$

この場合、上付き基本ベクトルの相棒が下付き基本ベクトルであり、逆に下付き基本ベクトルの相棒は上付き基本ベクトルである。この様な関係にある物理量を双対(そうつい)性の物理量と呼ぶ。

この座標系で、ベクトル成分の定義 (13.40, 13.42) や単位ベクトルの内積 (13.41, 13.46) を図示すると、理解を助けられるだろう。

Lorentz 変換への適用 式 (13.45) を見ると位置ベクトル \mathbf{r} は、その成分と単位ベクトルの積和として与えられているが、これから共変ベクトルと反変ベクトルの積（ある意味での内積）は正当な物理量であり、この量は座標系に依存しない様に思える。反変ベクトルから共変ベクトルを作り、不変量をこれから作るという方法で拡張しよう。出発点となる反変ベクトルを位置座標にとる。

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (13.47)$$

を定義し、計量テンソル (metric tensor) $g_{\mu\nu}$ を次式で定義する。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.48)$$

ここで、独立変数に付ける足は 0 から 3 とした。計量テンソルを見ると、時間成分 0 だけが、他と較べて負号が付いているという意味で特殊だからである。0 は整数であるが、自然数で無い。下付き文字の座標を次式で定義する。

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x, y, z) = \left(\sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \right) \quad (13.49)$$

を作る。 $t = 0$ に原点を出た球面光波の波面の時刻 t での座標を (x^μ) とすると、

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \sum_\mu x^\mu x_\mu \quad (13.50)$$

はスカラーであるから Lorentz 変換に対して値を変えない (Lorentz 不変量である、光速不変)。

これを参考にして Lorentz 変換を次のように定義する。その前に、ここから後では、Einstein の規約を採用して、和記号を省略する。更に、ローマ字の添字は 1、2、3 をとり、ギリシャ文字の添字は 0、1、2、3 をとる。

座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\nu : x'^\nu = L^\nu_\mu x^\mu$ に対して、 $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$ が $x^\mu (x'^\mu)$ に依らずに成立する時、 (L^μ_ν) を Lorentz 変換と呼ぶ場合がある。今までの特殊 Lorentz 変換や三次元空間の座標系の回転がこれに含まれることは自明であろう。こう定義を拡張すると、時間反転や鏡映も含まれる。

$$\text{時間反転: } L_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ } yz \text{ 面に対する鏡映: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.51)$$

等も Lorentz 変換に含まれる。時間・空間反転の変換に対する行列はその行列式の値が -1 であり、今までの座標変換の行列式は $+1$ である。今後は、行列式の値が $+1$ の座標変換に限定する。

Lorentz 変換が満足する関係式 :

$$\left. \begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} &= L^{\mu}_{\rho} x^{\rho} g_{\mu\nu} x'^{\nu} = L^{\mu}_{\rho} x^{\rho} g_{\mu\nu} L^{\nu}_{\tau} x^{\tau} \\ x^{\rho} x_{\rho} &= x^{\rho} g_{\rho\tau} x^{\tau} \end{aligned} \right) \quad (13.52)$$

両者が任意の x^{ρ}, x^{τ} に対し等しいから

$$\underline{L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\tau} g_{\mu\nu} = g_{\rho\tau}} \quad (13.53)$$

この L^{μ}_{ρ} が Lorentz 変換の条件である。(13.17) は Lorentz 変換に対し反変ベクトルであり、(13.49) は Lorentz 変換条件に対し共変ベクトルである。物理のセンスでいえば同一のベクトルの異なる表現と考えられる。この意味では (13.17) を反変成分、(13.49) を共変成分とも呼ぶ。

metric tensor 線要素 ds の平方と微小変位 dx, dy, dz の間には (直交座標では)

$$ds^2 = \sum_i (dx^i)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (13.54)$$

という関係があった。 $g_{\mu\nu}$ はこれを 4 次元空間へ拡張したものである。これは非デカルト座標では、特殊相対論であっても場所の関数である。この式と (1.23) 式を比較してみよ。そこでは、 $g_{11} = h_1, g_{22} = h_2, g_{33} = h_3$ と書いた。ただし今後も出来るだけデカルト座標を使用する。 $g_{\mu\nu}$ の逆行列を $g^{\mu\nu}$ と書く。

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.55)$$

これで指標を上下する用意が出来た。

微分

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = (L^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad (13.56)$$

であるから反変成分による微分は、逆行列で変換されるから、共変ベクトルである。指標が下に付いていることを明示するために、次の記号を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \quad (13.57)$$

微分演算子の反変成分は、 $\partial^{\nu} = g^{\nu\mu} \partial_{\mu}$ で与えられる。これからダランベリアンはスカラーであることが分かる。

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = \partial^{\mu} \partial_{\mu} \quad (13.58)$$

最右辺は共変ベクトルと反変ベクトルの内積だ。

これらの知識を利用するとベクトルやスカラーを作ることが出来る。とくに Maxwell の方程式の Lorentz 変換に対する変換性を明らかにすることが出来る。

Maxwell 方程式の共変形式

電荷保存の式:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

を次に定義した 4 元ベクトルを用いて書いてみよう。

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, i_x, i_y, i_z) \quad (13.59)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (13.60)$$

右辺は 0 は Lorentz 変換に対しスカラーであり、 ∂_μ は 4 元ベクトルだから j^μ は 4 元ベクトルである事が確認出来る。

Lorentz 条件の式:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

より、

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \phi, A_x, A_y, A_z \right) \quad (13.61)$$

で 4 元ポテンシャルを作ると、

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (13.62)$$

電場 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ より:

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial_1(c\phi^0) - \partial_0(cA_x) = -c(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \\ E_y &= -\partial_2(c\phi^0) - \partial_0(cA_y) = -c(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) \\ E_z &= -\partial_3(c\phi^0) - \partial_0(cA_z) = -c(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) \end{aligned} \quad (13.63)$$

ここで $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \left(-\frac{1}{c} \phi, A_x, A_y, A_z \right)$ を利用した。

磁場 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より:

$$\begin{aligned} B_x &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ B_y &= \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ B_z &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{aligned} \quad (13.64)$$

(13.64)、(13.65) をまとめると、電磁場は次の反対称 2 階テンソルで書ける。

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (13.65)$$

B は擬ベクトルであるから表れ方が少し変な位置に来ている。指標を上げておくと、

$$f^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} f_{\rho\tau} g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.66)$$

Maxwell 方程式

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ について:

$$\partial_1 f^{10} + \partial_2 f^{20} + \partial_3 f^{30} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^0 = -\mu_0 j^0 \quad (13.67)$$

$\partial_0 f^{00} = 0$ を加えると、

$$\partial_\mu f^{\mu 0} = -\mu_0 j^0 \quad (13.68)$$

2. $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}$ 又は $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}$ について:

$$x \text{ 成分 } \partial_2 f^{21} - \partial_3 f^{31} - \partial_0 f^{01} = \mu_0 j^1 \quad (13.69)$$

これに $\partial_1 f^{11} = 0$ を加えると、

$$\partial_\mu f^{\mu 1} = -\mu_0 j^1 \quad (13.70)$$

式 (13.67) と (13.70) を統合すると

$$\underline{\partial_\mu f^{\mu\nu}} = -\mu_0 j^\nu \quad (13.71)$$

3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ について:

$$\partial_1 f^{23} + \partial_2 f^{31} + \partial_3 f^{12} = 0, \quad \partial_1 f_{23} + \partial_2 f_{31} + \partial_3 f_{12} = 0 \quad (13.72)$$

4. $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ について:

$$x \text{ 成分: } \partial_2 f^{03} - \partial_3 f^{02} + \partial_0 f^{23} = 0, \quad -\partial_2 f_{03} + \partial_3 f_{02} + \partial_0 f_{23} = 0$$

$$y \text{ 成分: } \partial_3 f^{01} - \partial_1 f^{03} + \partial_0 f^{31} = 0, \quad -\partial_3 f_{01} + \partial_1 f_{03} + \partial_0 f_{31} = 0$$

$$z \text{ 成分: } \partial_1 f^{02} - \partial_2 f^{01} + \partial_0 f^{12} = 0, \quad -\partial_1 f_{02} + \partial_2 f_{01} + \partial_0 f_{12} = 0$$

これらの式は、右半分の様に書くとまとめられる。

$$\underline{\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu}} = 0 \quad (13.73)$$

(λ, μ, ν) は cyclic になっている。もしもどれか 2 つが等しければ自明な式になる。

相対論を学ぶ以前は、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ とは好一対をなす対応関係として目に付いた。これから”磁荷”の存在を仮定しようとした人も沢山いた。しかし、今や様子が変わったことに注意しよう。特殊相対論は $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ と $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}$ とが 1 つにくくれる法則であり、

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ と $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ とが 1 つにくくれる別の法則であることを主張している。“磁荷” q_m が存在するならば、Faraday の電磁誘導の法則にも対応する修正が必要である。“磁流 i_m ” か？

やっとな、(2.9) と (2.11) に書いた式が導けた事になる。

問 式 (13.66) で定義された $f^{\mu\nu}$ に特殊 Lorentz 変換をほどこし、電磁場 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} の Lorentz 変換に対する変換性

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\{\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}\} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\{\mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}/c^2\} \end{aligned} \quad (13.74)$$

を示せ。ここで、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 、下付き記号 \parallel 、 \perp は β に平行及び垂直成分を示す。

問 $f^{\mu\nu}$ を縮約してスカラー $f^{\mu\nu} f_{\nu\mu}$ を作り、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} を用いて表せ。当然この量は Lorentz 変換に対して不変である。前記の問は、電場(の一部)は Lorentz 変換により消えてなくなり、その代わり磁場 \mathbf{B} が生ずることを意味している。ところで、この問はどんな Lorentz 変換を使っても消せない電場や磁場もあるといっている。

問 $\square\phi = 0$ の解として $\phi = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ をとったとすると、ダランベリアン \square 及び右辺の 0 (ゼロ) はスカラーだから ϕ もスカラーである。従って、位相 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t$ もスカラーである。ベクトル x^μ と縮約してスカラーとなるベクトル k_μ を作れ。このベクトルは長さの逆元をもち、波数ベクトルを 4 次元に拡張したものになっている。更に 4 元ベクトル k_μ に対し、Lorentz 変換を施して、Doppler 効果に対する公式をつくれ。

問 $f^{\alpha\beta}$ と j^γ を縮約したベクトル $f^{\alpha\beta} j_\beta$ を \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 i 、 ρ を用いて表せ。これより、荷電粒子の電磁場中での運動方程式はどう表されるべきか考えてみよ。即ち、 $f^{\alpha\beta} j_\beta$ を体積分したものと等置するべきベクトルは何かを考えてみよ。

問 2 階反対称テンソル $f^{\mu\nu}$ の構造を見ると、第 0 行又は第 0 列には、通常の極性ベクトルが、残りの空間部分には軸性ベクトルが登場している。ところで、角運動量は軸性ベクトルであるから、反対称 2 階テンソルの空間部分に書かれるであろう。この時、第 0 列 (又は行) に書かれるべき極性ベクトルは何だろう？

最後に、特殊相対性原理とは、

二つの慣性系があった時、一方の系から他方の系への座標変換を考えると、物理法則はこの座標変換に対し共变的 (または反变的) に変換されねばならない。

という要請である。反变的であるか共变的であるかはその物理法則の表現方法に依存している。上記座標変換を決定する手段としては何か補助的な指導原理が必要である。これが光速不変の

原理であり、この結果導かれたのが Lorentz 変換である。

ここで一言。物理法則が共变的に表現できるためには物理法則を記述するための道具もすべて共变的な変換性を有しているのが望ましい。3次元の変位と時刻(の差)、電流密度と電荷密度、全電荷、ベクトル・スカラーポテンシャル、電磁場 E, B 等は確かにスカラー、ベクトル、テンソル等で書けたからこれ等を用いて物理を語ることは相対性の要請と矛盾しない。しかし(13.22)に示した様に速度は Lorentz 変換に対し、スカラーでもなければベクトルでもない! 速度という概念を用いて物理を語るのは不都合だ! これは(13.1)~(13.2)付近でも述べたことである。なのに特殊相対論の第2原理は光“速度”は慣性系では不変であるといっている。これは物理法則でないのか!? 確かに“速度”という概念が使われているのは不恰好の誹りは免れない。特殊相対論の出生の経過からいえば、第2原理を“慣性系では Maxwell 方程式が成立する”としておけば“速度”という単語(概念)を使わなくとも良い。但し、この時 β は“数学”の概念としては大切なものとして利用しなければいけない(少し苦しいかな?)。座標変換を数学と見るか物理と理解するのかわかれそうだな。

Lorentz 変換を見ると、ここに登場する光速は、一定でさえあれば速度の次元さえ持てば何でも良さそうに思える。

運動学、力学 4次元空間での線要素の平方 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu$ は当然スカラーである。 x^ν を静止している質点の座標だとすると、 $dx^i dx_i = dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 = 0$ だから

$$ds^2 = dx^\nu dx_\nu = dx_0 dx^0 = -c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (13.75)$$

とおくと $d\tau$ は、質点自身が持っている時計で計測した経過時間(間隔)である。 $d\tau$ をある時間間隔に渡って積分したものを固有時間と呼ぶ。

質点が運動している時、実験室系で見た質点の位置を x^μ とする。 x^μ はベクトルであり、 τ はスカラーだから、 x^μ の τ による微分はベクトルである。

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = v^\mu = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right) \quad (13.76)$$

を四元速度と呼ぶ。全部を実験室系で表すと、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \dots + (dx^3)^2 = -c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = -c^2 d\tau^2 \quad (13.77)$$

であるから、

$$v^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c, c\beta) \quad (13.78)$$

v^μ 自身でスカラー $v^\mu v_\mu$ を作ると、

$$v^\mu v_\mu = -c^2 \quad (13.79)$$

右辺は定数であるから、確かに v^μ は Lorentz scalar である。

ここで、一定加速度 a で加速される質点の運動を追跡してみよう。加速度系には Lorentz 変換は使えないので、少し細工が必要である。

(13.79) を τ で微分すると、

$$a_\mu v^\mu = 0 \quad (\text{ただし、} a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} \text{を四元加速度とする}) \quad (13.80)$$

ある瞬間に質点が静止した座標系ではダッシュ(')をつけないならば、この系では

$$a_\mu a^\mu = a^2 = \text{一定} \quad (13.81)$$

実験室系にダッシュ(')をつけると、この瞬間に質点は z 方向に β で動いている。質点が止まっている系から実験室系へは $-\beta$ の Lorentz 変換で移れる。

質点が静止している座標系での加速度(静止の加速度)を $a_\mu = (0, 0, 0, a)^T$ と書くと、実験室系の4元加速度は(13.78)で定義され、これは質点静止系から $-\beta$ の速度での Lorentz 変換で評価出来るから、

$$(a'_\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma a \\ 0 \\ 0 \\ \gamma a \end{pmatrix} \quad (13.82)$$

この式の z 成分を取り出すと、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ は一部相殺し、

$$\frac{d}{dt} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{a}{c} = \text{一定} \quad (13.83)$$

一回積分すると、

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{a}{c} t + \text{const.} \quad (13.84)$$

$t = 0$ で $\beta = 0$ とすると $\text{const.} = 0$ 。故に

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}t\right)^2} \frac{dz}{dt} = at \quad (13.85)$$

もう一回積分すると、

$$\int dz = z - z_0 = \int \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}t\right)^2}} dt = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}t\right)^2} \quad (13.86)$$

$t = 0$ で $z = 0$ とすると、

$$z = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}t\right)^2} - 1 \right] \simeq \frac{c^2}{a} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c}t\right)^2 = \frac{a}{2} t^2 \quad (13.87)$$

最後の式は非相対論的近似での、加速度一定の良く知られた式である。

加速の初期には放物線状に (非相対論的近似) z は増えるが、後には z は t に比例してしか増えない。速度一定と言うように見える。 $at/c \gg 1$ ならば $z = \frac{c^2}{a} \times \frac{a}{c}t = ct$ となる。

すなわち、どんなに長時間、強力に加速しても c を越えられない!

相対論的な運動を考える時の一つの neck は、完全剛体の概念が利用できないところにある。有限の大きさの完全剛体の一端に力 (信号) を与えた時、瞬時に他端にその効果が伝わるとすると、伝達速度の上限としての光速が有限であるために矛盾に陥るからである。有限の大きさを有すると、各部分が異なる速度で動く事を認めねばならず、これはこの物体に励起状態の存在を認める事を意味するので素粒子のモデルとするわけにはいかない。電子を大きさのない点だとすると、自己場や電磁質量のところで述べた様に発散が起こる。

(13.59) により、電荷”密度”は電流密度とともに 4 元ベクトルを作っている。静止系では、この電荷密度を積分して、イオンや電子の全電荷を計算できる。運動している粒子に対しても、 $c\rho$ の Lorentz 変換に対する変換性と Lorentz 収縮の効果が相殺し、電荷は保存量である事を示す事が可能である。この電荷をイオンや電子の電荷として実験的に与えられたものを使う。上に述べた様に”大きさの無い点”の電荷”密度”は少し苦しい概念であるが…。同様の言い訳を質量に対しても使う。すなわち、質量も実験的に与えられたスカラーであるとする。この質量を用いると potential (相互作用) が無い時の非相対論的 Lagrangian $L = \frac{1}{2}mv^2$ を相対論的に拡張する事ができる。

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} (\simeq -mc^2 + \frac{m}{2}v^2 : \text{非相対論的近似}) \quad (13.88)$$

非相対論的近似時の付加定数は微分により消えるから、運動方程式には影響を与えない。Lagrangian が (13.88) で与えられると運動量は $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ で与えられるから、

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (13.89)$$

これは、(13.78) の四元速度の空間成分に比例しているから、(13.89) に対応し、四元運動量

$$p^\mu = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}(1, \boldsymbol{\beta}) \quad (13.90)$$

で定義すると、これはベクトルである。自由空間に存在する粒子のエネルギー W は

$$W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \quad (13.91)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (13.92)$$

$$\simeq mc^2 + \frac{m}{2}v^2 \quad (: \text{非相対論的近似}) \quad (13.93)$$

または、

$$W^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (13.94)$$

ここで、 \mathbf{p} は (13.89) で与えられる 3 次元的運動量である。(13.93) は非常に有名な Einstein の式である。

次に (13.90) の 4 元運動量と等置さるべき” 4 次元的な力” を作らねばならない。 $f^{\alpha\beta} j_\beta$ を作ってみる。

$$f^{\alpha\beta} j_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c\rho \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}/c \\ \rho E_x + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_x \\ \rho E_y + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_y \\ \rho E_z + (\mathbf{i} \times \mathbf{B})_z \end{pmatrix} \quad (13.95)$$

右辺の第 0 成分は(電場が電荷密度になす仕事率)/ c 、他の成分は電荷・電流密度に対する Lorentz 力である。これを体積分したものは、電荷・電流に対する 4 次元的力とすると、Newton の運動方程式を相対論に拡張したものになる。通常のベクトルで書くと、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = q(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = q\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} c = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (13.96)$$

(13.96) の内 $m/\sqrt{1-\beta^2}$ の因子を相対論的質量又は、単に質量 m を静止質量と呼ぶ教科書を見るが、我々の立場は m は相対論的スカラーである質量であり、 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ の因子は (13.76) からも分かる通り質点の静止系と実験室系をつなぐ Lorentz 変換に起因する時間の伸びに関係する。ベクトルの一部とスカラーをくっつけた、木に竹をつないだ”物理量”が相対論的質量である。

実験室系で運動方程式 (13.79) を解くと言う立場からは、“質量は運動状態 β に依存して変化する”と考えて差しつかない。但し、この時 \mathbf{p} に依存して時間は伸びると言えば、 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ の因子を 2 回数えた事になり、間違えた結論になるので実験室系の時間だけを時間だと考えねばならない。

四元 potential $A^\mu = (1/c, A_x, A_y, A_z)$ (13.61) が存在する時には、自由空間の運動に対する Lagrangian (13.88) には $j_\mu A^\mu$ の型の相互作用が付加される。potential の相互作用でスカラーを作るものはこの型以外に存在しないから自明だろう。

j_μ は前頁と同様に空間積分し、その時 A^μ はこの粒子の広がり範囲では一定であると考えると、

$$L = -mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \phi) \quad (13.97)$$

運動量 \mathbf{p} は L から導ける。(L は \mathbf{r} と \mathbf{v} を独立変数にとっているから)

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\mathbf{A} \quad (13.98)$$

運動量 \mathbf{p} には自由空間での運動量 (13.89) に $q\mathbf{A}$ の項が加わる。

次に、Hamiltonian H を力学の定義通りに計算しよう。

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\phi \quad (13.99)$$

但し、Hamiltonian は β や \mathbf{v} を \mathbf{p} で書き換えねばならないから (13.98) を少し書き直し、

$$(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - \beta^2} - m^2 c^2 \quad (13.100)$$

上の式の平方に代入すると、

$$(H - q\phi)^2 = m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 \quad (13.101)$$

ゆえに

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\phi \quad (13.102)$$

(13.98) では力学的運動量 $m\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$ 以外に $q\mathbf{A}$ という場に付随する運動量が登場している。相対的に運動する電荷間で Biot-Savart の法則 (の微分型) で与えられる磁場による力だけを計算したのでは作用・反作用の法則を満足しなかったのは $q\mathbf{A}$ という運動量の効果を無視していたためと了解されよう。

問 Lagrangian (13.97) を Euler の方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (13.103)$$

に代入し、(13.96) を以下の様にして導け。

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = q\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \nabla\phi) = q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} - \nabla\phi \quad (13.104)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}} \quad (13.105)$$

$$\mathbf{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{etc.} \quad (13.106)$$

一様電場中の荷電粒子の運動 $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ ととる。(13.96) より $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} =$ 一定ベクトルとなる。成分で書くと、

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{一定} \\ p_y &= \frac{m v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{一定} \\ p_z &= \frac{m v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = p_{z0} + q E t, \quad p_{z0} \text{は積分定数} \end{aligned} \quad (13.107)$$

ここで、 $c^2 \beta^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{m c} \left\{ (p_{z0} + q E t)^2 + m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{m c} \left\{ (p_{z0} + q E t)^2 + c^2 \right\}^{1/2} \quad (13.108)$$

x 、 y 成分は同じようにして解けるから x 成分だけ取ってくる。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{C}{\sqrt{(p_{z0} + qEt)^2 + C^2}} \quad (13.109)$$

ここで、 $C \equiv m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2 = \text{一定}$ とした。

積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| \quad \text{又は,} \quad \begin{cases} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right) & A > 0 \\ \cosh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{|A|}}\right) & A < 0 \end{cases} \quad (13.110)$$

を利用して積分すると

$$x - x_0 = \frac{c}{qE} \sinh^{-1}\left(\frac{p_{0z} + qEt}{C}\right) \quad (13.111)$$

z 成分の積分はもっと易しい。

$$z - z_0 = \frac{c}{qE} \sqrt{(p_{z0} + qEt)^2 + C^2} \quad (13.112)$$

t を消去すると懸垂線である事が分かる。しなくても分かるかな。

光子の質量についての余談　光電効果より決まる光子のエネルギーを振動数の関係式 $W = h\nu$ 、de Broglie 波長と運動量の関係式 $p = h/\lambda$ の双方を用いると、光子に対して、

$$W = pc \quad (13.113)$$

(13.94) と (13.113) を比較すると、光子の質量は 0 である。

光子は、質量は無いがエネルギーと運動量を有する存在である。単色の輻射に対し $\mathbf{r} \times$ (ポインティングベクトルで決まる運動量密度) を角運動量密度と考え、エネルギー密度を $h\nu$ で割ったものを光子の数密度と考えると、光子の角運動量は 1 ヶにつき ($h/2\pi$) よりも小さくならない事が簡単に導ける。ゆとりのある人はこれだけのヒントでチャレンジしてみよう。光子は角運動量を持っているから、光には偏光と言う現象があるのだ！ まわれなければ”円偏光”が無いと言うのは直観的には理解できよう。光子は角運動量を持っている。

さて、二つの物体が相互作用するとはどうする事であろうか？ 一方から出した”信号”が相手に認知される事が大切であろう。信号とは、結局のところエネルギー、運動量、角運動量等の物理量を伴っていて、相手がこの物理量を吸収して状態変化を起こす事により認知されると考えられないだろうか？ 物理を学んだ最初のころ力という概念を学んだ。力を及ぼしあう事が相互作用だと考えるのは自然であるが、力はエネルギーを位置で微分したものであるから、エネルギーが変化すれば力を受けた、即ち相互作用があった、と考えて良いであろう。従って、相互作用という事を、こちらからエネルギーその他を持った粒子が出て行って、相手側がこの粒子を吸収して、即ちエネルギーや運動量その他を受け取って、相互作用が成立する。もちろん相手側からも粒子が放出されてこちらで受け取る事もある。

粒子を交換しあって、こちらと相手側とで力を及ぼしあうと言うアイデアは、この光子のイメージを何か別の粒子(中間子)に置き換え、原子核内の陽子や中性子の間の相互作用を記述する手段として湯川が考え、交換力と呼ばれる。この中間子は質量があり、湯川の考えたポテンシャルは、 $\phi_\pi = \frac{\exp(-m r)}{r}$ 型のものであった。この湯川ポテンシャルによる”電場” E_π 、及びその発散 $\nabla \cdot E_\pi$ を計算してみよ。 $m \neq 0$ ならば湧き口が無くても $\nabla \cdot E_\pi \neq 0$ であり、湯川ポテンシャルの”電場” E_π は無限遠までまっすぐに突き進む事は無い事を確かめよ。

先に Coulomb の法則は、 $\rho = 0$ ならば $\nabla \cdot E = 0$ だから電場は無限遠まで直進すると書いた。これと比較すると、(光子の質量) = 0 という事が無限遠まで減衰せずに行く事の本質である事に気づく。逆に $1/r$ potential が成立する事は力を媒介する粒子(光子)の質量 = 0 という事を示している。

輻射のところでは、Coulomb の法則は光の横波性を示している法則であると書いた。ならば、(質量 = 0) という事と(横波性)とは本質的に同一の事を述べているのであろうか？ 答えは相対論的電子論を勉強するまでお預けとしておこう。

ある種の教科書では、Michelson-Morley の実験を相対論を作る上で、非常に大切な実験であると主張している。一方、Einstein は特殊相対論の最初の論文で、Michelson-Morley の実験を引用していない。そこで、歴史のある時期に、物理学史を研究する人達は Einstein がこの実験を知らずに特殊相対論の論文を書いたのだらうと想像した。

物理は、出来るだけ少ない事実で多くの事が説明出来るのが望ましいという立場もあり得る。従って、この立場からは、引用せずに論理が組み立てられるならば、引用しない事に意味があるとも言える。この立場からの特殊相対論に関しては、その導入部としての考え方は僕のホームページに書いておいたので、興味があれば参照下さい。

<http://www.tac.tsukuba.ac.jp/~yaoki>

第14章 Laplaceの方程式を解く

Laplaceの方程式は線形であるから重ね合わせの原理が成立する。簡単な解を重ね合わせていくと、どんどん複雑な解を作る事ができる。定義域の内外に電荷や多重極能率を置いて、求める境界条件を満足できる様になるはずだ。

- 問題に対称性があれば利用すべきである。
- 二次元の問題では複素数の正則関数が利用できる。
- 変数分離法を利用して複雑さを減らす。級数展開や特殊関数を利用する。
- Green 関数を利用する。

等の案がある。これ等を少し具体的に挙げながら調べていこう。

簡単な復習 二次元の Laplace eq. の円筒座標での解:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (14.1)$$

φ は θ に依存しないならば、 $\varphi = \varphi(r)$ とすると、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad r \neq 0 \text{ ならば } \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (14.2)$$

一回積分して

$$r \frac{d\varphi}{dr} = c_1 = \text{const.} \quad \text{又は} \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{c_1}{r} \quad (14.3)$$

もう一回積分して

$$\varphi = c_1 \ln r + c_2 \quad (14.4)$$

この解は対数ポテンシャルと呼ばれる2次元の問題の基本的な解である。

3次元の Laplace 方程式の極座標での解:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0 \quad (14.5)$$

極角 θ 、方位角 ψ に依存しない解は

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (14.6)$$

一回積分すると

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = c_1 \quad \text{又は} \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \quad (14.7)$$

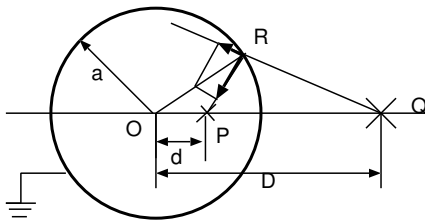
もう一回積分して

$$\varphi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad (14.8)$$

これが常識的な Coulomb potential である。電荷が存在しなければ、potential $\phi = 0$ としておけば良いが、どこかに電荷が存在するならば積分定数 c_1 は $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を体積分する事により定まる。

又は、何処かの点で、電位か電場を与えなければ積分定数は定まらない。

簡単な例



内径 a の接地された無限に長いパイプ状導体の中心から d の位置に線電荷密度 σ の細い電線が中心軸に平行に置かれた場合の potential を計算してみよう。これは 2 次元の問題である。 $d = 0$ ならば (14.4) で積分定数 c_2 を $r = a$ で $\varphi = 0$ となるようにきめればよい。

この結果

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a}{r} \quad (14.9)$$

$0 < d < a$ の時がこの場合の問題で、 $\varphi = 0$ の等ポテンシャル面が円を描いているから、この円がアポロニウスの円になるように距離 D と、この点における線電荷密度 Σ をきめればよい。物理実験 1 の電場測定でやった通りである。ここではアポロニウスの円に気がつかなかった時にこれを思い出す方法で解いてみよう。

指導原理： 円筒内面上での電場が必ず円筒に直交するように原点から D の位置に Σ なる線電荷密度の電線を置けばよいとする。(この境界条件は金属の内部では電場が無いという事と、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を積分して得られる \mathbf{E} の接線成分の連続性の条件から導かれる。又は、電場 \mathbf{E} は等電位面に直交しているという要請。)

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{D}$, $\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$ と書くと、 σ が作る電場 $\mathbf{E}_\sigma = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^2}$, Σ が作る電場 $\mathbf{E}_\Sigma = \frac{\Sigma}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{D}}{|\mathbf{r} - \mathbf{D}|^2}$ は \mathbf{r} に平行でなければいけない。又、 $\mathbf{d} = d\hat{e}$, $\mathbf{D} = D\hat{e}$ とも書ける。($\mathbf{E}_\sigma + \mathbf{E}_\Sigma$ の \hat{e} 成分) = 0 から

$$\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{D}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} \right)^2 = -\frac{D\Sigma}{\sigma d} = \text{const.} \quad (\sigma \text{ と } \Sigma \text{ は異符号!}) \quad (14.10)$$

これから $\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \sqrt{-\frac{\Sigma D}{\sigma d}} = \text{const.}$ (\mathbf{r} に依存しない)。即ち R は P 及び Q からの距離の比が一定な点の軌跡である事が分る。 D と Σ は未定であったが、 R として直線 OQ と円筒の二

つの交点をとると、

$$\frac{D-a}{a-d} = \frac{a+D}{a+d} \quad \text{より} \quad D = \frac{a^2}{d} \quad (14.11)$$

と D が決まる。この $Dd = a^2$ という関係式は反転法のところで、再度登場する。 D が決ると、

$$\left(\frac{D-a}{a-d}\right)^2 = -\frac{\Sigma D}{\sigma d} \quad \text{より} \quad \Sigma = -\sigma \quad (14.12)$$

である。 $\Sigma = -\sigma$ という非常に単純な結果が導けた時には、もっと簡単な指導原理からこの結論が下せるに違いないと考えよう。移項して $\Sigma + \sigma = 0$ と書いてみると、電氣的に中性になればよいと言っているのに気付くだろう。円筒軸に直交する面内で遠方からみると、内部針金の電荷は導体円筒で静電遮蔽されていてその存在に気付かない様になっていないといけない。別の言葉で言うと、線密度 σ と Σ からの potential の和は対数 potential よりもはやく距離と共に減少しなければいけない事を示している。

最初に静電シールドのために遠方では対数 potential よりもはやく 0 になるべきだ (対数 potential は発散する。これは無限大の長さに均一の電荷密度で電荷がのっているという事は無限大の電荷があるからだとして理解しておけばよい。) と考えると、 OQ 上の点 $X(\overline{OX} = x)$ での potential $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{d-x}{a} \right| - \frac{\Sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{D-x}{a} \right| + \text{const.} \quad (14.13)$$

の様に振り舞い、 $x \rightarrow \infty$ とすると 0 となるためには $\sigma = -\Sigma$ が簡単に結論される。猶、ここで対数の変数に $\frac{1}{a}$ が登場しているのは、無次元化するためである。

$$\sigma + \Sigma = 0 \quad \text{を代入すると} \quad \varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{d-x}{D-x} \right| + c_2 \quad (14.14)$$

円筒内面上で $\varphi(x) = 0$ となるためには P, Q からの距離の比が一定でなければならないという結論が簡単に導ける。

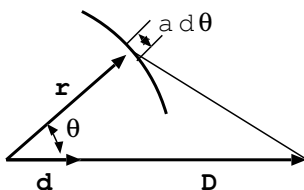
$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{d-r}{D-r} \right| \quad (14.15)$$

とすると、円筒内面上の電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{d}-\mathbf{r}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{D}-\mathbf{r}|^2} \right) \quad (14.16)$$

たしかに電場は \mathbf{r} のほうを向いている。

次に円筒面内に誘起される電荷を計算しよう。



(3.32) を思いだし、円筒の微小体積で $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を計算し、導体内部には電場が無いという事実を利用すると、面電荷密度 $s = \epsilon \cdot E_r$ (E_r は \mathbf{r} 方向内の電場) となるから、これを全周にわたって積分すればよい。

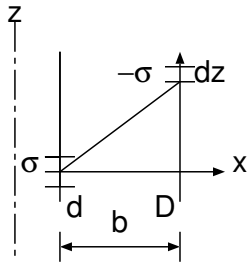
$$S = \int_0^{2\pi} a d\theta \cdot \epsilon \cdot \left(-\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) \left(\frac{a}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} - \frac{a}{a^2 + D^2 - 2aD \cos \theta}\right)$$

ここで積分 $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} = \frac{\pi}{a^2 - d^2}$ だから

$$= a\epsilon \left(-\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) \left(\frac{2a\pi}{a^2 - d^2} - \frac{2a\pi}{D^2 - a^2}\right)$$

$$= -\sigma$$

内部針金上の電荷と内面上の電荷は等しい。即ち針金から出発した電気力線は全てきっちりと内面上で終わっている事が分る。仮想電荷 Σ はこの立場からは不要である。



針金が受ける単位長さの引力を計算してみよう。単位長さ当たり、 σ の電荷があり、この電荷と鏡像電荷からの引力を全部加え合わせればよい。

σ と $(-\sigma dz)$ の間の引力は $\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\sigma(-\sigma dz)}{b^2 + z^2}$ この内 z 成分は上半分と下半分の寄与が相殺するから x 成分を計算する。

$$F = \frac{-\sigma^2}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{b^2 + z^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

$$= \frac{-\sigma^2 b}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \text{ここで } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{b^2} \right\}$$

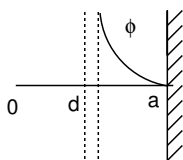
$$= -\frac{\sigma^2}{2\pi\epsilon} \frac{1}{D-d}$$

$$F = -\frac{\sigma^2}{2\pi\epsilon} \frac{d}{a^2 - d^2}$$

これが針金が単位長さあたりに受ける力。

鏡像電荷を使わないと積分は非常に面倒だろう。面電荷密度の θ 依存性を考えて $s(\theta) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right) \frac{1}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}$ とした時、これを距離の平方 $(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta + z^2)$ で割って、 x 方向の成分 $(a \cos \theta - d)/\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta + z^2}$ をかけ、 $ad\theta, dz$ で積分すればよい。

次に単位長さ当たりの静電容量を評価しよう。円筒内の針金の太さが 0 だと、potential に発散が起きるから静電容量は計算できない。この針金の直径 $2\delta (\neq 0)$ を非常に細いと仮定して計算してみよう。



$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{d-x}{D-x} \right| + c_2 \quad (14.17)$$

電位差は $\Delta\varphi = \varphi(a) - \varphi(d + \delta)$ とすると、

$$|\Delta\varphi| = +\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \left| \ln \frac{a-d}{D-a} - \ln \frac{\delta}{D-d-\delta} \right| \quad (14.18)$$

ここで、

$$D-a = \frac{a^2}{d} - a = \frac{a(a-d)}{d}, \quad D-d = \frac{a^2}{d} - d = \frac{a^2-d^2}{d}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| &\cong +\frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left\{ (a-d) \cdot \frac{d}{a(a-d)} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{a^2-d^2}{d} \right\} \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{a^2-d^2}{a\delta} \right) \end{aligned}$$

従って、単位長さ当たりの静電容量 c は

$$c = \frac{\sigma}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{a^2-d^2}{a\delta}} \quad (14.19)$$

$|d| \ll a$ ならば $\frac{a^2-d^2}{a\delta} = \frac{a}{\delta} \left(1 - \frac{d^2}{a^2} \right)$ だから

$$\ln \frac{a^2-d^2}{a\delta} \simeq \ln \frac{a}{\delta} - \frac{d^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{a} \right)^4 \dots \quad (14.20)$$

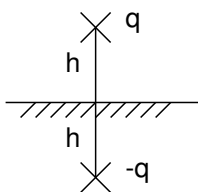
$d=0$ の時、静電容量は $\ln(a/\delta)$ という依存性を示す。 a/δ さえ同じならば a が 10 m でも 2 cm でも構わない。太さの異なる共軸導体をつなぐ時、いつも a/δ を同じにするのがよい。

$d \neq 0$ の時、 c は $(d/a)^2$ でしか効かないから、中心から少しぐらいずれても影響は小さい。但しこう言えるためには $\delta \ll a$ でなければならない。このページのどこで $\delta \ll a$ という条件が使われただろうか？ 考えてみよ。ヒント、 δ を a よりも少しだけ小さくして且つ $d \neq 0$ とした時の針金の上の電荷分布を考えてみよ。

$d \neq 0$ の時 d は必ず d^2 で式に登場している。波の伝播の時に注意した様にこれは d の符号情報は無意味であることを意味する。 $d > 0$ を右にズレる事だとすると $d < 0$ は左へズレる事である。問題の回転対称性から考えて当然だ。

この様に左右に依存しない、符号に依存しない等の概念をパリティが保存すると言う。

鏡像法



最も単純な鏡像法は導体としての大地から高さ h の位置に電荷 q を置いた時の potential 問題であろう。大地表面の電位を 0 V とした時、図のように大地に対し対称点に $-q$ の電荷を置くと問題が簡単に解ける事は明らかだろう。中波や長波のアンテナの長さを半分にするために利用できる。

大地の上に電荷を置く代わりに、積乱雲を置いたら、どんなイメージを諸君は思い描くだろうか？ 積乱雲が走ると地中で鏡像が走って電流が流れる。大地が発熱し雲の運動にブレーキがかかる。

先に挙げた円筒と針金の例は大地を丸めて筒にした場合に相当する。この時には原点と無限遠点を対応させなければいけないので、 $Dd = a^2$ という関係が導かれた。 d 又は D が h の様な役目をしている。(正確ではないが...)

筒にする代わりに丸め込んで上半平面を球の内部に押し込めてしまう事も可能である。この時、球の半径を a 、電荷の置かれた動径位置座標を r とすると鏡像の半径 r' は $r' = a^2/r$ で決定される。球と電荷の問題が解ける。

鏡像法は対象とする面が平面でない時には鏡らしくないので反転法と呼ばれる。一般には、 $\varphi(r, \theta, \phi)$ がある問題に対する Laplace 方程式の解だとすると、

$$\frac{1}{r} \varphi \left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi \right) \quad (14.21)$$

も Laplace の方程式の解になっているという形で述べられる。直接計算してみるとよい。

関数論の学習過程で原点にあった特異点を無限遠点にとばす手段として $w = a/z$ という様な座標変換をしたのを覚えているであろうか？ 上の式で $a = 1$ 即ち単位面による反転を行っているのである。(実際はこの操作を Lord Kelvin が真似たものだろう)。

複素関数の応用 二つの実変数 x, y から複素変数 $z = x + iy$ を作る。 z の正則な関数 $f(z)$ を実部 u と虚部 v に分ける。

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad (14.22)$$

当然 i は虚数単位 ($i^2 = -1$)。一変数の関数は数直線上で右から Δx を 0 に近づけた時と、左から Δx を 0 に近づけて微分 (商) を計算した時、両者が一致すれば微分可能であった。二変数の関数では $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とした時 $\Delta z \rightarrow 0$ とするやり方には、 Δx と Δy をどのように 0 に近づけても微分 (商) が同一の値にならねばならぬという条件から、次の Cauchy-Riemann の関係式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (14.23)$$

(14.23) を x や y で偏微分すると、実関数 $u(x, y)$ や $v(x, y)$ が Laplace の方程式を満足する事が導ける。

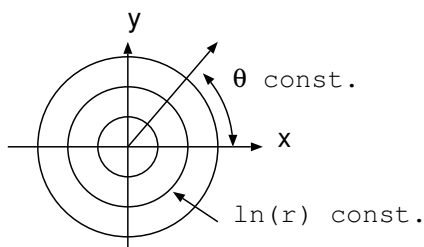
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (14.24)$$

これはうまい！ 二次元の Laplace 方程式を満足する関数はいくらでも作る事ができる。微分可能な複素関数を持って来て、その実 (虚) 部を (x, y) の関数だと思えばよい。

$u(x, y)$ を potential だと思事にしよう。即ち $u = \text{const.}$ という曲線が等 potential 面を与え、電場は $-\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ で与えられる。ところで (14.23) から、

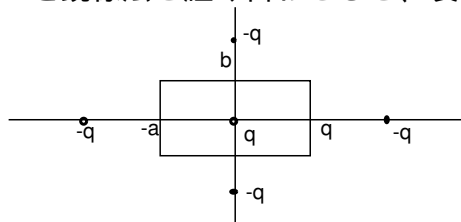
$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14.25)$$

である。即ち、 $u = \text{一定}$ という曲線と $v = \text{一定}$ という曲線は直交している。一方、 $u = \text{一定}$ という曲線は電場とも直交しているので、 $v = \text{一定}$ という曲線は電場に平行である。従って、 $u = \text{一定}$ という曲線を等ポテンシャル面としたから、これに直交する $v = \text{一定}$ という曲線は電気力線を与える事になる。お互いに直交しているのだから u と v の役割は入れ換えが可能である。



例えば、 $f(z) = \ln z = \ln r + i\theta$ ($z = x + iy = re^{i\theta}$ と極座標表示すると) と書けるから、 $\ln r = \text{一定}$ は針金の作る電気力線に対応し、 $\theta = \text{一定}$ は等電位面を与えている。

$\ln z$ を鏡像法と組み合わせると、長方形の金属棒の中央に針金を張った問題が解ける。



左図で $+q$ に対して4つの $-q$ の鏡像法がある。鏡が左右に二面あるから、鏡像の鏡像も作らねば...。この操作は無限に続く。数値計算上は要求精度で打ち切ればよい。次の様な項を加え合わせる事になる。

$$\begin{cases} \ln z + \{\ln(z + 4a) + \ln(z - 4a)\} + \dots \\ -\{\ln(z + 2a) + \ln(z - 2a)\} - \{\ln(z + 6a) + \ln(z - 6a)\} - \dots \end{cases} \quad (14.26)$$

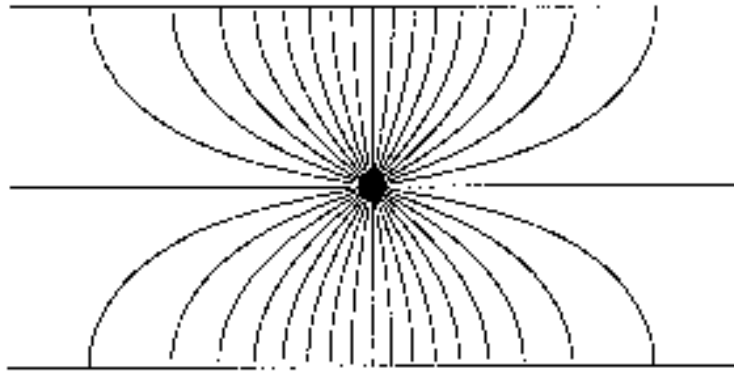
$z \rightarrow z \pm 2b \text{ etc}$

この時 $\sin z$, $\cos z$ に対する無限乗積の知識があると和が簡単になる。

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) \quad (14.27)$$

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{1}{(2n-1)^2} \left(\frac{2z}{\pi}\right)^2\right\} \quad (14.28)$$

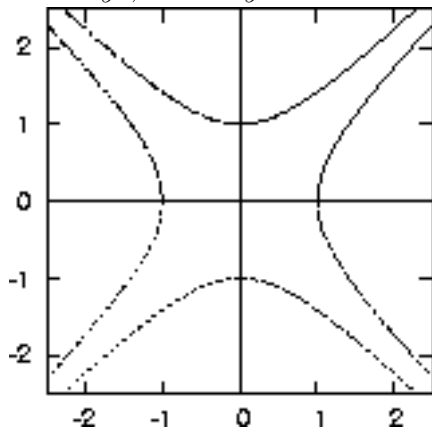
この計算は多芯線放射線検出器の potential の計算に有用である。次のページに平行平板コンデンサの中央に細い線を置いた場合及び細長い長方形の金属パイプの内部に3本の細い線を置いた場合の等電位線を描いてみた。



もう一つの複素関数の例

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \quad (14.29)$$

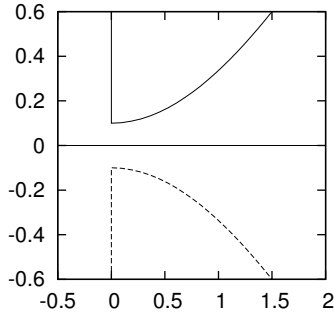
$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ とおくと、これ等はお互いに直交する直角双曲線を与える。



$u = \pm$ 一定を等電位面と考えて、この形に (z 方向には十分長い) 電極を作り電圧をかけると、 $v =$ 一定が電気力線を与える。 z 軸に平行に、 xz 面内を走っているイオンは変位 x に比例した力 (例えば引力) を受ける。この時、 yz 面内を走っているイオンはやはり y に比例した力を受けるが、力の性質 (上の例ではこちらは斥力) が異なる。電極が4つあるので quadrupole (四重極) lens と呼ばれている。

このレンズを2組うまく組み合わせると xz , yz 両面内に引力 ($x = 0$ or $y = 0$ へ向かう力) を全体として発生させることができる。電極にかける電圧を一定電圧だけでなくこれに交流を重ね合わせると、 z 軸方向に走るイオンの内 m/e が特定のものだけを通過させることができる。quadrupole mass filter と呼ばれ、超高真空装置には不可欠の測定器となっている。

$v = \pm$ 一定を等磁位面を考えて磁石を作ると、やはり quadrupole lens を作る事ができる。



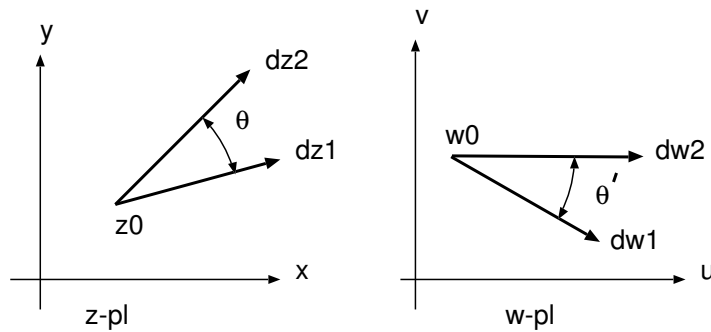
quadrupole magnetic lens は第2次大戦後の加速器技術を一変させてしまった。KEK の主リングの磁石の断面がちょうど右図のようになっていて、これは quadrupole lens の左半分だけを取ってきたものに類似していることに気付くだろう。(強収束加速器)

z^2 がうまくいくなれば z^3 はどうだろうかと考えるのが人情というものだ。6重極磁場は磁気分析器 (magnetic spectrograph) の収差の補正や、偏極イオン源での磁気能率の向きの選択などに用いられる事がある。

quadrupole mass filter のもう少し詳しい話は、後で提供する。

Schwartz-Christoffel の変換とその応用 複素関数を応用すると、Laplace eq. の解は無限に作れるが、自分の計算したい境界条件を満足しているわけではない。

等角写像性 これに関連して直線を多角形に変換する座標変換があるので少し調べておこう。二枚の複素平面 $z-pl$ と $w-pl$ を用意し、 $w = f(z)$ により $z-pl \Rightarrow w-pl$ への変換をする。



$z-pl$ 上の点 z_0 は、 $w-pl$ 上の $w_0 = f(z_0)$ に座標変換され、かつ、

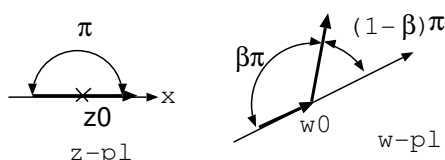
$$dw = \frac{df}{dz} dz \quad (14.30)$$

と微小変位が規定される。 z_0 から二つの異なる方向へ向かう短い直線 dz_1, dz_2 を考える。 w 平面でも対応して、2本の線 dw_1, dw_2 が w_0 から出て行く。この時、2本の直線の偏角に以下の関係がある。

$$\begin{aligned} \arg(dw_2) - \arg(dw_1) &= \left\{ \arg\left(\frac{df(z_0)}{dz}\right) + \arg(dz_2) \right\} - \left\{ \arg\left(\frac{df(z_0)}{dz}\right) + \arg(dz_1) \right\} \\ &= \arg(dz_2) - \arg(dz_1) \end{aligned} \quad (14.31)$$

即ち上図の $\theta = \theta'$ が成立する。この時、任意の方向から z_0 へ近づく時、微係数は近づく方向に依存しないという要請により $\left(\frac{df}{dz}\right)$ の偏角が相殺されている事に気付くだろう。(14.31) より $f(z)$ は局所的には直線を直線に変換し、図に示された様に、2直線のつくる角度は変化しない。この事を等角写像と呼ぶ。これでは折線は作れないように見えるが、1点だけ例外がある。(14.30) で $\frac{df}{dz} = 0$ ならば、 $dz \neq 0$ であっても $dw = 0$ となる。即ち (14.30) \rightarrow (14.31) へは単純に進めないからこの点で写像の等角性が破れている。どの程度破れているかを調べるために $f(z) = z^\beta$ とおいて調べてみると、

$$\arg(dw_2) - \arg(dw_1) = \beta\{\arg(dz_2) - \arg(dz_1)\} \quad (14.32)$$



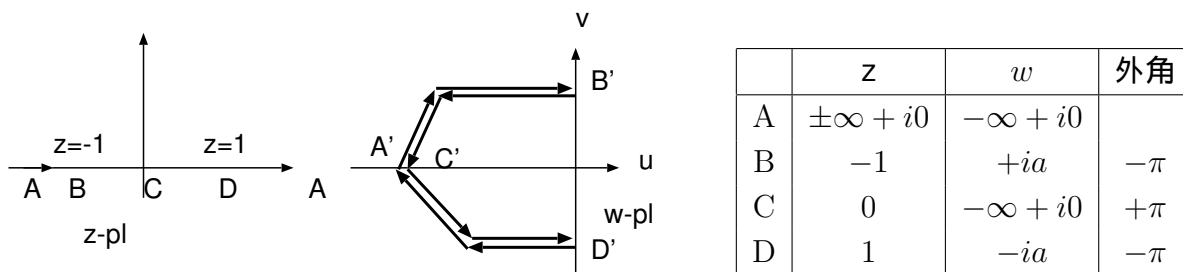
である事がわかる。偏角の差が β 倍に拡大(縮小)される。 $w = w_0$ の近傍で $\frac{df}{dz} \propto z^{\beta-1}$ の様に変化すると、 $z - pl$ 上で偏角が π の変化に対し、 $w - pl$ 上では内角が $\beta\pi$ 、外角が $(1 - \beta)\pi$ だけ変化する。

これだけの予備知識により、 $z - pl$ 上で z_1, z_2, \dots, z_n に対応する $w - pl$ 上の点で外角が $\alpha_i \pi (i = 1, \dots, n)$ となる座標変換 $f(z)$ は

$$\frac{df}{dz} = \prod_{i=1}^n \frac{A}{(z - z_i)^{\alpha_i}} \quad (14.33)$$

により与えられることが分かる。ここで A は複素定数であり、 $w - pl$ 上での写像の大きさと方位を決めるのに使われる。

例. 平行板コンデンサー Schwartz-Christoffel の変換を利用する例として、 z 平面上の実軸を w 平面の折れ線、 z 平面上の上半面を w 平面の折れ線で囲まれた内部に変換する座標変換を取り上げる。 $z - pl$ と $w - pl$ の対応関係は表の様になっている。 z 平面の実軸の無限遠点 A は一致している。



今の場合、折れ線の内部の面積は0である。上の表と (14.33) から

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{z^2 - 1}{z} = A \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (14.34)$$

この式は簡単に積分出来て、

$$w - w_0 = A \left(\frac{z^2}{2} - \ln z \right) \quad (14.35)$$

定数 A と w_0 は、 $\epsilon \rightarrow 0$ として、次の様にしてきまる。

$$\begin{aligned} z \rightarrow -1 - \epsilon \text{ とすると} & \quad \frac{1}{2}z^2 - \ln z \rightarrow \frac{1}{2} - i\pi & w \rightarrow ia \\ z \rightarrow 1 + \epsilon \text{ とすると} & \quad \frac{1}{2}z^2 - \ln z \rightarrow \frac{1}{2} & w \rightarrow -ia \end{aligned}$$

これから $A = -\frac{2a}{\pi}$, $w_0 = \frac{a}{\pi} - ia$ 。よって

$$w = \left(\frac{a}{\pi} - ia \right) - \frac{2a}{\pi} \left(\frac{z^2}{2} - \ln z \right) \quad (14.36)$$

$z - pl$ 上では対数 potential $\ln z$ は物理的に意味のある解だとすると、 $w - pl$ 上ではこれがどの様に写像されるかを次に調べよう。

天下りであるが、次の U を $z - pl$ 上での複素 potential だとして。

$$U = \frac{V_0}{i\pi} \ln z = \phi + i\psi \quad (14.37)$$

但し、

$$z = re^{i\theta}, \quad \phi = \frac{V_0}{\pi}\theta, \quad \psi = -\frac{V_0}{\pi} \ln r \quad (14.38)$$

これは $z - pl$ の正の実軸では $\phi = 0$ 、負の実軸 ($\theta = \pi$) では $\phi = V_0$ (ボルト) だとした事になっている。(14.37) を (14.36) に代入すると、

$$z = \exp\left(\frac{i\pi}{V_0}U\right) \text{ だから} \quad (14.39)$$

$$w = \left(\frac{a}{\pi} - ia \right) + \frac{2a}{V_0}i \left\{ U - \frac{V_0}{2\pi i} \exp\left(2\pi i \frac{U}{V_0}\right) \right\} \quad (14.40)$$

U で微分すると、

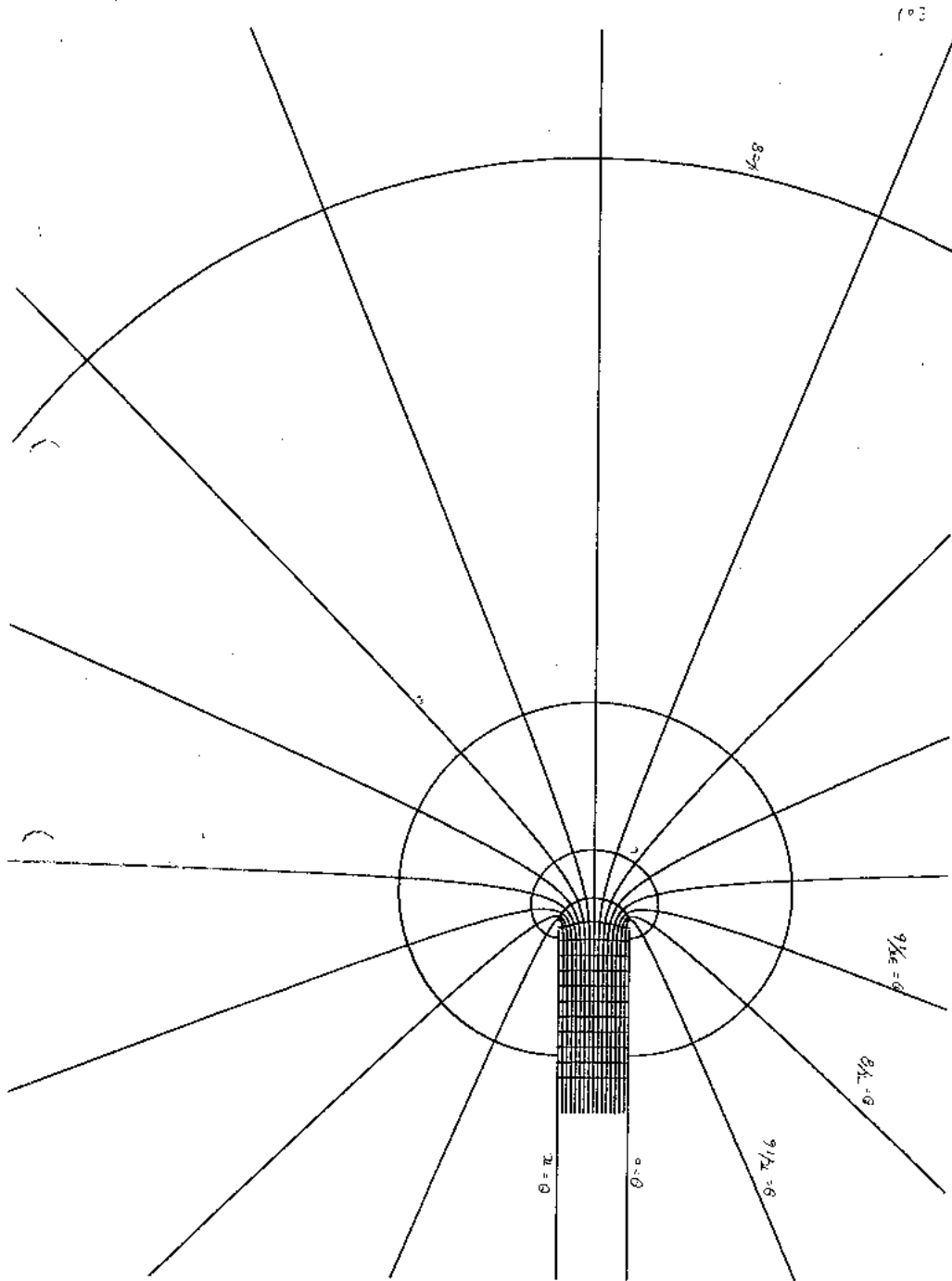
$$\frac{dw}{dU} = \frac{2a}{V_0}i \left(1 - \exp\frac{2\pi i U}{V_0} \right) = \frac{2a}{V_0}i \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\pi\psi}{V_0}\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{V_0}\phi\right) \right\} \quad (14.41)$$

(14.40) の変換で potential $\phi = \text{一定}$ という曲線を $w - pl$ 上でたどると平行平板コンデンサーの等 potential 面が描ける。次ページの図を参照。15本の等 potential 線は $\theta = \pi/16$ の整数倍に対応する。 $\psi = 0$ ($r = 0$) は B' と D' を結ぶ曲線であり、 $\psi > 0$ ($r < 1$) はコンデンサーの内部、 $\psi < 0$ ($r > 0$) はコンデンサーの外部の電気力線を与える。

(14.41) の微分に際し、 dU としては $d\phi$ 、 $d\psi$ 又はこの任意の線形結合をとってもよい(どちらから近づけるかに微分は依存しない)から、 dU として $d\phi$ をとると、 $dw/d\phi$ は ψ を一定にして ($dU = d\phi + i d\psi$ だから $dU = d\phi$ をとる事は $d\psi = 0$ を意味している) potential の値が $d\phi$ だけ変化している2点の変位 dw を与える。 $\left(dw = \frac{dw}{d\phi} \cdot d\phi \right)$ この逆数は電場を与える。

$$|E| = \left| \frac{dU}{dw} \right| = \frac{V_0}{2a} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{4\pi\psi}{V_0}\right) - 2 \exp\left(-\frac{2\pi\psi}{V_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi\phi}{V_0}\right) \right\}^{-1/2} \quad (14.42)$$

$0 \leq \theta \leq \pi/4$ 又は $3\pi/4 < \theta \leq \pi$ だと分母 $\{ \} = \min$ を満足する θ が存在するから、この場所で放電が開始する。他方 $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ ならば局所的に電場が最大になることはない。 $\pi/4$ 又は $\theta = 3\pi/4$ を電(磁)極の形とするのがよい。この時の形をロゴウスキー曲線と呼ぶ。電極上での電場を計算し、電極上での電荷密度に変換してみよ。



変数分離法による問題の単純化 変数分離法の指導原理は単純である。物理数学や量子力学でも習うだろうから簡単に進めよう。3次元の Laplace の方程式を極座標で表したものを

例にとろう。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (14.43)$$

ここで (r, θ, ψ) が座標変数であり、 φ が解くべき関数である。 φ は r に依存する部分 $R(r)$ と (θ, ψ) に依存する部分 $Y(\theta, \psi)$ の積で与えられると仮定する (変数分離)。

$$\varphi(r, \theta, \psi) = R(r)Y(\theta, \psi) \quad (14.44)$$

(14.44) を (14.43) に代入し $\varphi(r, \theta, \psi)$ で割り、 r に依存する部分を左辺に移すと、

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} \right\} \quad (14.45)$$

左辺は r のみの関数だから (θ, ψ) に依存しない。他方右辺は (θ, ψ) の関数だから r に依存しない。両者が等しいのだからこれは一定値以外ではありえない。一定値を A とおくと、

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \psi^2} = -AY \quad (14.46)$$

ここでもう一度変数分離を Y に対して要求し、 θ の関数 Θ と ψ の関数 Ψ の積だとすると、

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + A \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = B = \text{定数} \quad (14.47)$$

これから

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = -B\Psi \quad (14.48)$$

として、 Ψ が方位角 ψ に対する周期 2π の周期関数になるためには整数 m を用いて、

$$B = m^2, \quad \Psi = Ce^{im\psi} + De^{-im\psi} \quad (14.49)$$

と書けねばならない。これで Ψ は確定した。(14.47) より Θ の方程式は

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(A - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (14.50)$$

独立変数を $x = \cos \theta$ に変更すると、 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}$ であるから

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right\} + \left(A - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta = 0 \quad (14.51)$$

$m = 0$ の時の (14.51) の解は Θ を x のべき級数に展開するとよい。このべき級数は $x = 0$ で発散してはいけないとすると、 x^0 又は x^1 から始まり、 l を 0 又は自然数として $A = l(l+1)$ となる時に限り、有限項で打ち切れ、最高次が x^l の多項式となる。

(14.51) は線形の微分方程式だから Θ には任意定数の不定性がある。 $x = 1$ の時、多項式の値が 1 になる解を $P_l(x)$ と書き、Legendre の多項式と呼ぶ。

(14.51) は独立変数を x から $y = -x$ に変換しても同じ形だから (即ち parity を保存するから) $P_l(x)$ は x の偶数次だけ又は奇数次だけの関数だとしておける。

(14.51) は二階微分方程式だからもう一つ独立な解があり、こちらは $|x| \leq 1$ で有界ではないので今のところ無視しておけばよい。(第2種 Legendre 関数と呼ばれている。) 即ち $P_l(x)$ は、 $P_l(1) = 1$, $P_l(x) = (-)^l P_l(-x)$ であり、且つ

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (14.52)$$

を満足する l 次の多項式である。

$m \neq 0$ の時は、次式で定義される $P_l^m(x)$ が (14.51) の解である事が直接方程式に代入することで確認できよう

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \quad (14.53)$$

多重極展開のところで注意したように、Laplace の方程式の解を微分したものは Laplace の方程式の解であるという指導原理とよく似ているから、理解は困難ではないと思う。 $P_l^m(x)$ は Legendre の陪関数と呼ばれていて、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の多項式である。 $\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$ であるから $m \neq 0$ の場合には x の多項式にはならない。

(14.53) に登場する l は 0 又は正の整数、 m は整数であるが、 $P_l(x)$ が l 次の多項式だから、微分が恒等的に 0 にならないためには $m \leq l$ という条件がつく。又、(14.51) は m の符号によらないから、 $|m| \leq l$ としておけばよい。

P_l, P_l^m の数値計算は漸化式を利用するのが、簡便で精度が損なわれにくい。 m を整数とし、 $\Psi_m(\psi)$ を次式で定義すると、

$$\Psi_m(\psi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\psi} \quad (14.54)$$

$\Psi_m(\psi)$ は方位角 ψ に対して正規直交関数系を構成する。

又、 m を一つ固定した時

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (14.55)$$

という関係があるので、

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x) \quad (14.56)$$

も、 $-1 \leq x \leq 1$ の x の範囲で正規直交関数系を作っている。従って

$$Y_l^m(\theta, \psi) = (-)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\psi} \quad (14.57)$$

は (θ, ψ) 空間で正規直交関数系を作っている。ここで平方根の前の位相はなくても正規直交関数系を作るが、これがあると次の m を一つだけ上げたり下げたりする次の演算が利用できる。

$$\left. \begin{aligned} l_{\pm} Y_l^m(\theta, \psi) &= \sqrt{(l \pm m)(l \pm m + 1)} Y_l^{m \pm 1}(\theta, \psi) \\ l_{\pm} &= e^{\pm i\phi} \left\{ i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \pm \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14.58)$$

動径方向の解は (14.45)、(14.46) であるから、

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = AR \quad (14.59)$$

$R = \frac{u}{r}$ とおくと、上の微分方程式は次のように変形される。

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{A}{r^2} u \quad (14.60)$$

u を r のべき級数に展開してみると、 l を 0 または自然数として

$$\left. \begin{aligned} u &\propto r^{l+1} \quad \text{又は} \\ u &\propto r^{-l} \end{aligned} \right\} \quad (14.61)$$

$$A = l(l+1) \quad (14.62)$$

が導ける。この l は (14.52) に登場した l と同じである。 $l = 0$ とすると $R = \alpha + \beta/r$ という Coulomb pot. が登場する。

先に登場した (27 ページ付近)、一様電場中に置かれた球の例は $l = 1, m = 0$ の場合に対応し、 $r < a$ では $R \propto r$ 、 $r > a$ では $R \propto 1/r^2$ となっている。

結局、極座標での Laplace eq. の解は

$$\phi = \sum_{lm} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (14.63)$$

という形に表現できる。展開係数は境界条件を上のように展開できれば簡単にきまる。

境界条件の角度依存性が $f(\theta, \psi)$ と与えられた時に、これを球面調和関数 Y_{lm} で展開するには、 Y_{lm} の射影演算子を利用する。即ち、

$$f(\theta, \psi) = \sum_{lm} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (14.64)$$

と展開できたと仮定すると、 f_{lm} を決定する式は、

$$f_{lm} = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi Y_{lm}^*(\theta, \psi) f(\theta, \psi) \quad (14.65)$$

であるから、" Y_{lm}^* を左からかけて、 θ, ψ で積分する" という操作が $f(\theta, \psi)$ の内の Y_{lm} 成分を引き出す射影演算子である。ベクトル A の x 成分 A_x を引っ張り出すには x 方向の単位ベクトル \hat{e}_x との内積をとればよいとしたのを比較すると、今の場合、内積 $\leftrightarrow (\theta, \psi)$ での積分 $\hat{e}_x \leftrightarrow Y_{l,m}^*(\theta, \psi)$ という対応関係がある。

(14.65) の展開係数の計算式をみると、 f_{lm} の計算には $f_{LM}\{L \neq l, M \neq m\}$ の存在は全く影響していない事に気付くだろう。即ち $f(\theta, \psi)$ の展開にどこまでの l, m を使い、 $f(\theta, \psi)$ を展開するかには全く関係がない。継ぎ足し可能と呼ばれ、非直交系での展開（例えば最小二乗法）とは著しく異なる。即ち、非直交関数系を用いた展開では f_{lm} の値は、 $f_{LM} (L \neq l, M \neq m)$ の値の影響を受ける。

(14.64) の複素共役をとったものとの積を全立体角にわたって積分すると、

$$\int |f(\theta, \psi)|^2 d\Omega = \sum_{lm} |f_{lm}|^2 \quad (14.66)$$

が導ける。右辺は正（又は 0）の数の和だから、和の範囲を広げるほど大きくなる。この意味で (14.64) の展開は、項数をどんどん増していくと、値の小さい方から正しい値に近づいていく。否定的な意味で言うと、(14.64) の展開は、無限項の和をとらないと絶対に正しい値を示さない。

デカルト座標では、球面調和関数は $\sin \theta, \cos \theta$ の l 次の同次式だからこれに r^l をかけると、 x, y, z の l 次の同次式として振舞う。(14.61) より、 r^{-l-1} の項も、 $\frac{1}{r^{2l+1}} \times (x, y, z$ の l 次の同次式) となる。

大口を開けて襲い掛かる狼の口に手をつっこんでほら吹き男爵が狼の内、外をひっくり返したように、 $|r|=1$ とすると、原点で正則な r^l の解と、原点で発散する $r^{-(l+1)}$ の解とが連続的につながるのが想像できよう。これが反転法や鏡像法の考え方であった訳である。

円筒座標の場合

ラプラスの方程式は、次式である。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.67)$$

前と同様に変数分離する。

$$\phi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \quad (14.68)$$

Θ の分離定数を $-l^2$ とすると、

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -l^2 \Theta \quad (14.69)$$

この解は $\sin l\theta, \cos l\theta$ であり、 $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ での連続性を要求すると l は整数である。

$$\Theta = A \sin l\theta + B \cos l\theta, \quad l \text{ は整数} \quad (14.70)$$

Z の分離定数を k^2 とすると、(k^2 は正にも負にもなるとする)

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z \quad (14.71)$$

この解は e^{kz} と e^{-kz} である。但し $k^2 < 0$ ならば $\kappa^2 = -k^2$ と書くと、 $e^{i\kappa z}, e^{-i\kappa z}$ かも知れない。

$$Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad \text{又は} \quad Ce^{i\kappa z} + De^{-i\kappa z} \quad (14.72)$$

R 方向の方程式は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (14.73)$$

又は、無次元量 ρ を次式で定義すると、

$$\rho = kr \quad (14.74)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{l^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (14.75)$$

この方程式が "物理学者の好きな" と陰口をたたかれる Bessel の微分方程式である。Bessel が惑星の軌道に関してこの関数を研究した。2 階の微分方程式だから独立解が 2 つあり、原点で正則な解を $J_l(\rho)$ と書き、Bessel 関数、正則ではない解を $N_l(\rho)$ とか $Y_l(\rho)$ と書き Neuman 関数と呼ばれる。これだけでは定数倍の自由度が残るし、Neuman 関数には Bessel 関数を加える自由度も残る。

$$J_l(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m! \Gamma(l+m+1)} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{l+2m} \quad (14.76)$$

とすると、Bessel 関数は完全にきまる。 $\rho < l$ ではほとんど変化がなく、 $\rho \sim l$ で山を作り、これよりも ρ を大きくすると、 $J_l(\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \cos\left(\rho - \frac{2l+1}{4}\pi\right)$ の様に波を打ちながらゆっくりと 0 に近づく。

Neuman 関数は

$$\begin{aligned} N_l(\rho) = & \frac{2}{\pi} J_l(\rho) \ln \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \frac{\psi(m+1) + \psi(l+m+1)}{m!(l+m)!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{l+2m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(l-1-m)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-l+2m} \end{aligned} \quad (14.77)$$

ここで $l=0$ ならば第 3 項はなく、di-gamma 関数は

$$\psi(m+1) = \psi(m) + \frac{1}{m} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \quad (14.78)$$

γ はオイラー定数と呼ばれ、次式で定義される。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) - \ln(n) \right\} \quad (14.79)$$

Neuman 関数が複雑な表現になる理由は、級数展開により独立解が一つしか得られないという事情による。微分方程式を級数展開で解く時の Frobenius の方法という概念を思い出すと納得するだろう。

Θ に対する分離定数は整数を与えられるときまるが、 Z の分離定数は連続的に変化する事に注意しよう。だからある解をこの Bessel 関数で展開すると、 k については和でなく、積分になる。

$k^2 < 0$ の場合は純虚数を独立変数とする Bessel 関数になるが、これは変形 Bessel 関数として知られている。多分高周圧電流のところで取り上げるだろうからここでは省略。

数値計算に少し言及しておこう。Bessel 関数は次の漸化式

$$\frac{2l}{\rho} J_l(\rho) = J_{l-1}(\rho) + J_{l+1}(\rho) \quad (14.80)$$

及び母関数

$$\exp\left\{\frac{\rho}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} t^l J_l(\rho) \quad (14.81)$$

から導かれる保存則の式

$$\begin{aligned} \cos(\rho \cos \theta) &= J_0(\rho) + 2J_2(\rho) \cos 2\theta + 2J_4(\rho) \cos 4\theta + \dots \\ \sin(\rho \sin \theta) &= 2J_1(\rho) \sin \theta + 2J_3(\rho) \sin 3\theta + \dots \end{aligned} \quad (14.82)$$

を利用すると簡単に計算できる。(θ は任意) 数値計算上は $J_l(\rho)$ の explicit な式よりも漸近展開の式や、 $R_l(\rho) = \rho^{-1/2} f(\rho)$ と書くと $\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{l^2 - 1/4}{\rho^2}\right) f = 0$ という一階微分を含まない微分方程式に変換でき、このような方程式は簡単に精度良く積分できるという事実の方が大切だろう。漸化式を利用する場合には、関数値が増加する方向に使用すること。また、Bessel の微分方程式は parity を変えない事にも注意しておこう、即ち ρ の l 乗の部分の他は必ず ρ の偶数次になっている。

円筒座標での例 Bessel 関数の応用例として、半径 a の薄い円盤の静電容量を計算しよう。円盤の中心を原点にとり、回転対象軸を z 軸に選ぶ。問題の回転対称性より θ 依存性はないとする。この時は、 $l = 0$ の項だけが寄与する。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.83)$$

変数分離し、 $\nabla^2 \varphi = 0$ に代入すると、

$$\varphi(r, z) = R(r)Z(z) \quad (14.84)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2 = r, z \text{ に依らぬ定数} \quad (14.85)$$

Z を解くと、

$$Z = Z_0 e^{-\alpha z} + Z_1 e^{\alpha z} \quad (14.86)$$

$z = 0$ で対称だから $z \geq 0$ と仮定しておく $z \rightarrow \infty$ で $Z \rightarrow 0$ を仮定すると、 Z_0 の項のみとなる。(但し、 $\alpha \geq 0$ ととる。分離定数を α^2 としたから符号は意味がない。) R の方程式

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \alpha^2 R = 0 \quad (14.87)$$

$\rho = \alpha r$ とおくと、0 次の Bessel の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + R = 0 \quad (14.88)$$

この解は Bessel 関数 $J_0(\alpha r)$ と Neuman 関数 $N_0(\alpha r)$ であるが、 $r = 0$ で発散する $N_0(\alpha r)$ は捨てる。従って、 α をパラメータとして、

$$\varphi_\alpha(r, z) = J_0(\alpha r)e^{-\alpha z} \quad (14.89)$$

が Laplace eq. の解である。ここで分離定数 α は任意であり ($\alpha \geq 0$)、特定の値をとってもよいし、 α の任意の関数をかけて積分して、重ね合わせてもよい。

境界条件を満足する様に選ばねばならない。境界条件は $z = 0, r \leq a$ で $\varphi(r, z)$ は一定値 φ_0 をとる。次の積分公式を利用。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) \frac{\sin a\alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi/2, & r < a \\ \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), & r > a \end{cases} \quad (14.90)$$

$z = 0, r < a$ 即ち円盤上の電位が V である解は

$$\varphi(r, z) = \frac{2V}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \varphi_\alpha(r, z) \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \quad (14.91)$$

面電荷密度は $z = 0$ で $E_z = \sigma/\epsilon_0$ より計算できる。 $z \geq 0$ を代入し、 $r < a$ に対する次の積分公式を利用する。

$$\int_0^\infty d\alpha J_0(\alpha r) \sin a\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.92)$$

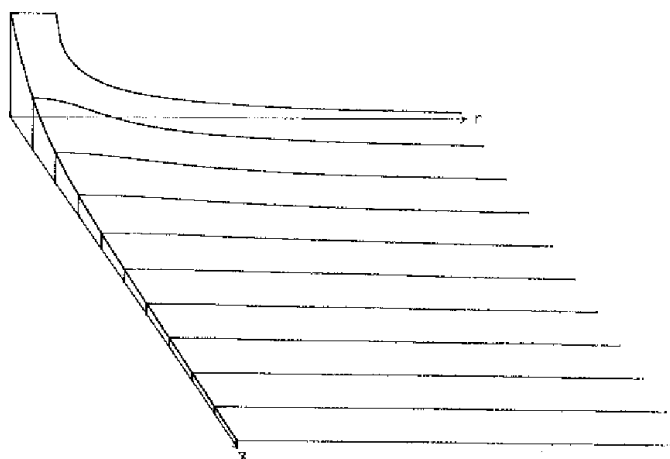
$$E_z(r, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{2V}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \frac{\sin a\alpha}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_\alpha(r, z) = \frac{2V}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.93)$$

電荷密度は、

$$\sigma(r) = \frac{2V \epsilon_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.94)$$

$z > 0$ 面の全電荷 q は σ を面積分すればよい。

$$q = \int_0^a 2\pi r dr \sigma(r) = 4\epsilon_0 a V \quad (14.95)$$



表裏を考えるとこの2倍が全電荷 Q である。静電容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = 8\epsilon_0 a \quad (14.96)$$

図の左上の直線部分に円板が置いてある。下へ行くのは円板に垂直な方向であり、右方向は円板面内で板から遠ざかる方向である。

Bessel 関数に慣れるために、以下の問題を考えてみると良いだろう。

鉛直に垂れ下がった鎖の振動の様子

細い棒の座屈

太鼓の面振動や、円板における Chladni の図形

独立な関数系、主に直交関数系による展開 変数分離法で登場した関数 $e^{im\psi}$, $P_{lm}(\cos\theta)$, $Y_{lm}(\theta, \psi)$, $\{r^l, r^{-(l+1)}\}$, $J_l(kr)$, $N_l(kr)$ 等は (l, m) を変えると無限に多くの、 ψ, θ, r を独立変数とする関数、関数系、を作っている。これ等の関数系を、ベクトル空間の基本ベクトルのように考えて、問題とする関数を展開することができる。ベクトルの内積 $(a \cdot b)$ に対応させて $\int f_n^* \cdot f_{n'} W(x) dx$ を用いる。ここで $f_n(x)$ はある関数系を代表し、 n と n' は上記 m, l 等に対応する。 $f_n(x)$ が複素数のときには一方の複素共役 (*) を用いる。積分の範囲は独立変数の全領域とする。 $W(x)$ はデカルト座標から当該座標系への座標変換のヤコビアン、又はヤコビアンの内の独立変数 "x" に依存する部分である。例えば極座標だとすると、次の関係にある。

$$\begin{aligned} x: & \psi, \theta, r \\ W(x): & 1, \sin\theta, r^2 \end{aligned}$$

内積が、 $n \neq n'$ ならば、 n, n' に依らず 0 となる時、"直交" 関数系と呼ぶ。

この"直交関数系"を用いて解を展開すると、展開係数は (14.65) のように一意に定まるが、パーシバルの等式 (14.66) の様に必ず下から近づくので展開の精度は必ずしも良くない。強制振動の時の臨界制動の状態にあるのが直交関数系による展開である。無限項の和でないと正解にならないから、直交関数系による展開をあきらめて、時には区分的に滑らかな関数を基底にとることも必要である。

行列法

1. Laplace の方程式の満足する性質を指導原理とする。
2. Green 関数を利用する。
3. 変分法を利用する。

等からも数値的には解ける。1 は狭義の行列法で SOR 法を利用。2 は境界要素法、3 は有限要素法の基本を与える。これらの手法は、数値計算上は最も有用な手法であり、多分市販のプログラムを利用する事が可能だろう。イオン光学の講義ノートにもう少し詳しく原理的な事を書いたので、ここでは省略する。

<http://www.tac.tsukuba.ac.jp/~yaoki> を参照されたい。

Poisson の方程式の解法

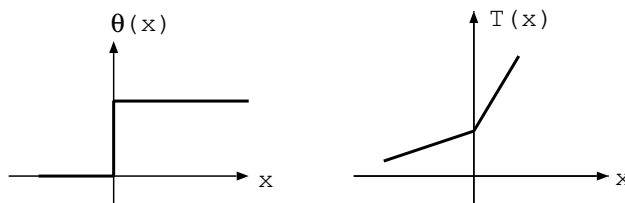
$$\nabla^2 \phi = \rho \tag{14.97}$$

の解は $\nabla^2\phi_1 = 0$ の一般解と何か一つの特解 $\nabla^2\phi_2 = \rho$ を持ってきて、 $\phi = \phi_1 + \phi_2$ と書けるから、 $\nabla^2\phi_1 = 0$ の一般解と、 $\nabla^2\phi_2 = \rho$ を満足する解は何でもよいから一つ作ることに分けられる。問題とする境界条件は ϕ_1 にある自由度で調節する。 ϕ_2 を何とかして作るには Green 関数を利用するのがよい。

Green 関数を作れると、Poisson の方程式は解けるから、Laplace eq. に対する Green 関数を作れたらよい。

次の事実から出発しよう。階段関数 $\theta(x)$ の 1 階微分は δ 関数である。

$$\delta(x) = \frac{d\theta}{dx}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (14.98)$$



実際

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{dx} \cdot f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\theta}{dx} \cdot f(x) dx \leftarrow \frac{d\theta}{dx} \text{ は } x \neq 0 \text{ では } 0 \text{ だから} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ [\theta(x)f(x)]_{-\epsilon}^{\epsilon} - \epsilon \frac{df(0)}{dx} \right\} \\ &= f(0) \end{aligned} \quad (14.99)$$

階段関数は次のようにすれば簡単に作れる。 $x = 0$ で折れ曲がった 2 本の直線 $T(x)$ を微分すると、

$$\frac{dT(x)}{dx} = \begin{cases} m_l & (x < 0) \\ m_r & (x > 0) \end{cases} \quad (14.100)$$

ここで、 m_l, m_r は左と右からの微分係数である。

$$m_l = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dT}{dx}, \quad m_r = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{dT}{dx}, \quad (14.101)$$

従って、階段関数は次式で与えられる。

$$\theta(x) = \frac{1}{m_r - m_l} T(x) - m_l \quad (14.102)$$

この $\theta(x)$ 関数を微分して δ 関数を作る時、定数 m_l は消えてしまうから定数項はあってもなくてもよい。即ち、任意の点 x_0 で連続ではあるが、微分は連続ではない関数をつくり、この関数の 2 階微分を作ればこれは $\delta(x - x_0)$ に比例する。比例係数は (点 x_0 の右微分係数と左微分係数の差) の逆数である。

変数分離された Laplace の方程式は必ず 2 階微分を含むことを思い出そう。しかし 1 階微分の項があるとどうなるのだろうか？ もう一度微分演算子をよく見よう。微分演算子は $\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\}$ という形で入ってきていた。だからこの場合は $\left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\}$ の部分が階段関数になる様にすればよいのだ。

まとめておこう。

1. 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T(x) = \rho(x) \quad (14.103)$$

が与えられたとき $\rho(x) = 0$ とおいて得られる微分方程式の自明 ($T(x) = 0$) でない独立な解 $T_1(x), T_2(x)$ を作る。

2. $T_1(x), T_2(x)$ は定数倍の自由度を有する。即ち $T_1(x)$ が Laplace eq. の解ならばその 3 倍、5 倍したのも解であるが、

$$T_1(x_0) \frac{dT_2(x_0)}{dx} - \frac{dT_1(x_0)}{dx} \cdot T_2(x_0) = \frac{1}{p(x_0)} \quad (14.104)$$

を満足する様に自由度を利用する。

3.

$$G(x, x_0) \equiv T_1(x_{<})T_2(x_{>}) \text{ を作る。ここで } \begin{pmatrix} x_{<} = \min(x, x_0) \\ x_{>} = \max(x, x_0) \end{pmatrix} \text{ とする。} \quad (14.105)$$

これが Green 関数である。 $x < x_0$ ならば $T_2(x_{>}) = T_2(x_0) = \text{一定}$ だから、 G は $T_1(x)$ に比例し、 $x > x_0$ では $T_1(x_{<}) = T_1(x_0) = \text{一定}$ だから $G(x, x_0)$ は $T_2(x)$ と同じ x 依存性を示し、 $x = x_0$ で折れ曲がっている。(14.104) の解は

$$T(x) = \int G(x_1, x_0) \rho(x_0) dx_0 + C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x) \quad (14.106)$$

で与えられる。ここで C_1, C_2 は微分方程式だけでは決まらない任意の定数であり、境界条件から決定される。

注：Green 関数はその作り方からわかる様に、 $T_1(x), T_2(x)$ のとり方に依り多くの自由度があることが分かるだろう。又、 $G(x, x_0)$ に $\alpha T_1(x) + \beta T_2(x)$ を加えてもやはり Green 関数になっている事も自明であろう。

問：

$$\frac{d}{dx} \{ p(x) (T_1(x) T_2'(x) - T_1'(x) T_2(x)) \} = 0$$

を示せ。これにより、(14.104) を実現する事は可能である。

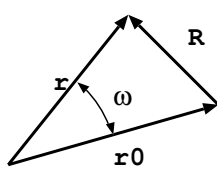
$$\text{問：} \int f(x) \left[\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \right\} + q(x)G(x, x_0) \right] dx = f(x_0) \text{ を確認せよ。}$$

問：3次元極座標に対し、

$$L_n(r, r_0) \equiv \frac{1}{2n+1} \begin{cases} r^n/r_0^{n+1} & (r < r_0) \\ r_0^n/r^{n+1} & (r > r_0) \end{cases} \quad (14.107)$$

は r 座標の Green 関数になっている事を示せ。

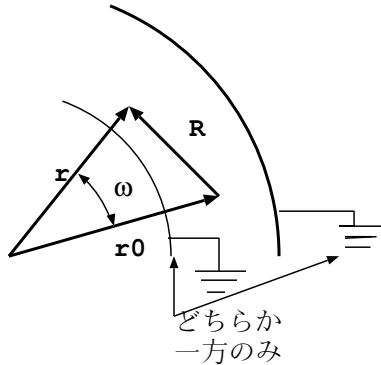
図で、



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2rr_0 \cos w + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos w) & (r < r_0) \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos w) & (r > r_0) \end{cases} \quad (14.108)$$

と書ける。

原点以外の点 r に湧き口がある時の Coulomb potential が上の様に表せる。これは Green 関数に比例している。



半径 a の導体球内の一点 r_0 に点電荷 q がある時の potential は、上の表現から $r = a$ で ϕ が 0 になるようにすればよいから、

$$\phi(r, w) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l r^l}{a^{2l+1}} P_l(\cos w) \right\} \quad (14.109)$$

外部の場合だと

$$\phi(r, w) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{r_0^{l+1} r^{l+1}} P_l(\cos w) \right\} \quad (14.110)$$

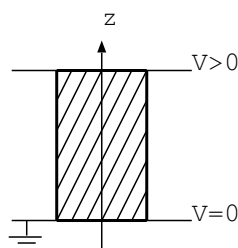
いずれの場合も $r = a$ での potential が 0 になるように、 $\frac{1}{R}$ potential から、Laplace eq. の解を差し引いてある。猶、ベクトル r_0, r の極座標を $(r_0, \theta_0, \psi_0), (r, \theta, \psi)$ とすると、次の関係で w を $\theta_0, \psi_0, \theta, \psi$ に書き換えられる。

$$P_l(\cos w) = \sum_{m=0}^l \epsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta_0) \cos\{m(\psi - \psi_0)\} \quad (14.111)$$

$$\epsilon_m = (2 - \delta_{m,0}) \quad : \text{Neuman 因子} \quad (14.112)$$

この式は Legendre 関数の加法則として知られている。

第15章 もう一度電流について



図のような半径 a 、電気伝導度 σ 、相対誘電率 $\epsilon_r = 1$ 、相対透磁率 $\mu_r = 1$ の長い円柱を上下から完全導体の平行平板ではさみ、直流電圧 V をかけて定常状態を実現したとする。(物質中の ϵ_r や μ_r を正面切って問われると困ることもあるが)

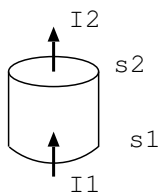
連続の方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ で、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ とおくと、

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (15.1)$$

この式を導体の側面付近の微小体積で積分すると、導体から外へは電荷は流出していないはずだから、 \mathbf{i} は表面付近では表面に平行である(当然だ!)

導体を2枚の円柱軸に垂直な断面 s_1 、 s_2 で切り取った長さ l の円柱に対し(15.1)を体積分すると、Gaussの法則より体積分は面積分になり、側面からの寄与は0だから、

$$\int_{s_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{又は} \quad I_1 + I_2 = 0 \quad (15.2)$$



ここで、 $I_i = \int_{s_i} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s}$ は面 s_i を通して流れ出す電流である。一方から入ってきた電流と同じだけの電流が他方から出て行くことを(15.1)は示している。(Kirchhoffの法則)

円柱導体を、軸に平行な細い導体を束ねたものだと考えると、この細い導線内部を流れる電流は他の細い導体の位置に磁場を作る。この磁場の影響を考慮すると、一対の電流は引力を及ぼしあう。この現象は大電力プラズマのピンチ効果を生じさせるし、大きな発、送、変電施設の100(120) Hzの低い音の原因になっている。

この電流による磁場の効果を見捨てると、 \mathbf{i} は導体中を一様に流れ、従って電場 \mathbf{E} も一様であろう。オームの法則 $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$ を長手方向 $z = z_1 \sim z_2$ の範囲の円柱に対して体積分すると、

$$\int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} dz = I \cdot (z_2 - z_1) = \sigma E a^2 \pi (z_2 - z_1) \quad (15.3)$$

$z = z_1 \sim z_2$ の電位差を $V (= E(z_2 - z_1))$ とすると

$$V = IR, \quad R = \frac{z_2 - z_1}{\sigma \pi a^2} \quad (15.4)$$

この式が工学的によく使われる Ohm's law である。

次に円筒部分を通る電流が作る磁場を計算しよう。上下の完全導体の効果を無視する為に、円柱の長さ $L \rightarrow \infty$ を仮定し、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ で、変位電流密度の項 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow 0$ とおく。H は軸対称であり、z 軸からの距離 r のみ (当然電流にもよるが) の関数であり、動径と極角方向成分をもたない。もしもこれらの成分が 0 でなければ、電流の向きを変えた時、変なことがおこるだろう。方位角成分を $H_\theta(r)$ と書き、軸を中心とする半径 r の面で積分し、Stokes の定理を用いると、

$$\int \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_\theta(r) 2\pi r = \int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} I & r \geq a \\ \frac{r^2}{a^2} I & r < a \end{cases} \quad (15.5)$$

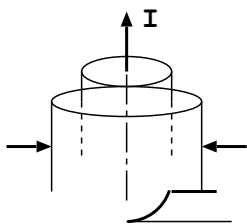
$$\therefore H_\theta(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & r \geq a \\ \frac{I}{2\pi a^2} r & r < a \end{cases} \quad (15.6)$$

エネルギーの流れを表すポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を計算しよう。電場 \mathbf{E} は一様で、下から上へ向かっている。H は z 軸にまわりついている。だから $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は $z = \text{一定}$ という面内で軸方向を向いている。E と H は直交しているから、(15.6) に E を掛けたものがその大きさである。

半径 r 、長さ l の z 軸を中心とする円筒の側面でポインティングベクトルを積分すると、 $2\pi r l$ を掛ければ良いから

$$\int_{\text{円筒}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} E \cdot l \cdot I & r \geq a \\ \frac{r^2}{a^2} E \cdot l \cdot I & r < a \end{cases} \quad (15.7)$$

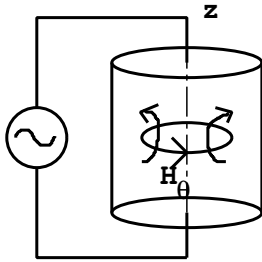
$E \cdot l$ は電位差に等しいから前と同じようにこれを V と書くと、これは、常識的な意味での電力である。



$r > a$ の領域では一定のエネルギー (単位長さあたり $E \cdot I$) が円柱に向かって流れ込み、内部では流入量は r^2 に比例して減っている。勿論、流れ込んだエネルギーはジュール熱として、熱に変化している。これが高校に時代に習ったオームの法則と仕事率の式である。電力は電流の流れていない空間を媒体として伝達されている点に注意しよう。

電線を伝わって電力が送られているのではない！ これは直流電流に対して言っていることであるが、周波数の低い交流に対しても当然成立する。

問 周波数が高いとはどの程度以上の周波数のことを言うのだろうか。又、高周波の交流に対しては何が変わるのだろうか？



次に、交流電流を流してみる。簡単のために $H_\theta(r)$ は (15.6) を仮定し、時間的には $\cos \omega t$ で振動しているとする。電磁誘導の法則により、電場が誘起される。図の H_θ に誘起された電場がまとわりついている。向きは $\frac{\partial H_\theta}{\partial t}$ の符号に依る。 H_θ は導体表面付近で最大だから、この電場の強さは r と共に増える。(内部では) 相殺せずに逆起電力として残る。誘起された電場 E は z 成分以外は大部分では相殺する (両端の部分は無視)。

H_θ に誘起された補正の電場を $E_z^{(1)}(r, t)$ とすると、 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ として、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ の θ 成分を取り出すと、

$$-\frac{\partial}{\partial r} E_z^{(1)}(r, t) = -\mu \frac{r}{2\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} (I_0 \cos \omega t) = \frac{\mu \omega r}{2\pi a^2} I_0 \sin \omega t \quad (15.8)$$

この式を r で積分すると、

$$E_z^{(1)}(r, t) - E_z^{(1)}(0, t) = -\frac{\mu \omega r^2}{4\pi a^2} I_0 \sin \omega t \quad (15.9)$$

$r = 0$ では $H_\theta = 0$ だから、 $E_z^{(1)}(0, t) = 0$ 。全電場 $E_z(r, t)$ は $E_0 \cos \omega t$ を加えるとよいから

$$\begin{aligned} E_z(r, t) &= E_0 \cos \omega t - \frac{\mu \omega r^2}{4\pi a^2} I_0 \sin \omega t = E_0 \left\{ \cos \omega t - \frac{\mu \omega \sigma r^2}{4} \sin \omega t \right\} \\ &= \bar{E}(r) \cos(\omega t + \alpha), \quad \left(c.f. \frac{I_0}{\pi a^2} = \sigma E_0 \right) \end{aligned} \quad (15.10)$$

ここで

$$\bar{E}(r) = E_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\mu \omega \sigma r^2}{4} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad \tan \alpha = \frac{\mu \omega \sigma r^2}{4} \quad (15.11)$$

\bar{E} は r に依存し、外へ行けば行くほど大きくなる。 $i_z = \sigma E_z$ だから電流も内部よりも周辺部を好んで流れるようになる。又、 $\cos \omega t$ という電圧で振ったつもりが、 $\cos(\omega t + \alpha)$ で振動している。位相が $+\alpha$ だけ進んでいる。このような誘導性の現象は磁場が作られると必ず観測される。電線の部分だけの自己インダクタンスを計算してみると、単位長さ当たりの磁場のエネルギー U_M は

$$U_M = \frac{\mu}{2} \int_0^a H_\theta^2 \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\mu I^2}{16\pi} = \frac{L_i}{2} I^2 \quad (15.12)$$

だから

$$L_i = \frac{\mu}{8\pi} \quad (15.13)$$

を内部インダクタンスと呼ぶ(低周波近似で、単位長さ当たりのインダクタンス)。当然 $r > a$ からの U_M への寄与を加えないと本当の自己インダクタンスにはならない。

$r > a$ に対し、(15.6) をそのまま使うと対数的に発散するが、帰りの回路、導線の長さの有限性を考慮すると発散しない。

(15.5) を見ると電流分布は一様でないからこの効果を (15.6) の磁場分布に反映させなければならぬ。その磁場分布は又、電流分布に影響を与える。……

方程式をたてて、矛盾なく解こう。

Maxwell 方程式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15.14)$$

Ohm の法則の成立する周波数帯域だとすると、

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (15.15)$$

単純な物質を仮定する

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (15.16)$$

これ等から、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{i} を消去し、 \mathbf{E} だけの方程式をつくる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (15.17)$$

$\sigma = 0$ の時にはこれから波動方程式が登場したが、今度は $\sigma \neq 0$ だから少し事情は異なる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (15.18)$$

であるが、Coulomb の法則より $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ であり、(4.9) の議論より導体中には電荷は単独では存在しないから $\rho = 0$ である。この結果

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (15.19)$$

ここで、 $c^2 = 1/\mu\epsilon$ は導体中の光速である。 \mathbf{E} の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ と書くと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (15.20)$$

量子力学のエネルギー固有値の取り扱いと合わせるために指数関数に符号をつけた。Fourier 展開の 1 つの成分だけを問題にしていると思ってもよい。最終的には実部又は虚部だけを利用する。

円筒座標の z 成分だけを取り出すと(これを今後 $E_\omega(r)$ と書く)、

$$\left\{ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu\sigma \right\} E_\omega(r) = 0 \quad (15.21)$$

又は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \kappa^2 \right) E_\omega(r) &= 0 \\ \kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu\sigma \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

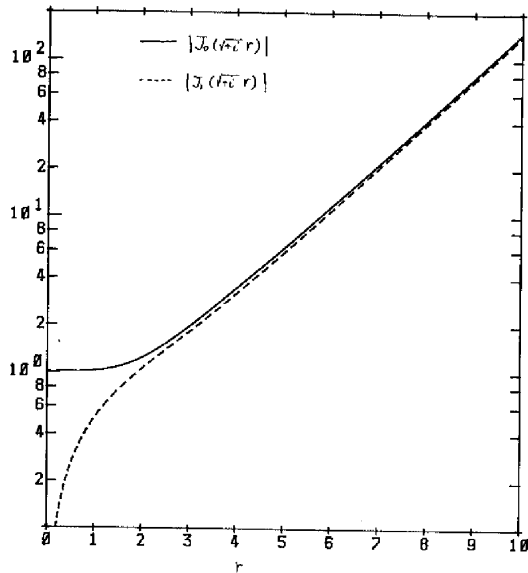
この方程式の $r = 0$ で正則な解は 0 次の Bessel 関数 $J_0(\kappa r)$ である。

$$E_\omega(\mathbf{r}, t) = E_{\omega 0} J_0(\kappa r) e^{-i\omega t} \quad (15.23)$$

ここで (15.22) κ^2 の実、虚部を、銅を想定して、比較しておこう。

1 MHz とすると $\omega = 2\pi \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ 、 $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$ 、 $\mu \sim \frac{4\pi}{10^7} \text{ H/m}$
 $\frac{1}{\sigma} \sim 2 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ 、 $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sim \left(\frac{2}{100 \text{ m}}\right)^2$ 、 $\omega\mu\sigma \sim 6 \times 10^6 \times \frac{12}{10^7} \times \frac{10^8}{2} \sim 36 \times 10^7$

充分いい精度で $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ を無視できる。 変位電流なんてまだ考えなくてよい！



$J_0(z)$ の積分表示式

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \sin \theta) d\theta \quad (15.24)$$

を見ると、 $z \left(= (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} r \right)$ が複素数だと、
 $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ だから z の虚部が指数関数的
 に大きくなる寄与をする。 $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} r > 1$ ならば、
 導体表面付近で $E(r) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} r\right)$ の様に振
 る舞う。

Ohm の法則はまだ成立しているとするから、導体内の電場分布もグラフの様に振る舞う。グラフを見ると低周波数近似 (15.11) で $E_z(r)$ が放物線を描いていた理由が理解できるだろう。一方、周波数が高いとほとんどの電流が表面付近を流れる。その意味で、次の δ を表皮の厚さ (skin depth) と呼ぶ。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (15.25)$$

問 代表的な TV 放送の周波数に対し δ の値を計算してみよ。

導体中の電場が分かると、磁場は電場の回転をとる事により計算できる。 E_z のみを残すと $(\nabla \times \mathbf{E})_\theta$ は

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_\theta &= -\frac{\partial E_z}{\partial r} = -E_{\omega 0} e^{-i\omega t} \kappa \frac{dJ_0(\kappa r)}{d(\kappa r)} = E_{\omega 0} e^{-i\omega t} \kappa J_1(\kappa r) \\ &= +i\omega\mu H_0(r) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (15.26)$$

$$\therefore H_\theta(r) = \frac{\kappa}{i\omega\mu} E_{\omega_0} J_1(\kappa r) \quad (15.27)$$

ここで $J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}$ は 1 次の Bessel 関数である (上のグラフ参照)。(15.27) は分母に i を含むから E_z と H_θ は位相がずれている。 κ も複素数だから、位相のずれは真空中の様に $\pi/2$ とはならない。

電流 I は $\sigma E_z(r, t)$ を面積分すればよい。

$$\begin{aligned} I_0 e^{-i\omega t} &= \int_0^a \sigma E_{\omega_0} J_0(\kappa r) e^{-i\omega t} 2\pi r dr \\ &= \sigma E_{\omega_0} e^{-i\omega t} 2\pi \int_0^{\kappa a} J_0(\kappa r) (\kappa r) d(\kappa r) \frac{1}{\kappa^2} \\ &= \frac{2\pi a \sigma}{\kappa} E_{\omega_0} e^{-i\omega t} J_1(\kappa a), \quad \left(c.f. \int z J_0(\kappa z) dz = \frac{z}{\kappa} J_1(\kappa z) \right) \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{i\omega\mu}} a E_{\omega_0} e^{-i\omega t} J_1(\kappa a) \end{aligned} \quad (15.28)$$

導体内部の電氣的エネルギー密度 $U_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ と磁氣的エネルギー密度 $U_M = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ の比を計算してみよう。

$$\left| \frac{U_E}{U_M} \right| = \left| \frac{\omega}{\mu\sigma c^2} \left(\frac{J_0(\kappa r)}{J_1(\kappa r)} \right)^2 \right| \ll 1 \quad (15.29)$$

ここで、 $\kappa^2 = i\omega\mu\sigma$ を使った。これから導体内部にあるのはほとんどが磁氣的エネルギーであることが分かる。導体の形状 $(J_0/J_1)^2$ に対する依存性は高周波では一般的に言って小さい。

単位長さ当たりの導線のインピーダンス Z は、 E_z として最外周のものを使うと

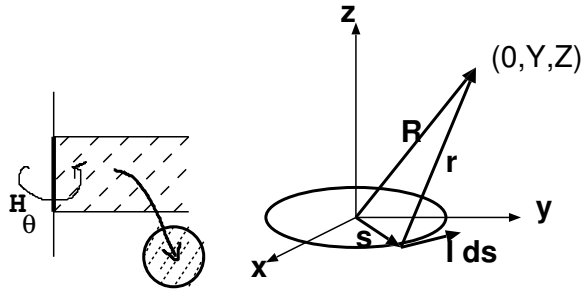
$$Z = \frac{E}{I} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}} \frac{J_0(\kappa a)}{J_1(\kappa a)} \quad (15.30)$$

低周波の極限では、 $J_0 \rightarrow 1$ 、 $J_1 \rightarrow \frac{\kappa}{2} a$ を代入し、

$$Z \Rightarrow \frac{1}{\pi a^2 \sigma} \quad (15.31)$$

面積に反比例し、抵抗率 $1/\sigma$ に比例するという常識的な結論となる。

円形電流 次に直流電流に戻って電線を丸めてみよう。変位電流を無視する近似 (交流が導線を通れる場合、(15.17) で ω^2/c^2 を無視する近似になっている) では、電流要素の作る磁場に対し Biot-Savart の法則を積分型で利用できる。



無限の長さの直線導体から長さ l の部分を切り取って半径 $a(= l/2\pi)$ の円形電流を作ると、図のハッチ部の無限の領域の磁場を円内に押し込めるだろうから、コイル内の磁場が強くなる。このコイルのつくる磁場分布を、右図を見ながら計算してみよう。

デカルト座標系で、 $z = 0$ 面内、原点を中心に一卷のコイルを置き、(7.5) 式の積分を実行すれば良い。場の点を yz 面内にとると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (15.32)$$

ここで、

$$\mathbf{r} = (-a \cos \theta, Y - a \sin \theta, Z), \quad d\mathbf{s} = a d\theta(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

を代入すると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{(b^2 - c^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \{Z \cos \theta \hat{e}_x + Z \sin \theta \hat{e}_y + (a - Y \sin \theta) \hat{e}_z\} \quad (15.33)$$

ここで、 $b^2 = a^2 + Y^2 + Z^2$ 、 $c^2 = 2aY$ 、 \hat{e}_x 、 \hat{e}_y 、 \hat{e}_z は基本単位ベクトルである。軸対称性より、又は(15.33) 分母の $\sin \theta$ と分子の $\cos \theta$ は位相が異なるから、 $H_x = 0$ である。(15.33) の積分は初等関数の範囲では実行できず、完全楕円積分になる事が知られている。楕円積分の標準的な形に書き直す為に変数変換する。

$$\theta = 2\varphi - \frac{\pi}{2}, \quad d\theta = 2d\varphi \quad (15.34)$$

とおくと、

$$\sin \theta = 2 \sin^2 \varphi - 1 \quad (15.35)$$

積分区間 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$ は同一の寄与をするから、分母の 4 を消して φ の範囲を $[0, \pi/2]$ とすると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{aI}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\{(b^2 + c^2) - 2c^2 \sin^2 \varphi\}^{3/2}} [Z(2 \sin^2 \varphi - 1) \hat{e}_y + (a + Y - 2Y \sin^2 \varphi) \hat{e}_z] \quad (15.36)$$

ここで、次式で母数を定義する。

$$k^2 = \frac{2c^2}{b^2 + c^2} \quad (15.37)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{aI}{\pi(b^2 + c^2)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} [Z(2 \sin^2 \varphi - 1) \hat{e}_y + (a + Y - 2Y \sin^2 \varphi) \hat{e}_z] \quad (15.38)$$

$$\left. \begin{aligned} K(k) &\equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{第一種} \\ E(k) &\equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{第二種} \end{aligned} \right\} \text{完全楕円積分} \quad (15.39)$$

楕円積分を恐れたり敬遠してはいけない。右辺の積分はこれ以上どうしようもないので、左辺の記号を使用して分かったつもりにして、話しを先に進めるのである。右辺は k を変えると積分値が変化するので、 k の関数と考えて左辺では (k) をくっつけている。必要に応じて別紙の要領で数値計算が可能である。

次のような関係式がある。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} &= \frac{1}{1-k^2} E(k) \\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi &= \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{1-k^2} E(k) - K(k) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

$E(k)$ の式で $t = \tan \varphi$ 、 $u = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 t}}$ 、 $u = \tan \theta$ と変数変換すると、(15.40) 上の式が導ける。(15.40) 下の式は簡単。

$$\sin^2 \varphi = -\frac{1}{k^2}(1 - k^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{k^2}$$

これを代入すると、

$$H_y(\mathbf{R}) = \frac{aIZ}{\pi c^2 \sqrt{b^2 + c^2}} \left\{ \frac{b^2}{b^2 - c^2} E(k) - K(k) \right\} \quad (15.41)$$

又は

$$H_y(\mathbf{R}) = \frac{I}{2\pi Y \sqrt{(a+Y)^2 + Z^2}} \left\{ \frac{a^2 + Y^2 + Z^2}{(a-Y)^2 + Z^2} E(k) - K(k) \right\} \quad (15.42)$$

この式は中心軸上 $Y = 0$ では一見使えない。この時 $k = 0$ であるから $0/0$ の様に見えるが、中括弧の中味 $\{\dots\}$ は $O(Y^2)$ で 0 に近づくから $H_y(Y = 0) = 0$ である。物理的にも当然そのはずだ。

z 成分は、

$$H_z(\mathbf{R}) = \frac{I}{2\pi \sqrt{(a-Y)^2 + Z^2}} \left\{ \frac{a^2 - Y^2 - Z^2}{(a-Y)^2 + Z^2} E(k) + K(k) \right\} \quad (15.43)$$

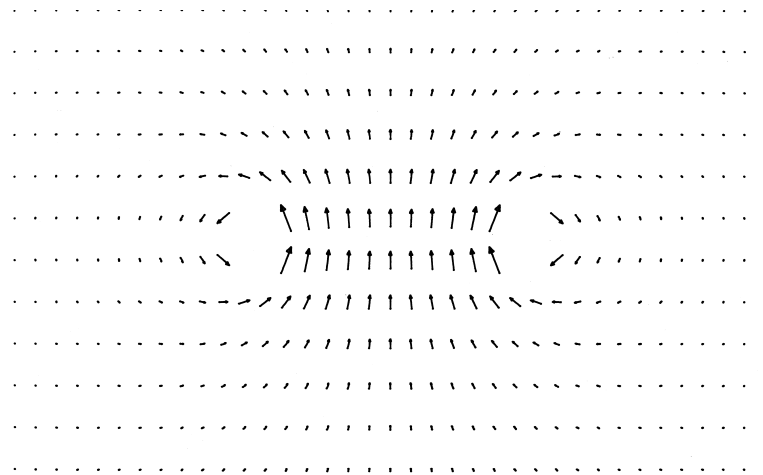
特に $Y = 0$ ならば $E(0) = K(0) = \pi/2$ だから

$$H_z(\text{軸上}) = \frac{a^2 I}{2(a^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (15.44)$$

示してみよ。

$Z = 0$ 、 $Y = a$ で場は発散するが、これは針金の太さを 0 としたための近似の悪さのせいである。導線の直近では (15.6) の様になっているはずだ。

下に、一卷コイルのつくる磁場分布の様子を図示する。コイルの中心軸を含む面を断面としている。



● 第1、2種の完全楕円積分の数値計算

$|k^2| \ll 1$ ならば被積分関数を $k^2 \sin^2 \varphi$ で Taylor 展開し項別積分をすればよい。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right\} \quad (15.45)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 - \dots \right\} \quad (15.46)$$

● Gauss の相加・相乗平均法

面白い方法としては Gauss の相加・相乗平均法がある。但し、 k^2 が 1 に近いと不可。

step 0 $a_0 = 1, \quad b_0 = k' = \sqrt{1 - k^2}$

step i $a_{i+1} = (a_i + b_i)/2, \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i}, \quad c_{i+1} = (a_i - b_i)/2$

$c_{i+1} \neq 0$ (求める精度で) ならば $i \rightarrow i + 1$ として step i を繰り返す。

$$K(k) = \frac{\pi}{2a_N}, \quad E(k) = K(k) \left\{ 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N 2^r C_r^2 \right\} \quad (15.47)$$

ここで N は最後の step に対応する。

この方法は収束が速いので、電卓向きである。

● Landen の変換

k^2 の値を実質的に小さくする方法として Landen の変換がある。母数 k を与えた時、補母数 $k' (= \sqrt{1 - k^2})$ を用いて、 k_1 を次式で計算する。

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \quad (15.48)$$

$$K(k) = \frac{1+k'}{2}K(k_1) \quad (15.49)$$

k_1 は k より小さくなっているが、これでも大きいと思えばもう一回 Landen の変換をする。

• Legendre の関係式

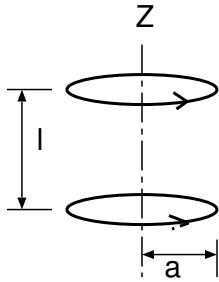
母数 k が 1 に近い時、補母数 $k' (= \sqrt{1-k^2})$ は非常に小さい ($|k'| \ll 1$) から先ず k' に対し $E(k')$ 、 $K(k')$ を計算し、 $K(k)$ は Landen の変換を使って計算したとすると、

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \pi/2 \quad (15.50)$$

により $E(k)$ は計算可能。この式は π の長大桁計算に参照された事があると思う。

これ等の方法は充分実用になるが、もっと頭の良い方法もある。

問 Helmholtz coil 同一の円電流を 2 つ同軸に並べる ($z = \pm \frac{l}{2}$ とする)。



両コイルの中央 $z = 0$ の近傍では対称性から $H_z(z = 0)$ は z の偶関数になる。即ち $H_z(z) = H_z(0) + H_z''(0)z^2/2 + H_z^{(4)}(0)z^4/24 + \dots$ 。
 $H_z'(0) = 0$ という意味で $H_z(0)$ は一様性が良い。更に一様にするためには $H_z''(0) = 0$ とすれば良い。この時の l/a の値はいくらか?

(15.42)、(15.43) で $a^2 I = m/\pi\mu_0$ を固定し、 $a \rightarrow 0$ とすると、 $R^2 = Y^2 + Z^2$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2 + Y^2 + Z^2}{(a - Y)^2 + Z^2} E(k) - K(k) &\rightarrow \frac{\pi}{2} \times \frac{3a^2 Y^2}{R^4} \\ \frac{a^2 + Y^2 + Z^2}{(a - Y)^2 + Z^2} E(k) + K(k) &\rightarrow \frac{\pi}{2} \times \frac{(-Y^2 + 2Z^2)}{R^4} a^2 \end{aligned} \right\}$$

であるから、

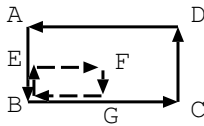
$$H_y(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{3mYZ}{4\pi R^5 \mu_0}, \quad H_z(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{m(-Y^2 + 2Z^2)}{4\pi R^5 \mu_0} \quad (15.51)$$

この式は (5.3) で $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ 、 $\mathbf{m} \rightarrow m$ とした式と一致する。即ち遠くから見ると、円電流 I 、面ベクトル \mathbf{S} の作る磁場と磁気モーメント \mathbf{m} の作る磁場とは同じように見える。

$$\text{等価磁気モーメント} = I \frac{\mathbf{S}}{\mu_0} \quad (15.52)$$

ここで $|\mathbf{S}| = \pi a^2$ は面積ベクトルの大きさ。向きは、先に述べたが面の周囲を反時計周りに回るとした時、右ネジの進む向きである。

図の微小面積 ABCD という長方形の経路に付いて Biot-Savart の式を積分し、この式 (15.52) が成立する事を確認せよ。



更に、BEFGB という経路に関する積分を想定し、上の ABCDA 経路の積分の差として AEFGCDA 経路のに対して (15.52) が成立する事を確認せよ。

これにより、任意形状の閉回路電流に対してこの式が成立する事が理解出来るだろう。

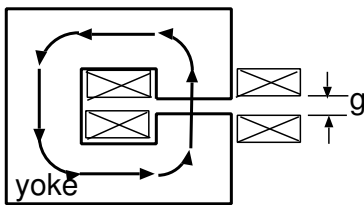
楕円積分に慣れるために次の問題を解いてみよ。

- ・ Borda の振子の周期
- ・ 密度一様なコイルの作る重力、ポテンシャル。帯電していれば静電ポテンシャルでもある。
- ・ Helmholtz coil の相互インダクタンス

問 地磁気を次の様な双極子による磁場だと近似する。磁場の向きは南・北極を結ぶ線に一致し、赤道上での強さは 0.5 ガウス (5×10^{-5} Tesla) である。この時、この磁場を再現するには赤道面上、幾らの半径のところ、どれだけの電流を流せば良いか？

円電流のマクロな応用としてモーター、電磁石等がある。一樣磁場中に円電流を置くとトルクをうけて電流面が回転する。これは導線中を運動する電荷と磁場との相互作用と考えてもよいが、円電流の作る磁気モーメントと磁場との相互作用とも考えられる。前者の考え方が通常の教科書に載っている。両者は同一のトルクを与えるだろうか？ 計算してみよ。モーターの逆過程、即ち磁場中で導体を動かすと起電力が発生する、が発電機である。

電磁石 コイルを複数回巻き、中に鉄芯を入れた装置が電磁石である。そんなことは言わずともわかっている。鉄材はできるだけ高純度の鉄で特に炭素を含まないものが好まれる。非常に高精度の磁場分布を必要とする時は鉄芯を使わず、コイルだけで磁場を実現する場合もある。勿論 Helmholtz coil もそうだけでも。



ここでは簡単な例から始めよう。鉄の中には磁気能率がいっぱい詰まっていて、それが全部てんでばらばらの方向を向いたり、特定の方向に揃ったりする。特定の方向に向けるために外部から電流の助けを借りて磁場をかける。

図で、四角の中に対角線が交差している部分は、コイルの断面を表し、図の水平方向のもう一方の四角部分と繋がっている。この様なコイルが、上下に 1 対固定してある。太い線で囲まれた部分は鉄で出来ている。約 1.5 Tesla 以下の磁束密度がこの方法で実現される。図の矢印で囲まれた部分で $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$ を面積分する。変位電流は無視。

$$\int \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \simeq \int_{\text{鉄}} H dl + \int_{\text{空気}} H dl \quad (15.53)$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より導かれる境界条件 (境界で B の法線成分は連続) を用いると、gap の界面では $B_{\text{鉄}} = B_{\text{空気}}$ 又、 $H_{\text{鉄}} = \frac{1}{\mu_{\text{鉄}}} H_{\text{空気}} \ll H_{\text{空気}}$ だから上の積分は大体 $H_{\text{空気}} \cdot g$ で近似できる。他方 $\int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = NI$ 。ここで N はコイルの巻数、 I はコイルを構成する一本の電線に流れる電流。

$$\therefore H_{\text{空気}} = \frac{NI}{g + \frac{L}{\mu_{\text{鉄}}}} \quad (15.54)$$

L は鉄中の磁路の長さである。この式を、Ohm の法則に見立て、 H を電流と看做すと、 $(g + L/\mu_{\text{鉄}})$ は電流に対する抵抗の役目をする。 $\mu_{\text{鉄}}$ は鉄の相対透磁率。 NI は起磁力と呼ばれアンペア・ターン (AT と記される) で規定される。継鉄 (ヨーク) の断面積が狭いとそこを通る磁束密度が上り、 $\mu_{\text{鉄}}$ が飽和を起こし著しく小さくなる事があるので、ヨークの断面積をケチってはいけない。

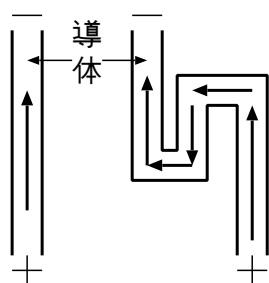
問 gap が 10 cm、磁極面積 1 m^2 、磁束密度 1 Tesla の磁場を発生させたい。

- ・ 起磁力はいくら必要か?
- ・ この磁場空間にはいくらのエネルギーが蓄えられているか?
- ・ 磁極間の引力はいくらか? この空間を真空にしたときの大気圧の何倍ぐらいの力か?

今の磁場発生の計算でも分かる様に、 $\mu_{\text{鉄}}$ (7000 ~ 10,000) を利用すると小さな起磁力で大きな磁束密度を発生させる事ができる。このアイデアを利用した磁気増幅器が各種工夫されている。リレー (電磁継電器) は小電流で大電流を入/切している。小電流を発電機の励磁コイルに入力し、大電流を取り出す事も可能である。

磁性体の透磁率は H の関数である。インダクターの芯材に磁場をかけて可変インダクタンスを作ると広帯域発信器が作れる。

問 直線導体の両端に電位差を与えると、導体中をまっすぐに電流が流れるのは直観的に理解できる。



導体を図の様に曲げると、マクロに見て電位差を逆流して電流が流れる様に見える。これを電磁気学的にはどう説明するのだろうか? 同じ事であるが、直線状の蛍光灯以外に円形のものや、現在ではもっと複雑に曲げた蛍光灯もある。一方のフィラメントを出た電子はなぜ他端のフィラメントにとどくのか?

問 磁場に直角に導線を置き電流を流すと導体は力を受ける。Lorentz 力を受けるのは導体中を流れている電流のはずだ。電流 が力を受けるとなぜ 導体 が力を受けた事になるのだろうか?

ベータトロン その他 Maxwell の方程式の一つに $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ というのがある。これは Faraday の電磁誘導の法則を微分形でかいたものである。B が時間的に増えると、その点で電場が渦を巻いている。空間の微小な領域で成立している関係をマクロな領域に拡大するために、S という面でこの式を積分すると、

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (15.55)$$

$$\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.56)$$

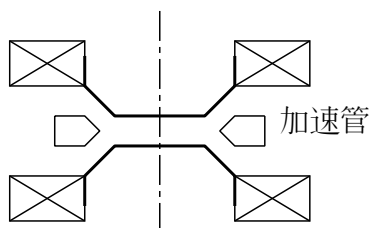
は、磁束である。

$$\text{左辺} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (15.57)$$

は、起電力又は発生した電圧であるから、 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ならば正の起電力を与える。これを利用し電子を加(減)速させることができる。この装置をベータトロンと呼ぶ。ベータトロンの加速原理はこの通り非常に簡単であるが、電子軌道の安定性についての理解が Kerst と Server により確立するまでは実現できなかった。安定性については2つの問題がある。

- (1) 軌道半径が加速中に変わらないようにする。
- (2) 軌道は滑らかな円ではなく円軌道のまわりに、上下左右にゆれている。これをベータトロン振動と呼ぶが、縦振動と横振動に共鳴があると、電子が壁にぶつかってしまう。

(1) について説明しよう(図参照)。安定軌道の半径を R とし、この値は時間的に変化しないと仮定する。半径 R の円について、面積分すると、



$$-\frac{d\Phi}{dt} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{\theta} \cdot 2\pi R \quad (15.58)$$

この E_{θ} で加速管中の電子を加速する。W を電子の全エネルギーだとする。

$$\frac{dW}{dt} = q E_{\theta} v = -\frac{qv}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} \quad (15.59)$$

遠心力と Lorentz 力のつりあいの式から、

$$\frac{mv^2}{R} = qvB(R) \rightarrow p = qRB(R) \quad (15.60)$$

エネルギー W と運動量 p の関係式 $W = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ を t で微分すると、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{pc^2}{W} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (15.61)$$

これ等の式から、 $\frac{d\Phi}{dt}$ と $\frac{dB}{dt}$ の関係式を作ると

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{pc^2}{Wv} \cdot \frac{d}{dt} \{2\pi R^2 B(R)\} = -\frac{d}{dt} \{2\pi R^2 B(R)\} \quad (15.62)$$

ただし、 $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 、 $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ という関係式を代入した。又、非相対論的な式を相対論的にも使える式 $p = qRB$ にすりかえてある。

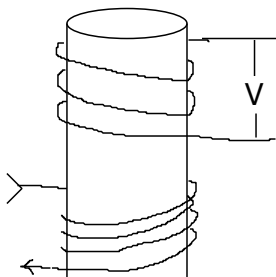
(15.62) 右辺でもしも $B(R)$ が一様磁場だと $\Phi = \pi R^2 B(R)$ となるから因子 2 だけ安定軌道の条件 ($\frac{dR}{dt} = 0$ を暗黙のうちに使っているから) と矛盾するから図の様に、内部で磁場が強くなっていなければならない。

問 50 Hz の 1/4 周期で B が $0 \rightarrow 1T$ の範囲で変化させ、 $R = 0.5 m$ というベータトロンの加速電場 E_θ を概算してみよ。因に線形加速器の加速空洞の現在の目標値は $E = 10^8 V/m$ である。

ベータトロンの歴史的意味の一つは、 $\frac{\partial B}{\partial t}$ が存在すれば何も無い真空中にも電場 E_θ が確かにできている事を実証したところにある。

もしも加速管の位置に電線を置くと、この電線の両端には起電力が発生する。この時には安定軌道の条件は必要ないから (15.62) の関係は必要なく、磁極が上下に分かれている必要はない。ベータトンでは (15.60) で与えられる偏向力を磁場から受け取らねばならなかったので、上下の極をくっつけてはいけなかった。

電線の両端の電位差は巻数を増せば、大体巻数に比例する。即ち磁束の計算をする時の面積分をする面積が巻数に大体比例して増加するからである。



この様な装置がトランス (変圧器) の出力側には組み込まれている。磁束密度の時間変化がないといけないのでトランスは直流には使用できない。左図の様な構成で $E-H$ 曲線を測定できるだろう。但し V の部分は時間微分を測定するか、時間積分を測定するか等の variety がある。

第16章 磁気能率と磁性

磁場に対する物質の応答を磁性と呼ぶ。外部から磁場 H を与えた時、単位体積当たり M の磁気能率 (磁化) が誘起されたとすると、

$$M = \kappa_m H \quad (16.1)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \kappa_m) = \mu_0 \mu_r$$

と書く。ここで κ_m は磁気感受率 (magnetic susceptibility)、 μ_r は相対透磁率と呼ばれる。 μ_r が 1 からずれる理由を問う学問が磁性学 (物理屋が見た) である。マクロに見て、 κ_m の範囲は -10^{-6} から 10^6 ぐらいの値を (地球表面では) とる。温度にはほとんど依らず κ_m が負で小さな物質を反磁性物質、日常的な温度では $H = 0$ の時 $M = 0$ であり、 M が外場 H に比例する物質を常磁性物質、磁場に強く反応する物質が強磁性物質である。ただし、この言葉は磁性の原因が分からない時代に作られた言葉であるので、原因とその結果としての現象との因果関係がはっきりしている概念ではない。強磁性はその後、原因により反強磁性 (反磁性と強磁性をくっつけた様な、部外者には理解できない無責任造語だ!) フェリ磁性、らせん磁性等に概念が分化していく。強磁性物質も $600\text{ C}^\circ \sim 1000\text{ C}^\circ$ 程度に温めると強磁性を失う。即ち結合エネルギーにしてせいぜい 0.1 eV 程度の小さなエネルギーの現象である。この値は物質の”色”を決めているエネルギーよりも一桁以上小さく、 $600\text{ C}^\circ \sim 1000\text{ C}^\circ$ という温度はその磁性体の融点よりも少し低い温度であるから磁気的エネルギーは結晶としての束縛エネルギーよりも少し小さいが大体において同じぐらいの大きさであるから、一つの原因が結晶構造と磁性に関与していると考えられる。

磁性を語る上に大切な点に温度依存性を有するという事がある。即ち磁性というのは個々の原子の性質ではなく、多数の原子 (分子、電子) が関与する協力現象であると想像できよう。

$\nabla \cdot B = 0$ 即ち磁荷が存在しない事を認めたのだから、磁性の原因は磁気能率に求めねばならない。次の2つが本質的な磁気能率を与える。

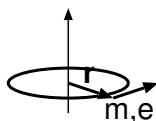
- (1) (素) 粒子固有の磁気能率 (当然これは温度に依存しない)
- (2) 円電流に起因する磁気能率 (これは運動状態が温度依存ならば温度に依るだろう)

ここでは物性論の入り口程度に磁性を論じる。

磁気能率 μ は、もともとは正と負の磁荷が距離 d だけ離れて置かれたというイメージであった。これが一様磁場 H に置かれた時のエネルギーは $W = -\mu \cdot H$ で計算された。しかし、磁束密度 B を優先的に使用すべきだという考えもある。この時、 $W = -\mu \cdot B$ という関係式で磁気能率を再定義する。 $\mu \cdot H$ での定義と、 $\mu \cdot B$ での定義とでは μ の次元が異なる。どちらにも同じ言葉、磁気能率、を使用するのはどうかと思うが、後者の方が今では多いかな?

手元の理科年表では後者 $W = -\mu \cdot B$ を採用しているので、以後は後者の定義を採用しておこう。

磁気能率と角運動量 円電流が磁気モーメントを有する例として、原子核のまわりを円運動する電子を古典的に取り上げよう。(15.52)を思い出そう。



電荷を e 、質量を m 、軌道半径を r 、速度を v とすると、
平均電流 $I = \left(\frac{e}{2\pi r}\right) \times v$ (電荷を軌道上にばらまいた)

面積 $S = \pi r^2$

であるから等価磁気モーメント μ は、

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{erv}{2}$$

軌道角運動量 $L = mrv$

$$\therefore \mu = \left(\frac{e}{2m}\right) \cdot L \quad (16.2)$$

今の簡単な例では μ と L が並行であることは自明。その比が v に依らず一定であるところにこの式の価値がある。電荷密度 ρ_e と質量密度 ρ_m の比が一定(従って e/m)ならば、この式は回転する剛体についても当然成立する。(部分で成立するから e/m が一定なら全体でも成立する。)量子力学的には L や μ がベクトルであるという性質から、(16.2)に似た式を導ける。Lande の式とか射影公式とか呼ばれるが、比例係数は状態に依存する。角運動量の単位はプランク定数 h の $1/2\pi$ 倍 ($= \hbar$) を単位として測定されるから、 \hbar を L の外へ出し比例係数の方に含める習慣がある。 e 、 m に電子の値を用いた時、次式をボーア磁子 (Bohr magneton) と呼び、ミクロな世界の磁気モーメントの単位とする。

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad (16.3)$$

m 、 e に陽子の値を代入した時は μ_N と書き、核磁子 (nuclear magneton) と呼ばれ、 μ_B と μ_N では約 -2000 倍異なるから電子と陽子では非常に大きく磁気能率が異なる。角運動量には古典力学で学んだ軌道角運動量と(素)粒子が古典的な意味では静止している時にも持っている固有の角運動量(スピンまたは固有スピン)とがあり、“角運動量”という言葉を用いて(又は両者のベクトル和)を呼ぶのに使い、記号を J と書くと、(16.2)は次のように書きかえられる。

$$\mu = g\mu_B J \quad (16.4)$$

ここで、 g は Lande の g 因子と呼ばれる。対象が原子核系ならば μ_B は μ_N でおきかえられる。電子は約 $1.0 \mu_B$ 、陽子は $2.8 \mu_N$ 、中性子は $-1.9 \mu_N$ の固有磁気能率を有する。これらの粒子の固有角運動量(スピン)はすべて $1/2$ (\hbar 単位)であるから g 因子は $2, 5.6, -3.8$ である。

電子の g が 1 でなく 2 になる理由は Thomas precession のせいである。興味があれば、もう一度特殊相対論の部分、特に Lorentz 変換の性質と、任意方向への Lorentz 変換の部分を読み、問題(多分 95 ページ)を解いてみよう。更に細かく見ると約 0.1 パーセントの誤差がある。p89 付近で“真空とはそんなもんですよ”というところに原因がある。(量子電磁気学 QED で説明される。)

中性子は電気がないのに磁気能率を有する！ μ_N の式では分子に e を含むから中性粒子には磁気能率が無いとの予想に反している。中性子模型として、正に帯電した重い粒子 (例えば陽子) のまわりを負に帯電した軽い粒子 (負のパイ中間子) が回っていると、(16.3) は分母に質量を含むから、中性子も磁気能率を有することができる。多分湯川は中間子論を作る時にこんな事を考えただろう。(現在はクォークを用いて磁気能率を説明する。)

(16.2) を導く際、 L を導入し v を消去する課程は不自然であり、陽子と電子の磁気能率の比を説明するためのこじつけだと感じた学生のために...

v よりも L のほうが "良い物理量" であるということが基本にある。先に v は Lorentz 変換に対し、ベクトル、スカラー等の変換性を持たないことを示した。忘れていたら、もう一度相対論的な速度に対する変換則の部分を見直しておこう。一方角運動量 L は角度変数 θ と共役 (conjugate または canonical) な物理量を作っている。相対論のところで、Maxwell 方程式を共変形式に書き換えた後の問題を全て解いてみたかな？ 角運動量の問題が一つあったでしょ？

他に共役な対としては位置と運動量、時間とエネルギー等がある。

そう言えば ベータトロン の安定軌道を議論する時にも、途中で v を消去して p に変えていたネ。

問 Bohr magneton が登場したところで...。二つの $1 \mu_B$ の磁気能率を $1A^\circ$ だけ離して置いた。この時のエネルギーは最大いくらになるか？ この値と Curie 温度 $\sim 1000^\circ K$ に対応するエネルギーの大小を比較せよ。

以下に磁気能率が関係した、代表的な事例を紹介しよう。

Larmor precession 磁気能率 μ を一様磁場 H_0 に置くと歳差運動することが次のようにして分かる。

角運動量 J の満たす運動方程式は

$$\frac{dJ}{dt} = \text{トルク} = \mu \times H_0 \quad (16.5)$$

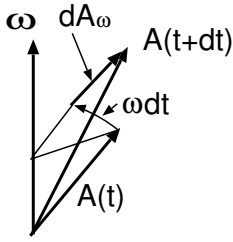
これに (16.4) を代入し μ を消去すると、

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma J \times H_0 \quad (16.6)$$

ここで $\gamma = g \mu_B$ は磁気回転比 (gyromagnetic ratio) と呼ばれる。この式にスカラー的に J をかけると J^2 の一定性が導ける

$$J \cdot \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (J^2) = \gamma J \cdot (J \times H_0) = \gamma H_0 \cdot (J \times J) = 0 \quad (16.7)$$

即ち J はベクトルとしては (16.6) の方程式に依り時間と共に変化するが、その大きさ J^2 は変化しない。これから J はただ回転しているだけと結論できる。回転速度を知るために成分に分けて (16.6) を解くのは簡単であるが、別の方法として回転座標系の方法を利用しよう。この手法は多分力学で遠心力やコリオリ力の説明に利用しただろう。



時刻 t と $t + \delta t$ での物理量 $A(t)$ と $A(t + \delta t)$ の増分を回転系から見ると $(\delta A)_\omega$ 、固定系からみると δA だけ変化している。図を参照すると

$$(\delta A)_\omega = \delta A - \omega \delta t \times A$$

又は

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_\omega = \frac{dA}{dt} - \omega \times A \quad (16.8)$$

A として J を用い、(16.6) から、

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_\omega = \frac{dJ}{dt} - \omega \times J = J \times (\gamma H_0 + \omega) \quad (16.9)$$

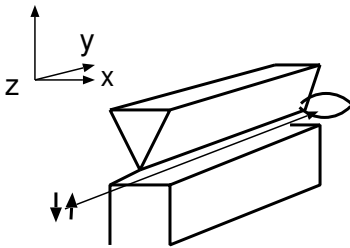
ここで、

$$\omega_L = -\gamma H_0 \quad (16.10)$$

とすると回転座標系では $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{\omega_L} = 0$ だから静止している。固定系から見ると ω_L の角速度で H_0 を軸として回転している。(16.10) を Larmor frequency と呼ぶ。この事実は、磁気共鳴を理解するのに必要である。

ω_L できる時定数よりも充分ゆっくりと H_0 を変化させると J はやはり H_0 のまわりを回転し、この時定数よりもずっと急速に H_0 の符号を変えると、J は回転の方向を変えきれない。この事実は、磁気能率の向きをかえるのに利用される。

Stern と Gerlach の実験 非一様磁場 B の中に、電気的には中性な磁気能率 μ を打ち込んだとする。



磁場中に置かれた磁気モーメントのエネルギー W は $W = -\mu \cdot B$ である。B が一様でないから W は場所の関数である。非一様磁場からこの磁気能率の受ける力 F は

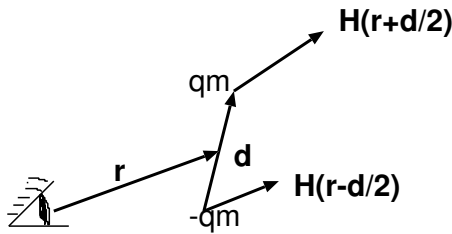
$$F = -\nabla W = \nabla(\mu \cdot B) \quad (16.11)$$

ここで μ は場所の関数ではないし、 $\nabla \times B = 0$ (電流を無視) だから

$$F = (\mu \cdot \nabla) B \quad (16.12)$$

右辺を確認するのに、次のベクトルの内積に対する勾配の公式がある。

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A)$$



しかし 4 つも項のあるスカラー積の勾配公式は覚えにくいし、物理がはっきりしない人のために磁気能率 μ の定義に戻って、 $\pm q_m$ の磁荷が距離 d だけ離れて置かれていると考えよう。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= q_m \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) - q_m \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) \\
 &= q_m \left\{ \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{d_x}{2} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{d_y}{2} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{d_z}{2} \right) + \hat{\mathbf{e}}_y (\dots) + \hat{\mathbf{e}}_z (\dots) + O(d^2) \right\} \\
 &\quad - q_m \{ \dots \} \\
 &= q_m \left(d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\
 &= (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{16.13}$$

これで磁場が一様でない時に受ける力の計算方法が分かった。このやり方が面倒ならば、成分に分解し、定義通り計算するのが良いだろう。

簡単のために $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ が一番大きくて他は無視できるとしよう。磁気モーメントは元来 y 軸方向に打ち込まれたとすると、($\mu > 0$ と仮定し) z の正の方向に偏向力を受ける。

Stern と Gerlach は中性の銀原子に対しこの様な実験をしたところ z が正の方へ偏向を受けるものと $z < 0$ の方へ偏向されるものがほぼ等量あり偏向の程度は $z > 0$ と $z < 0$ で同じであると結論した。($\frac{\partial B_z}{\partial z}$ が一定でない精度は悪いが ...) これから μ は特定の正、負の 2 つの方向を選択的にとっていると結論され、電子スピンの存在が観測される事となった。

(古典的には検出器の位置にぼんやりとした 1 つの山を作るはずであった。又、スピンはスペクトルの微細構造からその存在は予言はされていた。)

中性銀原子の 47 個の電子は、現在の知識ではどのような配置をしているのだろうか？

この実験は電子スピンのとり得る方向が空間的に任意ではないことを示し、方向量子化として知られている。分かれる数から角運動量の大きさ $|J|$ が知れる。又、もしも $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ を正しく制御できていれば、磁気能率 μ の大きさも推定できる。(14.29) で登場した magnetic quadrupole field を使うと、 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ を一定にした部分が使えらる。もしも 6 重極磁石 (磁気ポテンシャルは $\phi_m \propto r^3 \cos 3\phi$) を利用すると $\frac{\partial B_z}{\partial z} \propto z$ とできるからある符号の μ に対しては単振動、他の符号の μ は指数関数的運動をさせることが可能である。半周期後の位置には一方の符号の μ のみが収束して集められる。

先に述べた中性粒子も磁気モーメントを有するという事は、この Stern-Gerlach の実験装置を拡張した概念を用いて測定された。そこで示唆された様に、原子核のモーメントは電子のそれよりも断然小さい。

エネルギーの勾配から力の方向を計算するのは、正統的ではあるが面倒だと感じる人もいるだろう。そう言う人は、(16.11) を見て、力はエネルギーが減る方向に働くと思うのが良いだろう。

スピン軌道力と原子スペクトルの微細構造　電子は原子核のまわりを回転しているとす。静止系では電子の位置の Coulomb 場は $E = \frac{-Zze^2\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ であるが、速度 \mathbf{v} で運動する電子はこの E を Lorentz 変換した場を感じているだろう。磁場 \mathbf{B}'_{\perp} は (13.74) より

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \quad (16.14)$$

$\mathbf{B}_{\perp} = 0, \mathbf{E}_{\perp}$ として上記 E を用いると、

$$\mathbf{B}'_{\perp} = +\frac{\gamma\mathbf{v}}{c^2} \times \frac{Ze^2\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{\gamma}{mc^2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{L}}{r} \quad (16.15)$$

電子の固有スピンを \mathbf{s} 、磁気モーメントを $\boldsymbol{\mu} = g_s \mu_B \mathbf{s}$ と書くと、この磁場のために

$$E_{\mu} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}' = \frac{\gamma}{m} \frac{Ze^2 g_s \mu_B}{4\pi r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \quad (16.16)$$

のエネルギーが電子に加わる。方向量子化のために \mathbf{s} は \mathbf{L} に対し平行又は反平行の状態しかとれないので E_{μ} は 2 つの値をとる。この相互作用はスピン・軌道相互作用と呼ばれ、例えば Na・D 線の $5893 \pm 3A^{\circ}$ という $6A^{\circ}$ 幅の分離を生ずる原因となっている。非常に小さい分離だから微細構造と呼ばれる。

原子核の磁気能率と電子の磁気能率の相互作用は超微細構造と呼ばれる。(dipole-dipole 相互作用 (3.56) を思い出そう。) 水素原子の超微細構造に起因する 21cm の波長の電波は宇宙論のファンにはおなじみのものである。本当に 21 cm になるかどうか簡単な計算を試してみよ。

反磁性　円軌道を描いて原子核の周囲を運動する電子を一様磁場中に置くと、軌道面が Larmor 運動により傾き、このために余分のエネルギーが登場する。これを調べてみる。磁場がある時の Hamiltonian (13.102) で非相対論的近似をすると、

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + e\phi \\ &\simeq mc^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + e\phi \end{aligned} \quad (16.17)$$

定数 mc^2 は運動状態に関係がないから、落としておく。一様磁場を与えるベクトルポテンシャルの式を代入する。(6.4) の直後の問を思い出そう。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (16.18)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} + \frac{q^2}{8m} \mathbf{B}^2 (\mathbf{r}_{\perp})^2 + e\phi \quad (16.19)$$

第 1 項と第 4 項で $\mathbf{B} = 0$ の時の運動を記述し、第 2 項は (16.2) と同じ軌道運動に伴う Bohr 磁子を与える項であり、第 3 項がここで問題にしたおつりの項である。ここで、 \mathbf{l} は軌道角運動量である。

今度は \mathbf{l} や \mathbf{v} という議論をせずともすんなり理解できよう。第 2 項では \mathbf{B} の向きに対応し、 \mathbf{l} が平行か反平行かで正にも負にもなる量であったが、第 3 項は全部正の数で構成されているので、エネルギーを減らして系の安定性に寄与することはない。

系に磁場をかけると Hamiltonian を B の関数と考へて Taylor 展開した時の 1 次の項 $\left(\frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot\mathbf{l}\right)$ は 1 の向きを調整してエネルギーを下げる方向に系が向かう事を示し、Taylor 展開の 2 次の項 $\left(\frac{q^2}{8m}\mathbf{B}^2\mathbf{r}_\perp^2\right)$ は 1 次の項と反対にエネルギーを上げてしまう。

非相対論的にはここで打ち切られるが、相対論的には B の 3 次、4 次の項もあり得る。多分次数が上がると、どんどん小さな寄与しか与えないから無視しよう。

(16.19) 右辺第 3 項の寄与が反磁性の原因であり、今の議論から分かる様に、ほとんど近似を使っていないので、非常に一般的に成立する。即ち物質や温度という情報は、何も使わずに導いた事に注意。但し、Taylor 展開の第 2 項であるから、 B の 1 次の項が寄与しない時にしか観測にかからない。1 次の項が寄与しないとは軌道角運動量やスピンの和が元々 0 になっている様な状態と想像がつかう。

反磁性の原因として、 r_\perp^2 が登場した。この項は、面積と考へる事が出来る。すると、円軌道に伴う磁気能率が頭に浮かぶ。磁場がかけられると、電子が円運動を行い、磁気能率が発生し、この磁気能率が更に磁場と相互作用をすると考へると、この反磁性の項が登場する。電子が運動する領域の面積が大きければ、大きな反磁性が生ずるとするならば、亀の甲構造を有するベンゼン環を思い出すだろう。ベンゼンの磁気感受性の値を調べてみよう。

r_\perp^2 は B を z 軸にとると、 $r_x^2 + r_y^2$ の事であるから $r_\perp^2 \sim \frac{2}{3}r^2$ と書き、 r^2 には原子の大きさからの値を通常使う。しかしここいらは量子力学を使わないと、どうにもならない。

常磁性 原子や分子が固有の磁気能率を持ち、これがお互いには全く乱雑な方向を向いていれば個々の構成要素は磁性を持っていても外見上、磁化 M は無い。この様な状態が常磁性である。外部から磁場をかけると各磁気能率は $-\mu\cdot B$ のエネルギー分だけ安定な状態に移行しようとするが、周囲の熱運動に妨げられてある確率でしか磁気エネルギーによる安定化が実現しない。Boltzman 分布が実現している。

磁場 B と磁気能率 μ の相互作用エネルギー W は $-\mu\cdot B$ であるから、 B を z 軸に選ぶと、 μ_z の期待値 (平均値) $\overline{\mu_z}$ は

$$\begin{aligned}\overline{\mu_z} &= \frac{\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mu \cos\theta \exp\left(+\frac{\mu B}{kT} \cos\theta\right)}{\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(+\frac{\mu B}{kT} \cos\theta\right)} \\ &= \mu \left\{ \coth\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \frac{kT}{\mu B} \right\} \\ &\quad \downarrow \\ &= L\left(\frac{\mu B}{kT}\right) : \text{Langevin 関数}\end{aligned}\tag{16.20}$$

高温 (又は磁場が弱い時)

$$L(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{1}{x} \simeq \frac{\dots + \dots}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)} \simeq \frac{x}{3}\tag{16.21}$$

であるから

$$\overline{\mu_z} \sim \frac{\mu^2 B}{3kT} \quad (16.22)$$

単位体積あたりの磁気能率は、これに単位体積当たりの μ の個数 N をかければよい。magnetic susceptibility は

$$\kappa_m = \frac{\mu^2}{3kT} N \quad (16.23)$$

温度 T に反比例している。

問 $\mu = \mu_B$, $T = 300\text{K}$ の時、 $B = 1\text{ Tesla}$ の磁場をかけると $\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$ はいくらぐらいになるか?

(16.20) では方向量子化という考えが入っていないので、この点を修正する必要がある。角運動量を $J(\hbar)$ とした時 J の z 成分のとり得る値が $J_z = -J, -J+1, -J+2, \dots, J-1, J$ の $(2J+1)$ 組に制限される。 $\cos\theta$ を (J_z/J) , $\mu = g\mu_B J$ とおきかえて J_z についての和をとればよい。

$$\overline{\mu_{zq}} = \frac{\sum_{J_z=-J}^J g\mu_B J_z \exp\left(\frac{g\mu_B J_z B}{kT}\right)}{\sum_{J_z=-J}^J \exp\left(\frac{g\mu_B J_z B}{kT}\right)} = \frac{g\mu_B \frac{d}{d\alpha} \sum_{J_z=-J}^J \exp(\alpha J_z)}{\sum_{J_z=-J}^J \exp(\alpha J_z)}$$

$\alpha \equiv \frac{g\mu_B B}{kT}$ とおいた

$$= g\mu_B \left\{ \left(J + \frac{1}{2}\right) \coth\left\{\frac{\alpha}{2}(2J+1)\right\} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

$x \equiv J\alpha = \frac{g\mu_B J B}{kT}$ とおくと、

$$\overline{\mu_{zq}} = g\mu_B J B_J(x) \quad (16.24)$$

ここで

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\frac{x}{2J} \quad (16.25)$$

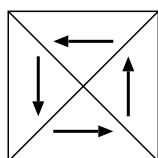
(16.25) は Brillouin 関数と呼ばれる。(16.24) 式は常磁性を割に低い温度まで (α は B/kT の関数) 実験を再現する。

常磁性は物質中に散らばっている磁気能率がお互いには、見掛上、何の相互作用もおよびし合わないように見える。(外部電子による遮へい効果)

強磁性 マクロな物質中に磁気能率を置くと一般にはお隣り同志会話をし、共同作業をするようになる。(常磁性はそうではない!) 即ち磁気能率の並び方にある規則性が見られる様になる。反強磁性とは強磁性を有するはずなのに隣り同志が反対向きに向いて見掛け上強磁性を示さない。フェリ磁性は 2 種の大きさの異なる磁気モーメントが逆向きに配向し差の磁気能率が外から見える。らせん磁性は、らせん階段のステップ状に磁気能率が並んでいる。勿論多数の磁気能率が 1 つの方向を向く単純な場合も忘れてはならない。ここではこの単純な場合をもう少しだけ詳しく、定性的に説明する。

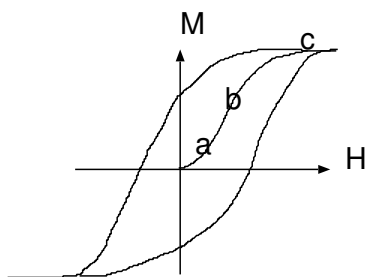
磁性を荷っている電子のスピンの“何らかの原因で”、お隣りの原子の同様の電子のスピンの平行になると、そのお隣りの電子のスピンの平行になるはずで、そのお隣りも… 1 つの原因で多数の結晶中の電子に協力関係が生ずると全部が一斉に同じ方向を向き、磁性がマクロに出現しそうに思えるが実はそう単純ではない。磁気能率はその外部に磁場を作るとすると、その分磁気エネルギーが必要だから、可能ならば、外部には磁場を作らない方がエネルギー的には安定になる。(1) 内部的にはスピンのできるだけ沢山平行に並び、且つ (2) 外部には磁場を作らない様に という目的でスピンを並べるやり方として磁区 (magnetic domain) という考え方がある。

即ちある有限の区間ではスピンの平行で 1 つの磁石のようになっているが、この磁石が組み合わせあって、マクロに見ると外部にはほとんど磁場を作っていない。この時、この磁区と磁区のすき間の領域では、前述の”何らかの原因”に抗してある狭い巾の範囲でスピンの向きが変化しなければならないのでこのためにもエネルギーが必要である。



例えば左図の様にスピン (磁気能率) が配向していると思えばよい。1 つの磁区の大きさはミクロな感覚で言えばかなり大きく、顕微鏡で見えるサイズの場合から、更に大きい事もある。図では一見各磁区は同じ大きさだが、結晶性を考慮すると向き易い方向と向き難い方向があるはずだから、磁気能率が全体で相殺していても磁区の大きさが等しい訳ではない。

又、実際の金属は多結晶体であるが、磁区は単結晶の領域を越えて広がっている場合もあるし、単結晶の内部で既に磁区構造を有してもよい。磁区の境界はミクロな厚さであり、例えば 300 原子層程度。この状態で外部から磁場をかけると、磁壁が動いてマクロに見ても磁気能率が見える様になる。即ち磁化された事になる。

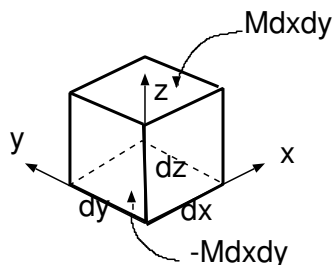


磁化され易さを次に考えてみる。磁場が弱い場合には、磁化されやすい方向の磁区は成長するが、そうでない部分は抵抗するので大きな磁化率は与えない (図の a)。しかし、磁場が強くなると全てのスピンの動き出すので (磁壁が動く) 大きな磁化率を与える (図の b)。更に磁場を強くしても、全ての磁気能率が配向してしまえば更なる変化は起こらなくなる (飽和 図の c)。

ところで多結晶中には結晶構造に不整部分が存在するから、磁壁の移動がこの結晶欠陥の位

置で暫く阻害される事がある (pinning)。ミクロに見た時、これはバルクハウゼン効果と呼ばれる。マクロに見てもこの様な効果が残ると $H = 0$ でも M は 0 にならない (残留磁化)。結晶に方向性があると残留磁化が強調される場合がある。この様な状態から $M = 0$ を実現するには H を逆転せねばならない。結局図の様な磁化曲線を描く事になる。過去の磁化の履歴により現在の磁化の値が、現在の H だけに依らないので、この様な曲線を履歴曲線 (hysteresis curve) と呼ぶ。 $H = 0$ の時の M の値が通常磁石の強さを与える。

バルクハウゼン効果があるという事は磁性体の内部で仕事が行なわれているという事である。不可逆課程ではエネルギーの散逸が生じているはずだとも考えられる。これを計算してみよう。



B と M は平行であると仮定し、 B の方向を z 軸にとり磁性体内に $dv = dx dy dz$ の体積要素を考える。左図で上面に $M dx dy$, 下面に $-M dx dy$ の磁荷が存在すると、この時の磁気エネルギーは $(M dx dy) \times dz = M dv$ となり、単位体積当たり M の磁気エネルギーが存在する事となる。

ここで $\delta q_m = \delta M dx dy$ の磁荷を下面から上面へ運ぶ時の仕事 δW は磁荷 \times 磁場 \times 距離だから、

$$\delta W = (\delta M dx dy) \cdot B \cdot dz = dv \cdot \delta M \cdot B \quad (16.26)$$

外部磁場を H_0 から H_1 まで強めた時、 M が $M_0 \rightarrow M_1$ 迄変化したとすると、この時の単位体積当たりの仕事 W は次式で与えられる。即ち、

$$W = \int_{M_0}^{M_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} \quad (16.27)$$

$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0$ と 1 サイクル変化すると、行きと帰りでカーブが異なるならばこの積分は 0 にならず、これが磁性体に与えられたエネルギーになる。 B の原因 (例えば電流) 側から見た時、これをヒステリシス損失と呼ぶ。トランスが発熱する原因には銅損や渦電流以外にヒステリシス損失もあり得る。

第17章 電磁場中での荷電粒子の軌跡

一様電場中の荷電粒子の軌跡は非相対論的には放物線、相対論的には懸垂線であり、一様磁場中では相対論又は非相対論に依らず螺旋を描く事は知っている。これ等を組み合わせたり、場の分布を変えたりすると面白い利用分野が開けてくる。

ここでは非相対論的領域に限定し、工学的に有用な場合をいくらか見ておこう。

一様電磁場が存在する場合 一様な電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} が与えられた時、質量と電荷が m , q である質点の運動方程式は次式とする。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (17.1)$$

右辺第2項 $q\mathbf{E}$ がなければ2階の斉次微分方程式であるから、式(17.1)の解はこの斉次方程式の一般解と(17.1)の特解を重ね合わせればよい。斉次方程式の一般解を先ず考えよう。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + q\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{又は} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + q\mathbf{B} \times \mathbf{v} = 0 \quad (17.2)$$

この方程式には エネルギー積分 が存在する。 \mathbf{v} をスカラー的にかけると、

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^2) = 0 \quad (17.3)$$

(エネルギー積分は当然(17.1)式に於いても $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で potential ϕ を導入すると存在する。) $v^2 = \mathbf{v}^2$ は(17.3)より保存量である。速度は変化しない。

(17.2)に \mathbf{B} をスカラー的にかけると、 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0$ であるから、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (17.4)$$

即ち、 \mathbf{v} の \mathbf{B} 方向成分 (v_{\parallel}) も変化しない。(17.3)、(17.4)より、 \mathbf{v} の \mathbf{B} に垂直な成分 \mathbf{v}_{\perp} も、その大きさを変えない。

$$\mathbf{v}_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2 = \text{一定} \quad (17.5)$$

\mathbf{v}_{\perp} は、 $|\mathbf{v}_{\perp}| = \text{一定}$ であるから、回転の自由度しか残っていない。一様磁場中の磁気能率の Larmor の歳差運動の時の手法を覚えていれば、

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \quad (17.6)$$

という角速度で回転する座標系に移ると、この系では(17.2)式は

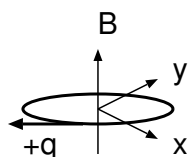
$$\left(\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} \right)_{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad (17.7)$$

と書けるから、この系では等速運動をしている。B に平行な成分は一定で、B に垂直な成分は (17.7) 式の ω で回転している。重ね合わせると螺旋運動になる。(17.6) の ω は cyclotron frequency (正確には角速度) と呼ばれ、非相対論の範囲では energy に依存しない。この性質を用いて Lawrence はサイクロトロンと後に呼ばれる粒子加速器を発明した。電子の有効質量 (effective mass) を測定する手段としても利用されている。

B に直交する 2 つの単位ベクトル \hat{e}_1, \hat{e}_2 (但し $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$) を持ってくる、斉次方程式 (17.2) の解は、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_{\parallel} t + |\mathbf{v}_{\perp}| (\hat{e}_1 \cos \omega t + \hat{e}_2 \sin \omega t) / \omega \quad (17.8)$$

と与えられる。



但し、 $t = 0$ で $\mathbf{r}(t = 0) = \frac{|\mathbf{v}_{\perp}| \hat{e}_1}{\omega}$ にイオンは存在するとした。 $q > 0$ 、 \hat{e}_1, \hat{e}_2 を x, y 軸方向の単位ベクトル、B を z 方向にとると、図のように時計方向に回転する。

非斉次方程式の特解 (17.1) 式はベクトルで書かれているから、3 つの方程式を並べて書いたものと考え、特解も 1 つだけではない。 \mathbf{v}_{\parallel} と \mathbf{v}_{\perp} に分けて考えられる。 \mathbf{v}_{\parallel} に対しては、 $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0$ だから (17.1) の右辺第 1 項は無いと思えばよいから、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_{\parallel}}{dt^2} = q \mathbf{E}_{\parallel} \quad (17.9)$$

を解くと、

$$\mathbf{r}_{\parallel}(t) = \mathbf{r}_{\parallel}(0) + \mathbf{v}_{\parallel}(0) t + \frac{q \mathbf{E}_{\parallel}}{2m} t^2 \quad (17.10)$$

ここで、 $\mathbf{r}_{\parallel}(0)$ と $\mathbf{v}_{\parallel}(0)$ は積分定数である。

\mathbf{v}_{\perp} に対しては、 $\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = 0$ と仮定してみると、

$$\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad (17.11)$$

B 方向の単位ベクトル \hat{B} をベクトル的にかけ、 $\mathbf{v}_{\perp} = \hat{B} \times (\mathbf{v}_{\perp} \times \hat{B})$ である事を利用すると、

$$\mathbf{v}_{\perp} = -\frac{\hat{B} \times \mathbf{E}}{B} = \text{一定ベクトル} \quad (17.12)$$

即ち、(17.1) には B にも E にも直交する方向 ($-\hat{B} \times \mathbf{E}$) に一定速度でイオンが動くという解が存在する。別の表現をすると、E、B に直交し、(17.12) 式で与えられた速度を有するイオンは電荷に依らず、全く力を受けずに直進する。この事実は Wien の velocity filter として利用されている。又、磁気モーメントを有するイオンの進行方向を変えずに、モーメントの方向のみを変えるためにも利用されている。

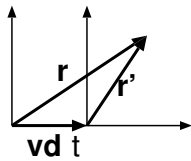
本論に戻って、(17.1) 式の解は斉次方程式の解 (17.8) に特解 (17.10), (17.12) を重ね合わせ、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_{\parallel} t + \frac{|\mathbf{v}_{\perp}|}{\omega} (\hat{e}_1 \cos \omega t + \hat{e}_2 \sin \omega t) + \frac{q \mathbf{E}_{\parallel}}{2m} t^2 - \frac{1}{B} \hat{B} \times \mathbf{E} t \quad (17.13)$$

色々な場合に対して軌跡の図を描いてみると面白い。最後の項は t に比例して増加するから、各種の円形加速器を設計する際に、最初に対策を考えておかねばならぬ項になっている。

E と B が直交する場合は少し手を抜くことができる。

v_d (= 一定) で運動する座標系を考えると、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_d$ と書いて、



ここで、

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q \{(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_d) \times \mathbf{B} + \mathbf{E}\} \quad (17.14)$$

$$\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} \quad (17.15)$$

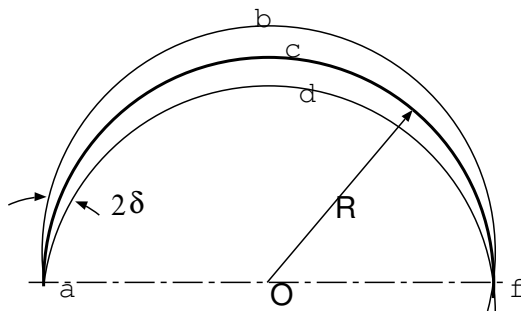
となる様に v_d をとると、非斉次項が消えるから、この座標系では \mathbf{v}' は B に対する並進運動とサイクロトロン周波数での回転を重ね合わせた螺旋である。元の座標系ではこれに更に v_d での並進運動が加わったものになる。(17.13) の解を見てもこの事情は大体読み取れる。

$E = 0$ 又は $B = 0$ とおくと、一方がない場合の解はやはり (17.13) で与えられる事は自明である。

magnetic spectrograph (17.13) 式で $v_{\parallel} = 0$, $E = 0$ の時、軌道は円であり、その半径 R は (17.13)、(17.6) より

$$R = \left| \frac{v_{\perp}}{\omega} \right| = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \quad (17.16)$$

ここで、 p はイオンの運動量である。イオンは運動量に比例した半径の円軌道を描く。下の図を見ながら考える。磁場の強さ B と曲率半径が分かると単位電荷当たりの運動量を測定する事ができる。特に中心軌道 acf に対し、微小角 $\pm\delta$ だけ運動量の方向が異なるイオンの軌道は 180° 偏向後ほぼ f の位置に至る。 f 付近での中心軌道からのずれは、約 $\cong 2R(1 - \cos\delta) \cong R\delta^2$ であるから、焦点の大きさは δ の 2 次の微小量である。逆に 1 次の微小量の範囲では 0 である。この位置にイオン検出器を置くと効率良く、良い分解能で運動量を分析できる。光学との類似で、 f の位置をこの分析器の焦点と名付ける。



焦点を結ぶ直感的説明 曲率半径 R 、飛行距離 ds 、偏向角 $d\phi$ の間には次の関係式がある。

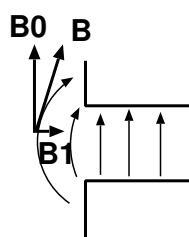
$$d\phi = \frac{ds}{R} \quad (17.17)$$

R が一定ならば、偏向角と飛行距離は比例する。

図で $\pm\delta$ だけ中心軌道から離れたイオンは磁場中の飛行距離が中心軌道よりも δ に比例した量だけ多い(又は少ない)から一点で出会う。直接計算してみると、図の一点破線を x 軸として、 $x = R(2\cos\delta - 1)$, $y = 0$ が円の交点である。

今の例の運動量分析器は偏向面内で収束力を与えた。この様な収束性を横収束と呼ぶ。この様

な運動量の磁気分析器は、Rutherford 達に依って使用されたようである。これに対し磁場方向の収束性を縦収束と呼ぶ。縦収束は磁力線が曲がっていると実現できる。



左図で正イオンが紙面に入る方向にほぼ円運動していたとする。B は主磁場の方向成分 B_0 とこれに直交する B_1 成分に分けられる。 $qv \times B_0$ は B_1 方向を向き、この力が遠心力を相殺すると円軌道が実現される。他方 $qv \times B_1$ は図では下向きの力をイオンに及ぼす。もしもイオンが上下の対称面より下にあるとこの力は上を向く。この様にして縦方向の収束力が実現される。

もう少し定量的に議論しよう。主磁場の方向を z 軸にとると、

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(0) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \cdot z + \dots \quad (17.18)$$

円筒座標系で $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ の方位角成分の関係式より、次式が成立するから、

$$\frac{\partial B_0}{\partial r} = \frac{\partial B_1}{\partial z} \quad (17.19)$$

$$B_1 = -\frac{\partial B_0}{\partial r} \cdot z + O(z^2) \quad (17.20)$$

である。 $|z|$ が小さい時、 B_1 は符号まで含めて z に比例する。又 B が $z = 0$ に関して対称ならば B_1 の $O(z^2)$ の項は 0 (ゼロ) である。この時、Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -qv \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_{z=0} \cdot z \quad (17.21)$$

となり、単振動解を有する。即ち $|z|$ が一方的に増加することはなく、あるところ迄いくと下へ戻って来る。→ 縦方向の収束性がある。

このアイデアはサイクロトロン・ビーム強度の向上に利用され、ベータトロン・AVF サイクロトロン・強収束の原理へと発展していく。

イオン光学に関する話題は、別途 イオン光学という講義ノートに纏めたのでそちらを参照して下さい。

<http://www.tac.tsukuba.ac.jp/~yaoki/>

第18章 円筒対称な場の中の荷電粒子の運動

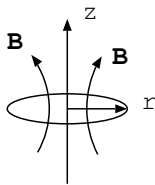
円筒対称という事は、円筒座標を用いると電磁場 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} が r や z には依存するが、方位角 θ には依存しないという事である。時刻に依存しない場を考える事にすると、電場 \mathbf{E} は potential $\phi(r, z)$ から導ける。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(r, z) \quad (18.1)$$

磁場 (磁束密度) \mathbf{B} は vector potential \mathbf{A} から導けるが、円筒対称性を使うと、 $A_\theta(r, z)$ のみが0でなければよい。 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ より

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) \quad (18.2)$$

と表せる。vector potential はなかなか直観的意味を掴み難いが、円筒対称性を利用すると以下の様に磁束との簡単な関係が導ける。対称軸を z 軸とし、この軸に垂直に、軸を中心とし半径 r の面を考える。この面を通過する磁束 $\Phi(r, z)$ は



$$\Phi(r, z) = \int_0^r 2\pi\rho B_z(\rho, z) d\rho \quad (18.3)$$

この式を r で微分すると

$$B_z(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \quad (18.4)$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるから、 B_z が決まると、 B_r は独立ではない。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (18.5)$$

ここに (18.4) を代入し

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r B_r + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{1}{2\pi} \right) = 0 \quad (18.6)$$

この式は簡単に r で積分できて、 $r \rightarrow 0$ で $\Phi \sim 2\pi r^2 B_z$ 、 $B_r \rightarrow 0$ とすると、

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (18.7)$$

これで、 \mathbf{B} と Φ の関係が分かった。他方 (18.2) の \mathbf{B} と A_θ の関係から \mathbf{B} を消去すると、次式を得る。

$$A_\theta(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \Phi(r, z) \quad (18.8)$$

後で分る事だが $(\Phi/2\pi)$ は角運動量と密接に結びついている。(13.102) の Hamiltonian を思い出すと qA は運動量の片棒を担っているから、(18.8) 式で $r q A_\theta$ が角運動量になるのは納得出来るだろう。広義の角運動量は z 成分が保存する事を運動方程式から導ける。ここでは vector potential の方を採用し磁束は暫らく忘れておく。

暫らく \mathbf{E} を無視して運動方程式を変形しよう。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (18.9)$$

ここへ、 $\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}$ をスカラー的に掛けると、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ として、

$$\text{左辺} = (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}) = m \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{dL_z}{dt} \quad (18.10)$$

$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{e}}_z$ より

$$\text{右辺} = (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) \cdot q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q r \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \{B_z r \omega \hat{\mathbf{e}}_r + (B_r v_z - v_r B_z) \hat{\mathbf{e}}_\theta - r \omega B_z \hat{\mathbf{e}}_z\} \quad (18.11)$$

ここに (18.2) を代入すると

$$\text{右辺} = q r \left(B_r \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dr}{dt} \right) = -q \left\{ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \frac{dr}{dt} \right\} = -q \frac{d}{dt} (r A_\theta) \quad (18.12)$$

但しここで、 $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z$ は夫々 r, θ, z 方向の単位ベクトルであり、

$$\omega = \left| \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} \right| \quad (18.13)$$

は z 軸のまわりを運動する、各瞬間での角速度である。これから

$$\frac{d}{dt} (L_z + q r A_\theta) = 0 \quad (18.14)$$

又は

$$L_z + q r A_\theta = L_z^0 = \text{一定} \quad (18.15)$$

即ち荷電粒子は磁場と角運動量をやりとりしながら運動している。この結論は電場 \mathbf{E} に r 成分や z 成分が含まれていても成立する。なぜならば、 $(\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}) (= r \hat{\mathbf{e}}_\theta)$ との内積をとったから、 \mathbf{E} に $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ 成分がなければ内積が消えるからである。静電ポテンシャルが (18.1) で与えられるならば $\mathbf{E}_\theta = 0$ である。(18.9) に $\hat{\mathbf{e}}_z$ をスカラー的に掛けて、 z 方向の運動方程式を作る事ができる。

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = q \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{e}}_z) = q B_r \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_z) \quad (18.16)$$

$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ とすると、 $\hat{\mathbf{e}}_z$ 成分はベクトル積で消えるから $\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{r}/r$ を代入すると

$$= \frac{q B_r}{r} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{e}}_z) = \frac{q B_r}{r} (-\hat{\mathbf{e}}_z) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\frac{q B_r}{m r} L_z \quad (18.17)$$

B_r に (18.2) 式を代入すると

$$= \frac{q L_z}{m r} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{L_z}{m r^2} \frac{\partial}{\partial z} (q r A_\theta) = -\frac{L_z}{m r^2} \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_z^2}{2m r^2} \right) \quad (18.18)$$

$$\therefore m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) \quad (18.19)$$

左辺は遠心力 $mr\omega^2$ を角運動量で表すと

$$mr\omega^2 = \frac{L_z^2}{mr^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) \quad (18.20)$$

となるから遠心力を potential で表したものになっている事が分る。

運動方程式の r 方向の成分も同様に遠心力の potential を用いて書き下せる。先ず

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (r\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{e}}_z) = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} + r \frac{d^2 \hat{\mathbf{e}}_r}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (18.21)$$

これに $\hat{\mathbf{e}}_r$ を掛けると

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} + 2m \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} + m r \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{d^2 \hat{\mathbf{e}}_r}{dt^2} \quad (18.22)$$

ところで $\hat{\mathbf{e}}_r^2 = 1$ を一回 t で微分すると $2\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = 0$ もう一回微分すると

$$\left(\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} \right)^2 + \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{d^2 \hat{\mathbf{e}}_r}{dt^2} = 0$$

これ等を代入すると

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \left(\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} \right)^2 = m \frac{d^2 r}{dt^2} - m r \omega^2 \\ &= m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L_z^2}{mr^3} \end{aligned} \quad (18.23)$$

他方、(18.9) の右辺より、

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{q}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \frac{q}{mr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{q}{mr} L_z B_z$$

ところで \mathbf{L} には \mathbf{r} 成分はなく、 \mathbf{B} には θ 成分はないから (18.2) の B_z を代入すると

$$= \frac{q}{mr} L_z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = \frac{L_z}{mr^2} \left(-\frac{\partial L_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) - \frac{L_z^2}{mr^3} \quad (18.24)$$

(18.23)、(18.24) より

$$\therefore m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) \quad (18.25)$$

(18.1) で与えられる電場が存在する時には、(18.19)、(18.25) に $-q\nabla V$ の項が加わり、

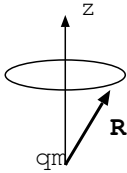
$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -q \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(qV + \frac{L_z^2}{2mr^2} \right) \quad (18.26)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -q \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_z^2}{2mr^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(qV + \frac{L_z^2}{2mr^2} \right) \quad (18.27)$$

この様に運動方程式では r, z 方向共に簡単な potential から導ける。Lagrangian を使用するべきであったかな？

magnetic monopole q_m の下での荷電粒子の運動 磁荷の強さを q_m とすると、磁束密度 \mathbf{B} は、次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (18.28)$$



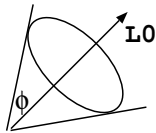
前節の議論をそのまま採用しても良いが、今の場合対称性が非常に良いので、簡単に済ませられる。

円筒座標系の独立座標系を (r, θ, z) としたので、場の点を大文字 \mathbf{R} で表す事とした。荷電粒子の質量と電荷を m, q_e とする。

軸対称性からは L_z のみが運動の良い指標として抽出されたが、今の場合は球対称であるから任意の方向に対称軸を選び得る。だから \mathbf{L} そのものがあらわに出てくる。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{R} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} \times q_e \left(\mathbf{v} \times \frac{q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{q_e q_m}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) \right\} = \frac{q_e q_m}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \end{aligned} \quad (18.29)$$

$$\therefore \mathbf{L} - \frac{q_e q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{L}^{(0)} = \text{一定} \quad (18.30)$$



これに $\hat{\mathbf{R}}$ をスカラー的に掛けると $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = 0$ だから

$$-\frac{q_e q_m}{4\pi} = |\mathbf{L}^{(0)}| \cdot \cos \phi \quad (18.31)$$

ここで ϕ は \mathbf{R} と $\mathbf{L}^{(0)}$ のなす角度であり、(18.31) より一定である。

\mathbf{R} がいつも定ベクトル $\mathbf{L}^{(0)}$ と一定の角度をなす様に運動している。 $\mathbf{L}^{(0)}$ を中心とし半頂角 ϕ の円錐面上にイオンは束縛されている。

(18.30) を 2 乗すると、 L^2 が一定である事がわかる。

$$L^2 + \left(\frac{q_e q_m}{4\pi} \right)^2 = (L^{(0)})^2, \quad L^2 = (L^{(0)})^2 - \left(\frac{q_e q_m}{4\pi} \right)^2 = \text{一定} \quad (18.32)$$

これから、 R が小さいところでは $\mathbf{L}^{(0)}$ のまわりを角速度の意味で高速で回転し、遠くではゆっくり回転する。

力が速度ベクトル \mathbf{v} に垂直であるから、エネルギー積分が存在する。運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (18.33)$$

に \mathbf{v} をスカラー的にかけると、

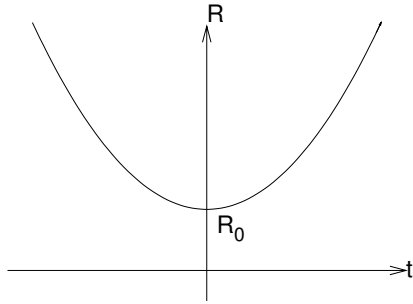
$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = 0, \quad v^2 = \text{一定} \quad (18.34)$$

力が \mathbf{R} にも垂直だから、もう一つの積分が存在する。(18.33) に \mathbf{R} をスカラー的に掛けると、

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) - \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(R \frac{dR}{dt} \right) - v^2 = 0 \quad (18.35)$$

一回積分すると

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} R^2 = v^2 t + A \quad (18.36)$$



もう一回積分すると

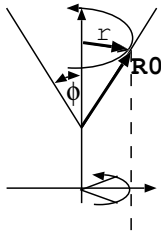
$$R^2 = v^2 t^2 + At + R_0^2 \quad (18.37)$$

ここで A 、 R_0^2 は積分定数である。 $A = 0$ となる様に時間の原点をズラすと、 (R, t) は双曲線を描く。イオンは無限遠から近づいて来て、 R_0 で折り返してまた無限遠に遠ざかる。

イオンの軌道は各瞬間にはその地点での \mathbf{B} に対応するサイクロトロン周波数で回転している訳だが、この回転の様子を詳しく調べるためには角運動量の式 (18.30) に \mathbf{L}^0 をスカラー的にかけるとよい。 \mathbf{L}^0 を z 軸に取り、下の図を参照して、軸からの距離を r とすると、

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^{(0)} = L^{(0)} L_z = L^{(0)} \cdot m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (18.38)$$

であるから



$$m r^2 \frac{d\theta}{dt} = L^{(0)} + \frac{q_e q_m}{4\pi} \cos \phi = \text{一定} = C \quad (18.39)$$

他方

$$r^2 = R^2 \sin^2 \phi = (R_0^2 + v^2 t^2) \sin^2 \phi \quad (18.40)$$

(18.25)、(18.26)、(18.27) より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{m \sin^2 \phi} \cdot \frac{1}{R_0^2 + v^2 t^2} \quad (18.41)$$

この式は簡単に積分できる。

$$\theta = \frac{C}{m \sin^2 \phi} \times \frac{1}{R_0 v} \tan^{-1} \left(\frac{vt}{R_0} \right) + \theta_0 \quad (18.42)$$

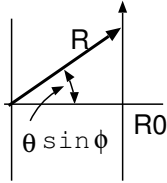
積分定数は $t = 0$ での θ を 0 とすると 0 になる。又、 $C = m R_0 \sin \phi \cdot v$ であるから

$$\theta = \frac{1}{\sin \phi} \tan^{-1} \left(\frac{vt}{R_0} \right) \quad (18.43)$$

(18.37) と (18.43) から t を消去すると軌跡の方程式が R と θ の関数として得られる。

$$R_0 = R \cos(\theta \sin \phi) \quad (18.44)$$

円錐面の展開図上では



$$\left(\begin{array}{l} \theta \rightarrow \Theta = \theta \sin \phi \\ R \rightarrow R \end{array} \right) \quad (18.45)$$

と変換されるから、展開図では軌跡は直線になる。

磁気単極は存在しないが長い棒磁石の磁極付近、電磁石のコイルの端の付近等では、このような運動が大体において実現されているのだろう。例えば地球を双極子だと仮定すると、極地方での太陽から放射されたイオンの運動や、プラズマ核融合でプラズマの閉じ込め用磁気鏡の両端での運動等はよく知られていよう。

軸対称場の近軸光線近似 円筒座標で場の点を (r, θ, z) と書いた時、 z 軸 ($r = 0$) の近傍のみに限定すれば、場を r のべき級数に展開できるだろう。

静電場 $V(r, \theta, z)$ の r 展開

先ず軸対称性の仮定より、 θ には全く依存しないので、potential を $V(r, z)$ と書くと

$$V(r, z) = V(0, z) + \frac{1}{1!} \frac{\partial V(0, z)}{\partial r} r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V(0, z)}{\partial r^2} r^2 + \dots \quad (18.46)$$

軸対称性より、 V は r の偶関数でなければならないから $\frac{\partial V(0, z)}{\partial r} = 0$ である。

$$\frac{\partial V(0, z)}{\partial r} = -E_r(r = 0, z) \neq 0 \quad (18.47)$$

と仮定しての z 軸のまわりにこの場を回転してみると分る。湧き口がないとこれは不可能だ！ところで $\nabla^2 V = 0$ だから、

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (18.48)$$

V は θ に依存しないから右辺第 2 項は無視する。

この式に (18.46) を代入すると、

$$\left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} V(r = 0, z) = 0 \quad (18.49)$$

これにより、 r による 2 階微分が z による 2 階微分に置き換えられて、

$$V(r, z) = V(0, z) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 V(0, z)}{\partial z^2} \cdot r^2 + O(r^4) + \dots \quad (18.50)$$

即ち z 軸 ($r = 0, z$) 上の potential $V(0, z)$ (及びその 2 階微分) が与えられると、 r 方向の potential の値は Laplace の方程式より決定される。

(18.50) に依ると、 r 方向の電場の leading term は

$$E_r(r, z) = +\frac{1}{4} \frac{\partial^2 V(0, z)}{\partial z^2} r + O(r^3) \quad (18.51)$$

だから、 r に比例するので、 $q \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} < 0$ ならば、 r 方向に単振動の解を与える可能性がある。

静磁場の r 展開

静的な磁場も Laplace の方程式を満足する potential の勾配として与えられるから、(18.50) と同じ形式のものが、静磁 potential に対しても成立する。

別の見方では (18.3)、(18.8) 式を利用すると、磁束や vector potential でも与えられる。

$$\Phi = \int_0^r 2\pi r B_z(r, z) dr = \pi r^2 B_z(0, z) + O(r^4) \quad (18.52)$$

(18.8) に代入し

$$A_\theta(r, z) = \frac{r}{2} B_z(0, z) + O(r^3) \quad (18.53)$$

レンズ作用 主な運動方向が z 軸に沿い、 z 軸からの変位 r は小さい様なイオン (電子) の運動を考える。(近軸光線)

先ず (18.15) に依り、 L_z^0 は一定であるが、(18.53) により、

$$q r A_\theta = \frac{q}{2} r^2 B_z(0, z) + O(r^4), \quad L_z = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

であるから L_z^0 も $O(r^2)$ の微小量である。 z 方向の運動方程式 (18.26, 18.27) に於いて、 $qV + \frac{L_z^2}{2mr^2}$ は $O(r^0) + (r^2)$ の形をしているから、 $O(r^2)$ の項を無視すると、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -q \frac{dV(0, z)}{dz} \quad (18.54)$$

$\frac{dz}{dt}$ をかけて t で積分するとエネルギー積分が導ける。

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + qV(0, z) = qU_0 = \text{一定} \quad (18.55)$$

ここで積分定数 U_0 はイオン源を出る時 $\frac{dz}{dt} = 0$ の potential という意味を有する。(ボルツマン分布を考慮するとこの時も $\frac{dz}{dt} \neq 0$ である)

(18.55) は t についての微分を z についての微分に変換するのに使える。即ち

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{2q}{m}(U_0 - V(0, z))} \frac{d}{dz} \quad (18.56)$$

これにより、 r_0 と z の関係 (軌跡の方程式) を作り得る。(18.26, 18.27) の残りの式より

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{q}{2} \frac{d^2 V(0, z)}{dz^2} \cdot r - \frac{q^2 B_z(0, z)^2}{4m} \cdot r + \frac{(L_z^0)^2}{m r^3} \quad (18.57)$$

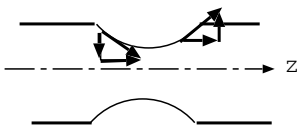
ここで、 $V(r, z)$ には (18.50) 式、 L_z には (18.15) 及び (18.53) 式を用いた。

$L_z^0 = 0$ の場合 :

z 軸上にイオン源や電子銃が置かれている場合には初期に $r = 0$ 即ち $L_z^0 = 0$ であるからいつも $L_z^0 = 0$ が成立する。この時 (18.57) の右辺は r に比例するから単振動解を与えるか、又は指数関数的に発散する解を与えるだろう。 r の係数が z に依存するので断定的ではないが.....

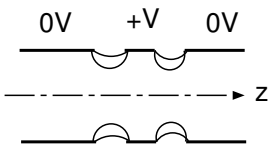
$B_z(0, z) = 0$ の時

$$\sqrt{q(U_0 - V)} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{q(U_0 - V)} \frac{dr}{dz} \right) = + \frac{q}{4} \frac{d^2 V(0, z)}{dz^2} r \quad (18.58)$$



この方程式はこれ以上には解析的には解けないが、右辺 $q \frac{d^2 V(0, z)}{dz^2} < 0$ ならば必ず収束作用のある事は定性的には次の様にして理解される。

左から $r(> 0)$ で z 軸にほぼ平行に入って来たイオンが円筒電極の gap で加速されるとしよう。加速 gap の左半分では図から分かる様に収束力を受ける。他方後半では (gap は非常に狭く r はほとんど変化しないとすると) 同じ強さの発散力を受ける。ところが左半分と右半分の通過時間を考えると、後半では加速の効果により、前半よりも後半の方が通過時間は短い。従って収束力と発散力に起因する力積は収束力の方が大きくなる。全体としては収束力を受ける。今は加速されると収束力が働くと言ったが、減速力でも収束力は働く。各自やってみよう。こういうレンズを gap lens と呼ぶ。



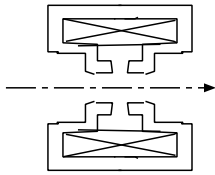
加減速どちらでも収束作用があるならば、電極を3つにして、中間にのみ電圧をかけ、左右の電極は 0 V にしてもよい。この様に構成した静電レンズを einzel lens (Unipotential lens) と呼ぶ。

このような静電レンズ系はブラウン管の電子銃・各種イオン源、加速器の初段、電子顕微鏡の初段等に利用されている

構造的には各種線形加速器にもこの原理は利用できそうだが、加速 gap を通過する時の加速の程度が相対的に小さくなるとあまり有効に働かなくなる。

サイクロトロン系の加速器でも Dee 電極による収束作用は一部で利用している。

電場のない時 (magnetic lens)

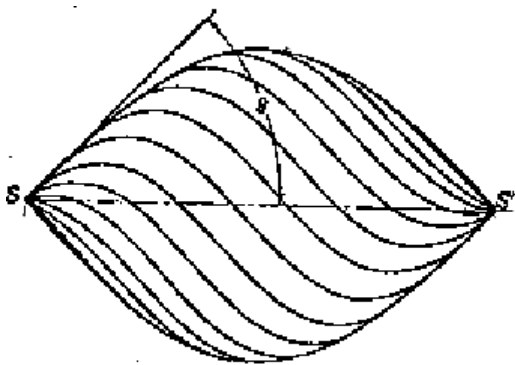


(18.57) 右辺第 2 項 r の係数は必ず負だから無条件に収束作用を有する。

直感的には z 方向に進むイオンに B_r が作用すると、 $q v_z \times B_r = F_\theta$ により、 θ 方向の運動が誘起され $v_\theta \neq 0$ となる。

次に、 $q v_\theta \times B_z = F_r$ により、 r 方向の力が登場し、これが収束力となる訳である。

v_θ も結局のところ B_z に比例するから、収束力は B_z^2 と平方の形で登場している。 B の 2 次の効果だから平均値を上げるよりも一ヶ所でも B_z を強くした方が得だから上の図の様にすると収束力が稼げる。(電子顕微鏡)



z 軸方向に一樣磁場を置くだけだと、cyclotron freq. はエネルギーに依らないので、一点から出たイオンは一周毎に元の r に戻って来るので、イオンを遠くまで移動させる事が出来る。この場合のイオンの軌道は図のように、納豆の藁つとを捻った様な軌跡を描く。Lens type β -ray spectrometer はこの z の相異を dispersion として利用する β -ray spectrometer である。この様な装置を長くつなぐと、どこまでも広がらずに電子を輸送できる。

$L_z^0 \neq 0$ の場合 :

円筒対称電磁場中の運動方程式は (18.15)、(18.54)、(18.57) で与えられる。これに近軸の近似をするために、 A_θ には (18.53) を代入すると、(18.15) は

$$L_z = L_z^0 - \frac{q}{2} r^2 B_z \quad (18.59)$$

他方

$$L_z = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{であるから}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_z^0}{m r^2} + \omega_L$$

$$\omega_L = -\frac{q B_z}{2m}, \quad \text{Larmor freq.} \quad (18.60)$$

方位角は、Larmor freq. で回転する部分と初期条件で定まる角速度 (当然これは一定) で回転する部分の和を (18.60) は示している。

z 方向の運動方程式、(18.54) は L_z^0 を含まないので、 L_z^0 には全く依存しない。

r 方向の運動方程式、(18.57) は L_z^0 を含むが重ね合せの形でしか L_z^0 を含まないで、 $L_z^0 = 0$

の部分と L_z^0 にのみ依存する部分に分離可能だろうと想像がつく。、(18.60) より

$$\begin{aligned}\theta &= \varphi + \chi \\ L_z^0 &= m r^2 \frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

で φ を定義する。 φ は z の関数であるが、

$$\bar{x} = r \cos \varphi, \quad \bar{y} = r \sin \varphi \quad (18.61)$$

で \bar{x} 、 \bar{y} を定義すると

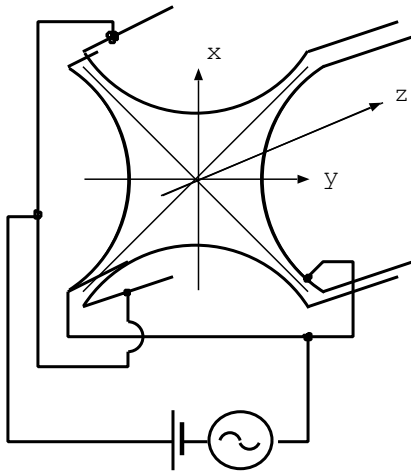
$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L_z^{0^2}}{m^2 r^3} \right) \cos \varphi, \quad \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L_z^{0^2}}{m^2 r^3} \right) \sin \varphi \quad (18.62)$$

であるから、(18.57) より

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= \left\{ \frac{q}{2} \frac{d^2 V(0, z)}{dz^2} - \omega_L(z)^2 \right\} \bar{x} \\ m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} &= \left\{ \frac{q}{2} \frac{d^2 V(0, z)}{dz^2} - \omega_L(z)^2 \right\} \bar{y}\end{aligned} \quad (18.63)$$

これから上の式、右辺の $\{\dots\} < 0$ ならば収束作用がある事が分かる。

Quadrupole mass filter この装置は、或る程度良い真空状態で使用し、1荷の正イオンを想定したとき、特定の質量のイオンのみを通過させ、他のイオンはこの装置を通さないという機能を持つ。



イオンが通過する領域は大体図の様な構造になっている。 z 軸方向には長い直角双曲線 $x^2 - y^2 = \pm a^2$ を電極とし、対向する電極は短絡して、いつも同位相の電位とする。この電極に直流と交流の電圧をかけ、 $z = z_0$ にイオン源を置き、 $z = z_1$ にイオン検出器を置く。交流電圧の周期は電気信号が z_0 から z_1 に伝わる迄の時間に比較して充分長いと仮定すると、 z 軸付近の potential は z に依存せず、時間依存性と (x, y) 依存性は分離される。

z 軸付近の potential は z に依存せず、次式で与えられる。

$$\phi(x, y, t) = \frac{x^2 - y^2}{a^2} V_0 (1 + \alpha \cos \omega t) \quad (18.64)$$

この時、主に z 軸付近を走るイオンに対する運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2x}{a^2} V_0 q (1 + \alpha \cos \omega t) \quad (18.65)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = +\frac{2y}{a^2} V_0 q (1 + \alpha \cos \omega t) \quad (18.66)$$

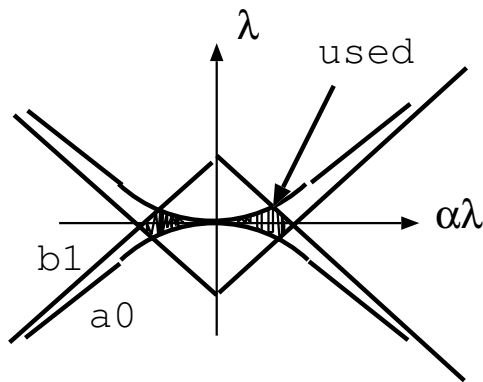
$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (18.67)$$

z 方向の運動方程式は近似式であるが、”近軸光線”の近似では許されよう。 t の原点を適当にとると、 $z = vt$ (v は初速度) と書けるから、次の様に変形できる。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \lambda(1 + \alpha \cos 2s)x = 0 \quad (18.68)$$

$$\lambda \equiv \frac{q}{m} \cdot \frac{z V_0}{\omega^2 a^2}, \quad s \equiv \frac{\omega}{2v} z \quad (18.69)$$

y 方向運動方程式は λ の符号を変えれば、(18.68) と全く同じ方程式になるので省く。(18.68) は Mathieu の方程式であり、後述の様に、 $(\lambda, \alpha\lambda)$ の値により、周期解又は発散解を与える。



$\lambda \sim 0$ 付近の安定解の領域のとがったところ $-a_0 = b_1$ 付近を使うと、特定の $(\lambda, \alpha\lambda)$ の組のみが周期解を与える。 $(\lambda$ の符号に依らない) (18.69) を見ると、 λ はイオンの速度 v に依らない。ただ (q/m) にのみ依存しているので、特定の (q/m) のイオンのみが収束させられる。 (qV_0 / m) が特定の値になった時だけイオン検出器にイオンが到達する。

この様にしてイオンの (q/m) を判定する装置を Quadrupole mass filter と呼ぶ。

Mathieu 関数はあまりおなじみの関数でないかも知れないが、 $\lambda = 1$ とおくと、ぶらんこの運動方程式である。この時、(18.68) の $\lambda\alpha$ が 0 でないと安定解は存在しないので、ぶらんこはこげばどこまでも振幅が大きくなる。これは子どもの時に経験済の事と思う。

Mathieu 関数の安定解の代表例として倒立振子がある。力学の教科書を見ておくとよからう。一度 KEK の科学おもちゃで鞍点にピンポン玉を置くと落ちるが、この鞍点を回転するとピンポン玉が落ちないという展示をやっていたらしい

真空中にイオンを一ヶ浮かべる ‘イオントラップ’ にもこの方程式は登場する。

Mathieu 関数の安定解は AVF サイクロトロンや、radio frequency quadrupole 型の linear accelerator といった加速器にはなくてはならない知識でもある。又、次式で与えられる Hill の方程式に安定解が存在する事は大型の円形加速器には不可能の知識である。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\lambda - 2 \sum_N q_N \cos Nt)x = 0 \quad (18.70)$$

$N > 2$ の例として、周期的な結晶の potential 中を動く電子にたいする Schrödinger 方程式がある。

Mathieu 方程式について λ, q は与えられた定数として、次の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda - 2q \cos 2x)y = 0 \quad (18.71)$$

を満足する x の関数 y を考える。この方程式は 2 階微分方程式だから、2 つの独立な解の重ね合わせで一般解が与えられる。2 つの独立な解の内、 $x = 0$ で次の条件を満足するものを $c(x), s(x)$ と書く。

$$\begin{aligned} c(0) &= 1, & c'(0) &= 0 \\ s(0) &= 0, & s'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (18.72)$$

$c(x)$ と $s(x)$ は *cosine*, *sine* に似せて書いた。次式で定義される Wronskian は x に依らない。

$$W(x) = \begin{vmatrix} c(x) & s(x) \\ c'(x) & s'(x) \end{vmatrix} \quad (18.73)$$

なぜならば、(18.71) を用いると、 $\frac{dW}{dx} = 0$ が導ける。 $x = 0$ での値を用い、 $W(x) = 1$ が恒等式となる。

$\lambda - 2q \cos 2x$ は x を $x + \pi$ で置き換えても値が変わらないから周期 π の関数である。これから $y(x)$ は、周期 π の関数 $u(x)$ を用いて、次式で与えられる。

$$y(x) = e^{i\mu x} u(x) \quad (18.74)$$

ここで、 μ は次の式の解である。

$$\cos \mu \pi = c(\pi) \quad (18.75)$$

この (18.74) の形の解を Bloch の解 (又は Floquet の解) と呼ぶ。以下に証明を与える。

(18.71) の任意の解 $y(x)$ を (18.72) で展開する。

$$y(x) = a c(x) + b s(x) \quad (18.76)$$

ところで、 $c(x + \pi), s(x + \pi)$ も (18.71) の解であるから、これ等も (18.76) の様に展開できるはずである。

$$\begin{aligned} c(x + \pi) &= (c|c) c(x) + (c|s) s(x) \\ s(x + \pi) &= (s|c) c(x) + (s|s) s(x) \end{aligned} \quad (18.77)$$

$(c|c) \cdots (s|s)$ は展開係数である。(18.76、18.77) により、 $y(x + \pi)$ は、

$$\begin{aligned} y(x + \pi) &= a c(x + \pi) + b s(x + \pi) = \{a(c|c) + b(s|c)\} c(x) + \{a(c|s) + b(s|s)\} s(x) \\ &= e^{i\mu\pi} \{a c(x) + b s(x)\} = e^{i\mu\pi} y(x) \end{aligned} \quad (18.78)$$

を満足する数 $e^{i\mu\pi}$ が存在したと仮定する。(18.78) に (18.74) を代入すると

$$\begin{aligned} y(x + \pi) &= e^{i\mu(x+\pi)}u(x + \pi) && \text{左辺に代入} \\ &= e^{i\mu\pi}e^{i\mu x}u(x) && \text{右辺に代入} \end{aligned}$$

これから

$$u(x + \pi) = u(x) \quad (18.79)$$

即ち $u(x)$ は周期 π の周期関数である。

ところで $e^{i\mu\pi}$ の存在が未だ言えていないが、(18.78) を a, b を決める方程式だと思つと、

$$\begin{pmatrix} (c|c) - e^{i\mu\pi} & (s|c) \\ (c|s) & (s|s) - e^{i\mu\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (18.80)$$

この方程式が自明でない解 $(a, b)^T$ を有するためには、

$$\begin{vmatrix} (c|c) - e^{i\mu\pi} & (s|c) \\ (c|s) & (s|s) - e^{i\mu\pi} \end{vmatrix} = 0 \quad (18.81)$$

即ち $e^{i\mu\pi}$ は行列

$$\begin{pmatrix} (c|c) & (s|c) \\ (c|s) & (s|s) \end{pmatrix} \quad (18.82)$$

の固有値であればよい。この行列の行列要素である (18.77) の展開係数を調べればよいことがわかった。(18.77) で $x = 0$ を代入すると

$$c(\pi) = (c|c), \quad s(\pi) = (s|c) \quad (18.83)$$

(18.77) を x で微分してから $x = 0$ を代入すると、

$$c'(\pi) = (c|s), \quad s'(\pi) = (s|s) \quad (18.84)$$

Wronskian の式に $x = \pi$ を代入すると

$$(c|c)(s|s) - (s|c)(c|s) = 1 \quad (18.85)$$

(18.77) で $x = -\pi$ を代入し、 $c(x)$ が偶関数、 $s(x)$ が奇関数であることを利用する。即ち

$$\begin{aligned} c(-\pi) &= c(\pi), & s(-\pi) &= -s(\pi), & \text{etc} \\ c'(-\pi) &= -c'(\pi), & s'(-\pi) &= +s'(\pi), & \text{etc} \end{aligned}$$

(18.83, 18.84) より

$$s(0) = 0 = (s|c)c(\pi) - (s|s)s(\pi) = s(\pi)c(\pi) - s'(\pi)s(\pi) \quad (18.86)$$

$$\therefore c(\pi) = s'(\pi) \rightarrow (c|c) = (s|s) = c(\pi) \quad (18.87)$$

ここで $s(\pi) \neq 0$ とした。(18.82) より、 $e^{i\mu\pi}$ は次の二次方程式の解である。

$$(e^{i\mu\pi})^2 - \{(c|c) + (s|s)\}e^{i\mu\pi} + 1 = 0 \quad (18.88)$$

但し、ここで (18.85) を用いた。更に (18.87) を用いると

$$(e^{i\mu\pi})^2 - 2c(\pi)e^{i\mu\pi} + 1 = 0 \quad (18.89)$$

又は

$$e^{i\mu\pi} \{2 \cos \mu\pi - 2c(\pi)\} = 0 \quad (18.90)$$

$$\therefore \cos \mu\pi = c(\pi) \quad (18.91)$$

これが (18.75) である。この μ はいつも存在する。 $(\mu: \text{complex})$

問 $\cos \mu\pi - 1 = 2c'(\pi/2)s(\pi/2)$ と書ける事を示せ。この μ を特性指数と呼ぶ。

Bloch の解は次式を満足する

$$y(x + \pi) = e^{i\mu\pi} y(x) \quad (18.92)$$

即ち x が π 増す度に $e^{i\mu\pi}$ 倍になる。

$|e^{i\mu\pi}| < 1$ ならば、 x が増えると y の振幅は減小する

$|e^{i\mu\pi}| > 1$ ならば、 x が増えると y の振幅は増大する

$|e^{i\mu\pi}| \leq 1$ の解を安定解と呼ぶ。

特に $e^{i\mu\pi} = \pm 1$ 又は μ が整数の時には y は周期が π (μ が偶数) 又は 2π (μ が奇数) の周期関数になる。 μ が整数という条件は (λ, q) にも条件をつける。 λ を μ と q の関数と考えると、 μ が 0 の時 1 つの根、 $\mu > 0$ の時 2 つの根を与える。

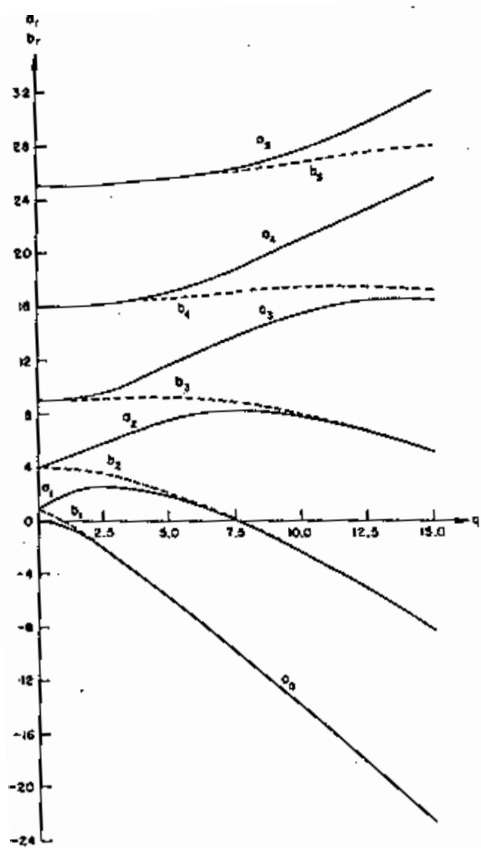


FIGURE 20.1. Characteristic Values a_n, b_n $r=0.1/115$

これ等の根を $a_\mu(q), b_\mu(q)$ ($b_\mu(q) < a_\mu(q)$) と書く。これらの記号を用い、安定解の領域は図の様に現せる。

Mathieu 関数の安定解の領域を示すグラフ。安定解は、縦軸付近の領域であり、図の曲線には縦軸に沿って下から順番に a_0, b_1, a_1, \dots と名前が付けてある。安定解の領域は、 i を自然数として、曲線 a_{i-1} と b_i に囲まれた領域である。quadrupole mass filter では、 λ の符号は正負のどちらも許されるから、水平に走っている q 軸に関して上下をひっくりかえした図も描ける。両者(元の図とひっくりかえした図)に共通な安定領域が原点近くにある。その共通な安定領域の中で、不安定領域との境界付近を使用している。具体的には、 $q = 0.706013, \lambda = 0.23697$ の近傍である。 a_0 と b_1 のグラフの近似式は、次式の様である。

$$a_0 : \lambda(q) = -q^2/2 + \dots$$

$$b_1 : \lambda(q) = 1 - q + q^2/8 + \dots$$

この図は、Abramowitz と Stegan の Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables から引用した。この本は便利である。余談であるが、この本を例の青い本という人もいるが、手元にある本は緑である。

電荷密度の効果 ここ迄は、与えられた電磁場中を1箇のイオンが、他のイオンの影響を受けることなく、単独行動をしていた。次からの例では他のイオンの影響を受ける場合を取り上げる。

電荷密度 ρ が一様に分布している一次元の問題を考える。Poisson の方程式は

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\rho}{\epsilon} = \text{一定} \tag{18.93}$$

これから potential ϕ は

$$\phi = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\epsilon}x^2 + Ax + B \tag{18.94}$$

ここで $-\rho x^2/2\epsilon$ は (18.93) の特解であり、 $Ax + B$ は齊次 Laplace 方程式の一般解である。この様な状況は、高純度半導体に逆電圧をかけた時の空乏層において実現されているだろう。この時 ρ の原因は、電流 carrier が電極に引き付けられ、結晶格子の位置に残された原子であ

る。この空乏層は放射線検出器として利用されている。

真空中に熱陰極を置き、陽極との間に電流が流れている場合にも空間電荷は存在する。電流と電圧の間に $3/2$ 乗法則が成立する場合である。

この場合には、Poisson の方程式 (18.93) の ρ は位置 x の関数である。電子が運動するとし、エネルギー保存則を書くと、 $v(x)$ を点 x での速度として

$$\frac{1}{2} m v(x)^2 + q\phi(x) = 0 \quad (18.95)$$

右辺の 0 は、陰極の電位とそこでの電子初速度を共に 0 としたため。定常電流が流れているとすると電流密度 i は位置 x に依存しない。

$$i = q \rho(x) v(x) = \text{一定} \quad (18.96)$$

(18.93)、(18.95)、(18.96) から、 $\rho(x)$ 、 $v(x)$ を消去し、 i と ϕ の関係式を作ると

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{i}{q\epsilon} \sqrt{\frac{m}{-2q\phi(x)}} \quad (18.97)$$

$\frac{d\phi}{dx}$ をかけて x で積分すると

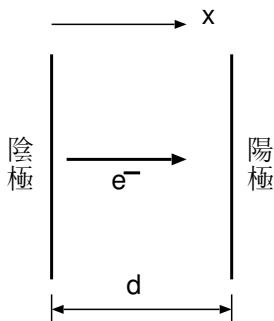
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -\frac{2i}{q\epsilon} \sqrt{\frac{m}{-2q}} \{ \sqrt{\phi(x)} + A \} \quad (18.98)$$

$x = 0$ で $\phi(x) = 0$ 及び $\frac{d\phi}{dx} = 0$ を仮定すると積分定数 $A = 0$

$$\frac{4}{3} \phi^{3/4}(x) = \sqrt{-\frac{4i}{q\epsilon} \sqrt{\frac{m}{-2q}}} x \quad (18.99)$$

(18.99) を二乗して、電流密度 i について解くと、

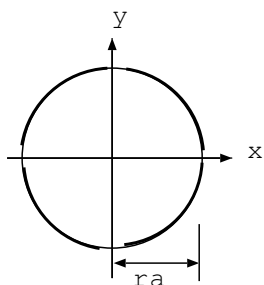
$$i = -\frac{4}{9} q\epsilon \sqrt{-\frac{2q}{m}} \cdot \frac{1}{x^2} \phi(x)^{3/2} \quad (18.100)$$



電流 I (i を面積分したもの) はかけた電圧 V ($\phi(x)$ の $x = d$ での値) の $3/2$ 乗に比例している。Langmuir-Child の法則と呼ばれる。

積分定数や $d\phi(x=0)/dx$ が 0 であるためには熱陰極からの熱電子放出が過不足なく行なわなければならない。イオンゲージ型の真空計、ブラウン管、その他の真空管で近似的に成立している。

マグネトロンの発振機構 電磁場中での荷電粒子の運動の最後の例としてマグネトロンを取上げよう。この例では今までの場合と異なり、電子が電極にエネルギーを与える。電子が空間的に集まってきてある種の集団運動をするといった特徴が調べられる。



z 軸を 4 回対称軸とし、一様磁場 B を z 軸方向にかける。 z 軸上には陰極があり、4 つの電極には $+$ の DC 電圧がかかっているとす。先ず 4 つの陽極は DC 的に同電位とし、陰極からの電子の運動を調べ、次に対向する陽極には同位相の高周波が少しだけ重ね合せられた時にどうなるかを考える。

step 1: 高周波振動を無視した時の運動 次式の 静電ポテンシャルを仮定する。

$$\phi(r) = U_a \left(\frac{r}{r_a} \right)^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (18.101)$$

r_a は陽極半径、 U_a は陽極電位。この形は $\rho = 0$ の時の対数 potential とは異なるが、実測値とは大体あっている。又後から分かる様に振動周期が軌道の形 (半径 etc) に依らなくなる。一様静磁場を $B = (0, 0, B)$ とし、 z 方向には一様だと仮定して、運動方程式を作る。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - B \frac{\partial x}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (18.102)$$

又は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\omega_B \frac{\partial y}{\partial t} - \omega_c^2 x &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - 2\omega_B \frac{\partial x}{\partial t} - \omega_c^2 y &= 0 \end{aligned} \quad (18.103)$$

ここで $q < 0$ であるから

$$\begin{aligned} \omega_B &= -\frac{qB}{2m}, \quad \text{Larmor freq. は cyclotron freq. の半分} \\ \omega_c^2 &= -\frac{2qU_a}{m r_a^2} \end{aligned}$$

と書いた。(18.103) は次の様に、 $\xi(t) = x(t) + iy(t)$ と置くと、連立微分方程式を複素変数の一つの微分方程式に変形できる。

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2i\omega_B \frac{d\xi}{dt} - \omega_c^2 \xi = 0 \quad (18.104)$$

これは 2 階の線形微分方程式だから 2 つの独立解を有する。

$$\xi = \xi_0 e^{i\Omega t} \quad (18.105)$$

と仮定し (18.103) に代入すると、 Ω は次の方程式を満足する。

$$\Omega^2 - 2\omega_B \Omega + \omega_c^2 = 0, \quad \therefore \quad \Omega = \omega_B \pm \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2} \quad (18.106)$$

2つの周期解が存在するためには、 $\omega_B > \omega_c$ でなければいけないが、この条件は成立しているものとする。2つの周期は軌道のパラメータ (例えばエネルギー、運動量、角運動量) を全く含まない事に注意。(等時性)

(18.106) の2つの解を Ω_1, Ω_2 とすると、(18.103) の解は2つの独立解の線形結合で与えられるから、

$$\begin{aligned} x &= R_1 \cos(\Omega_1 t + \alpha_1) + R_2 \cos(\Omega_2 t + \alpha_2) \\ y &= R_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1) + R_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (18.107)$$

軌跡は半径が R_1, R_2 角速度が Ω_1, Ω_2 の円運動を重ね合わせたものである。次に電子のエネルギーを計算してみる。

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{q\bar{U}_a}{r_a^2}(x^2 + y^2) \quad (18.108)$$

この時 (18.107) の複素表示 $\xi = R_1 e^{i\varphi_1} + R_2 e^{i\varphi_2}$; $\varphi_j = \Omega_j t + \alpha_j$ ($j = 1, 2$) を利用すると便利である。

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 = \xi \xi^* = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos\{(\Omega_1 - \Omega_2)t + (\alpha_1 - \alpha_2)\} \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\xi} \dot{\xi}^* = \Omega_1^2 R_1^2 + \Omega_2^2 R_2^2 + 2\Omega_1 \Omega_2 R_1 R_2 \cos\{(\Omega_1 - \Omega_2)t + (\alpha_1 - \alpha_2)\} \\ \Omega_j^2 &= 2x_B \Omega_j - \omega_c^2, \quad \Omega_1 \Omega_2 = \omega_c^2 \text{ (根と係数の関係)} \end{aligned}$$

であるから、(18.108) に代入すると、 $\cos\{\dots\}$ の項は相殺し

$$E = m R_1^2 (\omega_B \Omega_1 - \omega_c^2) + m R_2^2 (\omega_B \Omega_2 - \omega_c^2) \quad (18.109)$$

ここで $\Omega_1 = \omega_B + \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2}$, $\Omega_2 = \omega_B - \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2}$ とおくと

$$E = m \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2} \{R_1^2 \Omega_1 - R_2^2 \Omega_2\} \quad (18.110)$$

$E_j = m \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2} R_j^2 \Omega_j$ (> 0) と書くと $E = E_1 - E_2$ と書ける。

$j = 1$ の回転モードのエネルギーは正であるから、陽極にかけられた電圧によりエネルギーをもらっていると考えられる。 $j = 2$ では反対に $E = -E_2$ (< 0) だから電場に、即ち電場を構成する源に、エネルギーを与えて自分は減速していく様なモードがある事を示している。今までの問題では大体に於て、場からエネルギーをもらっていたが、逆の場合も理論的以外に実際にもある事を示している。即ち高周波増幅・発振の可能性を示している。

β 線源による発電、加速ビームの発散を防ぐための手法の一つの電子冷却法に使用された電子からのエネルギー回収、高エネルギー反陽子の減速 (LEAR)、進行波管や分布定数増幅器・クライストロン等にこのアイデアは利用されている。高エネルギーの荷電粒子がその運動エネルギーを失うのも主にこの過程である。この過程を利用し、荷電粒子が通過した時に、その位置や時刻情報を取り出す工夫にも利用できる。

当然マグネトロンには不可欠のアイデアである。

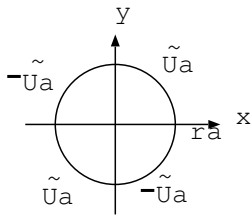
一般論として、電磁場と荷電粒子が相互作用している系を考える。この時、荷電粒子のエネルギー固有値は正にも負にもなり得る。正になった時を加速器、負になった時を増幅器又は発

振器と呼ぶのが統一的なアイデアであり、このアイデアは岡部金次郎に負うようである。

step 2 陽極電圧の変調、発振 電子がマグネトロン内部で(二重)周期運動をすると陽極にもその効果は反映される。4つに分割された陽極に U_a で与えられる直流電圧以外に ω の角速度の高周波電圧がかかっていたとする。

4分割電極に対し高周波ポテンシャルを次の様に仮定しよう。相隣る象現毎に位相が異なり potential の絶対値は等しい。

$$\tilde{\phi}(r, \theta, t) = \frac{2\tilde{U}_a}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2r_a^2 r^2 \sin 2\theta}{r_a^4 - r^4} \right) \cos \omega t \quad (18.111)$$



上で与えられた potential は $r = r_a$ で

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(r_a, \theta, t) &= \tilde{U}_a \cos \omega t, & 0 < \theta < \pi/2, \quad \pi < \theta < 3\pi/2 \\ &= -\tilde{U}_a \cos \omega t, & \pi/2 < \theta < \pi, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

を満足し、且つ $r < r_a$ で $\nabla^2 \tilde{\phi}(r, \theta, t) = 0$ を満足する。

(18.111) の導き方は別紙参照

直流電圧 $\phi(r)$ に (18.111) の様な高周波成分がほんの少し重ね合わされると、今まで Ω_1, Ω_2 の二重周期運動をしていた電子の運動がどのような集団運動をする様になるかを論じることになる。運動方程式 (18.103) に $-q\nabla\tilde{\phi}$ の項を加えればよい訳である。電子運動の角速度 Ω と電子から見た高周波電位の角速度 $\tilde{\omega}$ が簡単な有理整比になっていると共鳴が起こり、そうでなければ平均的には何も有意な効果はないと考える。

(18.111) からの (18.104) への寄与を複素数表示すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} = \frac{\partial}{\partial \xi^*} \frac{2\tilde{U}_a}{\pi} \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{2r_a^2 r^2 \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} \right)}{r_a^4 - (\xi \xi^*)^2} \right\} \cos \omega t \\ &= \frac{2\tilde{U}_0}{\pi} \cos \omega t \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^*} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{i} \cdot \frac{\left(\frac{\xi}{r_a} \right)^2 - \left(\frac{\xi^*}{r_a} \right)^2}{1 - \left(\frac{\xi}{r_a} \frac{\xi^*}{r_a} \right)^2} \right\} \\ &= \frac{2\tilde{U}_0}{\pi} \cos \omega t \cdot \frac{2i}{r_a} \frac{\left(\frac{\xi^*}{r_a} \right)}{1 - \left(\frac{\xi^*}{r_a} \right)^4} \\ &= \frac{2\tilde{U}_a}{\pi} \cos \omega t \cdot \frac{2i}{r_a} \left(\frac{\xi^*}{r_a} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{\xi^*}{r_a} \right)^4 + \left(\frac{\xi^*}{r_a} \right)^8 + \dots \right\} \quad (18.112) \end{aligned}$$

これで周期性を調べる準備ができた。 ξ^* は電子の位置の最初の近似として (18.107) を利用すると

$$\xi^* = R_1 e^{-i\Omega_1 t - i\alpha_1} + R_2 e^{-i\Omega_2 t - i\alpha_2} \quad (18.113)$$

又 $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ 。これから (18.112) の角速度成分は

$$\begin{aligned} &\pm\omega - \Omega_1, \pm\omega - \Omega_2, \pm\omega - 5\Omega_1, \pm\omega - 4\Omega_1 - \Omega_2, \\ &\pm\omega - 3\Omega_1 - 2\Omega_2, \pm\omega - 2\Omega_1 - 3\Omega_2, \pm\omega - \Omega_1 - 4\Omega_2, \pm\omega - 5\Omega_2 \end{aligned}$$

といった成分を含む事が分かる。この内のどれかが Ω_1 又は Ω_2 と等しくなった時に、共鳴が起こると予想される。 $\Omega_1, \Omega_2 > 0$ ととるから $-\omega$ を含む項は共鳴しない。

共鳴が起きると今まで一定であった R_1, R_2 は時間的にゆっくりと変化する。 R_1, R_2 の時間的な変化を調べる。運動方程式 (18.104) に高周波の項が加わると、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2i\omega_B \frac{d\xi}{dt} - \omega_c^2 \xi = \frac{2q}{m} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \quad (18.114)$$

この微分方程式を定数変化法で解く為に次の様に置こう。

$$\xi = \mathcal{R}_1 e^{i\Omega_1 t} + \mathcal{R}_2 e^{i\Omega_2 t}, \quad \mathcal{R}_j = R_j e^{i\alpha_j} \quad (18.115)$$

(18.115) を (18.114) に代入すると R_j, α_j についての方程式を得る。

$$\{\ddot{\mathcal{R}}_1 + 2i(\Omega_1 - \omega_B)\dot{\mathcal{R}}_1\}e^{i\Omega_1 t} + \{\ddot{\mathcal{R}}_2 + 2i(\Omega_2 - \omega_B)\dot{\mathcal{R}}_2\}e^{i\Omega_2 t} = \frac{2q}{m} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \quad (18.116)$$

但しここで (18.104) の関数を用いて、 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ の時間微分を含まない項は落した。(18.115) の関係は 1 つの複素変数 ξ を 2 つの複素変数 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ で表しているの、もう一つ条件をつけないとユニークには解けない。次の条件をつける。

$$\dot{\mathcal{R}}_1 e^{i\Omega_1 t} + \dot{\mathcal{R}}_2 e^{i\Omega_2 t} = 0 \quad (18.117)$$

(18.117) を時間微分し、(18.116) に代入し、2 階微分を消去すると

$$i(\Omega_1 - 2\omega_B)\dot{\mathcal{R}}_1 e^{i\Omega_1 t} + i(\Omega_2 - 2\omega_B)\dot{\mathcal{R}}_2 e^{i\Omega_2 t} = \frac{2q}{m} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \quad (18.118)$$

(18.117)、(18.118) を $\dot{\mathcal{R}}_1, \dot{\mathcal{R}}_2$ に対する連立方程式だと思って解き、

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}}_1 &= \frac{2q}{im} \frac{e^{-i\Omega_1 t}}{\Omega_1 - \Omega_2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \\ \dot{\mathcal{R}}_2 &= -\frac{2q}{im} \frac{e^{-i\Omega_2 t}}{\Omega_1 - \Omega_2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \end{aligned} \quad (18.119)$$

\mathcal{R}_2 に対する解が電子から電極へのエネルギー移行に対応するので、 $\omega = 2\Omega_2$ という共鳴条件の場合を考える。これは (18.112) の右辺 $\{\dots\}$ を 1 でおきかればよい。他の項の寄与は時間平均で相殺すると考える。

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi^*} \rightarrow \frac{2\tilde{U}_a}{\pi} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \frac{2i}{r_a^2} \{\mathcal{R}_1^* e^{-i\Omega_1 t} + \mathcal{R}_2^* e^{-i\Omega_2 t}\} \quad (18.120)$$

を (18.119) に代入すればよいが、指数関数の肩にある時間依存の部分を見ると、 $\dot{\mathcal{R}}_1$ の場合、時間依存が残るから平均的には 0 と考える。 $\dot{\mathcal{R}}_2$ には時間に依存する部分がある。

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}}_1 &= 0 \\ \dot{\mathcal{R}}_2 &= -\delta \mathcal{R}_2^*, \quad \delta \equiv \frac{2q\tilde{U}_a}{\pi m \sqrt{\omega_B^2 - \omega_c^2}} \cdot \frac{1}{r_a^2}, \quad (\Omega_1 - \Omega_2 = 2\sqrt{\dots})\end{aligned}\quad (18.121)$$

R_1, α_1 は時間に依存しない。 \mathcal{R}_2 の方は実部と虚部に分けると

$$\frac{dR_2}{dt} = -\delta R_2 \cos 2\alpha_2, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \delta \cdot \sin 2\alpha_2 \quad (18.122)$$

ここで、

$$\int \frac{\partial \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \ln(\tan \alpha)$$

という積分公式を利用すると、 α_2 の微分方程式はすぐに解ける。

$$\tan \alpha_2 = \tan \alpha_{20} \cdot e^{2\delta(t-t_0)} \quad (18.123)$$

ここで α_{20} は $t = t_0$ の時の位相角。 $\delta > 0$ であると、 $\tan \alpha_{20}$ の正負に応じ $\tan \alpha_2 \rightarrow \pm\infty$ となり、 $\alpha_2 \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ に収束する。即ち電子運動の位相が揃ってくる。 R_2 についての方程式は α_2 を独立変数であると考えたと解き易い。

$$\frac{dR_2}{d\alpha_2} = -R_2 \frac{\cos 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_2} \quad (18.124)$$

この方程式は δ に依存しない。次の積分公式が簡単に作れる。

$$\int \frac{\cos 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_2} d\alpha_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha_2\right)$$

この結果

$$\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)^2 = \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_{20}} \quad (18.125)$$

R_{20} は $t = t_0$ での R_2 の値。(18.125) に (18.123) を代入し整理すると、

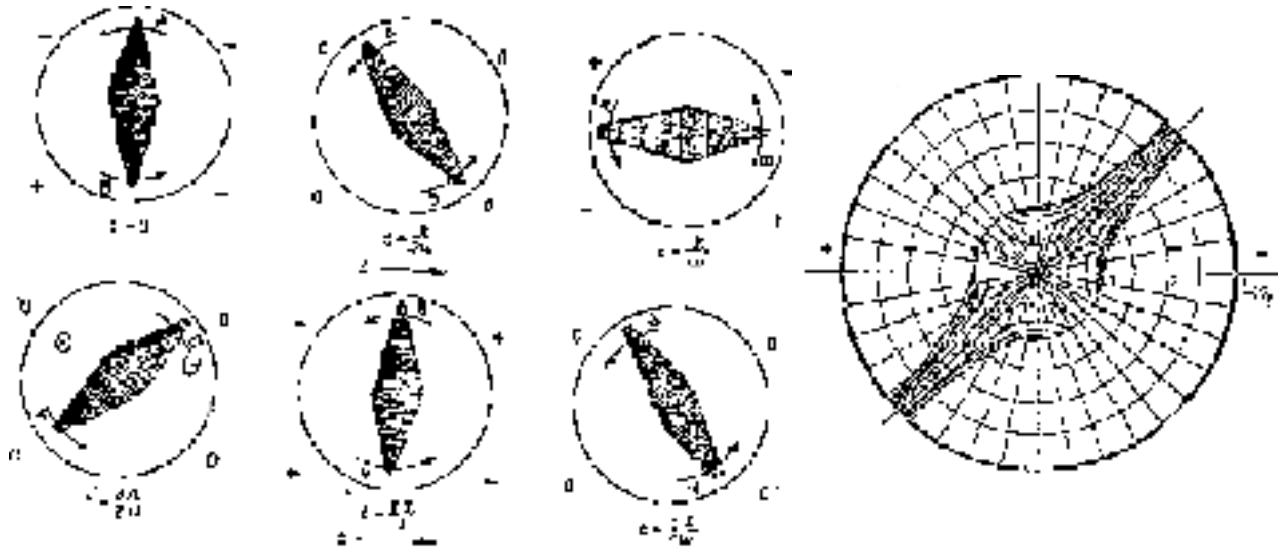
$$R_2 = R_{20} \left\{ \sin^2 \alpha_{20} e^{2\delta(t-t_0)} + \cos^2 \alpha_{20} e^{-2\delta(t-t_0)} \right\}^{1/2} \quad (18.126)$$

ここで

$$\frac{1}{\sin 2\alpha_2} = \frac{1}{2} \left(\tan \alpha_2 + \frac{1}{\tan \alpha_2} \right)$$

を用いた。 R_2 は $\alpha_{20} = n\pi$ という例外はあるが、時間が経過すると大きくなる。この時、電子の運動エネルギーは陽極に高周波のエネルギーとして与えられる。

まとめると、陰極から出た電子は $\xi = R_1 e^{i\Omega_1 t + i\alpha_1} + R_2 e^{i\Omega_2 t + i\alpha_2} = (x + iy)$ で表せる二重周期運動をするが、陽極に $\omega = 2\Omega_2$ で与えられる角速度の高周波電圧が何等かの原因で存在すると、位相 α_2 が $\pm\pi/2$ に揃いながら回転半径 R_2 が少しずつ大きくなる。これに伴い陽極の高周波電圧はどんどんエネルギーをもらい電圧が大きくなっていく。この大きくなった高周波電圧は次の瞬間の電子の運動に影響を与え、更に大きな電圧として成長してゆく。

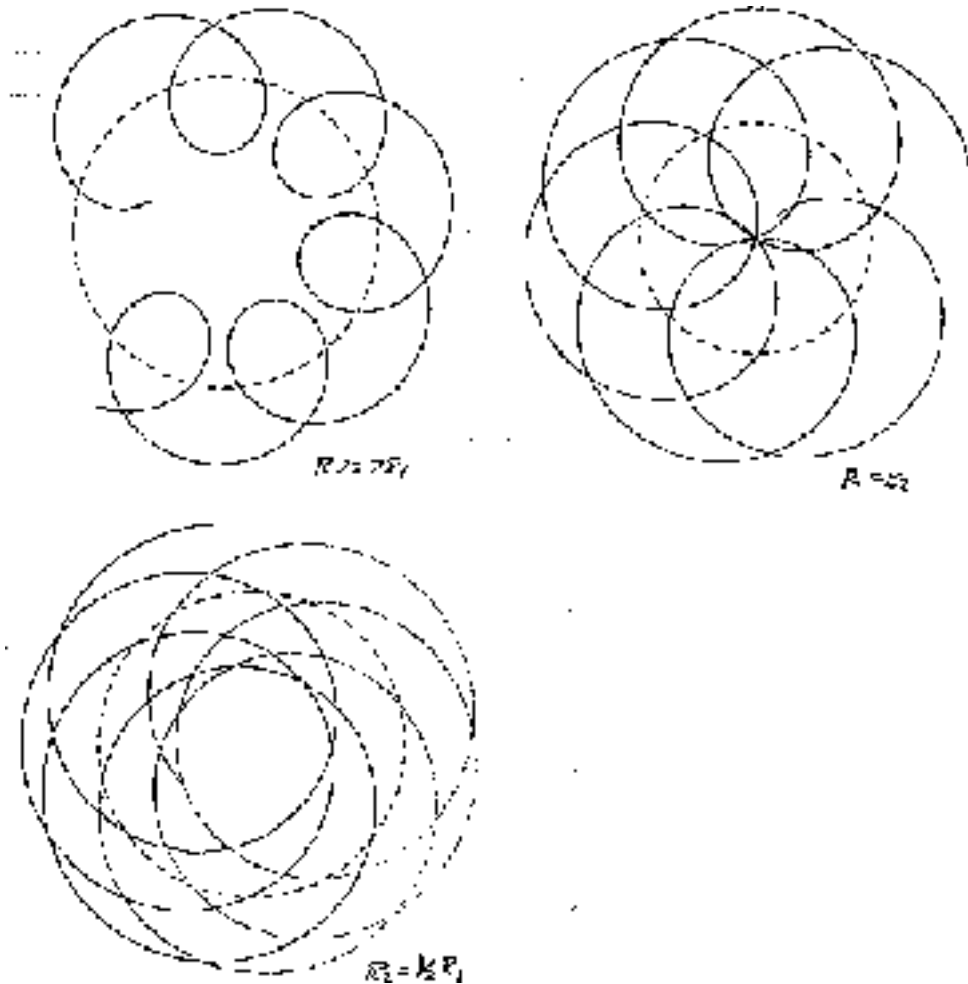


電子”極”のマグネトロン管内の回転の様子と電子運動の位相の集群の様子

朝永、小谷 著 ”極超短波磁電管の研究” みすず書房 より

上の文中”何等かの原因”を積極的に作るために、又電力を取り出すために共振回路がつけられる。今は4分割としたが4にこだわる理由は本当はない。マグネトロンの日本に於ける最大用途は多分家庭用電子レンジであろう。各種レーダーにも不可欠の部品である。

軌道について (18.107) の軌跡は R_1, R_2 の内の大きな方で円を描き、その円上に回転中心を持ち、小さな方の半径で円を描けば良い。



いずれも $\Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{60}}\Omega_1$ 破線は $\max(R_1, R_2)$ を半径とする円。破線円の中心に陰極がある。電子の加減速機構が働いていなければ、 $r = 0$ 付近から出発しなければならない。又電子が陽極に届くためには、 $R_1 + R_2 > r_a$ でなければならない。

$r = r_a$ にある 4 等分割電極上で交互に符合の変化する potential 分布

$$\phi(r_a, \theta) = \begin{cases} \tilde{U}_a, & 0 < \theta < \pi/2, \quad \pi < \theta < 3\pi/2 \\ -\tilde{U}_a, & \pi/2 < \theta < \pi, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

の内部 potential の計算

1 r_a での境界条件 $\phi(r_a, \theta)$ を Fourier 展開する

$\phi(r_a, \theta)$ は周期 π の奇関数だから、

$$\phi(r_a, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin(2n\theta) = \sum_{\text{odd } n} \left(\frac{4\tilde{U}_a}{\pi n} \right) \sin(2n\theta) \quad (18.127)$$

右辺は、以下の様にして評価できる。両辺に $\sin 2l\theta$ をかけ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^{2\pi} \phi(r_a, \theta) \sin 2l\theta d\theta = 4\tilde{U}_a \int_0^{\pi/2} \sin 2l\theta d\theta = \begin{cases} \frac{4\tilde{U}_a}{l}, & l \text{ は奇数} \\ 0, & l \text{ は偶数} \end{cases} \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \phi_n \sin 2n\theta \cdot \sin 2l\theta d\theta = \phi_l \pi \end{aligned} \quad (18.128)$$

2 内部解 $\phi(r, \theta)$ を Fourier 展開する。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r) \sin 2n\theta \quad (18.129)$$

と展開し、円筒座標での Laplace の方程式に代入する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_n}{dr} \right) - \frac{4n^2}{r^2} v_n \right\} \sin 2n\theta = 0 \quad (18.130)$$

中括弧の中 $\{\dots\} = 0$ とし、 v_n を r のべきに展開する。原点は正則だから r の逆べきは無視する。 $v_n = r^{2n}$ が解である事が分るから、 $\phi(r, \theta)$ は次の様に展開できる。

$$\phi(r, \theta) = \sum_n a_n r^{2n} \sin 2n\theta = \frac{4\tilde{U}_a}{\pi} \sum_{\text{odd } n} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_a} \right)^{2n} \sin 2n\theta \quad (18.131)$$

この解は $r = r_a$ を代入した時 (1) の展開に一致しなければいけないから

$$a_n r_a^{2n} = \frac{4\tilde{U}_a}{\pi n} \quad (18.132)$$

と展開係数が決まる

$$\phi(r, \theta) = \frac{4\tilde{U}_a}{2i\pi} \sum_{\text{odd } n} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{r e^{i\theta}}{r_a} \right)^{2n} - \left(\frac{r e^{-i\theta}}{r_a} \right)^{2n} \right\} \quad (18.133)$$

と書いてみると、和がとれる形になる。

$$\text{公式集を見ると } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

n が奇数だけの公式が欲しいから、 $x \rightarrow -x$ とした項との差を作ると

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots = \sum_{\text{odd } n} \frac{x^n}{n} \quad (18.134)$$

$$\therefore \phi(r, \theta) = \frac{\tilde{U}_a}{i\pi} \left\{ \ln \frac{1+z}{1-z} - \ln \frac{1+z^*}{1-z^*} \right\} = \frac{2\tilde{U}_a}{i\pi} i \arg \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (18.135)$$

$$z = \left(\frac{r e^{i\theta}}{r_a} \right)^2, \quad z^* = \left(\frac{r e^{-i\theta}}{r_a} \right)^2 \quad (18.136)$$

ここで、

$$\left| \frac{1+z}{1-z} \right| = \left| \frac{1+z^*}{1+z^*} \right|$$

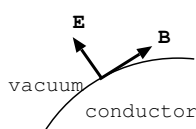
だから { } 内の実部は相殺する。従って、

$$\phi(r, \theta) = \frac{2\tilde{U}_a}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2r_a^2 r^2 \sin 2\theta}{r_a^4 - r^4} \right) \quad (18.137)$$

第19章 導波管

通常の電気信号を伝えるには、2本の導線が利用される。ラジオ波と呼ばれる程度に周波数が上がると、平行導線以外に、同軸ケーブルと呼ばれる、芯線を絶縁物で包み、その外部に網状の導体で包んだものが利用される。更に周波数が上がると、輻射の効果を押える為に導波管が使用される。導波管は導体でできたパイプであり、この中を電磁波が伝わる。

完全導体と電磁波



完全導体に電磁波が入射した時の境界条件を考える。

導体内部に電場が存在しない事は自明とする。 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ より、導体内部では磁束密度も0である。時間的に一定な磁場はあっても良いが、ここでは無視する。

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ を境界面を含む領域で面積分すると、Eの界面での接線成分が連続である事が導ける。導体内部では $\mathbf{E} = 0$ であるから、その接線成分も0である。従って導体の外部表面付近の電場には、接線成分は無く、法線成分のみが存在する。即ち、静電場と同じ境界条件である。導体表面に電荷が存在すると、電場の法線成分は有限である。

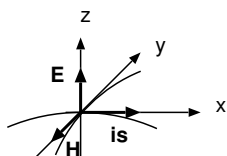
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、界面での法線成分は連続でなければならない。導体内部で $\mathbf{B} = 0$ としたから、Bの法線成分は0、従って外部界面ではBの法線成分は0であり、接線成分のみ有限の値を持ち得る。

完全導体では、skin depth ($\propto 1/\sqrt{\sigma}$) が0だから、無限小の厚さの表面電流が流れ得る。

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を界面付近で面積分すると、Eはこの面に垂直にとれるから、右辺第2項は寄与しないが、表面電流からの寄与があり、左辺では界面外部でのHが残る。即ち、Hの接線成分 (Hの法線は0である) と表面電流密度 i_s が等しい。

$$H = i_s \quad (19.1)$$

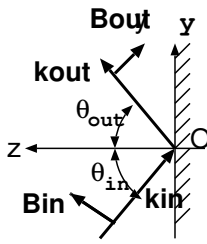
纏めると、完全導体の接平面を考え、この面を xy 平面とし、接点を原点とする。表面電流の方向を x 軸を選ぶと、Bは y の負の向きを向き、Eは z 軸の正又は負の方向を向いている。



完全導体による電磁波の反射 反射前後の電磁波の進行方向 (Poynting vector の方向) を \mathbf{k}_{in} , \mathbf{k}_{out} とする。又、電磁波は直線偏光であるとする。

入射波の電気ベクトルは k_{in} を軸として、これに直交している。電気(磁気)ベクトルが導体に平行な場合次の二つの場合に分けて考えよう。

電気ベクトルが導体に平行な場合 反射光の E、B に、下付き文字 out を付ける。



入射点 O での E の接線成分は 0 だから、図の座標系では

$$E_{in x} + E_{out x} = 0, \quad E_{in y} + E_{out y} = 0, \quad E_{in z} = 0 \quad (19.2)$$

即ち、 E_{out} は E_{in} と逆向きで、大きさは等しい。従って、 $|B_{in}| = |B_{out}|$ でもある。

反射光も‘光’であるから、 E_{out} 、 B_{out} 、 k_{out} の順番で右手系を作っていないといけない。 $c|B_{out}| = |E_{out}|$ という強さに関する制限もあるから、 k_{out} の方向さえ決めれば、 B_{out} は確定する。

図の様に、入・反射角を θ_{in} 、 θ_{out} とすると、O 点で B は接線成分のみを持つから、

$$(B_{in}) \sin \theta_{in} - (B_{out}) \sin \theta_{out} = 0 \quad (19.3)$$

O 点での B の連続性を要求すると、

$$(B_{in}) \cos \theta_{in} - (B_{out}) \cos \theta_{out} = 0 \quad (19.4)$$

この両式に $B_{in} = B_{out}$ を代入すると、

$$\theta_{in} = \theta_{out} \quad (19.5)$$

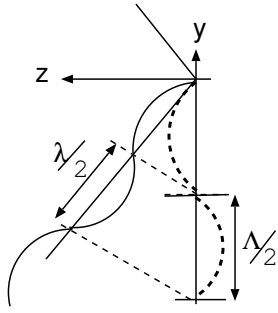
即ち、 k_{out} は z 軸に対し k_{in} の反対側にあり、角度の絶対値は等しい。又、 k_{in} 、 k_{out} 、 B_{in} 、 B_{out} は同一平面にある。これ等は、通常の反射の法則である。反射の法則を導く際に、完全導体の仮定を設けた事を覚えておこう。この仮定は、導体中で $E = 0$ というところで使用された。これは導体中に電場が仮に作られたとしてもすぐに電子が動いて、この電場を相殺するという仮定と言い替えてもよい。逆に電場の時間的な変化が非常に速くて、電子が電流としてその変化に追従出来なければ、反射の法則は成立しない。だから、X 線や γ 線を反射する鏡を作る事は困難である。通常の鏡が曇るのは導体表面の (skin depth 迄の) 汚れ、酸化、硫化等で電気伝導度の劣化が原因だろうと想像される。金、銀、銅等は白色光の下で見ても特有の色が見えるから、内部での電子構造 (原子配列 etc.) に個性があり、分光反射率に周波数依存性があるのだろう。

現在の境界条件の下では、表面付近で ($E = E_{in} + E_{out} = 0$) であるから、導体表面に電荷は誘起されていないが、H は 0 でないから、表面に電流が誘起されている。その大きさは B の接線成分 $|B_{in} + B_{out}| \cos \theta_{in} = 2 B_{in} \cos \theta_{in}$ からきまる。

$$i_s = 2 \frac{B_{in}}{\mu_0} \cos \theta_{in} \quad (19.6)$$

$B_{in} = B_0 e^{i(k_{in} \cdot r - \omega t)}$ とすると、この実部をとり、 $z = 0$ を代入し

$$i_s = 2 \frac{B_{in}}{\mu_0} \cos \theta_{in} \cos(k_{in} y \sin \theta_{in} - \omega t) \quad (19.7)$$



導体表面で i_s は k_{in} の面上への射影分だけ小さく $k_{in} \sin \theta_{in}$ なるので、波長はその分長くなる。

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta_{in}} \quad (19.8)$$

(19.7) の位相 = 一定という式を時間微分すると、

$$\dot{y} = \frac{\omega}{k_{in}} \sin \theta_{in} = \frac{c}{\sin \theta_{in}} \quad (19.9)$$

\dot{y} は位相速度と呼ばれ、 $\sin \theta_{in} \leq 1$ だから、一般に光速よりも速い。これは、 $\pm x$ 方向に流れる i_s を横から見た影の速度である。これは、時間変化を一定値 " $-i\omega$ " で置き換えた結果得られた式であるから、定常状態を記述している事も忘れてはならない。 y 方向の光の伝達速度は $c \sin \theta_{in}$ であるから、

$$(\text{光の伝達速度}) \times (\text{位相速度}) = c^2 \quad (19.10)$$

という関係がある。

磁気ベクトルが導体に平行な場合 B の法線成分は 0 だから、 $B_{out, z} = 0$ 、 B の接線成分は連続だから、 $B_{in y} = B_{out y}$ 。これから、

$$B_{in} = B_{out} \quad (19.11)$$

光の条件より、 $|E_{in}| = |E_{out}|$ も前例と同様に導ける。更に、 E の法線成分の連続性から、 $|E_{in} \sin \theta_{in}| = |E_{out} \sin \theta_{out}|$ が成立する。 E の接線成分は 0 だから、 $|E_{in} \cos \theta_{in}| - |E_{out} \cos \theta_{out}| = 0$ 。

これから、やはり反射の法則が成立している事がわかる。二つの独立な直線偏光に対して反射の法則が成立するから、任意の楕円偏光に対しても反射の法則は成立する。現在の完全導体の近似では、例えば (19.11) が時間に依存せずに成立するから、入・反射波の振動数は等しい。即ち、反射波の色が入射波の色と異なる事はない。又、(19.11) は k や ω に依存せずに成立するから、この近似の範囲では任意の周波数 (波長) に対して成立する。 ω に対する重ね合わせの原理を使用すると、パルス波形は反射により歪む事はない。

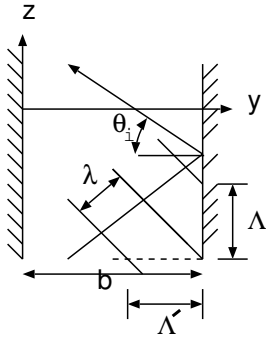
今の境界条件では、導体表面上で E, B は共に 0 ではないので、今回は表面に電流や電荷が存在しても構わない。 E, B に位相差が無いから、どちらも y 軸方向に $\Lambda = \lambda / \sin \theta_{in}$ の波長で、時間的には ω の角速度で振動している。但しここで、 λ は真空中での電磁波の波長である。

分散性、即ち振動数や波長によって物質内の電子の動き易さが変化する、物質を反射面に使うと、 E, B の位相に差が出来るかも知れない。

大地を完全導体と近似し、中波のラジオ波を電磁波だとする。実用上、この E ベクトルはどちらを向いているだろう？ TV の電波だとどうだろうか？ 調べてみよ。

ヒント：送・受信のアンテナの向きを見よ。

2枚の導体にはさまれた空間と電磁波 図の様に2枚の完全導体を平行に、距離 b だけ隔てて置き、入射角 θ_i で入射する。



面電流が流れるが、安定的に伝播する為には、電磁波が1往復した後の導体表面の状態(面電荷密度や面電流密度)は出発前と同じでなければならない。この為には、 λ, θ_i, b の間には、条件が課せられる。波面、即ち位相の等しい面を図中に描いてみると、 $y = \text{一定}$ 面内では y 軸方向に $\Lambda' = \lambda / \cos \theta_i$ の波長で周期的に繰り返している。1往復 $2b$ の間に Λ' が整数個あると周期的になるから、境界条件は

$$\Lambda' = \frac{\lambda}{\cos \theta_i} = \frac{2b}{n}, \quad n \text{ は自然数} \quad (19.12)$$

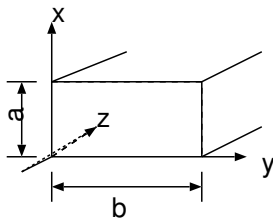
これから、波長 λ の上限が与えられる。

$$\lambda = \frac{2b \cos \theta_i}{n} \leq \lambda_c = 2b \quad (19.13)$$

λ_c を遮断波長とよび、これ以上の長さの波長の電磁波はこの空間を伝播しない。(指数関数的に振幅が減衰する。) 例えば、電離層と大地を導体と看做せば、ある種の電磁波は地球の裏側迄届く。

ここで、電場ベクトル \mathbf{E} が x 軸を向いている場合を考える。 x 軸方向には並進に対して構造を持たないので、 $x = 0, a$ に導体を置いて蓋をしても \mathbf{E} と蓋は直交しているので、境界条件を満足する。即ち、断面が長方形の内部を電磁波は伝播する。この様子を少し詳しく調べよう。

矩形導波管 $0 < x < a, 0 < y < b$ では、 $\rho = \mathbf{i} = 0$ で、 $x = 0, a$ 又は $y = 0, b$ では先の完全導体の境界条件を満足する Maxwell 方程式の解を探せばよい。



簡単の為に、時間依存性は $e^{-i\omega t}$ 、 z 依存性は $e^{ik_z z}$ と仮定する。但し、これまでの説明から分かるように、壁で反射しながら z 方向に進む波を想定するので、 $k_z = \omega/c$ は成立しない。 $\rho = \mathbf{i} = 0$ を仮定すると Maxwell の方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19.14)$$

真空を仮定すると、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (19.15)$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ と } a \text{ にて} \\ y = 0 \text{ と } b \text{ にて} \end{array} \right\} \begin{array}{l} H_x = E_y = 0 \\ E_x = H_y = 0 \end{array} \quad (19.16)$$

先ず、 z 依存性を $e^{ik_z z}$ と仮定したから、 $\partial/\partial z$ を ik_z で置き換えると、 $\nabla \times \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{H}$ の x , y 成分から、

$$\begin{pmatrix} i\omega\mu_0 & 0 & 0 & ik_z \\ 0 & i\omega\mu_0 & -ik_z & 0 \\ 0 & ik_z & -i\omega\varepsilon_0 & 0 \\ -ik_z & 0 & 0 & -i\omega\varepsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (19.17)$$

z 成分からは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0 H_z \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon_0 E_z \end{aligned} \quad (19.18)$$

(19.17) から (H_x, E_y) は $\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$ が、 (H_y, E_x) は $\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$ がきまれば、次の様に解ける。 (E_x, \dots, H_y) は (E_z, H_z) により一義的に決定される。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ik_z & 0 & 0 & i\omega\mu_0 \\ 0 & ik_z & -i\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & -i\omega\varepsilon_0 & ik_z & 0 \\ i\omega & 0 & 0 & ik_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (19.19)$$

ここで、

$$\Delta = k^2 - k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2$$

(19.19) を (19.18) に代入すると、 E_z, H_z は夫々、独立に振動の方程式を満足する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = -(k^2 - k_z^2) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} \quad (19.20)$$

この方程式は変数分離法により簡単に解ける。

$$\begin{aligned} E_z &= (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \\ H_z &= (A' \sin k'_x x + B' \cos k'_x x)(C' \sin k'_y y + D' \cos k'_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (19.21)$$

ここで、

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k'^2_x + k'^2_y + k_z^2 = k^2 \quad (19.22)$$

積分定数 $A \sim D'$ と分離定数 $k_x \sim k'_y$ は、境界条件 (19.16) を満足しなければならない。平面波には二つの偏光の自由度があった様に、ここでも二つの自由度がある。これを次の様にとる。(1) TM 波 ($H_z = 0$), (2) TE 波 ($E_z = 0$)。この様にとると、 E_x, \dots, H_y の式には k_x と k'_x 又は (k_y と k'_y) が同時に現れる事がない。

TM 波 transverse magnetic wave; transverse とは、進行方向、即ち z 軸に垂直な方向という意味。 $H_z = 0$ だから、 \mathbf{H} は transverse 成分しか含まない。

$H_z = 0$ より $A' = B' = C' = D' = 0$ 。(19.21) を (19.19) に代入し、

$$E_x = \frac{i k_x k_z}{k_x^2 + k_z^2} (A \cos k_x x - B \sin k_x x) (C \sin k_y y + D \cos k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (19.23)$$

$y = 0, b$ で $E_x = 0$ が x に依らず成立するから、

$$D = 0, \quad k_y b = n \pi, \quad n \text{ は整数}$$

$$H_x = -\frac{i \omega \varepsilon k_y}{k_x^2 + k_z^2} (A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C \cos k_y y - D \sin k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (19.24)$$

$x = 0, a$ で H_x が y に依らず 0 であるから、

$$B = 0, \quad k_x a = m \pi, \quad m \text{ は整数}$$

これらを用い $AC = E_z^0$ と書き直し、解を書き下す。

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i k_x k_z}{k^2 - k_z^2} \cot k_x x E_z & H_x &= -\frac{\omega \varepsilon_0}{k_z} E_y \\ E_y &= \frac{i k_y k_z}{k^2 - k_z^2} \cot k_y y E_z & H_y &= +\frac{\omega \varepsilon_0}{k_z} E_x \\ E_z &= E_z^0 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} & H_z &= 0 \end{aligned} \quad (19.25)$$

ここで、 $k_x = m \pi / a, k_y = n \pi / b$ 但し、 $m > 0, n > 0$ とする。 m, n の一方が 0 ならば、 $E_z = 0$ となってしまう。

この解は $\text{TM}_{m,n}$ モードと呼ばれる。

TE 波 transverse electric field の略。従って、 $E_z = 0$ 。

上の同様に、 $A = B = C = D = 0, A' = C' = 0, B' D' = H_z^0$ とおくと、

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i \omega \mu_0 k'_y}{k^2 - k_z^2} \tan k'_y y H_z & H_x &= -\frac{k_z}{\omega \mu_0} E_y \\ E_y &= +\frac{i \omega \mu_0 k'_x}{k^2 - k_z^2} \tan k'_x x H_z & H_y &= +\frac{k_z}{\omega \mu_0} E_x \\ E_z &= 0 & H_z &= H_z^0 \cos k'_x x \cos k'_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (19.26)$$

ここで、 $k'_x = m \pi / a, k'_y = n \pi / b$ 。更に、 $m = n = 0$ は、 $k^2 - k_z^2 = 0$ に対応するので、双方が 0 であってはいけない。

k_x, \dots, k'_y の大きさは 0 又は自然数で規定される。この 0 又は自然数という値の事を固有値 (eigen-value, characteristic value) と呼ぶ。変数分離のパラメータが特定の値をとるという形では、既に Laplace 方程式の解として、Bessel 関数や球面調和関数の ℓ, m 等として登場している。

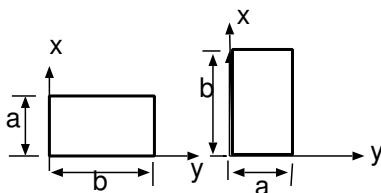
x, y 方向の解は二つの進行波が干渉し定在波を作るようになっている。この干渉がきれいに定在波を作る為には、二つの波の波長・振幅等に制限が出て来る事が想像されよう。この制限が固有値になっている。 $k_x = n\pi/a$ という式は確かにそう解釈出来よう。

z 方向には $e^{i(k_z z - \omega t)}$ という一つの進行波だけの解だから、ここには、 $k_z < k$ という以外には制限はついていない。もしも、 z 方向にも長さの制限があり、反射波と今の解が干渉して定在波を作れと言う条件をつけると、 k_z もこの z 方向の長さに関する固有値を有する様になる。

ついでに、進行波と定在波についてもコメントしておこう。先ず、前提として時間依存性が $e^{-i\omega t}$ と書かれる。 z 方向の解の様に $e^{\pm i k_z z}$ と書ける解は進行波である。次に、 $e^{i k_z z} \pm e^{-i k_z z}$ と二つの進行波を重ね合わせてみると、 $2 \cos k_z z$ 又は $2i \sin k_z z$ は定在波を与える。(複素) 係数を除いて、実数解は定在波を与え、複素解は進行波を含む事はすぐに理解出来るだろう。例えば、Bessel の微分方程式の二つの解 $J_n(r), N_n(r)$ はどちらも実数だから、 r 方向の定在波解であり、 $J_n(r) \pm i N_n(r)$ と書くと、 r 方向の進行波を与える。Legendre の微分方程式の二つの独立解、 $P_{\ell m}(x), Q_{\ell m}(x)$ は実数解であるから、定在波に対応し、 $P_{\ell m}(x) \pm 2i/\pi Q_{\ell m}(x)$ は進行波を与える。そこで、先の $x, (y)$ 依存の解は実数だから、二つの進行波の干渉 (重ね合わせ) で与えられ、固有値が登場する事が理解できよう。

実際の導波管では、振動数が一定 (従って k も一定) という電磁波を入力した時、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ を満足する任意の (k_x, k_y, k_z) の組の解を重ね合わせたものが原理的に実現可能である。しかし、 k_x, k_y は断面寸法できまるとびとびの値のみを取り得る。 $k_z^2 > 0$ という制限がつくから、 (k_x, k_y) の取り得る値には制限がつく。最小の n, m の値が一般的には安定だから、 TM_{01} 波だけが生き残る様に k, a, b の組合せを選んでおくのがよい。

問 選べと言われても …。



電磁波は与えられた導波管のどちらを a, b ときめるのだろうか？ 図の様に、書いてみても a, b の選択基準は分からない。

正解は、電磁波に聴いてみよ。

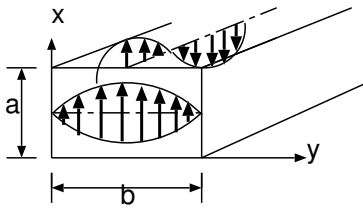
一番基本的な TE_{01} モード $m = 0, n = 1$ とおくと、(19.26) は、 $k'_x = 0, k'_y = \pi/b$ だ

から、 $E_y = E_z = H_x = 0$ 、残りは

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu_0}{k^2 - k_z^2} \frac{\pi}{b} \sin \frac{y\pi}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} H_z^0 \\ H_y &= -\frac{i k_z}{k^2 - k_z^2} \frac{\pi}{b} \sin \frac{y\pi}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} H_z^0 \\ H_z &= H_z^0 \cos \frac{y\pi}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (19.27)$$

実際は、この式の実部(虚部)を取り出す。 E_x , H_y の分母は $k^2 - k_z^2 = (\pi/b)^2$ 、又 $k_z = \sqrt{k^2 - (\pi/b)^2}$ である。

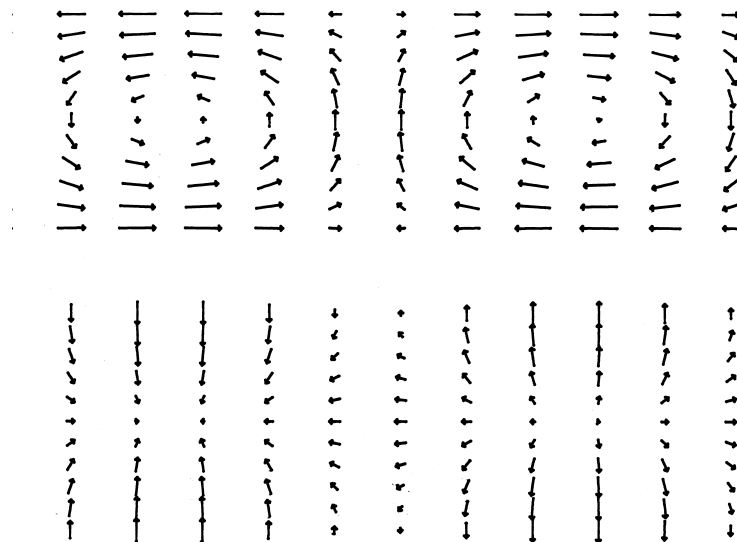
電磁場の様子を考えよう。



まず、全体が x に依らないので、 $y = 0, b$ に 2 枚の導体板を置いた時と内部的には同じである。 y 方向には二つの進行波の干渉で定在波になっているので、少しだけ複雑にしている。E には x 成分しかないの、いつも上(下)を向いている。 $\sin(y\pi/b)$ の様に y に依存するから、中央部 $y = b/2$ で最大振幅を与える。

H_y, H_z の振幅比は、 k_z/k_y である。 $m = n = 1$ というモードが励起されない様にしておくのがよい。例えば、 $\pi/b < k\pi/a$ とする。

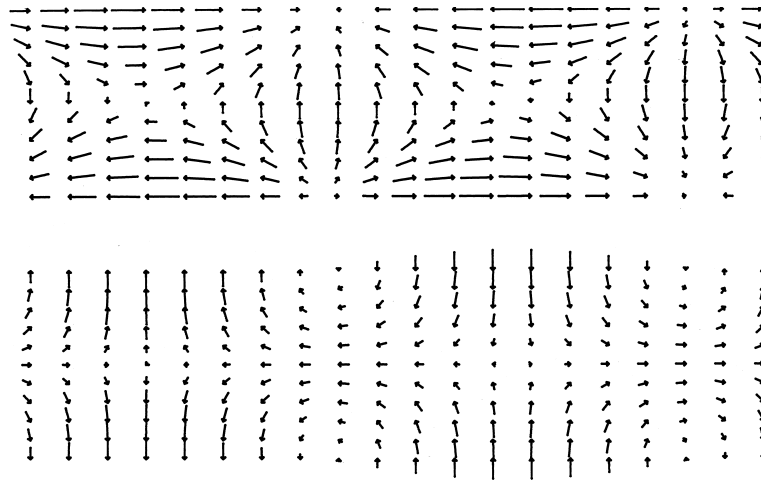
次の図は TE_{01} モードでの底面上での H (上) と i_s (下) の分布を図示した。図の横軸が z 軸、縦が y 軸であり、 y 軸方向の幅は b である。波長の比は $k_y = 2k_z$ と選んだ。二つの図は重ねて見るとよい。



H_y と E_x は比例するから、 H_y の強いところでは E も強い。E は x 成分しか持たない。ベクトル E の出発点と終点とには電荷が存在する。 $|\frac{\partial E}{\partial x}|$ は、 $|E|$ の強いところで弱く、 $|E|$ の弱いところで強いから、($y=b/2$ で一番強いのではあるが) $H_y = 0$ のところで、上下に変位電流が多く流れている。(H 図の渦の中央部分)。

即ち、H は変位電流 $\frac{\partial D}{\partial t}$ に誘起されているとも考えられる。

次の図は、どんな場合を描いたものだろう？



円形導波管 断面が長方形のパイプ中を電磁波が壁面に反射されながら伝達する事を先に学んだ。その時やった事は、 $\rho = \mathbf{i} = 0$ から、 $\frac{\partial}{\partial t}$ を $-i\omega$ 、 $\frac{\partial}{\partial z}$ を ik_z で置き換え、次の境界条件で Maxwell の方程式を解いた。

1. 導体表面で電場は導体面に直交する
2. 導体表面で磁場は導体面に平行である

同じ事を円形断面の場合に、円筒座標を用いて行くと、

1. z 方向の解は前と同じ
2. r 方向の解は Bessel 関数
3. θ 方向の解は \sin, \cos となる
4. x, y 方向の区別がなくなるので、固有値に縮退がおこる

等の細かい相違が生ずるが、本質的な事情は同じである。

(19.14) の r, θ 成分を書くと、(19.17) に対応し、やはり H_z, E_z の r, θ についての微分で $E_r, E_\theta, H_r, H_\theta$ は表される。

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ H_r \\ H_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ik_z & 0 & 0 & i\omega\mu \\ 0 & ik_z & -i\omega\mu & 0 \\ 0 & -i\omega\varepsilon & ik_z & 0 \\ i\omega\varepsilon & 0 & 0 & ik_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (19.28)$$

ここでも、 $\Delta = k^2 - k_z^2 = (\omega/c)^2 - k_z^2$ 。z 成分からは次の式が登場する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right\} &= i\omega\mu H_z \\ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right\} &= -i\omega\varepsilon E_z \end{aligned} \quad (19.29)$$

ここでも偏光面の二つの自由度に対応し、 $(E_z \neq 0, H_z = 0)$, $(E_z = 0, H_z \neq 0)$ という解 TE 波と TM 波に分けて議論する。

TE 波の場合 $E_z = 0$ として、(19.28)、(19.29) より、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} = -(k^2 - k_z^2) H_z \quad (19.30)$$

H_z を r と θ の関数の積に変数分離する。 θ 方向の解は $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ の重ね合わせになる。分離定数は θ に関する周期 2π (又はその $1/\text{整数}$) の関数になるべきであるから、 n は整数又は自然数という条件がつく。 θ の原点の取り方は、当面任意であるから、 $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ の一方は落しても良いとする。

この時、 r 方向の解 $R(r)$ は Bessel の方程式を満足する。

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 - k_z^2) r^2 = n^2 \quad (19.31)$$

$r = 0$ で、 $R(r)$ は有限であるべきだから、Neuman 関数の方は採用しない。

この結果、

$$H_z(r, \theta, z, t) = H_0 J_n(k_r, r) \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (19.32)$$

H_0 は積分定数である。(19.32) を (19.28) に代入すると、 (E_r, \dots, H_θ) が定まる。

$$\begin{aligned} E_r &= + \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \frac{n}{r} H_0 \sin n\theta J_n(k_r, r) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= + \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \frac{n}{r} H_0 \tan n\theta H_z \\ E_\theta &= - \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \frac{J'_n(k_r, r)}{J_n(k_r, r)} H_z \\ H_r &= - \frac{k_z}{\omega\mu} E_\theta \\ H_\theta &= \frac{k_z}{\omega\mu} E_r \end{aligned} \quad (19.33)$$

ここで、 $k_r^2 = k^2 - k_z^2$ である。

境界条件を、半径 $r = a$ 上で $E_\theta = H_r = 0$ とするから、

$$\frac{d}{dr} J_n(k_r, r) = 0 \quad (19.34)$$

これが、 r 方向の固有値を決める方程式となる。引数 x が大きい時、 $J_n(x)$ は 0 のまわりを振動するので、無限個の解が (19.34) には存在する。Bessel 関数の微分は、Bessel 関数が計算

できるならば、次の式で計算出来る。

$$\begin{aligned}\frac{d J_n(x)}{dx} &= \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \\ &= \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\} / 2 \\ &= J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\end{aligned}\quad (19.35)$$

特に、 $n = 0$ の場合は、

$$\frac{d J_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad (19.36)$$

(19.33) を見ると、 E_r は n に比例する部分があるから、 $n = 0$ だと r, θ, z, t に依存せず 0 になる。 E_r が 0 だと当然 H_θ も 0 である。

境界条件より導体面上 $r = a$ では $E_\theta = H_r = 0$ であるから、 H_z のみが存在する。即ち、表面電流は θ 方向にのみ流れていて、 z 方向には全然流れていない。このような条件の空洞共振器を作ると、パイプだけを電流が流れ、パイプから z 方向のフタに向かって流れる電流が無いので、Q 値の高い共振器になる。フタの接触抵抗が無視出来るならば、可変周波数の共振器が作り易い ($n = 0$ のみ)

TM 波 $H_z = 0$ とすると、(19.28)、(19.29) より、(19.30) で H_z を E_z と置き換え式を得る。同じ論理をこの方程式に適用すると、(19.32) も H_z を E_z と置き換えれば良いから、

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \frac{d J_n(k_r r)}{dr} E_z \\ E_\theta &= \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \frac{n}{r} \tan n\theta E_z \\ E_z &= E_0 \cos n\theta J_n(k_r, r) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ H_r &= -\frac{\omega \varepsilon}{k_z} E_\theta \\ H_\theta &= \frac{\omega \varepsilon}{k_z} E_r\end{aligned}\quad (19.37)$$

ここでも、 $k_r^2 = k^2 - k_z^2$ である。

境界条件も、やはり導体表面 $r = a$ に置いて、 $E_\theta = H_r = 0$ であるから、

$$J_n(k_r a) = 0 \quad (19.38)$$

この場合も $n = 0$ だと、 $E_\theta = H_r = 0$ が (r, θ, z, t) に依らず成立する。即ち、電場は z 方向にしか存在しない。このモードは DTL 型 線形加速器に利用される。特に、 $k_z \sim 0$ だとすると、 $J_0(0) = 1$, $J'_0(0) = 0$ だから、 $|E_z|$ が最大、 $E_r \sim 0$ となっている。即ち、電場は端的に言って、全て z 方向を向いている。

空洞共振器 導波管では、 z 方向の長さは無限であった。ここで、2枚の平行平板から、2枚の平行平板を追加して導波管を作った様に、更に z 方向にも2枚の平行平板を置き、パイプを塞いでみよう。TE₀₁ モードでは、電場は x 方向にしか成分を持たないから、 z 方向に

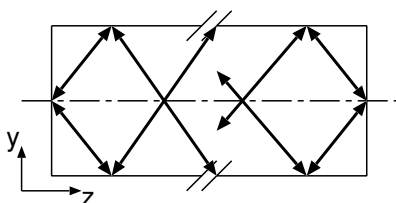
$E_x = 0$ という面を捜し出して、ここに完全導体を置いても場を乱す事はない。(19.27) 式の E_x の実部をとると、 z 依存性の部分は $\cos(k_z z - \omega t)$ で t にも依存するので、 z 依存性と t 依存性を切り離す必要がある。 z 依存性と t 依存性がくっついているのは、進行波をつくる為であった。定在波を作れば、両依存性を分離出来る。こうすれば、 $E_x = 0$ の位置を決める事ができる。即ち、

$$k_z Z = \ell \pi, \quad \ell \text{は自然数} \quad (19.39)$$

を満足する位置に一枚、もう一枚は $z = 0$ に置けばよい。内部断面が長方形で、両端が塞がれた装置を空洞共振器 (cavity, resonator) と呼ぶ。TE₀₁ モードだとすると、 $k_y^2 + k_z^2 = k^2$ の関係があるから、共振周波数 f は幾何学的形状から完全に決まってしまう。

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{L_z}\right)^2} \quad (19.40)$$

ここで、 L_x, L_y, L_z は x, y, z 軸方向の内法の長さである。TE₀₁ ならば、 $m = 0, n = 1$ である。



簡単なものは、 $\ell = 1$ とすれば良い。周波数が低くなると、大きさは大きくなる。サイクロトロン等の加速電圧発生装置、家庭用電子レンジに使われるマグネトロン (磁電管)、クライストロン等、用途は多い。

ESR の実験やレーザーにもなくてはならない概念である。

完全導体という仮定は通常は成立しない。例えば表皮厚さ程度の領域を流れる表面電流に起因するジュール熱の為にエネルギーの散逸がある。時間微分が純虚数になるような場合 (電流と電圧の位相差が 90 度という意味) には散逸はないが、散逸がある時には時間微分にも実部が登場する。

その時の場に蓄えられているエネルギー W が多いと、散逸量も多いので、両者の比を問題とする。周期的現象を取り上げているので、1 周期当たりの散逸エネルギーを P とし、

$$Q = 2\pi \frac{W}{P} \quad (19.41)$$

で定義される量を quality factor (Q 値) と呼ぶ。この時、 $dW/dt = -P/T$, (T は周期) を積分すると、

$$W(t) = W(t=0) \exp(-\omega t/Q) \quad (19.42)$$

であるから、 Q/ω という時定数で場に蓄えられたエネルギーが熱に変換される。

$\omega T/Q \sim \omega/(Q\delta f)$ とすると、 $\delta f = Q/\omega$ 程度の精度で (19.41) は満足されねばならない。 Q が大きいと (19.42) により変化の少ない (安定な) 系になる。

6 面を完全に密封された直方体の内部に電磁波が存在すると仮定して、外部からどのような方法でその存在を検出し、又は外部からどのような方法でエネルギーを供給するのだろうか？

勿論、導体に穴をあけ、そこから何かを差し込むしか方法は無い。出来るだけ、内部に出来ている、又はこれから励起しようとするモードを乱さない様にする。例えば、内部表面電流に平行に穴をあけると電流が乱される事は少ないだろう。

第20章 光源の物理

「はじめに光ありき」の表現に見られる様に人類（他の生命にも）にとって光は非常に大切な存在である。光源として我々が日常的にとらえるものは太陽や星（月は太陽光の反射）、火、稲妻、蛍、提灯アノコウ etc。（光苔は百科辞典に依ると、自分で発光しているのではないとの事）人工光源としては、白熱電灯、蛍光灯、ストロボフラッシュ、レーザー等…。波長を可視光域以外にも許すと、各種発振器やレーザー、X線管、シンクロトロン軌道放射、粒子・反粒子の対消滅時の γ 線 etc。

この内、古典物理で理解できる過程としては荷電粒子の加速運動に伴う制動放射があり、量子力学が必要なものとして状態間の遷移に伴う発光がある。対消滅は粒子数が保存しない時の量子力学が必要なものであり、ここでは考えない。

状態間の遷移に伴う発光 原子を例に取ろう。原子が何等かの励起状態に置かれたとする。この励起状態原子はエネルギー的により安定な状態へ遷移し、この時、過剰エネルギーの一部は電磁波として放出される（運動量の保存に伴う、recoil に一部のエネルギーが使われる）。この電磁波の波長が可視光域にあれば”光”として認識される。

透明物質の屈折率を（可視光域で）調べると、かなりよい精度で一定であるから、発信源の大きさは可視光の波長領域から遠くはなれている事が分る。更に詳しく調べてみると短波長側が大きな屈折率を示すから発光体としての原子は可視光の波長よりも十分に小さいことが推測される。これが空が青い理由でもあるが…… 猶、運動量で比較してみると、可視光は大きな運動量のものほど良く曲がる（屈折率が高い）という力学では考えられない様な性質を示す。

発光体は可視光の波長 400 ~ 800 nm よりも充分小さい事は上の事実から了解できたとして当面これを”原子”と考えておく。量子力学は、原子には基底状態と無数の励起状態があると教えている。原子がある一つの励起状態に置かれると、この励起状態はエネルギー的に下の状態に遷移する。何故か？ 状態の変化があるためにはこの変化をひき起こす原因があるはずだ。例えば真空中に励起状態にある原子を1つ置き、その近くを正・負のイオンを走らせると、イオンは励起状態原子の位置に時間的に変化する電磁場を作る。この電磁場までも考慮すると励起状態のエネルギーは厳密に決まらなくなり、いくらかの巾ができるだろう。この巾の大きさは当然イオンの全電荷、どれだけの頻度で、どれだけ近く迄イオンが励起状態原子に来るか等で決定される。励起エネルギーに巾ができると不確定原理により、励起状態は有限の寿命を持つ事になり、励起状態から、より安定な準位への遷移が起る。もっと簡単に言えば猿が登った木をゆすると猿も木から落ちる様なものである。励起状態原子の位置（これは真空中の任意の点である）に生ずる電磁場のゆらぎの原因は何かと問えばよい。現在はこの原因を真空そのものであると考えている。

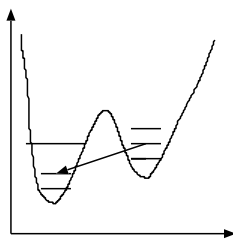
何も無いはずの真空が原子の位置に電磁場を作り、それが原子の励起エネルギー固有値に巾を作り、励起状態の寿命をきめている。 自然巾と呼ばれる。

真空中の電磁場のゆらぎは、電荷密度の大きな電子状態のエネルギー固有値の絶対値を小さくする効果がある。これは Lamb shift として実際に観測されている。又電子の異常磁気能率の原因でもある。

厳密な意味での自然巾を利用した”光源”はレーザーを利用したイオントラップぐらいなものであろうか？ 低圧のナトリウムランプは街灯に利用されているが D 線が特に強いそうである。圧力を上げた Na、Hg、Xe ランプ等は原子間の衝突を激しくさせて、原子の励起と発光を競争過程とする事により光量・色調を調節している様である。励起状態原子のすぐ近くに、有限温度の原子を置くと、この原子の熱振動が原因で励起状態巾が大きくなる。

ここに述べた巾は励起状態の寿命をきめる巾であり、観測される巾ではない。観測される巾の原因には、他原子との相互作用・ドップラー効果や測定値の分解能等が関係してくる。

自然巾できまる励起状態の寿命を τ とすると、この状態から放出される電磁波は $c\tau$ 程度の波連 (wave train) と考えてよいだろう。ここで、 c は光速である。



一次元で考えてポテンシャルが左図の様になっていたとすると、図の矢印の遷移に対する寿命は常識的な励起状態にある原子の寿命よりも極端に長い。(燐光) この長い寿命 T に対して cT の長さの波連がある訳ではないだろう。

光の誘導放出 励起状態原子は特に原因が無くとも光を放出すると述べたが、外部から放出予定の光と同じ波長の光を当てると、共鳴的に遷移確率が大きくなる。この現象を誘導放出と呼ぶ。この時放出される光は入射光と位相が同じである。沢山の寿命の長い励起状態を作ったとする。その内の 1 つが遷移により光を放出したとする。この光が隣の励起状態に働きかけ誘導放出が起ったとする。これで結果として光はある意味で 2 倍になったが、位相は揃っている。この光が更に近くの励起状態原子から誘導放射を起こさせる…。この様な事が実現できるならば、非常に強度の強い、良く位相の揃った光を作り出す事ができる。また最初の光は外部から入れるとしたら光を増幅する事ができる事になる。この様な装置をレーザーとかメーザーと呼ぶ。可視光領域をレーザー、マイクロ波領域をメーザーと呼ぶ。歴史的にはメーザーの方が古いが、稼働装置数の多数決で、全部をレーザーと呼ぶのが一般的傾向の様である。

黒体輻射 ”原子”には無数の励起状態があり、多数の”原子”が衝突しエネルギーを交換しているという、1 つの”原子”の 2 つの状態というイメージの対極として、固体の発光がある。電磁気学の開祖の一人のマイケルファラデーが”ろうそくの科学”で述べているのはこの例である。

一般には発光体から放出される光量は発光体が吸収する光量とは等しくないが、空洞の様な閉じた空間で、温度勾配がなければ放出・吸収量が等しいときに平衡状態になる。この時の空洞内の輻射のスペクトルは 19 世紀の難問の 1 つであった。即ち古典的な統計物理と電磁気の知識では発散が生じていた。この件に関する、Einstein と Max-Planck の仕事を復習しておこ

う。

真空の比熱 真空中を電磁波は伝播出来る。電磁波はエネルギーを有しているので、真空中にエネルギーを電磁波の形で注ぎ込む事が出来る。この意味で、真空は0でない熱容量を有する。従って真空の比熱という歴史的な概念も、意味を有する。真空の電磁波によるエネルギー密度を考えるのが、ここでの主題である。

発光原子は状態 1, 2 の 2 つの状態を有し、状態 1 (2) のエネルギーを E_1 (E_2) とし、エネルギー差 ($E_2 - E_1$) に対応する輻射の振動数を ν とする。

$$h\nu = E_2 - E_1 \quad (20.1)$$

h はプランク定数 ($\sim 6.62 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{sec}$) である。状態 1 が光を吸収して状態 2 に遷移する割合は、(誘導放射の逆過程であるから) 振動数 ν の輻射強度 $u(\nu)$ に比例する。又、状態 1 に存在する原子数 N_1 にも比例する。比例係数を $B_{1 \rightarrow 2}$ とすると、

$$\frac{dN(1 \rightarrow 2)}{dt} = B_{1 \rightarrow 2} N_1 u(\nu) \quad (20.2)$$

逆に状態 2 が状態 1 に遷移する割合は、式 (20.2) の項以外に自然放出の確率を加えておかなばならない。状態 2 の状態 1 への自然放出の確率を $A_{2 \rightarrow 1}$ とすると、

$$\frac{dN(2 \rightarrow 1)}{dt} = A_{2 \rightarrow 1} N_2 + B_{2 \rightarrow 1} N_2 u(\nu) \quad (20.3)$$

比例係数 $A_{2 \rightarrow 1}$, $B_{1 \rightarrow 2}$, $B_{2 \rightarrow 1}$ 等は Einstein の A , B 係数と呼ばれている。ところで、今登場した 2 つの B 係数は等しいことが説明されている。(詳細平衡)¹

平衡状態では式 (20.2), (20.3) は等しくなければならぬし、 N_1 と N_2 の比は Boltzmann 分布に従うとすると、

$$\begin{cases} B_{1 \rightarrow 2} N_1 u(\nu) = A_{2 \rightarrow 1} N_2 + B_{2 \rightarrow 1} N_2 u(\nu) \\ N_2 = N_1 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \end{cases} \quad (20.4)$$

$$\therefore u(\nu) = \frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (20.5)$$

ここで k は Boltzmann 定数 ($\sim 1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)、 T は絶対温度。

エネルギー ($h\nu$) が大きい時は式 (20.5) は Boltzmann 分布になるが、そうでないと、Boltzmann 分布からズれてくる Bose-Einstein 統計

スピンと統計の関係を知っている、光子は整数スピンを持つ事になる。

Max-Planck のやった事を復習するには状態密度 $\rho(\nu)$ と光量子仮説を知る必要がある。電磁波に対し周期境界条件を要求して、一辺 L の大きな立方体の中に電磁波を閉じ込めると、 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ の様に \mathbf{r} と t に依存する電磁場に対し、

$$k_j L = 2n_j \pi, \quad (j = x, y, \text{ or } z, \quad n_j \text{ は整数。}) \quad (20.6)$$

¹状態 1 から 2 への遷移振幅は $\langle 2|T|1 \rangle$ と書ける。ここで、 T は遷移の原因である。 T が Hermit 演算子であるならば $\langle 2|T|1 \rangle = \langle 1|T|2 \rangle$ であるから $B_{1 \rightarrow 2} = B_{2 \rightarrow 1}$ 。スピン自由度を無視している。detailed balance

k_x, k_y, k_z の許される値は式 (20.6) により制限をうける。状態の数はこのとり得る整数の組 (n_x, n_y, n_z) の数を数えればよい。 L が充分大きければ n_j も大きく、 n 空間ではこの整数組は一樣に分布し、単位体積当り 1 つの組が平均的に対応しているから、 $n \equiv \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ と書くと、半径 n の "n" 空間の球体積が、組の数であるから、

$$N(n) = \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{L}{2\pi} k\right)^3 \quad (20.7)$$

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \quad (20.8)$$

状態密度は式 (20.7) を ν で微分し、2 つの偏光の自由度を考慮し 2 倍しておく。更に単位体積当りにするために L^3 で割っておくと、

$$\rho(\nu) = \frac{1}{L^3} \times 2 \times \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (20.9)$$

振動数 ν に対する光量子のエネルギーを 1 個当り $h\nu (= \hbar\omega)$ とすると、熱平衡状態での平均エネルギー $\bar{E}(\nu)$ は、Boltzmann 分布を利用すると

$$\bar{E}(\nu) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (20.10)$$

この式に式 (20.9) の状態密度をかけると、輻射のエネルギー密度 $u(\nu)$ は

$$u(\nu) = 8\pi h \cdot \frac{\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (20.11)$$

式 (20.5) と比較すると、

$$\frac{A_{2\rightarrow 1}}{B_{1\rightarrow 2}} = 8\pi h \cdot \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \quad (20.12)$$

自然巾に起因する A 係数と誘導放出の係数 B の比は、基本定数と振動数のみに関係し発光体の性質には依存しない。式 (20.11) は 黒体輻射の式 と呼ばれる。式 (20.11) が $\nu^3 \times f(\nu/kT)$ と書ける事は Wien の変位則として知られていた。Wien の式を振動数 ν について $(0, \infty)$ の範囲で積分すると、発散し、真空の比熱が発散するという問題があったが、式 (20.11) は発散しない。実際に積分を実行してみよう。

$$\int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 e^{-C\nu}}{1 - e^{-C\nu}} d\nu$$

簡単の為に、 $C = h/kT$ とおいた。 $|e^{-C\nu}| < 1$ だから、被積分関数の分母を級数展開し、項別に積分を実行すると、

$$\text{右辺} = \frac{48\pi h}{c^3 C^4} \sum_n 1/n^4$$

この式の右辺の和は、Riemann の $\zeta(n)$ 関数と呼ばれ、 n が偶数ならば簡潔な表現が知られている。特に $\zeta(4) = \pi^4/90$ である。この、変数が偶数の場合の ζ 関数の値の評価に関心があるならば、Fourier 展開に関する文献の例題を探してみよ。従って

$$S(T) = \sigma T^4, \quad \sigma \equiv \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}. \quad (20.13)$$

単位面積、単位時間当たりの輻射によるエネルギー損失は、絶対温度 T の 4 乗に比例している。温度が上がると、急激に輻射は増加する。この式は、Stefan-Boltzmann の (黒体輻射の) 式として知られている。

一時期 明るさ (光度) の定義とし、1 気圧下の白金の凝固点にある黒体の $1/6 \times 10^5 \text{ m}^2$ の平らな表面の垂直方向の光度として 1 cd (カンデラ) を定義した。(大体 100 W の白熱電球の明るさの 1/100)

宇宙電波の内、星 (電波源) が無い方向からやってくる電波 (cosmic background) のスペクトルは式 (20.11) で $T \simeq 2.7 \text{ K}$ とすると大体あう。(約 4 桁の精度で宇宙全体どこでも一定)

自然巾についてのコメント ”自然”巾は自然な状態に置かれた励起状態の寿命に関係している。もしも励起状態を不自然な状態に置くと寿命は変化する。原理的な例: 励起状態 基底状態 + 光子という遷移に対し、遷移後の光子が空間に存在できるためには、その波長を λ として、空間的な広がり l が光子の放出方向に対し λ よりも充分長い必要がある。 λ よりも狭い反射板で励起状態を囲ってしまうと終状態に光子が存在できないので、”自然巾”は狭くなる。励起状態を丁度 λ の巾の鏡の中庭に置いたら自然巾は広がる!?

レーザーの原理 レーザーを上準位 ”2” から下準位 ”1” への遷移に伴う発光であると了解するならば、占拠数の逆転即ち準位 ”2” (”1”) の占拠数を $N_2(N_1)$ とした時、 $N_2 > N_1$ が必要である。両準位のエネルギー $E_2(E_1)$ とした時、 $h\nu_{12} = E_2 - E_1$ で与えられる振動数 ν_{12} の輻射強度の増加率 $\frac{du(\nu)}{dt}$ は Einstein の A, B 係数を用いると

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \{A + B u(\nu)\} N_2 - B N_1 u(\nu) \\ &= A N_2 + B u(\nu)(N_2 - N_1) \end{aligned} \quad (20.14)$$

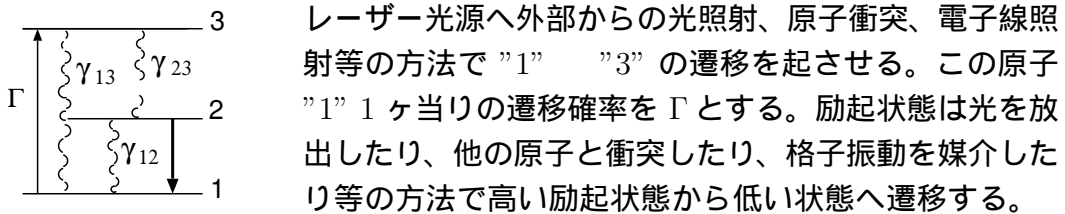
ここで右辺第 1 項は自然放出であり、第 2 項は誘導放出に対応する。第 1 項はいつでもあるから無視すると、 B, u は共に正だから $N_2 - N_1 > 0$ ならば、場の輻射密度の時間変化は正、即ち増加する。上の準位の”人口” N_2 を下の準位の”人口” N_1 よりも多くする事が必要条件の第一である。

$N_2 > N_1$ の状態で外部から ν_{12} の振動数の”光”が入射すると、誘導放出により、入射光の強度よりも強い光が放出される。光の増巾。この概念がレーザーの語源 (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation、即ち誘導放出による光の増巾) である。外部から光の入力がなくとも自然放出があるから、ほっておいても自分で発光し、この光により誘導放出が起るとも考えられる 発振。現在ではこちらの用途の方が多いただろう。

次に考えるべき事は $N_2 > N_1$ をいかに実現するか？ ということである。熱平衡状態では

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right) \quad (20.15)$$

であり、 $h\nu_{12} > 0$, $k > 0$ だから $T < 0$ としなければ、2本の準位だけでは実現できない。第”3”の準位が存在すると、間接的に”1”準位の”原子”を”2”準位へ遷移させて人口の逆転を実現できる。



原子1ヶあたりの遷移確率を γ_{ij} と書く ($j \rightarrow i$ への遷移)。この遷移を緩和過程と呼ぶ。各状態の人口変化の割合を書き下すと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -(\Gamma + \gamma_{21} + \gamma_{31})N_1 && +\gamma_{12}N_2 && +\gamma_{13}N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} &= && \gamma_{21}N_1 && -(\gamma_{12} + \gamma_{32})N_2 && +\gamma_{23}N_3 \\ \frac{dN_3}{dt} &= && (\Gamma + \gamma_{31})N_1 && +\gamma_{32}N_2 && -(\gamma_{13} + \gamma_{23})N_3 \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

原子数の保存則は $N_1 + N_2 + N_3 = N$ 。式 (20.16) を全部加えると確かにそうになっている。平衡状態では $\frac{dN_i}{dt} = 0$ であるから、これを利用すると各準位の人口は計算できる。励起状態に対応する $\gamma_{ij} (i > j)$ を無視すると、

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{\gamma_{12}(\gamma_{13} + \gamma_{23})}{\gamma_{12}(\gamma_{13} + \gamma_{23}) + (\gamma_{12} + \gamma_{23})\Gamma} \cdot N \\ N_2 &= \frac{\gamma_{23}\Gamma}{\gamma_{12}(\gamma_{13} + \gamma_{23}) + (\gamma_{12} + \gamma_{23})\Gamma} \cdot N \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

$N_2 > N_1$ が成立するためには、分母は共通だから

$$\Gamma > \gamma_{12} \cdot \left(1 + \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{23}}\right) \quad (20.18)$$

即ち、

1. ”2” ”1” への遷移確率は小さいほうが良い。”2” が準安定状態だと都合が良い。
2. ”3” はほとんど”2”へ落ちて、”3” ”1”の遷移は禁止遷移だと好ましい。

ポンプ能力 Γ は式 (20.18) を満足する様に強力でなければならない。

$N_2 > N_1$ を実現するには N_2 を増すのが一つの努力の方向であるが、他方 N_1 を減らすのも一つの工夫の方向である。"1" が原子の基底状態だと非常に数が多いが、励起状態だとするとこれは一般的に非常に少なくなるから、反転分布は実現しやすいだろう。準位 "0" を "1" の下に仮定すると、"0" "3" 遷移に必要なポンプ能力 Γ は

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &> \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \gamma_2 \left(1 + \frac{\gamma_{13} + \gamma_{03}}{\gamma_{23}}\right) \\ \gamma_2 &\equiv \gamma_{02} + \gamma_{12} \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

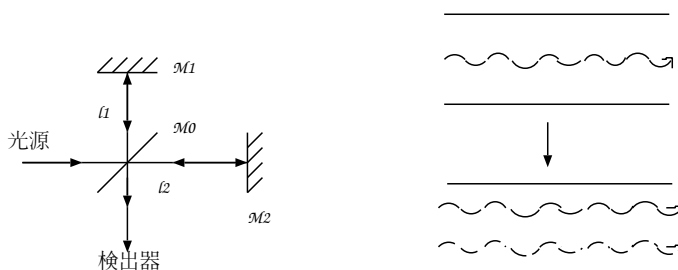
となり、大体 Boltzmann factor だけ、弱いポンプ能力でも反転分布が実現できる。(4 準位レーザー)。但しここで

$$\gamma_{10} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \gamma_{01} \quad (20.20)$$

を利用した。

レーザーの最後の条件は実用上のものである。電磁的相互作用を特徴付けるパラメータ $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ (微細構造定数と呼ばれる) が小さいために γ (従って Γ も) は大きくない。即ち単純な構造では増幅率は大きくとれない。例えば常識的な He-Ne レーザーで 1 m 当り約 0.7 % 程度であるから、飽和の効果を見無視すると L m では増幅率は $(1.007)^L$ だから、2 倍にするには 100 m の長さが必要である。この長さを実現するために、長手方向での反射を利用する。これにより自分自身の光を繰り返し利用する。これを空洞共振器だと思つと、長手方向の長さは一般的に波長に比較して非常に長いので両端の平行度は非常によくなければいけない。レーザー本体の力学的振動、その他の不整も基本モード以外の混入を許す原因となる。

レーザー光は上手に作ると、非常に干渉性の良い光源となる。1 つの光子を作る波列の長さは、(励起状態の寿命) \times (光速) 程度と推定されよう。寿命を 10^{-9} 秒とすると約 30 cm となる。一点から出た光を 2 つの道筋に分け、もう一度合流させると、その間の光路差が 30cm 以下ならば干渉するが、それ以上だと干渉しないだろうと想像される。マイケルソンの干渉計は、学生実験でガス中の光速測定に使ったと思うが、この目的には便利な道具である。



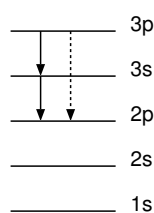
光源からの光を半透明の鏡 M_0 で 2 つの直交した光路に分け、夫々 l_1, l_2 の距離走らせてから鏡 M_1, M_2 で反射させ、検出器で光を検出する。必要なレンズが左図では省略されている。 $2(l_1 - l_2)$ が光の波長の整数倍だと干渉の結果、強めあう。

白熱電球では $(l_1 - l_2)$ が数 μ m 程度で干渉は観測されなくなるが、良いレーザー光源では 10^3 km 以上にも達する。即ち励起状態原子に一つの波列が衝突すると、波列の通過中に励起状態が入射波列と同一の波長と位相 (2π は別として) の波列を放出し (図では破線)、実質的に

長い波列が形成される。これにより波列の長さが成長するためには、励起準位の中には非常に狭くなければならない。

疑問 非常に寿命の長い励起準位からの光の波列は非常に長いのだろうか？

レーザーの興味ある例として多荷にイオン化した原子を使用するものがある。原子に”光”を照射しイオン化できる事は知っている。励起されたイオンは、近くの遊離電子を取込んで特性 X 線等の光を放出して基底状態に落ち着く。落ち着くまでの有限の時間内に更にイオンをイオン化し 2 荷イオンを更にイオン化し ……。原子番号 $Z = 34$ の Se の電子を 24ヶはいで ${}_{34}\text{Se}^{24+}$ を作る。10ヶの電子数は理科年表によると、 $(1s)^2(2s)^2(2p)^6$ の Ne とよく似た状態が基底状態である。しかしこんなに沢山電子を取る様な乱暴な事をして原子が直接、基底状態に軟着陸するはずがない。



例えば $(1s)^2(2s)^2(2p)^5(3p)$ 状態ができたとすると、(概念図を参照)、 $(3s) \rightarrow (2p)$ 遷移はエネルギーギャップも大きいし、禁止遷移ではないので、非常に速い。他方 $(3p) \rightarrow (2p)$ は同じパリティだから遷移は遅い。従って、 $(3p)$, $(2s)$ 間に準位反転が起り、レーザーが観測されている。

もっと極端な例では ${}_{73}\text{Ta}^{45+}$ による 44 \AA のレーザー発光も知られている。この様な波長の”光”が入手できると、分子を直接見る顕微鏡を作り得る。

制動輻射に起因する光源 ラジオや TV の電波の発振器は制動輻射だと言うと首をかしげる人もいるだろう。しかし、荷電粒子の加速度運動に伴う輻射を制動輻射と呼ぶならば、これも $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}$ に起源があるから、この部類に入れ得る。これに類するものであれば、円電流に伴う輻射(ある人はこれをサイクロトロン輻射と名付けている)、シンクロトロン軌道輻射等がある。又忘れてならないのは制動輻射の名前の由来となった、X 線管(クリーシジ管)であろう。X 線管からの輻射には特性 X 線や輻射を伴った電子捕獲(radiative electron capture)に起因するものもあるので名前の起源とは裏腹に制動輻射だけとは限らない。

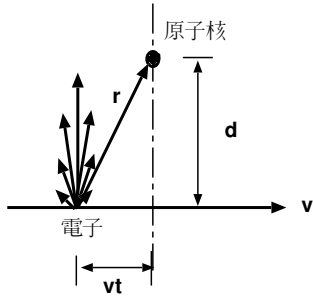
これ等の例では 1ヶの荷電粒子の加速度運動又はその重ね合せとして理解できる。サイクロトロン輻射は 2 つのアンテナを直交させて置き、同じ周波数と異なる位相で励振すればよい。

星(主に恒星、X 線星、パルサー等)からの”光”の内には非常に密な準位間の遷移によるものか又は制動輻射に依るものか判然としないものも多い。輻射の湧き口としての”電子”数が少なければ個々の運動のフーリエ成分が輻射に関係しているとみなして良いだろうが、”電子”数が非常に多いとその分布しか問えなくなるから黒体輻射と区別が付かなくなってくるだろう。

しかし星からの光が完全に干渉性を失っている訳ではない。星からの光の強度を異なる 2 点で観測し、その相関を調べ、視直径を測定する実験も行われている。

荷電粒子が 2 つ衝突する時にも(複数個ならばいつでも)制動輻射は放出される。

面白い例では原子核の β 崩壊に伴い放出される電子が、娘核の電場で減速される時にも輻射を放出する。(内部制動輻射)。



ここでは先ず簡単な例として、制動輻射そのものではないが、仮想光子の方法と呼ばれるエネルギー・運動量の伝達の解析方法を紹介しておこう。高速の電子が原子核の傍を通ったとしよう。相対論的效果のために電子の作る電場は電子の速度 \mathbf{v} にほぼ垂直である。電子が作る電場を計算するには、電子軌道を直線だと仮定し、電子の静止系での電場 (Coulomb 場) を速度 \mathbf{v} で Lorentz 変換すれば簡単。相対論の所の問の結果 (13.74) を利用する。もう一度書くと、 \mathbf{E} や \mathbf{B} の \mathbf{v} に平行成分は変化がない。

変換前に ' をつけると、

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \quad (20.21)$$

\mathbf{v} に垂直な成分には Lorentz 因子と $\mathbf{v} \times \mathbf{E}'$, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ の寄与がある。

$$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma \{ \mathbf{E}'_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}')_{\perp} \}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma \{ \mathbf{B}'_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E}')_{\perp} / c^2 \} \quad (20.22)$$

電子の通過中、原子核は静止しているとし、 \mathbf{B}_{\perp} の寄与は無視して考える。 \mathbf{E}_{\parallel} は点 \mathbf{r} と点 $-\mathbf{r}$ からの寄与が丁度相殺するのでこの項の寄与も無視できる。他方 \mathbf{E}_{\perp} 成分は相殺しないので、この寄与を評価することが最も大切である。

$$E_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{q r \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (20.23)$$

$r = \sqrt{(vt)^2 + d^2}$, $\sin \theta = \frac{d}{r}$ を利用し、独立変数を t とすると、 $t = 0$ で $r = d$ ととり、 E_{\perp} を Fourier 成分に分けてみる。

$$\begin{aligned} E_{\perp}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \frac{d}{\{(vt)^2 + d^2\}^{3/2}} dt \end{aligned} \quad (20.24)$$

ここで、被積分関数の分母は t の偶関数、 $\sin \omega t$ は奇関数だから積分結果に寄与しない。変形 Bessel 関数 $K_{\nu}(z)$ に対し次の積分表示式がある。

$$K_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}} (2\pi)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + z^2)^{\nu+1/2}} dt \quad (20.25)$$

従って、

$$E_{\perp}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\omega}{v^2} K_1 \left(\frac{\omega d}{v} \right) \quad (20.26)$$

電子が作る電場 E_{\perp} の ω 成分が式 (20.26) で与えられるが、原子核にこの ω に対する励起状態が存在すると、電子から仮想的に振動数が ω に対応する光子が放出され、この仮想光子を原子核が吸収して励起状態に遷移するというイメージを作ることが出来よう。実際問題として

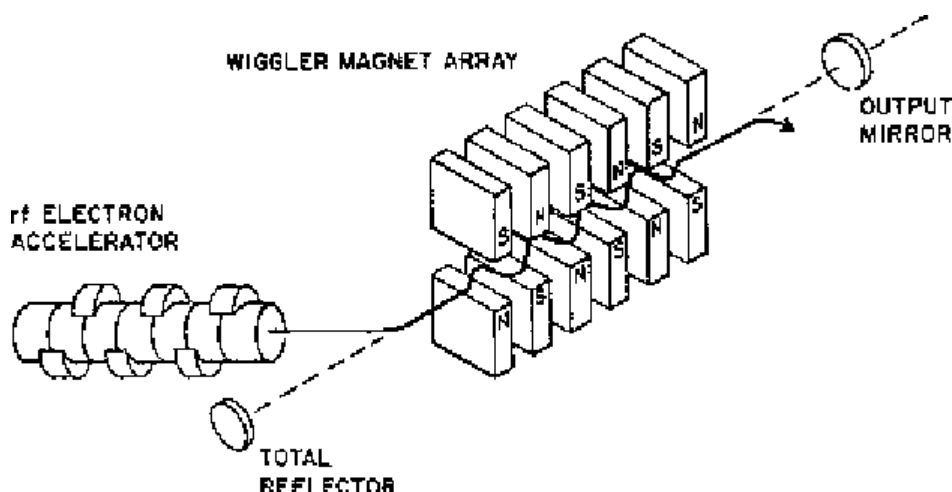
衝突径数 d は一定ではないので d について積分しなければならない。 d の上、下限を決定するには少し量子力学の知識が必要である。(積分が収束しないと困る)

E_{\parallel} の寄与は今の計算方法から $E_{\parallel}(\omega)$ に対して $\sin \omega t$ からの寄与があり、これは $E_{\perp}(\omega)$ よりも約 2 倍の周波数成分を有すると想像されよう。

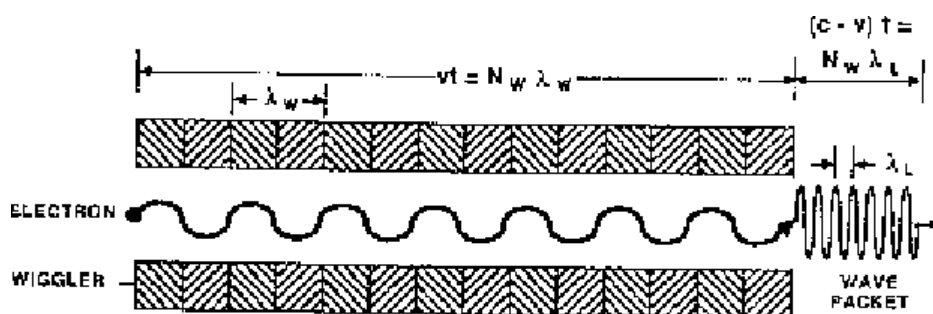
ここでは、 B_{\parallel}, B_{\perp} からの寄与を無視したが、電場からの寄与と磁場からの寄与とでは、空間反転に対する性質、即ちパリティが異なる事を注意しておこう。

自由電子レーザー 荷電粒子の加速度運動に伴う制動輻射の例としてサイクロトロン輻射やシンクロトロン軌道輻射がある事は先に述べた。近い将来の光源として利用される可能性のあるものに自由電子レーザーがある。これは原理的にはシンクロトロン軌道輻射と変わるところはないが、これよりは単色性、平行性等に優れている。又レーザー光よりは一般にこれ等の性質は劣るが、振動数の可変性で優れている。

自由電子レーザーは、下図の様な構成になっている。



まず左の電子加速器から、太い実線で示される軌道で電子が出てくる。破線の光軸にのせられた後、ウイグラーとかアンジュレーター (undulator) と呼ばれる、磁極の部分を通り、ここでシンクロトロン放射と同じ原理で輻射を放出する。使用後の電子はすてられる。シンクロトロン軌道輻射と原理的に異なるのは、wiggler の磁極が非常に狭い繰り返し周期で規則正しく並べてある点である。レーザーと同じ様に光軸の両端に反射鏡を置き利得を稼ぐ場合もある。



wiggler は一周期が λ_W で N_W 周期分の磁極が等間隔に並べられているので、全長は $\lambda_W \times N_W$ である。ここへ左から電子が速度 v で入射してくる。電子は軌道が曲げられる度に輻射を放出するが、曲げられ方は非常に少ないのでほぼ直線を走ると仮定する。電子が wiggler を通過する時間を t とすると $vt = N_W \lambda_W$ である。

電子が曲げられる度に 1 波長づつ光も波を打ちその波長を λ_L とすると、電子が wiggler を通過する間に N_W 波長分の光の波列が放出された事になる。この波列の先頭は光速を c とすると ct だけ走っている。他方波列の最後尾は t 秒後には電子の現在位置即ち wiggler の出口にある。これにより、次の式が成立する²。

$$\begin{aligned}(c - v)t &= N_W \lambda_L \\ vt &= N_W \lambda_W\end{aligned}$$

大切な点は $v \simeq c$ であると³、

$$\lambda_L = \frac{1 - \beta}{\beta} \lambda_W \simeq \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{2} \lambda_W = \frac{1 - \beta^2}{2} \lambda_W = \frac{\lambda_W}{2\gamma^2} \quad (20.27)$$

これにより、 $2\gamma^2$ 倍だけ wiggler の波長より短い波長の光を得ることが出来る。

電子エネルギーを変えると λ_L を変えることは易しい⁴。

電子を 1 ヶだけ加速するならばこれでよいが、電子が連続的に流れてくると、放出される光も色んな位相のものが混入してくるので干渉性を持たせることはできない。又、波列の長さも N_W 波長分しかないので、あまり単色性の良い光源とも呼べない。前ページの構成図に鏡が 2 枚ある理由がこの改良に役立つ。即ちマグネトロンのところでも述べた集団運動を励起するのである。

1 つの電子が輻射を平均的な電子の進行方向に放出したとする。この輻射の電場は、”進行方向”に垂直であるから、wiggler が電子を偏向させようとしている方向に平行であり得る。現在考えている輻射を放出した電子と半波長分だけ離れた点にいる電子が、wiggler の偏向力とこの電場の作用と相加的に受けたとすると、この電子は大きな偏向力を受けるので、大きな輻射を放出する。同僚の放出した輻射の電場成分、又は外部からの輻射の電場成分、又は鏡により反射された”光”の電場成分で wiggler のみよりも強い偏向力を受け、強い発光作用を期待することが可能になる。

都合良く全部の電子が一緒に神輿を担ぐわけではないと思う人もいるだろう。神輿にぶら下って楽をする不届き者もいる様に、平均よりも少しエネルギーの低い電子は輻射場からエネルギーをもらい、平均値と一緒に行動する様になる。マグネトロンの場合にも場からエネルギーをもらう解と場にエネルギーを与える解があった事を思い出そう。この過程は電子のバンチング (bunching) と呼ばれる。即ち、電子がかたまって運動する様になる。各電子の運動位相がばらばらだと、輻射強度は電子ビームの強度に比例するが、bunching が起ると、輻射強度は電子ビーム強度の 2 乗に比例し、光の干渉性も格段に向上する。この現象は金持ちほど利率の良い貯金をする様なものだから、性質の良く揃った大電流の電子ビームを用意する事は自由電子レーザーの大きな課題である。

²Doppler 効果に依る圧縮を思い出せ

³ $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$ を代入してもよい

⁴ここまでは coherent ではない。これから coherent にする工夫の話になる。

少し無責任な言い方をすれば、電子系と輻射場とが相互作用するならば、即ちエネルギーのやりとりをするならば、そしてエネルギーの等分配則を要求するならば、エネルギーの高い電子系から輻射場の方へエネルギーは必ず流れるはずである。エネルギーが流れる場合、又は両者が平衡状態に達する時定数はその間の結合の強さ即ち相互作用の強さに反比例するから、電子が wiggler を通過する迄に有意なエネルギーのやり取りをするには、wiggler の長さを長くして時間を稼ぐか、結合定数を大きくしなければならない。今の場合結合定数は外部輻射場の電場の強さになっている事はすぐに了解されよう。

電子から輻射場へエネルギーを流れやすくするためには、計算値 (20.27) 式よりも少し電子エネルギーを高目に設定する事も行われている。

第21章 光の散乱

電子が原子に調和的に束縛されているとしよう。輻射の反作用は加速度の時間微分に比例しているが、周期運動に対しては加速度 \ddot{x} は変位 x に比例するから、この反作用は $\ddot{x} \propto \dot{x}$ (=速度) に比例していると考えてよいだろう。

この段階で電子の運動方程式は、非相対論の範囲で、

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x^2 = 0 \quad (21.1)$$

速度に比例する抵抗 γ が小さい時、この方程式の解が減衰振動である事は既知とする。量子力学は調和振動子のポテンシャルの場合、等間隔に位置したエネルギー準位を与える。この励起状態に真空の零点振動に起因する電場が摂動として作用すると励起状態はエネルギー的に下の状態へ遷移し、この遷移に伴って輻射が放出される。相対論のはじめの方で、真空とは”真空とはそんなものですよ”と書いたのはこの事であった訳である。励起状態が”真空”にどれだけ感じ易いかが輻射”光”のエネルギーの中として観測され、これを自然巾と呼ぶわけであり、spontaneous emission と呼ばれる。非量子力学的立場からは自然巾は輻射の反作用として説明されている。ここではできるかぎり量子力学は使わずに仕事を進める。

前節にあったような何等かの光源からの”光”の理想化されたものとして平面波がこの電子に入射したとして議論を進めよう。

Thomson 散乱 平面波の進行方向を z 軸にとり、直線偏光を仮定して、光の電場の方向に x 軸をとると、

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 e^{i(kz - \omega t)}, & E_y &= E_z = 0 \\ B_y &= B_0 e^{i(kz - \omega t)}, & B_x &= B_z = 0 \\ B_0 &= \frac{1}{c} E_0, & k &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

磁場の強さは E_0 よりも $1/c$ の因子だけ小さいので、非相対論の近似では散乱現象に対する効果は無視される。電場が x 方向だと電子の運動方向 v も x 方向であり、Lorentz 力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は光の進行方向を向くので、電子は光の進行方向にも力をうけている。この事は光の運動量密度の式 (8.23) と定性的には矛盾しない。又 k や ω が非常に大きい時、Compton 散乱という光に電子が跳ね飛ばされる現象の直感的理解を助けるだろう。しかしここではこの様な効果は無視すると、電子の運動方程式は

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x^2 = qE_0 e^{-i\omega t} \quad (21.3)$$

ただし、電子の位置は xy 平面内にあるとして、 $z = 0$ を式 (21.2) に代入してある。この方程式の解は式 (21.1) の一般解 (減衰振動) と式 (21.3) の特解の和である。特解の部分は $x = A e^{-i\omega t}$

と書いて、式 (21.3) に代入すれば簡単に決定できる。この結果¹

$$x = (\text{減衰振動}) + \frac{qE_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} e^{-i\omega t} \quad (21.4)$$

以後の計算では右辺の第一項は落としておく。直感的な理由は外界からの作用 (E_x) による電子の反応を知りたいから、 E_x に関係しない項を落とす。

この解を式 (11.34) に代入すれば輻射が計算できる。非相対論的近似を使うから、分子の $n - \beta \rightarrow n$ 、分母の $\beta \cdot n \rightarrow 0$ とすると、非相対論的な輻射の式になるから、式 (10.17)²

で、 $p_x = qx$ とおき、式 (21.4) を代入し、

$$\ddot{p}_x = -\frac{q^2 E_0 \omega^2}{m} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} \quad (21.5)$$

この値は入射波の電場に比例している。散乱体の特性を表すためには入射強度と散乱強度の比をとったものを考えると良い。そこで、散乱の微分断面積を次式で定義する。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho_E(\text{scatt.})}{\rho_E(\text{inc.})} \quad (21.6)$$

ここで、 $\rho_E(\text{scatt.})$ は単位面積当たり 1ヶの散乱体がある時の、立体角 $d\Omega$ に単位時間に散乱されるエネルギー強度、 $\rho_E(\text{inc.})$ は単位面積・単位時間当りの入射波のエネルギー強度である。

分子は簡単だから、分母を計算しよう。電磁場のエネルギー密度の式 (8.5), (8.6) に自由場の関係式 (9.33) を代入すると、

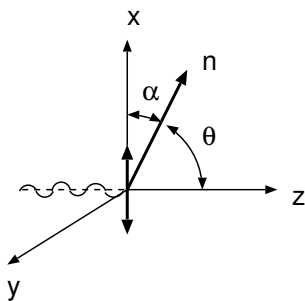
$$\rho_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 = \varepsilon \mathbf{E}^2 = \varepsilon E_0^2 e^{2i(kz - \omega t)} \quad (21.7)$$

このエネルギー密度で、 c の速さで電磁場が動いているから、分母は $\rho_E \cdot c$ を時間平均したものになる。ただし、ここでも $z = 0$ を代入しなければならない。時間平均は面倒だから $(\rho_E c)^*(\rho_E c)^{1/2} = \varepsilon E_0^2$ としておこう。時間平均としては正しくないが、分子もこの操作を守ると結果的に正しい。

散乱光の極角と方位角を θ, ψ 、 x 軸との角度を α とすると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{16\pi^2} \cdot \left(\frac{q^2}{m}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} \sin^2 \alpha \quad (21.8)$$

双極子輻射では、双極子と放出方向の角度 α の \sin^2 に比例する角度依存性を有する。可視光領域では $\omega \ll \omega_0$ とすると、微分断面積は ω^4 に比例し、空が青いのはこれが本質的に重要である。(Rayleigh 散乱)



全立体角にわたって積分すると、次式が使えるから、

$$\int \sin^2 \alpha d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha d\alpha = \frac{8\pi}{3} \quad (21.9)$$

¹外場 $qE_0 e^{-i\omega t}$ を強制力と見る

² $\frac{dW}{dt} = \frac{\mu}{16\pi^2 c} |\dot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta d\Omega$ を使って輻射強度を計算してもよい。

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\mu q^2}{m} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} \quad (21.10)$$

自由電子は束縛力がないから $\omega_0 = 0$ を代入し、古典的電子半径 (12.2) を用いると、Thomson 散乱の断面積 σ_T は $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{mc^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_0 e^2}{m}$ より

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (21.11)$$

ここでは、 $\gamma = 0$ と近似した。この面積と Bohr 半径の作る面積を比較して、大きさを認識しておく和良好的だろう。この近似では電子の振動数は入射平面波の振動数に等しい。光の振動数が大きくなると電子はもはや之に追隨して運動できなくなるだろう。ここに Compton 散乱の古典論から見た一つの側面がある。

自然光の電場ベクトルは x 軸方向を向いているとは限らないので、(21.8) に戻り、この方向に対して平均操作をしておこう。この時、電子は x, y 平面では全く同じ様に動き得るとする。(少なくとも自由電子に対しては正しい)。入射波の電場ベクトルを x, y 平面で x 軸から角度 β だけ傾けると、 \mathbf{E} 方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{E}}$ と $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= (\cos \beta, \sin \beta, 0) \\ \hat{\mathbf{n}} &= (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta) \end{aligned}$$

であるから、 $\cos \alpha$ は $\hat{\mathbf{E}}$ と $\hat{\mathbf{n}}$ の内積で与えられる

$$\cos \alpha = \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sin \theta (\cos \beta \cos \psi + \sin \beta \sin \psi) = \sin \theta \cos(\beta - \psi) \quad (21.12)$$

平均をとるには β を $0 \sim \pi$ 迄変えて積分して π で割ればよい。被積分関数 $\sin^2 \alpha$ は $(\beta - \psi)$ の形で β を含み、 β が $0 \sim \pi$ 迄変わるといふ事は ψ は任意であることを意味するから $\psi = 0$ としておくと、

$$\overline{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \beta) d\beta = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (21.13)$$

最後の变形で

$$\int_0^\pi \cos^2 \beta d\beta = \left[\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\beta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

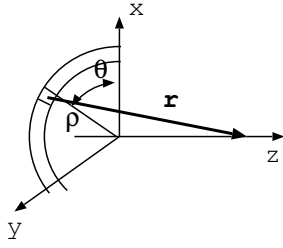
を使った。式 (21.8) に式 (21.13) を代入すると無偏極光に対する微分断面積が与えられる。特に $\omega_0 = 0$ を代入すると、無偏極光の自由電子による散乱の微分断面積を与える。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot r_e^2 \quad (21.14)$$

この式を量子論的に計算すると、Klein-Nishina の公式になる。

xy 面に平行に散乱体が分布している時 式 (21.4) より

$$\ddot{x} = -\frac{qE_0}{m} f(\omega) e^{-i\omega t}, \quad f(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \quad (21.15)$$



これを (11.34) に代入し、散乱波の電場を計算しよう。非相対論的近似では $\dot{\beta} = \left(\frac{\ddot{x}}{c}, 0, 0\right)$ 、湧き口から場の点を見た、単位ベクトル $\mathbf{n} = \frac{1}{r}(-x, -y, z)$ とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \dot{\beta} &= \frac{\ddot{x}}{rc}(0, z, y) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta}) &= \frac{\ddot{x}}{r^2 c}(-y^2 - z^2, xy, -xz)\end{aligned}\quad (21.16)$$

円筒座標系で表すと面積要素 $dx dy = \rho d\rho d\theta$ であり、 z 方向の微少量を $d\zeta$ とし、この体積内の散乱体の数密度を N とおくと、

$$dE_{sc} \cong \frac{Nd\zeta q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{rc} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta}) \rho d\rho d\theta \quad (21.17)$$

まず θ について積分する。 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ を代入すると、 y, z 成分が消える。

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{2\pi} y^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2 d\theta = \rho^2 \pi \\ \int_0^{2\pi} z^2 d\theta &= 2\pi z^2\end{aligned}\right\} \text{より} \quad (21.18)$$

$$(dE_{sc})_x = + \frac{Nd\zeta q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^3 c} \frac{qE_0}{m} f(\omega) e^{-i\omega t'} \pi(2z^2 + \rho^2) \rho d\rho \quad (21.19)$$

但しここで時間遅れは $t' = t - r/c$ として残した。次に ρ を $0 \sim \infty$ にわたって積分したい。

$$r^2 = z^2 + \rho^2, \quad 2r dr = 2\rho d\rho \quad \text{より} \quad (21.20)$$

$$\begin{aligned}(dE_{sc})_x &= \pi r_e \cdot Nd\zeta E_0 f(\omega) e^{-i\omega t} \int_z^\infty \frac{r dr}{r^3} e^{ikr} (2z^2 + \rho^2) \\ &= \pi r_e \cdot Nd\zeta E_0 f(\omega) e^{-i\omega t} \int_z^\infty \frac{r dr}{r^3} e^{ikr} (2r^2 - \rho^2)\end{aligned}$$

簡単のため $2r^2$ に比べて ρ^2 を無視すると

$$\int_z^\infty e^{ikr} dr = \frac{1}{ik} \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{ikr}]_z^R = -\frac{e^{ikz}}{ik} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ikR}}{ik} \quad (21.21)$$

後半の積分は少しインチキして消してしまう。 $\rho = 0$ 附近の寄与は右辺第一項を与える。これより kr にして半波長分程度 ρ が大きくなった部分からの寄与は、そこより更に半波長分程度大きな ρ からの部分と少しづつ相殺していっくだろう。 ρ の大きな方へ相殺していった極限の残りカスが上式右辺第 2 項であると考え。 (注 後続の位相積分を参照)

$$(dE_{sc})_x = i \frac{2\pi}{k} r_e \cdot Nd\zeta \cdot E_0 f(\omega) e^{i(kz - \omega t)} = i A E_x d\zeta \quad (21.22)$$

ここで、 $\frac{2\pi}{k} = \lambda$ であり、略号 A を導入した。

$$A \equiv \lambda r_e N f(\omega) \quad (21.23)$$

$\rho = 0$ 附近の $(\lambda r_e \zeta)$ の微小体積の部分が、 z 軸上の散乱光に寄与している。 $(dE_{sc})_x = iAE_x d\zeta$ であるから有限の厚さの散乱体を考えるならば ζ について積分しなければならない。 $d\zeta$ を厚さ D で置き換えると、厚さ D の散乱体が $z = 0$ 附近にあるとし、

$$E_x(z) = E_x(D=0) \exp i(kz - \omega t) \{1 + iAD\} \sim E_0 \exp i(kz - \omega t + AD) \quad (21.24)$$

散乱の位相が厚さ D に比例して変化する部分がある。

位相の部分を $k(z - D) + (k + A)D - \omega t = k(z - D) + k'D - \omega t$ と書いてみると、

板のない部分 (厚さは $(z - D)$) の波数は k でこれは光速に対応する。

厚さ D の板の部分の波数は $k' = k + A = nk$ (光速は $1/n$) になっている。

但し

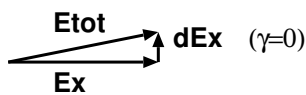
$$n \equiv 1 + \frac{A}{k} = 1 + \frac{2\pi r_e}{k^2} Nf(\omega) = 1 + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \quad (21.25)$$

は”光”の屈折率である。 n は一般に光の振動数に依存する。(分散性)。式 (21.25) の導き方から透明体を通過する入射光の光速は真空中の光速であることが分る。物質中の電子が作る散乱光の電場は入射光の電場から見ると 90° 位相が遅れていて、この電場と入射光 (透過光と言うべきか?) が加わると見掛上、物質中の光速が屈折率倍だけ遅くなった様に見える事を示している。

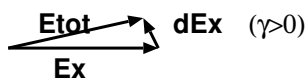
今のところ $\gamma = 0$ の様に話を進めたが、 $\gamma \neq 0$ ならば光が減衰する事は理解できるだろう。原子と原子の間隔が狭くなってくると、輻射の反作用以外にお隣の電子が動くところらの電子も影響をうけて動くだろうから電子が動く事による摩擦熱の発生 (結局のところ入射光の吸収) の機構が発生するだろう。

(21.22) 式を見ると、入射平面波の電場ベクトルに対して電子達の作る電場は虚数単位 i がかかっているので、両者の位相は $\gamma = 0$ の時丁度 90° 異なっている。合成した電場ベクトルは少し遅れるが、ベクトルの長さは $O(d\zeta)$ の範囲では変化がない。

一方 $\gamma > 0$ ならば



$$f(\omega) = \frac{\omega^2 \{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma\}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} \quad (21.26)$$

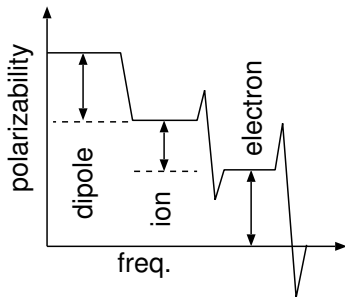


と書くと虚部の係数は必ず正だから、 dE_x は更に i がかかって、必ず E_x のベクトルの長さを減らす向きに加えられる。

逆に $\gamma < 0$ となる工夫をしたらレーザーが出来る。 $f(\omega)$ の実部について言うと、可視部では一般に $\omega < \omega_0$ であって正であるが、これが負になって悪いという理由はない。式 (21.25) を見ると $q^2/2m$ は電場に反応している粒子が電子であっても陽イオンであっても正である。 $\omega_0 > \omega$ では $n > 1$ であり、常識にかなっている。この時、光子としては運動量の大きな青い光の方が、運動量の小さな赤い光よりも大きく屈折する。この一見して力学と反する現象は共鳴 (式では ω_0 の存在) のなせるわざであると了解できる。

ω_0 はここでは単一として扱ったが、実際には物質の内部構造を反映して多数の共鳴があるだろうが、誘電体内で動いているものは大雑把に言って次の3つがある。

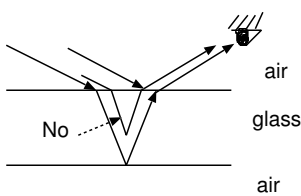
1. 原子核のまわりを運動している電子 (電子分極)
2. イオン結晶では、正・負のイオンが相対的に変位する (イオン分極)
3. 永久双極子モーメントを有する極性分子や基の配向 (配向分極)



例えば台所で活躍している電子レンジは3を利用して
いる。

n の虚部はエネルギーの熱への転換を意味するが、誘電率に換算した時の実部と虚部の比を $\tan \delta \left(= \frac{\text{Im} \epsilon}{\text{Re} \epsilon} \right)$ と書き、誘電正接と呼ばれ、電子工業上大切な物質のパラメータになっている。

位相の積分について 簡単な例から始めよう。

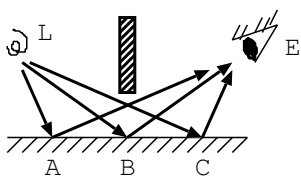


少し厚めの透明なガラスの表面を眺めてみよう。ガラスを透かして見える向うの景色には今は興味がない。ガラスの表面と裏面からの光、即ちこの両面に映った二つの像が目に入る (見えている)。一方、中央部分からの散乱光は全然見えない。だからガラスは透明なのだが……。

散乱強度は一般的には散乱体の数が多い方が強いはずである。又ガラスの表・裏面よりも中央部の方が散乱体の数が多いから、両面が見えるならば、中央部はもっと明るく見えねばならないのにそこからの散乱光が全然見えないのはないか特別な理由があるはずだ。

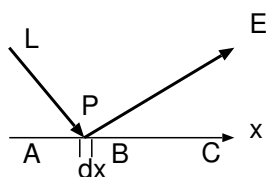
この原因こそが、219 ページの (21.22) 式を導く時に使ったインチキして消してしまう、という事である。散乱光はガラス本体の内部でも作られているのだが、本体部分は光の波長よりも十分に大きいので、半波長程度離れた部分からの散乱光とほぼ完全に相殺してしまい、結局、相殺する相手のいない表面及び裏面附近からの散乱光のみが我々の目に入っているのである。

もう一つ別の例として鏡を考えよう。



ランプLはほぼ一様に鏡面を照らすから、鏡面上の各電子から散乱された光がほぼ同じ強度で我々の眼Eに入ると電磁気学は教えている。即ち、立体角による補正はあるが、図のA, B, C を経由してEにやって来る光の強度は大体等しい!

と電磁気学だけを学んだ学生は主張し、高校で光学を習った学生は Snell の法則を持ち出して反論するだろう。電磁気学の当然の帰結として反射の法則を説明しよう。(21.19) から (21.22) 式への移行に際して一番大切であったのは位相を含む指数関数の積分である。



e^{ikr} は半波長分だけ動くと完全に符号が反転してしまうので、他の距離依存部よりも充分慎重に扱わねばならない。簡単のため 1 次元の問題と考え、1 回散乱する時に変化する位相の部分はどの道を通っても共通だから無視すると、積分の動点を P として

$$\text{散乱強度} \propto \left| \int_A^C dx \exp(ikl(x)) \cdot (\text{立体角の様にゆっくり変化する } x \text{ の関数}) \right|^2 \quad (21.27)$$

$$l(x) \equiv (\overline{LP}(x) + \overline{PE}(x))$$

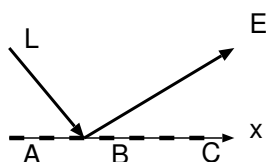
と書ける事が分る。 x を半波長程度動かしても 立体角の x 依存性のようによりゆっくり変化する x の関数はほとんど変化しないが、位相の部分は一般的に大きく変化し、積分へは寄与しない。積分に大きく寄与するのは x を変えても $l(x)$ が変化しない点の近傍だけである。

$$\frac{dl(x)}{dx} = 0 \quad (21.28)$$

を満足する x の位置が即ち反射の法則を満足する点である。この意味で幾何光学は電磁気学の近似になっている。

今の A や C 点からの散乱光もあるのだけれども丁度うまいぐあいに相殺して結果として Snell の法則を満足する点からの寄与だけが残るという説明はたまたま偶然そうだったのだと反論したくなる学生へのダメ押しをしておこう。

図の様に鏡面上に、紙面に垂直に平行線を等間隔にひいて、メッキの部分をはがしてしまおう。



この間隔が $l(x)$ の意味で半波長の位相差に相当する様に選ばれているとすると、各線からの散乱光は全て同位相となり、E で観測される光の強度は大体散乱体の数 N の 2 乗に比例する。このような道具は回折格子として分光学の非常に大切な測定器具になっている事は既知であろう。

回折格子からの回折強度が 格子定数 N の 2 乗に比例している事も知っているだろう。上の鏡の例では Snell の法則を満たす LBE を通って来た光は見えるが、他の経路を通って来た光は見えない。一方、ここに示した図では LAE, LCE という経路を通って来た光も見える。即ち、上の鏡の様な条件では、LAE, LCE を通って来た光は相殺的に干渉しているに違いない。

光源を X 線源、鏡を結晶格子における原子とおきかえると、これは X 線の Bragg 反射になる。Laue が展開した理論は丁度この様な場合を想定していた。

ここまで来たのだから少し (21.27) 式を拡張してフェルマー (Fermat) の原理にも言及しよう。(21.27) 式の積分の内、有意に残るものは、 k が一定ならば、 $l(x)$ が x を変えても変化しない

様な x からの寄与のみである。

$$\delta \int l(x) dx = 0$$

k が場所の関数である時には (21.23) (21.25) への移行の過程での議論から分る様に位相は $n(x)$ を光路に沿って積分したもの ($\times k$) できまっているから、これが光路を少し変えても変化しなければよい。通常書き方では

$$\delta \int n(s) ds = 0 \quad (21.29)$$

これが Fermat の原理であり、一様媒質中は光は直進するという幾何光学の指導原理が導ける。蜃気楼や逃げ水の現象を説明するのにも使はれる。

問 地球の大気には高度に依存した圧力勾配があるから一般には光は大気中を直進しない。日の出、日の入時に地表と成層圏上部とでは太陽を見る角度はどれくらいちがうだろうか？

更にもう1歩、先へ進んでみよう。

(21.27) 式は位相 $kr - \omega t$ を位置の関数と考えた時、始点と終点を与えると、色々可能そうな光路の内

$$\phi = \int (kr - \omega t) ds \quad (21.30)$$

が停留値をとるものが、相加的に干渉して大きな寄与を与えると知っていると言っていると了解できる。被積分関数を少し細工してみよう³

$$kr - \omega t = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et) = \frac{1}{\hbar} \int dt \left(\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - E \right) = \frac{1}{\hbar} \int L dt \quad (21.31)$$

この様にして、Fermat の原理は古典力学の最小作用の原理を言いかえたものである事が分る。この事は既に Hamilton が気付いていたらしい。

(21.31) 式を更にもう一歩進める。

作用

$$S \equiv \int L dt$$

に注目し、これが停留値をとる軌道が古典力学的に許されるものであると考えた訳だが、我々は更にそれが (iS/\hbar) という形で指数関数の肩に乗っている事を知っている。位相が1ラジアンくらい変化しても (21.27) の積分には大きな変化はないだろうと考えてみよう。すると、 $p \cdot r \sim \hbar$, $E \cdot t \sim \hbar$ の範囲では物理量は断定的にきまらないだろうという事が簡単に導ける。

即ち (21.27) 式を認め (実は電場のかわりに確率振巾に置きかえなければならぬが) これから不確定性原理は当然の帰結として導かれる事が分る。量子力学を建設する時には作業仮説 (すなわち原理) として導入されたものが、自然に当然の事として了解されよう。

この様な量が導入される必然性について少し触れておこう。相対論的な Doppler 効果の式 (p106 の問) を作る時に $kr - \omega t$ は Lorentz 変換に対する不変量 (スカラー) である事を指摘しておいた。相対性原理に照らしてみても、これは”物理法則”を記述する資格のある物理量である。又、作用 S は Lorentz 変換に対するスカラー、Lagrangian 密度を4次元空間で体積分したも

³ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 2T$, $E = T + V$ (T と V は運動エネルギーとポテンシャルエネルギー) という式を用いると、被積分関数は Lagrangian になる。

のになっている。

最後にもう 1 つ別の附録をつけておこう

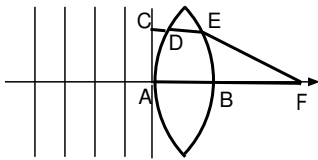
(21.8) 式 Rayleigh 散乱の式から空の青さを説明した。ところがこの小節では半波長以上に広がっている部分からの散乱光の寄与は結局のところ相殺してしまっ無きに等しいと言ってきた。空の大きさは確かに可視光線の半波長よりも充分大きいから全ての散乱光は相殺してしまっ、空は空色には見えないのではないだろうか？ こんなところにも Einstein が顔を出す。答えは大気中の空気分子の密度はあまり大きくなく、且つ結晶の様に 1 ヶ所に止められていないので、あっちへふらふら、こっちへふらふら動いている。1 辺半波長程度の立方体の中に粒子数は $\sim 10^5$ ヶ程度だからこのばらつきの部分が完全には相殺せずに残っている。

この節では、物質の存在により

1. 物質中も真空中と同じ速度で進む入射平面波
2. 物質中の電子の加速度運動に伴う制動輻射 (散乱波) を重ね合わせた波

の 2 つの波があり、1 に対し 2 が 90° の位相遅れで重ね合わせられる事。この結果として、実質的に物質中では、有効光速が、真空中の場合と比較し屈折率分だけ遅くなる事を学んだ。

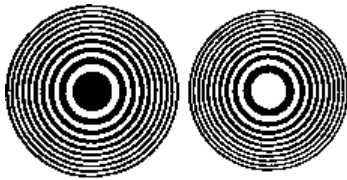
この応用として凸レンズがある。



$$CD + \frac{DE}{n} + EF = \frac{AB}{n} + BF \quad (21.32)$$

が (近似的に) 成立していると、平面波が焦点 F に集光される。

光学者はこの性質をたくみに利用している訳であるが、平行光線が左から入射した時、全ての入射点・全ての波長の可視光線に対して、出来るだけ小さな焦点面積を実現するのは非常に困難な様である。



図の様に半径 P_n が \sqrt{n} に比例する様に同心円を描き、交互に透明・不透明にしたものをフレネルのゾーンプレートと呼ぶ。平行光線が入射すると、 $f = P_n^2/\lambda$ の焦点距離のレンズとして振舞う。工作精度に依るが、近年では X 線用のレンズもこれにより製作可能となっている。

物質の屈折率 n は紫外部から短波長へ移行すると急速に 1 に近づいているので、この様な工夫が存在するのは有難いことだろう。

Fresnel lens と呼ばれるレンズも調べてみると面白いだろう。

(21.4) から (21.5) へ移行する時、 $q\ddot{x} \rightarrow \dot{p}$ としたが全電荷の重心を原点とし、いつも”電子”の電荷と反対符号の電荷を有する”原子核”の存在を仮定している点を忘れてはいけない。電子に対する運動方程式 (21.1) や (21.3) の復元力の原因は当然クーロン力であってここには

電子と核の電荷が直接関係している、又 x の値を想定する時、核と電子の距離を直接思い浮かべてはいけない。平衡点 x_0 があり、 x として採用できるのは、この平衡点のまわりの微小振動の振幅の事である。

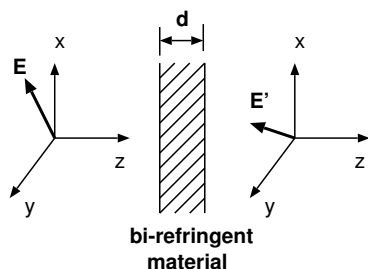
電気分極の存在を認めて、絶縁物中の光速のみを議論するには、Maxwell の方程式で $\rho = i = 0$ として、電束密度 D が波動方程式を満足する事を言えばよい。形式的にはこの方法が楽であるが、上の様なミクロな記述の方が、物理の理解には向いているだろう。D を使うと、E と P をこみにしてしまっているので統一的な判断はしやすいが……

二色性 融けたガラスを広い水銀面上にひろげて作った板ガラスは、面内では異方性は持たないだろう。しかし、柔らかいガラスをローラーで圧延して作った板ガラスはひょっとするとローラーに平行な方向とこれに直交する方向とでは同一面内でも性質は異なるかも知れない。この様にミクロに見た時、光の進行方向(これを z 軸とする)に対し、 x, y 面内で電子の動き易さが異なる場合があるだろう。結晶構造があればこの様な事が起るのは当然だ。この結果、光の電気ベクトルが x 軸を向いている時と、 y 軸を向いている時とで、物質中の”光速”が異なる場合がある。ガラスはアモルファスだから上の様にして作っても極端な事にはならないだろうが、方解石の様な例は知っているだろう。 xy 面内での非対称のもう一つの例として、透過係数が両方向で異なる場合がある。電気石の例は、光が横波である事を示すのに使われたのは有名である

4。

問 x, y 方向に電場ベクトルがある時の屈折率を n_x, n_y とし、 $n_x \neq n_y$ ならば、厚さ d の二色性物質を通過すると、電場ベクトルの位相は一般に変化する。

特に厚さ d が波長の $1/4$ の時は、 $1/4$ 波長板と呼ばれる。この場合、何が特徴かを調べてみよ。



これにより直線偏光を円偏光にすることが可能となる。厚さ d と共にどう位相が変化するかを調べてみよ。

$$\begin{aligned} E_x &= E \cos \varphi \cdot e^{-i\omega t} & E_x' &= ? \\ E_y &= E \sin \varphi \cdot e^{-i\omega t} & E_y' &= ? \end{aligned} \quad (21.33)$$

反射 現象的には反射も光の散乱の一種だから原理的には、光の透過と変わるところはない。強いてあげれば、次の様な点であろうか。

1. 入射波との重ね合わせはマクロ的には必要ない。
2. 2つの異なる経路に対し透過光よりも光路差が長い場合がある。長い光路を走った光と短い光路の光の干渉もありうる。この事実を利用した道具として、導波管の方向性結合器が作られている。気が向いたらどんなものか調べてみよ。

⁴反射光は一般に偏光している

3. 透過は必ずしもそうではなかったが、常識的な意味での反射は協力現象である。即ち物質表面の電荷が同位相で集団運動をしている。一つ一つは単振動の様な運動をして $\sin^2 \alpha$ の様な角度分布を有する双極子輻射から、Snell の法則の様な特定の方向にのみ選択的に反射光が観測されるためにはどのような重ね合わせをしなければならないか考えてみよう！ 非常に多数の粒子の協力現象である事が想像されよう。従って、反射光は偏極するのだ。

マクロに反射体を見た時、協力現象が薄れていくと乱反射に移行する⁵。

4. 常識的な反射には必ず反射面と呼ばれる表面が存在する。反射は深さが半波長程度の反射面に沿ったシート状部分の電荷運動が関係しているだろう。協力関係が、奥行き方向には浅く表面に沿った横方向には二次元的に長く広がっている。反射波の境界条件が設定される。 $(\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0)$

物質的に密 疎又はこの道の場合の反射波の位相に対する境界条件は多分高校で習っただろう。

完全導体面での反射は導波管のところを復習してもらいたい。

添字 1、2 で識別する二つの透明な物質が $y = 0$ という平面で接しているとする。物質 1 の側から平面波が入射し、一部は物質 2 へ透過し、一部は反射される。入射 (透過) 波の波数ベクトルを $\mathbf{k}_1, (\mathbf{k}_2)$ 、反射波のそれを \mathbf{k}_3 とする。 \mathbf{k}_1 と y 軸を含む面を入射面と呼ぶ。図の様に入射、透過、散乱角を α, β, α' とする。成分で表すと、以下の表のようになる。

	\mathbf{k}	\mathbf{E}	光速
	入射波	$k_1 (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$	$\mathbf{E}_1 \quad c_1$
	透過波	$k_2 (\sin \beta, -\cos \beta, 0)$	$\mathbf{E}_2 \quad c_2$
	反射波	$k_3 (\sin \alpha', -\cos \alpha', 0)$	$\mathbf{E}_3 \quad c_3 \quad (21.34)$

電磁場の境界条件を考える。 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 及び $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を $y = 0$ 面の上下を細長い長方形で囲んで面積分すると、Stokes の定理を使い、 \mathbf{E} と \mathbf{H} の境界面での接線成分が連続である事が分かる。理解しにくければ (3.30) の部分をもう一度見直そう。

平面波を

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_i^0 e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}, \quad \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_i^0 e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \quad (21.35)$$

と書いたとすると、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ を満足する必要があるので、

$$\mathbf{E}_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}}_i \quad (21.36)$$

という関係が成立すべきである。但し、 $\hat{\mathbf{k}}$ は、波数ベクトルの向きの単位ベクトルである。

⁵可視光と銅の組み合わせの skin depth は？

この平面波に対する $y = 0$ 面での連続性を要求するわけだが、 x 成分を書き下してみると、

$$E_{1x}^0 e^{i(k_{1x}x + k_{1z}z - \omega_1 t)} + E_{3x}^0 e^{i(k_{3x}x + k_{3z}z - \omega_3 t)} = E_{2x}^0 e^{i(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega_2 t)} \quad (21.37)$$

この式が任意の時刻 t で成立するには、

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega = \frac{k_i}{c_i}, \quad k_1 = k_3 \quad (21.38)$$

が成立する必要がある。光の振動数は、物質通過では変化しない。

指数関数部分は、同位相でなければならず、波数の z 成分は 0 だから、

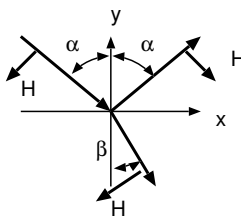
$$\alpha = \alpha' \quad k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (21.39)$$

即ち、通常の意味での屈折の法則が導けた。右辺は、屈折率を用いて表す事が可能である。ある意味で、右辺の事を相対屈折率と定義する人もいる。相対屈折率が 1 でなければ、光の進行方向は必ず曲がる。

もう少し詳しく見る為には、導波管の電磁波が、TE 波と TM 波 に分類出来たように、電場又は磁場が、入斜面にのみ存在するという場合に分けて考える必要がある。習慣的には、電気ベクトルが xy 面に平行の場合を、ドイツ語の平行を意味する単語からとり p(pararell) 偏光、垂直の時には s(senkrecht) 偏光と呼ぶようである。可視光の化学的影響は、主に電気ベクトルによるから、電気ベクトルを標準とすると覚えておこう。この件に関しては後で、Wiener の実験を引用する。

単色光を仮定し、時間依存性 $e^{-i\omega t}$ と初期位相は結果に影響しないので、今後は無視する。

電場ベクトルが xz 平面に平行な時 (case s) xy 面内での E (条件より E_z のみ) の位置依存性を考える。図を見ながら、入射、反射、透過光の電場を以下の様書き下そう。



$$\text{入射光: } E_z(x, y) = A e^{ik_1 \cdot r}$$

$$\text{透過光: } E_z(x, y) = B e^{ik_2 \cdot r}$$

$$\text{反射光: } E_z(x, y) = C e^{ik_3 \cdot r}$$

先に与えた境界条件の一つである、電場の接線成分の $y = 0$ での連続性より、

$$A e^{ik_1 x \sin \alpha} + C e^{ik_1 x \sin \alpha} = B e^{ik_2 x \sin \beta} \quad (21.40)$$

(21.39) より、指数部は相殺して考えてよいから、

$$A + C = B \quad (21.41)$$

これだけでは A, B, C の比は決まらないので、もう 1 つ条件、 H の接線成分の連続性の条件を利用する。 H の絶対値は、 $|B| = |E|/c$ だから、 $|H| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E|$ であり、係数 $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ は入・反射波と透過波で異なるから確かに独立な条件を与える。

(21.36) により H の方向が決まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{入射波の } H_x &= -A \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha e^{ik_1(x \sin \alpha - y \cos \alpha)} \\ \text{反射波の } H_x &= +C \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha e^{ik_1(x \sin \alpha + y \cos \alpha)} \\ \text{透過波の } H_x &= -B \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \beta e^{ik_2(x \sin \beta - y \cos \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (21.42)$$

$y = 0$ での接線 (x) 成分の連続性は

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha e^{ik_1 x \sin \alpha} (-A + C) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \beta e^{ik_2 x \sin \beta} B \quad (21.43)$$

(21.39) 式より指数部は相殺するから、

$$A - C = m_{12} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot B, \quad m_{12} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (21.44)$$

m_{12} は波動インピーダンス $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ の比になっている。屈折率 $n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}$ を用いて書くと

$$m_{12} = n_{12} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (21.45)$$

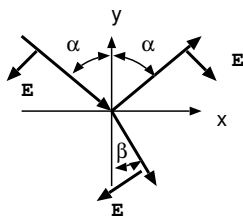
非磁性の物質では大体 $\mu_1 = \mu_2 \cong \mu_0$ であるから、この時には A, B, C の比は角度 α, β のみを用いて書ける。

入射光に対する反射光や透過光の強度比 $(B/A)^2, (C/A)^2$ から透過率や反射率が定義される⁶。

$$\left. \begin{aligned} \text{振幅透過率} \quad \frac{B}{A} \equiv D_s &= \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + m_{12} \cos \beta} \simeq \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \text{振幅反射率} \quad \frac{C}{A} \equiv R_s &= \frac{\cos \alpha - m_{12} \cos \beta}{\cos \alpha + m_{12} \cos \beta} \simeq -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (21.46)$$

振幅反射率の式を見ると、分子が 0 でなければ、 $\cos \alpha = \cos \beta, m_{12} = 1$ 、反射は必ず起こる。

磁気ベクトルが xz 面に平行な時 (case p) H_z の入射、透過、反射波の振幅を A', B', C' とすると、 $y = 0$ での H_z の連続性より、
(21.41) と同様の式



$$A' + C' = B' \quad (21.47)$$

が導かれ、 $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ をかけて対応する電場の振幅に直すと、

$$A + C = m_{12} B \quad (21.48)$$

$y = 0$ での E の接線成分の連続条件からは

$$(A - C) \cos \alpha = B \cos \beta \quad (21.49)$$

⁶energy の保存則

問 (21.48),(21.49)を確認せよ。

$$\left. \begin{array}{l} \text{振幅透過率} \quad D_p = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta + m_{12} \cos \alpha} \\ \text{振幅反射率} \quad R_p = \frac{m_{12} \cos \alpha - \cos \beta}{m_{12} \cos \alpha + \cos \beta} \end{array} \right\} \quad (21.50)$$

(21.46)と比較すると、 m_{12} が $\cos \beta \rightarrow \cos \alpha$ の方にくっついている。

$m_{12} = n_{12} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ が成立する時には、

$$R_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad R_p = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (21.51)$$

この Fresnel による式では、少し変な感じを受ける。即ち、(21.51)で、入射角 α をほぼ0度にしてみる。この時、 x 軸と z 軸の区別はほとんど無くなる。従って、 s 偏光と p 偏光の振幅反射率はほぼ一致しなければならない。ところが(21.51)では符号が異なるので、一致するはずがない！例えば、B. Rossiの光学の教科書では、この矛盾を避けるために入射波と反射波での電場の向きを定義しなおして、偏光の種類に依らず反射波の位相は入射波の位相とは逆になるようにしている。

ここで引用した Fresnel の定義では、 p 偏光の場合、入射・反射波で、電場ベクトルの向きが逆になっている。入射波と反射波を独立した光と考える場合には、これが妥当だが、両者の干渉を考えるには、両者に共通の座標系を取らねばならない。

R_s や R_p が負になると、入射・反射波の電場ベクトルの向きが逆になっている。即ち位相がひっくり返っている。この事は Newton ring の観察で古い時代から想像されていた。

光エネルギーの反射率 R^2 は $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ と近似できる通常の場合には、垂直入射($\alpha = 0$)に対し、 p, s 偏光に依らずに

$$R^2 = \left| \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right|^2 \quad (21.52)$$

通常物質(n_{12} が1~2の範囲)では、上等の鏡は作れない。

$n_{12} > 1$ とすると、 $\alpha > \beta$ であるので、 R_s は常に負だが、 R_p は $\alpha = 0$ から $\pi/2$ へ移る時、最初は正だが、分母が発散する角(偏向角 α_{pol})があるので、

$$\alpha_{pol} + \beta = \pi/2 \quad (21.53)$$

を過ぎると、負の値となり、 -1 に近づく。 p と s の混じった自然光でも α_{pol} の角度では反射光は完全に偏極している⁷。

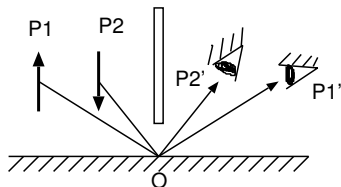
全反射は $\beta = \pi/2$ の時に起る。この時の α を臨界角と呼ぶ。即ち、 $\alpha_{pol} = \sin^{-1} n_{21}$ 。

振幅透過係数は吸収がなければ、 $A + C = B$ 又は $A + C = mB$ より計算できるから、特に議論は不用としておこう。

⁷p成分が混じっていないから

p と s という 2 つの区分に関して Wiener の実験という歴史的に重要な実験があるので調べてみよ。入射光と反射光の干渉を反射面に平行な面内で、反射面からの高さを考慮して考える点にある。E ベクトルが反射面に平行ならば両者は干渉し、B ベクトルが平行ならば、入・反射波の E ベクトルは直交しているので干渉しない、という事を確かめた。これから電磁場がベクトル波で横波で且つ 2 つの自由度がある事を確認した事になる。

子供の頃、次のような疑問を持った事がある。

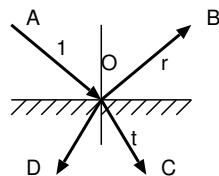


図の様に鏡に対し、物体 ↑ が P_1 と P_2 に逆向きに置いてあり、 P_1' , P_2' から O 点を見ると夫々 P_1 , P_2 の像が見える。即ち点 O 附近には P_1' から見ると P_1 の ↑ が見え、 P_2' から見ると O 附近には P_2 の ↓ 像が写っている。

二人の人間が P_1' , P_2' から同時に O を見ると、点 O 附近にはどんな像が写っているのだろうか？ ハハーン教師は ”重ね合わせ” が言いたいのだなと考えた人は 50 点。実は非線形現象があると言いたかったのだ。物点からの光 (電場と考えていいだろう。この場合 P_1 , P_2 も物点である!)、を全て重ね合わせた電場に O 点附近の電子は駆動されて輻射を放出している。物体 P_1 , P_2 以外にもっと沢山の光源を置いたならば、点 O に入ってくる電場はどんどん強くなってくると考えられるだろうか？ P_1 , P_2 … が全部光源ならば、そういった事態は原理的に考えられよう。光が弱い時には電子の束縛力は調和振動子で近似してもよいだろうが、光が強くなったならば、この束縛力のポテンシャルにおつりの項が加わるだろう。(これも子供のころ太陽光をレンズで集光して新聞紙を焼いた思い出のある人には、電子がもはや元の場所に戻される様な復元力が働かなくなる事には同意できるだろう) 電子は $\sin \omega t$ [又は $\cos \omega t$] で表される単振動 (単色光に対する応答) 以外にこのおつりの項の影響を受けると、 $\sin \omega t$ から (少し) ズれた運動をするが、おつりの項が小さければ、ズレも小さいから Fourier 展開した時、 ω の高調波が少し運動に重ね合わせられると考えてよかるう。

非常に強い光を物質に照射すると (実用上はレーザー光が使われるが) 入射光の 2 倍の振動数の光を入手する可能性がある。

Stokes の関係式 光が異なる屈折率の面で反射される時、位相が π だけ変化する場合がある。Stokes は、時間反転の考えを取り入れてこれを以下の様に示した。



A から O へ 1 の振幅の光が入射し、反射光 OB と屈折光 OC を生じたとする。この時の振幅反射率と透過率を r , t と書く。もしも B から O へ振幅 r の光を入射すると反射光 OA と透過光 OD を生じ、その振幅は反射光 OA が r^2 、透過光 OD は rt であろう。

また C から O へ t の振幅の光を入射すると、反射光 OD と透過光 OA を生ずる。この場合の振幅反射率と透過率を r' , t' とすると、OD は tt' 、OA は tr' の振幅を有する。

B, C から r , t の振幅の光を同時に入射すると、OD なる光は振幅 0 で、OA の光の振幅は

1 であるべきだろう。即ち

$$\begin{aligned} 1 &= tt' + r^2 \\ 0 &= tr' + rt \quad \rightarrow r' = -r \quad (t \neq 0 \text{ ならば}) \end{aligned}$$

AOB と反射と、COD の反射とでは位相が π だけ異なっている。

偏光 偏光は今までも何度か登場しているが、簡単にまとめておこう。偏光とは電磁波の進行方向を指定した時、その光の電場ベクトルが時間的に一定又は規則正しく変化している場合を指す。電場ベクトルが規則性を有すると磁場ベクトルも規則性を有すから、どっちを基準にとってもよいのだが、非相対論的領域では $|\mathbf{E}|/c = |\mathbf{B}|$ の関係にあるから光の性質はほとんど電場ベクトルできまってしまうと考えられる。だから電場ベクトルを採用するのが合理的だ。偏光には次の様な概念がある。

$$\text{偏光} \left\{ \begin{array}{l} \text{部分偏光} \\ \text{完全偏光} \left\{ \begin{array}{l} \text{直線偏光} \\ \text{楕円偏光} \\ \text{円偏光} \left\{ \begin{array}{l} \text{右 (円) 偏光} \\ \text{左 (円) 偏光} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (21.54)$$

簡単な例のみを確認しておこう。光の進行方向を z 軸にとると、電場ベクトル \mathbf{E} の z 成分は考えなくてもよい。磁場ベクトル \mathbf{B} は $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}$ の方向にあり、 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ だから、これも考えなくてもよい。 E_x, E_y のみを考えればよい。まだ x, y 軸はきめていないので (当然右手系を仮定しているが) 適当にとっておく事にする。 x, y 軸方向の単位ベクトルを \hat{e}_x, \hat{e}_y とすると、

$$\mathbf{E} = (a\hat{e}_x + b\hat{e}_y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (21.55)$$

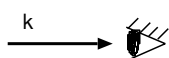
ここで定数 a, b の位相 (複素数だと考えて) が同じならば、この光は直線偏光である。この時は指数関数の中の位相を少し調節すると a, b は実数と考えておける。一般に a と b は独立に変えられるパラメータである。もしも a と b の位相が同相でなければ、 a を実数とし、 $b = |b|e^{i\delta}$ (δ は実数) と書けるが、この時、楕円偏光と呼ばれる。特に $a = |b|$, $|\delta| = \pi/2$ ならば円偏光である。

問 楕円偏光の場合の $|\mathbf{E}|$ が最大値をとる (z, t) に対し、 \mathbf{E} ベクトルの先端の xy 平面内での振舞いを調べてみよ。

直線偏光は、光源の電子が直線運動している際の制動輻射として観測される。だから TV のアンテナは屋根に固定しておいてもよいのだ!

もう一度、輻射場に対する電場の式を見直してみよ。

左・右の偏光の区別



図の様に光を受ける様に見て、 \mathbf{E} ベクトルの先端が時計方向に回っていたら右偏光と呼ぶ。

例えば

$$E_x = E \cos(kz - \omega t), \quad E_y = E \cos(kz - \omega t - \pi/2) \quad (21.56)$$

ならば右偏光 ($\delta = \pi/2$) とする。一般の楕円偏光を、振幅 a, b と位相差 δ で表すと、 a, b と δ とは次元が異なる。そこで同じ次元量で表すために、Stokes は次の I, P_1, P_2, P_3 を用いた。

$$I = a^2 + b^2, \quad P_1 = a^2 - b^2, \quad P_2 = 2ab \cos \delta, \quad P_3 = 2ab \sin \delta \quad (21.57)$$

完全偏光の場合、上の 4 つの内 3 つが独立である。(但し、 a, b は E_x, E_y の振幅であり、実数とする。)

Poincaré は半径 \sqrt{I} の球面上の点として、完全偏光を表している。

\mathbf{E} を記述するのに \hat{e}_x, \hat{e}_y を単位ベクトルとするかわりに

$$\mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y) \quad (21.58)$$

を単位ベクトルだと考えてもよい。

問 Laplace eq. の解 (14.63) の内、原点で正則の方の解で $l = 1, m = \pm 1$ とおいたものをあらわに書き下し、上の \hat{e}_{\pm} と比較してみよ。 Y_{lm} が角運動量の大きさ l 、その z 成分 m を持つ場と表すことを想起すると、 \hat{e}_{\pm} が $l = 1, m = \pm 1$ を持つ波の基本波である事が分るだろう。この振幅は任意にとれるから、“光子”はボーズ粒子である事も想像されよう。又 $l = 0$ に対し、 $m = 0$ も原理的には存在するはずなのに、 $l = 1, m = 0$ の振幅はいつも 0 である (こんな解は存在しない)。これも光子の特徴のきわだった点である。

角運動量の運動量方向成分を helicity と呼ぶ。 \hat{e}_+ に対する helicity は +1 である。

部分偏光 完全には無秩序でない様な物質の表面からの反射光は一般に部分偏光である。偏光に敏感な“目”を持っていると、上空から水を発見するのは易しいだろうし、太陽が見えなくても、雲からの散乱光の偏りを知って (勿論光の方向を) 太陽の現在位置を知ることもできるだろう。

太陽表面の磁場分布を知る一つの手がかりは偏光の程度を調べる事である。

部分偏光は、無偏光の光と完全偏光の光が混じり合ったものと考えられる。Stokes parameter で表すと、 I, P_1, P_2, P_3 の全てが独立になる。即ち 4 つの parameter(実数) がなければ部分偏光は記述できない。4 つの独立量を記述する手段の一つとして、Hamilton の 4 元数を利用する事を考えてもよいし、2 行 2 列の行列を考えてもよい。

完全偏光に対し、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (21.59)$$

と書いたのに対し、

$$\rho = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^2 & abe^{-i\delta} \\ abe^{i\delta} & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (21.60)$$

と書くと、

$$\left. \begin{aligned} I &= \rho_{11} + \rho_{22} \quad (= a^2 + b^2) \\ P_1 &= \rho_{11} - \rho_{22} \quad (= a^2 - b^2) \\ P_2 &= \rho_{12} + \rho_{21} \quad (= 2ab \cos \delta) \\ P_3 &= i(\rho_{12} - \rho_{21}) \quad (= 2ab \sin \delta) \end{aligned} \right\} \quad \text{又は} \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(I + P_1) \\ \rho_{12} &= \frac{1}{2}(I - P_1) \\ \rho_{21} &= \frac{1}{2}(P_2 - iP_3) \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(P_2 + iP_3) \end{aligned} \right. \quad (21.61)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + P_1 & P_2 - iP_3 \\ P_2 + iP_3 & I - P_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + P_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + P_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (21.62)$$

最右辺が Hamilton の 4 元数の一つの表現を与え、物理屋は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (21.63)$$

と書き、Pauli の spin 行列と呼ぶ。 ρ を密度行列と呼ぶ。

完全偏光の場合は a, b, δ は時間に依存しなかったが、部分偏光の場合はこれ等を $2\pi/\omega$ よりも充分長い時間での平均値と思えばよい。 $P_1 \rightarrow P_z, P_2 \rightarrow P_x, P_3 \rightarrow P_y$ と書くと

$$\rho = \frac{1}{2} \{ I \times \mathbf{1} + P_x \sigma_x + P_y \sigma_y + P_z \sigma_z \} = \frac{1}{2} \{ I \times \mathbf{1} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \} \quad (21.64)$$

は強度 I 、偏向の程度がベクトル (P_x, P_y, P_z) で与えられるベクトルの様な形をしている。

第22章 多重極展開

電磁波を記述する波動方程式は線形であるから、重ね合わせの原理を満足する。又、D'Alembertian は Lorentz 変換に対してスカラーだから、座標系の回転にたいしても不変である。これらの事から波数 $k = |\mathbf{k}|$ を定めた解はその進行方向の不定さがあり、任意の進行方向の解を重ね合わせたものも波動方程式の解である。即ち、任意の波動方程式

$$\square \mathbf{A} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (22.1)$$

の解は \mathbf{A} が $e^{-i\omega t}$ という時間依存性を有する時、

$$\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin \beta d\beta \mathbf{f}(\alpha, \beta) e^{-i\omega t} \quad (22.2)$$

と書ける。但し、 $k^2 = \omega^2/c^2$ が成立しているとする。ある見方をすれば、(22.2) は解 \mathbf{A} を 3次元の内の2次元で Fourier 展開した事になっている。(22.2) で、 $\hbar\omega$ はエネルギー、 $\hbar\mathbf{k}$ は運動量という意味を持つから、エネルギーと運動量の大きさを対角化する表示での \mathbf{A} の展開とも言える。‘光源’ が運動量を良い量子数として持つならば、このような表現は有効であろう。一方、対象が原子程度のミクロな領域に限定され、クーロン力の様な中心力が非常に大切になってくると、もっと良い表現があり得る。即ち、(軌道)角運動量を対角化する基底で場を展開する事を考えよう。

角運動量の復習 軌道角運動量 $L\hbar$ は位置 \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} の積として定義される。

$$\mathbf{L}\hbar = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (22.3)$$

角運動量の単位として、 $\hbar(\equiv h/2\pi)$ 但し h はプランク定数) をとり、今後はこの \hbar を省略する場合が多い。不確定性を表現する手段として、 \mathbf{r} と \mathbf{p} の各成分に対して次の交換関係を要求する。

$$[x, p_x] \equiv x p_x - p_x x = i\hbar, \quad y, z \text{ 成分も同様} \quad (22.4)$$

異なる成分に対しては可換。即ち、 $[x, p_y] = 0$ 等。この結果、 \mathbf{L} の各成分に対する交換関係が導ける。

$$[L_x, L_y] = i L_z, \quad \text{等} \quad (22.5)$$

この交換関係は、以下の様に書かれる場合も多い。

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i \mathbf{L} \quad (22.6)$$

軌道角運動量演算子は、当然の事ながらエルミート演算子である。 $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ で定義すると、 L^2 は \mathbf{L} の各成分と可換である。

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0 \quad (22.7)$$

これから、 L^2 と L のどれかの成分 (習慣的に z 成分をとる) との同時固有関数 $|l, m\rangle$ を考える事が出来る。この同時固有関数は、次の式を満たす事が、以下の様にして確認出来る。

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle, \quad L_z |l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad (22.8)$$

この固有値を確認する準備として、次の磁気量子数に対する昇降演算子を作る。

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm i L_y \quad (22.9)$$

L_{\pm} と L_z の交換関係は、(22.5) より

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (22.10)$$

即ち、

$$L_z L_{\pm} |l, m\rangle = (m \pm 1) L_{\pm} |l, m\rangle \quad (22.11)$$

この式は、状態 $L_{\pm} |l, m\rangle$ は L_z の固有状態であり、その固有値は $|l, m\rangle$ の固有値 m よりも 1 だけ増減している事を示している。但し、規格化は、少し後 (22.15) で行う。これより、 L_{\pm} は L_z の固有値を ± 1 だけ増減する演算子、磁気量子数の昇降演算子、である。

L^2 の固有値を固定した時、 L_z^2 の固有値は L^2 の固有値 (今のところこれを仮に Λ と書いておこう) を越えてはいけなから、実数である L_z の固有値には、上限 m_{max} と下限 m_{min} がある。そこで、 L_z の最大固有値を $l = (m_{max})$ と書く。

$|l, m_{max}\rangle$ ($|l, m_{min}\rangle$) に何回も L_- , (L_+) を演算し、1 単位ずつ L_z の固有値を下 (上) げて行くと、下限が存在するから、あるところで L_z の最小 (大) 固有値 m_{min} (m_{max}) が登場しそれ以上の演算が継続できなくならねばならない。

$$L_+ |\Lambda, m_{max} = l\rangle = 0, \quad L_- |\Lambda, m_{min}\rangle = 0 \quad (22.12)$$

昇降演算子間に次の恒等式がある。

$$L_{\pm} L_{\mp} = L^2 - L_z(L_z \mp 1) \quad (22.13)$$

(22.12) の前半 (後半) に L_- , (L_+) を演算し、その後 L_+ , L_- を左から演算すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} L_- L_+ |\Lambda, m_{max} = l\rangle &= \Lambda - m_{max}(m_{max} + 1) = \Lambda - l(l + 1) = 0 \\ L_+ L_- |\Lambda, m_{min}\rangle &= \Lambda - m_{min}(m_{min} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (22.14)$$

これで、前半から、 $\Lambda = l(l + 1)$ が、この結果を用いると後半から $m_{min} = -l$ が導ける。これで、 $|\Lambda, m\rangle$ と書くかわりに、 $|l, m\rangle$ と書く理由が分かる。

式 (22.13) の行列要素を評価し、次の関係式をえる。

$$L_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (22.15)$$

但し、この式では行列要素の平方根を取る時に、正の符号を採用した。従って、相隣る磁気量子数を持つ波動関数の間に位相関係を要求した事になる。

具体的な表現
結果だけを書くと、

具体的な波動関数を作るには、極座標 (r, θ, ψ) を利用するのがよい。結

$$L_{\pm} = e^{\pm i\psi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \quad (22.16)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (22.17)$$

$$L^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right\} \quad (22.18)$$

L^2 と L_z の同時固有関数 $Y_{l,m}(\theta, \psi)$ は、次式に依り与えられる。

$$Y_{l,m}(\theta, \psi) = (-)^{(m+|m|)/2} \left\{ \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right\}^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\psi} \quad (22.19)$$

この式は、(14.57) と (14.58) で登場した。簡単に (22.19) の導き方を記しておこう。(22.17) より、方位角依存性の部分は自明であろう。この知識を仮定し、(22.16) を、磁気量子数が最大の状態に対して作用させると、 $Y_{l,l}(\theta, \psi)$ に対する 1 階の微分方程式を得る。この方程式を解き、 $Y_{l,l}(\theta, \psi) \propto \sin^l \theta e^{il\psi}$ を得、この波動関数を規格化する。位相は習慣に従い、 $(-)^l$ とする。後は、ここで得た $Y_{l,l}(\theta, \psi)$ に L_- を任意回演算する。

磁気量子数に関する制限について。

方位角 ψ 方向波動関数に対し、周期 2π の周期性 (波動関数の一価性と言い替えてもよい) を要求すると、 m は整数しか許されない事に注意しよう。

座標系の回転と軌道角運動量 スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ が与えられたとする。座標系を回転すると、場の形は変わらないが、これを表現する関数形は変化する。座標系を回転する行列を a とすると、

$$\mathbf{r}' = a \mathbf{r} \quad (22.20)$$

例えば、 z 軸を回転軸とし、角度 θ だけ回転すると、

$$a = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22.21)$$

z 軸を回転軸とする回転角を ϵ とする無限小回転に対して、スカラー場の変化を調べる。新しい関数はスカラー場だから、元の関数を使って表現出来る。

$$\phi(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y \right) + O(\epsilon^2) \simeq \phi(\mathbf{r}) + \epsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi(\mathbf{r}) \quad (22.22)$$

ここで、 $\delta x = \epsilon y$, $\delta y = -\epsilon x$ である事は、(22.21) で $\theta = \epsilon$ と置き、(22.20) に代入し x, y の増分を評価すればよい。他方、 $L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ だから、

$$\phi(\mathbf{r}') \simeq (1 - i\epsilon L_z) \phi(\mathbf{r}) \quad (22.23)$$

有限角 α の回転に対しては、 $\epsilon = \alpha/N$, ($N \rightarrow \infty$) とすると、

$$\phi(\mathbf{r}') = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\alpha L_z}{N}\right)^N \phi(\mathbf{r}) = e^{-i\alpha L_z} \phi(\mathbf{r}) \quad (22.24)$$

この式の意味で、座標系の回転と軌道角運動量は密接に関係している。単位ベクトル \hat{n} を回転軸とする角度 α の回転に対しては、(22.24) 右辺の $e^{-i\alpha L_z}$ を $e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \mathbf{L}}$ で置き換えればよい。

非常に簡単な例として、 L_z の固有関数 $\phi_m(\psi) = e^{im\psi}/\sqrt{2\pi}$ を取り挙げる。座標系を z 軸の周りに α だけ回転すると、方位角は $\psi' = \psi - \alpha$ になるが、

$$\phi_m(\psi') = \phi_m(\psi - \alpha) = e^{-i\alpha L_z} \phi_m(\psi) \quad (22.25)$$

が成立する事は、自明であろう。

座標系の回転とベクトル場 回転 a に依り位置ベクトルは $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = a\mathbf{r}$ に移り、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{A}'(\mathbf{r}')$ に移る。即ち

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = a \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \} = a\mathbf{A}(a^{-1}\mathbf{r}') \quad (22.26)$$

(22.21) と (22.23) では右辺の括弧の中を $a\mathbf{r}$ で書いたから、こちらにもそれに合わせておくと

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') \simeq a^{-1}\mathbf{A}(a\mathbf{r}) \quad (22.27)$$

この式は、無限小回転に対しては成立する。 z 軸周りの ϵ の回転に対して、詳しく書くと、

$$\begin{aligned} A'_{x'} &= A_x(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) - \epsilon A_y(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) \\ A'_{y'} &= \epsilon A_x(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) + A_y(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) \\ A'_{z'} &= A_z(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) \end{aligned} \quad (22.28)$$

この式の全ての $O(\epsilon)$ 迄の項を書き出すと、

$$\begin{aligned} A'_{x'} &= (1 - i\epsilon L_z)A_x(\mathbf{r}) - \epsilon A_y(\mathbf{r}) = A_x - i\epsilon(L_z + S_z)\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ A'_{y'} &= \epsilon A_x + A_y - i\epsilon(L_z + S_z)\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ A'_{z'} &= A_z - i\epsilon(L_z + S_z)\mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (22.29)$$

ここで、次の行列を定義した。

$$S_z \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22.30)$$

同様に x, y 軸の無限小回転に対しては次式が定義される。

$$S_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22.31)$$

ベクトル場は座標変数だけでなくベクトルの成分も入り混じる為に、行列 S_x, S_y, S_z が登場した。ここで登場したベクトル場の‘スピン’ S の性質を少し調べておこう。

$$S_z \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iA_y \\ iA_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22.32)$$

これから、次の式が任意のベクトル A に対して成り立つ。

$$S_z^2 \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_z(S_z^2 - 1) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = 0 \quad (22.33)$$

従って、

$$S_z(S_z^2 - 1) = 0 \quad (22.34)$$

即ち、 S_z の固有値は $0, \pm 1$ である。一方、

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22.35)$$

即ち、 S^2 の固有値は 2 である。これらからベクトル場のスピンは 1 ($S = 1, S(S + 1) = 2$) である事がわかる。 S_z の固有値 $1, 0, -1$ に対応する固有ベクトルを ξ_1, ξ_0, ξ_{-1} と書くと、これらは次式で与えられる。

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y), \quad \xi_0 = \hat{e}_z, \quad \xi_{-1} = +\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) \quad (22.36)$$

磁気量子数の昇降演算子に対しては、次式が成立する。

$$(S_x \pm iS_y)\xi_\mu = \sqrt{2 - \mu(\mu \pm 1)}\xi_{\mu \pm 1} \quad (22.37)$$

問 S_x, S_y, S_z の交換関係も確認せよ。

これらから、 S は角運動量の資格を有する事が分かる。(22.29) では、 L_z と S_z とが和の形で、対等に入っているのです、同等の物理量であるのは当然である。ある意味で、“当然”をこの様な形で確認した事になる。

“光” は進行方向と波数を与えると、電磁場ベクトル E, B で与えられる。但し、 E と B とは独立ではなく、 E を決めると B は決まってしまう。この意味で、光はベクトル場である。即ち、光子のスピンは 1 (\hbar) であるという。(22.29) で、角運動量の部分は $L_z + S_z$ であり、 S_z 部分がスピン 1 に対応している。 L_z の部分もあるから、“光” の持つ角運動量は 1 以上も許される。この件に関し、光子の角運動量は 1 以上であるという事を示す問題を先に光子の質量のところを出しておいたが、何人が解いただろうか？

例えば水素原子の $2s$ 状態から $1s$ 状態への遷移は禁止されているという話を聞いた事があるだろう。系の初期状態の軌道角運動量は 0 であるのに、終状態では ($1s$ 状態) + (光子) となり、光子が最低 1 単位の角運動量を有すると、角運動量の保存則を満足しないから、このような遷移が禁止されるのである。

軌道角運動量 L と固有スピン S の和が登場したので、新しい記号 J を作ろう。

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (22.38)$$

この J は、全角運動量と呼ばれる場合が多い。

問 全角運動量の成分間の交換関係は、(22.5)、(22.8) と同じ形をしている事を確認せよ。これにより、 J を全‘角運動量’と呼ぶ事が正当化される。

この記号を用いると、座標系を z 軸の周りに ϵ だけ無限小回転すると、ベクトル場 \mathbf{A} は以下の様に変化する。

$$\mathbf{A}' = (1 - i\epsilon J_z)\mathbf{A} \quad (22.39)$$

一般に、単位ベクトル \hat{n} で表される任意の軸の周りの角度 α の回転に対しては、

$$\mathbf{A}' = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\mathbf{J}}\mathbf{A} \quad (22.40)$$

次に、全角運動量 J に対し、 J^2 と J_z の同時固有関数としての、ベクトル球面調和関数 $\mathbf{T}_{l,j,m}$ を次式で定義する。

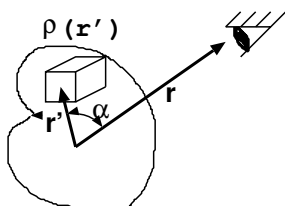
$$\mathbf{T}_{l,j,m} \equiv \sum_{\mu} (l m - \mu \ 1 \ \mu | j m) Y_{l m - \mu}(\theta, \psi) \boldsymbol{\xi}_{\mu} \quad (22.41)$$

ここで、 $(l m - \mu \ 1 \ \mu | j m)$ は Clebsch-Gordan 係数である。特に、次の関係が成立する。

$$\mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \psi) = \sqrt{l(l+1)} \mathbf{T}_{l,j,m} \quad (22.42)$$

この式は、左辺 $\mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \psi)$ に対する J_z の固有値が m 、 J^2 の固有値が $j(j+1)$ である事及びノルムが $l(l+1)$ であることから導ける。式 (22.42) の左辺で、 $\mathbf{L}(=\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ は \mathbf{r} に直交しているから、(即ち \mathbf{r} 成分は持たないから) 横波を表すのに都合が良い。

静的なポテンシャルと多重極能率 空間的にある限られた領域に、静的な電荷密度 $\rho(\mathbf{r}')$ が与えられた時、点 \mathbf{r} での potential $\phi(\mathbf{r})$ を問題としよう。



但し、全電荷の重心を原点ととっておくと便利な場合が多い。 $\rho(\mathbf{r}')$ が有限の領域は、観測点よりも内側にしかなく、無限遠点まで実際の境界は広がっているので、境界からの寄与は無いと仮定すると potential は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (22.43)$$

ところで、被積分関数の $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ だとすると、次の展開が可能である。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha) \quad (22.44)$$

ここで、 α は \mathbf{r}' と \mathbf{r} のなす角度である。この両位置ベクトルは、ある座標軸から見て $\mathbf{r}' = (r', \theta', \psi')$ 及び $\mathbf{r} = (r, \theta, \psi)$ と極座標表現出来たとすると、次の式が成立する。

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \psi') Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (22.45)$$

(22.44) と (22.45) を (22.43) に代入すると、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \frac{1}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Q_{lm} Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (22.46)$$

ここで、 (l, m) 次の多重極能率は次式で定義される。

$$Q_{lm} \equiv \int d\mathbf{r}' r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \psi') \quad (22.47)$$

特に、 $l = 1(2)$ の場合は、双(4重)極能率と呼ばれる。

全電荷 $\int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \neq 0$ ならば、原点を適当にとると、双極子能率は 0 にできる。

potential は実数だから、 $Q_{lm}^* = (-)^m Q_{lm}$ が導ける。従って、 $m \geq 0$ だけを考えておけば良い。

電荷分布以外に、磁気能率の分布に関しても同様の議論が可能である。湧き口の角運動量分解という意味を持たせる事が出来る。

極座標での Helmholtz 方程式 次への準備の為に、極座標でのスカラー及びベクトル Helmholtz 方程式に関する知識を仕入れておこう。

以下の方程式を極座標表現し、変数分離を行う。

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (22.48)$$

(θ, ψ) 依存部分からは、球面調和関数が出て来ることは、Laplace eq. の場合と同じである。動径方向の方程式は、

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left\{ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R = 0 \quad (22.49)$$

この方程式は $\rho = kr$ という無次元の変数を導入し、 $R(r) = u(\rho)/\sqrt{\rho}$ と書いて $u(\rho)$ の方程式に書き換えると、

$$\rho^{-1/2} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left\{ 1 - \frac{(l+1/2)^2}{\rho^2} \right\} \right] u(\rho) = 0 \quad (22.50)$$

(14.75) を見直すと、 u は $(l+1/2)$ 次の Bessel 関数である事が分かる。半奇数次の Bessel 関数は有用であるので、次の形の球 Bessel (Neuman) 関数として引用される場合が多い。

$$j_l(\rho) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{l+1/2}(\rho), \quad n_l(\rho) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{l+1/2}(\rho) \quad (22.51)$$

この式の後半が球 Neuman である。

これらは、 $e^{-i\omega t}$ を掛けても r 又は ρ と t が分離しているので、定在波を表す。 $\rho \rightarrow \infty$ に対する漸近形は、

$$j_l(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \cos(\rho - (l+1)\pi/2), \quad n_l(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \sin(\rho - (l+1)\pi/2) \quad (22.52)$$

この漸近形は $(l+1) \rightarrow l$, $\cos \leftrightarrow \sin$ と入れ換えてある場合もある。potential 散乱の問題では、 $l\pi/2$ は遠心力 $l(l+1)/r^2$ による位相のずれと解釈される。

進行波を表す球 Hankel 関数は $h_l^{(1)}(\rho)$, $h_l^{(2)}(\rho)$ は次式で定義される。

$$h_l^{(1)}(\rho) \equiv j_l(\rho) + i n_l(\rho), \quad h_l^{(2)}(\rho) \equiv j_l(\rho) - i n_l(\rho) \quad (22.53)$$

(22.52) を用い、 $e^{-i\omega t}$ を掛けると、第 1 種球 Hankel 関数 $h_l^{(1)}(\rho)$ は、外向きの球面波を与える。(22.48) の極座標解は次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{lm} \{a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)\} Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (22.54)$$

展開係数 a_{lm} , b_{lm} は境界条件から決定される。進行波解を与えたければ、球 Bessel, Neuman 関数のかわりに、球 Hankel 関数を利用する。

(22.54) の解は、原点で正則な解 $j_l(kr)$ と正則でない解 $n_l(kr)$ の重ね合わせで書かれているが、デカルト座標では $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ と書けるから、原点で正則な解のみが現れる。

次に、ベクトル Helmholtz 方程式を取り上げよう。

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (22.55)$$

この方程式の解は、スカラー Helmholtz の方程式 (22.48) の解を 3 個並べておけば良さそうだが、座標系の回転に対して 3 個の成分がベクトルとしてお互いに混じり合いつつ、(22.55) を満足する様に成分間の調節をする必要がある。先ず、蛇足かも知れないが、 $(\nabla^2 + k^2)$ 演算子は座標系の回転に対してスカラーとして変換する事を思い出しておこう。これは相対論のところで指摘した事である。さて、スカラー Helmholtz の方程式の解 $\phi(\mathbf{r})$ を用いて、ベクトル Helmholtz 方程式の解を作り上げる、巧妙な方法を紹介しよう。

\mathbf{a} を定ベクトルとしよう。次式で定義されるベクトル \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} はベクトル Helmholtz 方程式の解である。

$$\mathbf{X} \equiv \nabla\phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{Y} \equiv \nabla \times \phi(\mathbf{r}) \mathbf{a}, \quad \mathbf{Z} \equiv \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{Y} \quad (22.56)$$

$\phi(\mathbf{r})$ がスカラー関数だから、 $\nabla\phi(\mathbf{r})$ がベクトルである事は自明である。又、 $(\nabla^2 + k^2)$ 演算子と ∇ が交換可能も明らかだろう。だから、(22.48) が成立するならば、 \mathbf{X} が (22.55) の解である。

\mathbf{Y} が解である事は、

$$\nabla \times (\phi(\mathbf{r}) \mathbf{a}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{a} + \phi \nabla \times \mathbf{a} \quad (22.57)$$

に於いて、 \mathbf{a} が定ベクトルだから、 $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ が成立する。後の導き方は \mathbf{X} と同様である。逆に $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ であるならば、定ベクトルに拘る必要もない。

\mathbf{Z} に付いて： $(\nabla^2 + k^2)$ 演算子と $\nabla \times$ が交換可能だから \mathbf{Y} が解ならば、 \mathbf{Z} も当然、解になる。

ところで、 $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{Z})/k$ が成立するから、 \mathbf{Y} は \mathbf{X} や \mathbf{Z} とは独立である。当然の事であるが、 \mathbf{a} は 0 ベクトルではないとしている。

又、 $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$ が導けるから、 \mathbf{X} と \mathbf{Y} とは直交する。

\mathbf{X} の回転は 0 であるが、発散は一般に 0 ではない。

$$\nabla \times \mathbf{X} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{X} = \nabla^2 \phi = -k^2 \phi \neq 0 \quad (22.58)$$

\mathbf{Y} と \mathbf{Z} の発散は 0 である。 $\nabla \cdot \mathbf{Y} = \nabla \cdot \mathbf{Z} = 0$ 。

問 \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} に関するこれらの事実を確認せよ。

湧き口が無い時、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるが、これは、上に与えた解 \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} に良く似ている。特に $\phi(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ で与えられる平面波ならば、 \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} は次式で与えられる。

$$\mathbf{X} = i \mathbf{k} \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{a} = i \mathbf{k} \times \mathbf{a} \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{k} \phi(\mathbf{r})/k \quad (22.59)$$

これらの解は、平面波の波面、電場及び磁場に対応しているのが見て取れよう。

ベクトル球面調和関数 (22.41) と似ている様な似ていないような …。

(22.56) の表式の有用性は不明だが、任意の座標系で成立し、特に (22.59) を見ると、デカルト座標系では有効であるようだが、極座標では役に立つのだろうか？

\mathbf{a} のかわりに、定ベクトルではないが、 \mathbf{r} をとってみよう。(22.56) で、 \mathbf{X} が $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{X}(\mathbf{r}) = 0$ を満足する事は自明である。 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ だから、 \mathbf{Y} もベクトル Helmholtz の解である。そうすると、前ページの議論により、 \mathbf{Z} もベクトル Helmholtz の解である。 $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{r}$ としたものは、ベクトル Helmholtz の解である。特に、 \mathbf{Y} に付いて、更に一言。

$$\mathbf{Y} = \nabla \times (\phi \mathbf{r}) = \nabla \phi \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \nabla \phi = -i \mathbf{L} \phi(\mathbf{r}) \quad (22.60)$$

即ち、 \mathbf{Y} は、横波であり スカラー Helmholtz の解に軌道角運動量演算子を作用させると、横波のベクトル Helmholtz 方程式の解が作られる。(22.42) とかなり似て来た。(22.42) では、角度変数だけの関数に作用していたが、今度は \mathbf{r} にも作用している。この解が、輻射場の多重極展開で主役を演ずる。軌道角運動量演算子 \mathbf{L} は、軌道角運動量の値を変えないので、 $\mathbf{L} Y_{lm}$ は角運動量の固有状態である。

輻射場の多重極展開 輻射場の湧き口が $e^{-i\omega t}$ という時間依存性を有する振動状態にある時、又は $e^{-i\omega t}$ で Fourier 展開できる様な運動状態にある時の一つの ω に対応する成分についてだけ考える。

場の湧き口として先ず電荷の運動を考えるだろう。即ち電荷密度と電流密度が $e^{-i\omega t}$ の様に振動しているとする。ところで非相対論的には小さな寄与しか一般には持たないが、磁気能率が時間的に振動しても輻射は放出される。時間を反転させて考えると、磁気能率が輻射を吸収する過程は ESR や NMR、TV のゴースト防止や "見えない" 戦闘機に利用されている。即ち単位体積当りの磁気能率 M も時間依存性を有する湧き口の効果として、磁束密度 B から分離しておくのがよい。

更にもう一つ、陽子や電子の様な電荷粒子は一般に電気的雙極子能率を持たない(又は 0 という値を持つ)。中性子粒子の代表である "中性子" が電気的雙極子能率をどの程度有するかは、実は対称性に関して重大な関心が払われているが、今のところ 0 である。素過程として固有電気的雙極子能率の存在は無視しておく。

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{i}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (22.61)$$

Maxwell の方程式を書き下し、 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ とおきかえると

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} = i\omega (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{i} - i\epsilon_0 \omega \mathbf{E} \end{aligned}$$

連続方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{i} - i\omega \rho = 0 \quad (22.62)$$

(22.62) より ρ は $\nabla \cdot \mathbf{i}$ で代用可だから、しばらく登場しなくてもよい。E と H の方程式は

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \left(\mathbf{i} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad (22.63)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{i} + \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{M} \quad (22.64)$$

湧き口としては \mathbf{i} と $(\nabla \times \mathbf{M}/\mu_0)$ 及び \mathbf{M} と $(\nabla \times \mathbf{i})/\epsilon_0 \omega^2$ は等価な形で登場している。

先ず、湧き口がない自由空間での多重極展開を考える。

注 (22.63) 右辺には虚数単位 i がくっついているが、(22.64) 右辺にはこんなものは登場していない。

自由空間での場の多重極展開 デカルト座標での平面波は TM 波と TE 波、又は p 偏光と s 偏光の区別を偏極に応じて区別した。同じ事情が極座標でも存在する。電気工学者や光学者と異なり、原子核物理学者はこれを湧き口の性質に注目して電気的、磁氣的という呼び名で区別した。

$\mathbf{i} = \mathbf{M} = 0$ を仮定すると、(22.63)、(22.64) は、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ だから、ベクトル Helmholtz 方程式になる。(22.56) で $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{r}$ と書いた内、 Y 、 Z として与えられるものが、 \mathbf{E} や \mathbf{H} を与える。

\mathbf{E} を与えた時 \mathbf{H} は $\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}$ で、 \mathbf{H} を与えた時 \mathbf{E} は $\mathbf{E} = \frac{1}{i\epsilon_0\omega} \nabla \times \mathbf{H}$ で与えられる。 \mathbf{E} 又は \mathbf{H} として (22.56) の Y 型の解を採用すると

$$\begin{aligned} \text{電氣的多重極場：} \quad \mathbf{E} &= \frac{i}{\epsilon_0\omega} \nabla \times \mathbf{H} \\ \mathbf{H} &= R_l(r) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \phi) / \sqrt{l(l+1)} = R_l(r) \mathbf{T}_{l,m} \end{aligned} \quad (22.65)$$

$$\begin{aligned} \text{磁氣的多重極場：} \quad \mathbf{E} &= R_l(r) \mathbf{T}_{l,m} \\ \mathbf{H} &= -\frac{i}{\mu_0\omega} \nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (22.66)$$

当然 (22.65) と (22.66) で $R_l(r)$ は l 次の球 Bessel, 球 Neuman 又は球 Hankel 関数のどれか又はこの一次結合である。平面波の場合には、 \mathbf{E} も \mathbf{H} も同時に横波であったが、球面波の場合には一方は横波 ($R_l(r) \mathbf{L}Y_{lm}$ の方) であるが、他方は縦波の成分も含む事が、次の様にして示される。

$$\nabla \times \{R_l(r) \mathbf{L}Y_{lm}\} = \{\nabla R_l(r)\} \times (\mathbf{L}Y_{lm}) + R_l(r) \nabla \times (\mathbf{L}Y_{lm}) \quad (22.67)$$

右辺第一項は、 $\nabla R_l(r)$ は \mathbf{r} 方向を向いているから、横波である。 $(\mathbf{r}$ と直交する) 右辺第二項は、 \mathbf{r} との内積をとり縦波成分を調べてみると

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{L}Y_{lm}) = (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{L}Y_{lm}) = i \mathbf{L}^2 Y_{lm} = i l(l+1) Y_{lm} \quad (22.68)$$

第二項は \mathbf{r} をかけて第一項と同じ程度の大きさになるから、 $r \rightarrow \infty$ の極限でのみ $\nabla \times (R_l(r) \mathbf{L}Y_{lm})$ も横波になる。 $r \rightarrow \infty$ では球面波と平面波の区別がつかないからこれは当然である。

(22.67) の右辺は $(-)^{l+1}$ の parity を有し、角運動量 (l, m) を有するべきであるということを知ると、 $R_{l-1} \mathbf{T}_{l-1,lm}$ と $R_{l+1} \mathbf{T}_{l+1,lm}$ の線形結合で書ける事は直観的に理解できる。次にこれを確認しておこう。

$\nabla \times R_l(r) \cdot \frac{\mathbf{L}Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}}$ の計算
 先ず ∇ を \mathbf{r} 成分と \mathbf{r} に直交成分に分けると、

$$\nabla = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \quad (22.69)$$

先ず平行成分を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} \times R_l(r) \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} &= \frac{1}{r} \frac{dR_l}{dr} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} (\mathbf{r} \times \mathbf{L} Y_{lm}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{dR_l}{dr} \cdot \frac{ir}{\sqrt{2l+1}} \{ \sqrt{l} \mathbf{T}_{l+1,lm} + \sqrt{l+1} \mathbf{T}_{l-1,lm} \}\end{aligned}$$

最後の式は、後に付けた式変形を参照の事。

垂直成分は

$$\begin{aligned}-\frac{i}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times R_l(r) \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} &= -\frac{iR_l(r)}{\sqrt{l(l+1)}r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} Y_{lm} \\ \text{ここで } (\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} Y_{lm} &= -\mathbf{r} \mathbf{L}^2 Y_{lm} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{L} Y_{lm} + i(\mathbf{r} \times \mathbf{L}) Y_{lm} \\ &= -l(l+1) \mathbf{r} Y_{lm} + i(\mathbf{r} \times \mathbf{L}) Y_{lm} \\ &= +\frac{l(l+1)}{\sqrt{2l+1}} r \{ \sqrt{l(l+1)} \mathbf{T}_{l+1,lm} - \sqrt{l} \mathbf{T}_{l-1,lm} \} - r \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}} \{ \sqrt{l} \mathbf{T}_{l+1,lm} + \sqrt{l+1} \mathbf{T}_{l-1,lm} \} \\ &= \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}} r \{ \sqrt{l} \mathbf{T}_{l+1,lm} (l+1-1) - \sqrt{l+1} \mathbf{T}_{l-1,lm} (l+1) \}\end{aligned}$$

であるから

$$-\frac{i}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times R_l(l) \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} = -\frac{iR_l(r)}{r\sqrt{2l+1}} \{ \sqrt{l} \mathbf{T}_{l+1,lm} - \sqrt{l+1} (l+1) \mathbf{T}_{l-1,lm} \}$$

従って、これらを纏めると、

$$\begin{aligned}\nabla \times R_l(r) \frac{\mathbf{L} Y_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} &= \frac{i}{\sqrt{2l+1}} \left\{ \sqrt{l} \mathbf{T}_{l+1,lm} \left(\frac{dR_l}{dr} - \frac{l}{r} R_l \right) + \sqrt{l+1} \mathbf{T}_{l-1,lm} \left(\frac{dR_l}{dr} + \frac{l+1}{r} R_l \right) \right\} \\ &= \frac{ik}{\sqrt{2l+1}} \{ \sqrt{l+1} R_{l-1}(\rho) \mathbf{T}_{l-1,lm} - \sqrt{l} R_{l+1}(\rho) \mathbf{T}_{l+1,lm} \} \quad (22.70)\end{aligned}$$

ここで、球 Bessel 関数の漸化式を用いた。

$$\frac{dR_l(\rho)}{d\rho} = \frac{l}{\rho} R_l(\rho) - R_{l+1}(\rho) = -\frac{l+1}{\rho} R_l(\rho) + R_{l-1}(\rho) \quad (22.71)$$

即ち、 $\mathbf{E}(\mathbf{H})$ が全角運動量 l を有する関数 $\mathbf{L} Y_{lm}$ で与えられるならば、 $\mathbf{H}(\mathbf{E})$ は (22.65,22.66) で表され、やはり角運動量 l, m を有する。

$\mathbf{L} Y_{lm} (\propto \mathbf{T}_{llm})$ の parity は $(-)^l$ 、 $\mathbf{T}_{l\pm 1lm}$ の parity は $(-)^{l\pm 1}$ である。

埋め草

\mathbf{E} も \mathbf{H} も同時に横波だとすると、ポインティングベクトルは \mathbf{r} 方向を向く。この結果、軌道角運動量密度 $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2$ は 0 になるので、この横の場合は軌道角運動量を持ってなくなってしまう。(22.68) の様に $O(1/r)$ の縦波成分が多重極場の一定の角運動量を保証している。

前ページの計算ノート

$$\mathbf{r} \times \mathbf{L}Y_{lm} = ir\sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}}\{\sqrt{l}\mathbf{T}_{l+1,lm} + \sqrt{l+1}\mathbf{T}_{l-1,lm}\}$$

を導くには、次の様な関係式が使える

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{\mu} (-)^{\mu} \boldsymbol{\xi}_{-\mu} Y_{1\mu} \quad (22.72)$$

$$\mathbf{L}Y_{lm} = \sum_{\sigma} (lm - \sigma \ 1 \ \sigma | lm) Y_{lm-\sigma} \boldsymbol{\xi}_{\sigma} \quad (22.73)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{-\mu} \times \boldsymbol{\xi}_{\sigma} = \sqrt{2}i(1 - \mu \ 1 \ \sigma | 1 \ \sigma - \mu) \boldsymbol{\xi}_{\sigma-\mu} \quad (22.74)$$

$$Y_{1\mu} Y_{lm-\sigma} = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{3(2l+1)}{4\pi(2\lambda+1)}} (l \ 0 \ 1 \ 0 | \lambda \ 0) (lm - \sigma \ 1 \ \mu | \lambda \ m + \mu - \sigma) Y_{\lambda m + \mu - \sigma} \quad (22.75)$$

さて、(22.72)、(22.73)、 $\mathbf{T}_{\lambda,lm}$ の定義及び Clebsch-Gordon 係数の表を用いると、

$$\mathbf{r}Y_{lm} = -r \sum_{\lambda} (l \ 0 \ 1 \ 0 | \lambda \ 0) \mathbf{T}_{\lambda,lm} = -\frac{r}{\sqrt{2l+1}} \left\{ \sqrt{l+1}\mathbf{T}_{l+1,lm} - \sqrt{l}\mathbf{T}_{l-1,lm} \right\} \quad (22.76)$$

次に

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L}Y_{lm} = -\mathbf{r}\mathbf{L}^2 Y_{lm} + i(\mathbf{r} \times \mathbf{L})Y_{lm}$$

を取り上げる。左辺は $(\mathbf{L}Y_{lm})$ を1つのベクトルと考えると、ベクトルの三重積の公式が使えるようだ

\mathbf{r} と \mathbf{L} は交換しないので、右辺の第二項の様な虚数単位を含むおつりの項が必要となる。
 x 成分だけを取り出してみると

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r} \times \mathbf{L}) \times (\mathbf{L}Y_{lm})]_x &= (\mathbf{r} \times \mathbf{L})_y (\mathbf{L}Y_{lm})_z - (\mathbf{r} \times \mathbf{L})_z (\mathbf{L}Y_{lm})_y \\ &= \{(zL_x - xL_z) L_z - (xL_y - yL_x) L_y\} Y_{lm} \\ &= \{-x\mathbf{L}^2 + xL_x^2 + yL_x L_y + zL_x L_z\} Y_{lm} \\ &= \{-x\mathbf{L}^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}) L_x + i(\mathbf{r} \times \mathbf{L})_x\} Y_{lm} \end{aligned} \quad (22.77)$$

この式を導く時、軌道角運動量の交換関係 (22.5) を用いた。

$\mathbf{L}R_l(r) = R_l(r) \mathbf{L}$ は \mathbf{L} が任意の r の関数とは可換だから自明だろう。

Racah 係数を知っている人には一番上の式は次のようにも書ける。

$$\mathbf{r} \times \mathbf{L}Y_{lm} = ir\sqrt{6l(l+1)(2l+1)} \sum_{\lambda} (l \ 0 \ 1 \ 0 | \lambda \ 0) W(l \ 1 \ 1 \ 1; 1 \ \lambda) \mathbf{T}_{\lambda,lm} \quad (22.78)$$

ここで、Clebsch-Gordan 係数と Racah 係数の具体的な値は、次の通りである。

$$(l0\ 10|\lambda0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{l+1}}{\sqrt{2l+1}} & \lambda = l+1 \\ -\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2l+1}} & \lambda = l-1 \end{cases} \quad (22.79)$$

$$W(l, l, 1, 1; 1\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{l}{6(l+1)(2l+1)}} & \lambda = l+1 \\ -\sqrt{\frac{l+1}{6l(2l+1)}} & \lambda = l-1 \end{cases} \quad (22.80)$$

輻射の角分布 原点の近くのみ場の湧き口があり、 $r \rightarrow \infty$ に向けて球面波の形の輻射が放出される場合を考えよう。この時、 $R_l(r)$ として第 1 種 Hankel 関数をとる事になる。電氣的でも磁氣的でも結果は同じになるから、(22.65) の電氣的な場合を取り上げ、特定の (lm) だけが効いてくるとしよう。H が与えられた時、E は H の回転として与えられ、(22.67) と (22.68) から、H の縦波成分は $r \rightarrow \infty$ で横波成分よりも $O(1/r)$ だけはやく 0 に近づくから (22.67) 右辺第 2 項を無視すると、

$$\nabla h^{(1)}(kr) \rightarrow \nabla \left\{ (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \right\} \rightarrow \nabla (-i)^{l+1} ik \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} = ik h_l^{(1)}(kr) \hat{\mathbf{r}} \quad (22.81)$$

この関係を用い、

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} (ik) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H} \quad (22.82)$$

一方、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ を用いると、 $\mathbf{E} = -k c^2 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} / \omega = -c \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}$ は当然だろう。角分布を計算するには、エネルギーの流れである Poynting vector を評価すればよい。これには、 $|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \propto |\mathbf{E}|^2 \propto |\mathbf{H}|^2$ であるから、 $|\mathbf{H}|^2 r^2 d\Omega$ を計算すればよい。数因子を除くと、角分布は $(\mathbf{T}_{lm}^* \cdot \mathbf{T}_{lm})$ に比例するが、これは ξ ベクトルの直交性より、

$$\mathbf{T}_{lm}^* \cdot \mathbf{T}_{lm} = \sum_{\sigma} (lm - \sigma \ 1 \ \sigma | lm)^2 |Y_{l, m-\sigma}|^2$$

ここに Clebsch-Gordan 係数の値を代入すると、

$$= \frac{1}{2l(l+1)} \left\{ (l+m)(l-m+1) |Y_{l, m-1}|^2 + 2m^2 |Y_{lm}|^2 + (l-m)(l+m+1) |Y_{l, m+1}|^2 \right\} \quad (22.83)$$

ここで、特に $l=1, m=0$ とおくと、この式の $\{\dots\} = 3 \sin^2 \theta / (4\pi)$ という角分布を与える。この式が (10.17) の場合に該当している。

問 (22.83) において $l=2$ とおいた時、即ち quadrupole 輻射の角分布を調べてみよ。

球面調和関数の具体的表現に関する問いを解いた人は、 $Y_{ll} \propto \sin^l \theta e^{il\psi}$ と言う事を覚えているだろう。更に、磁気量子数を一つずつ下げる演算子を作用させて、 Y_{lm} は $\sin^m \theta$ を含む事も知っているだろう。従って、 $Y_{l0}(\theta, \psi)$ のみが、 $\theta = 0$ で 0 でない有限の値をとる。(22.83) で $m = 1$ の項のみが、量子化軸方向 ($\theta = 0$) への光子放出に関係している。別の言葉で言えば、量子化軸 (z 軸) 方向に放出される光子の角運動量の z 成分は必ず $|m| = 1$ であり、これが偏光の話の最後のコメントである。光子の helicity は ± 1 である。この式 (22.83) を導く時に、光の横波性を利用しているのも理解出来るだろう。もしも光の縦波成分 ((22.56) 式の $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ で与えられる様な解) が登場すると、(22.83) 式に $|m| = 1$ でも $\theta = 0$ で 0 でない成分が登場するのも想像に難くないだろう。光子の質量についての余談をこの観点から思い出しておいてもらいたい。

(22.83) で $l = 0$ とおくと、 $|m| \leq l$ という制限の為に、 $l = m = 0$ だけが許され、(22.83) は恒等的に 0 になる。即ち、 $l = 0$ という光子は存在しない。光子のスピンは 1 だから、という事である。

輻射の角分布を精密に測定すると、多重度を決定できるが、電気的か磁氣的かの識別は出来ない事はあきらかだろう。

即ち、parity の測定には輻射の角分布以外の測定が必要である。

湧き口の多重極展開 湧き口が存在する場合の式 (22.63) と (22.64) に戻ろう。ここでも、角運動量を良い指標として有する解は、電気的及び磁氣的と呼ばれる 2 種類に分類する事が出来る事を念頭に置き、電気的な解の \mathbf{H} を次の様に書こう。

$$\mathbf{H}^{(E)} = f_l^{(E)}(r) \mathbf{T}_{llm} \quad (22.84)$$

こう書くと、角運動量 l を持つ波の横波性がはっきりする。今度は湧き口を考慮するから、 $f_l(kr)$ は、球 Bessel 関数系の関数とは限らない。

Maxwell の方程式より、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ 。(22.84) を仮定すると、 $\nabla \cdot \mathbf{H}^{(E)} = 0$ だから、 $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ を満たす解を探す事になる。この様な解を‘電気的’という形容詞をつけて呼ぶ。(22.84) の左辺を $\mathbf{E}^{(M)}$ と置く時、即ち $\nabla \cdot \mathbf{E}^{(M)} = \rho/\epsilon = 0$ を満足する解を‘磁氣的’と呼ぶ。電気的な解と磁氣的な解は、parity が異なるので、parity が保存するならば、混じり合う事はない。

さて、電気的な解の (22.84) に含まれる $f_l(r)$ の満足すべき方程式を作ろう。(22.84) を (22.64) に代入し、

$$\nabla \times \nabla (f_l(r) \mathbf{T}_{llm}) = \left\{ -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} f_l(r) \mathbf{T}_{llm} \quad (22.85)$$

但し、ここで $f_l(r) \mathbf{T}_{llm}$ の横波性と、 $\nabla^2 \mathbf{T}_{llm} = -l(l+1) \mathbf{T}_{llm}/r^2$ を利用した。次に \mathbf{T}_{llm} の規格直交性を利用する。 \mathbf{T}_{llm}^* を両辺にかけて、角度積分をする。

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} f_l^{(E)}(r) = - \int d\Omega \mathbf{T}_{llm}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{i} + \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{M}) \quad (22.86)$$

右辺は、湧き口から、 \mathbf{T}_{llm} 成分を抜き出す射影演算子を作用させたと考えられる点は、静電場の多重極展開を拡張したものになっている。(15.52) で遠方から見た円電流は、磁気能率と

等価であると述べた。この事情が (22.86) の右辺に $(\nabla \times \mathbf{i} + \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{M})$ として登場している。

磁氣的解を

$$\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r}) = f_l^{(M)}(r) \mathbf{T}_{llm} \quad (22.87)$$

から始めると、(22.86) に対応して

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} f_l^{(M)}(r) = - \int d\Omega \mathbf{T}_{llm}^* \cdot (i\omega \mu_0 \mathbf{i} + i\omega \nabla \times \mathbf{M}) \quad (22.88)$$

(22.86) や (22.88) の立体角にわたる積分は r を固定して行うが、湧き口の強度分布がよっぽど変な事になっていない限り $r \rightarrow 0$ で発散する事はないだろうし、 $f_l(r)$ も $r \rightarrow 0$ で発散する事は無いだろうから、 $f_l(r)$ の原点付近での振舞は、遠心力 potential で決定さ、 $f_l(r) \sim (\omega r/c)^l$ という振舞をするはずだ。従って、湧き口の大きさが $1/k (= c/\omega)$ よりも小さいと、高次の輻射は起こりにくい。可視光の波長を 5000 \AA ($5 \times 10^{-5} \text{ cm}$) とし、原子の大きさを 1 \AA とすると、最低次の双極子輻射だけを考えれば良い事になる。

現実的な意味で、高次の輻射が意味を持つのは原子核現象だけだろう。

問 ∇ と \mathbf{J} とは交換するか？

解の積分表示 (22.86) や (22.88) の右辺は面積分を実行すると、結局のところ、 r の関数であり、(14.103) の形をしているから、(14.106) の様に積分表示出来る。

残った仕事は、(22.86) や (22.88) の Green 関数をあらわに書き下す事である。次にその作業をしよう。(14.103) 式の記号を使うと、

$$p(r) = r^2, \quad q(r) = k^2 r^2 - l(l+1), \quad \rho(r) = -r^2 \int d\Omega \dots \quad (22.89)$$

であり、斉次微分方程式は、 r^2 を外へ括り出すと、

$$r^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} T(r) = 0 \quad (22.90)$$

球 Bessel 等がこの方程式の解である。 $r \rightarrow \infty$ で外向きの球面波となるように二つの独立解として、次のものをとる。

$$T_1(r) = N j_l(kr), \quad T_2(r) = j_l(kr) + i n_l(kr) = h_l^{(1)}(kr) \quad (22.91)$$

(14.104) を満足する様に N を決めねばならない。

$$1 = N r^2 \left\{ j_l(kr) \frac{d}{dr} h_l^{(1)}(kr) - \frac{d j_l(kr)}{dr} h_l^{(1)}(kr) \right\} \quad (22.92)$$

右辺を r の関数だと思って r で微分し、上の微分方程式を代入してみると 0 になるから、確かに右辺は一定である事がわかる。即ち、右辺を任意の r で計算しても良い。 $r \rightarrow \infty$ とする

と、 $O(r^{-2})$ を無視すると次の近似式が成立する。

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\rightarrow \sin(kr - l\pi/2)/kr & \frac{d j_l(kr)}{dr} &\rightarrow \cos(kr - l\pi/2)/kr \\ n_l(kr) &\rightarrow -\cos(kr - l\pi/2)/kr & \frac{d n_l(kr)}{dr} &\rightarrow \sin(kr - l\pi/2)/kr \end{aligned} \quad (22.93)$$

これにより、(22.92) 右辺 $r^2\{\dots\} \rightarrow i/k$ であるから、 $N = -ik$ ととれば良い。従って、求める Green 関数は、

$$G(r, r') = -ik j_l(kr) h_l^{(1)}(kr) \quad (22.94)$$

これで、(22.86) や (22.88) に対する Green 関数が出来た。この Green 関数を代入し、

$$f_l^{(E)}(r) = \int G(r, r') (-r'^2) \int d\Omega \dots \quad (22.95)$$

ここで、 $r \rightarrow \infty$ とおくと、

$$\begin{aligned} f_l^{(E)}(r) &\rightarrow -ik h_l^{(1)}(kr) \int_0^\infty r'^2 dr' j_l(kr') \int d\Omega \mathbf{T}_{lm}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{i} + \epsilon\omega^2 \mathbf{M}) \\ &= -ih h_l^{(1)}(kr) \int dr' \{j_l(kr') \mathbf{T}_{lm}\}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{i} + \epsilon\omega^2 \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (22.96)$$

磁氣的輻射に対しても同様の式が書き下せる。

自由場に対する vector potential 古典的な電磁気学の範囲では、電・磁場を対象として、これらを直接的に扱っていてもよいが、Lagrangian や Hamiltonian を用いて議論をする必要がある場合には、potential や vector potential を用いて議論を展開する必要がある。

ここでは、 $\rho = \mathbf{i} = 0$ の自由場における vector potential を多重極展開しておこう。

まず、電場 \mathbf{E} と 磁場 \mathbf{B} は scalar potential ϕ と vector potential \mathbf{A} を用いて、次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (22.97)$$

potential には、自由度が残っているので、これを殺すために条件をつける。これまでに、Coulomb gauge や Lorentz gauge が登場した。これらは、電荷や電流密度が存在しても用いる事が出来た。ここでは自由場という条件が架せられているから、potential にも条件を付けて良い。そこで、次の solenoidal gauge を導入しよう。

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (22.98)$$

即ち、電荷が存在しなければ scalar potential はいらない。 \mathbf{A} には回転はあるが、発散は存在しない。Solenoid というのは、コイルだと思つと、名前の出どころが想像出来る。

この gauge は、Lorentz 条件を満足するから、時間依存性 $e^{-i\omega t}$ を有する vector potential \mathbf{A} の空間部分は、vector Helmholtz の方程式を満足する。つまり、これまでの議論を越える部分は無い。

最後に、平面波と球面波の関係を加えておこう。scalar 平面波は、その進行方向を z 軸にとると、1の振幅に対して $e^{i(kz-\omega t)}$ と書ける。また、scalar 球面波では、 $R_l(r) Y_{lm}(\theta, \psi) e^{-i\omega t}$ と書ける。 $e^{-i\omega t}$ を除いて考えると、平面波は運動量、球面波は角運動量の固有状態である。一方で他方を展開出来るはずである。このようにして、Rayleigh 展開の公式が成立すると思われる。

$$e^{ikz} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (22.99)$$

$r=0$ で、左辺に発散は無いので、球 Bessel しか登場しない。数係数 $i^l (2l+1)$ を簡単に導くには、 $r \rightarrow 0$ で両辺を (kr) の級数に展開し、左辺から登場する $(ikr \cos\theta)^l$ の係数と、右辺から登場する $j_l(kr) \rightarrow 0$ とした時の leading term と $P_l(\cos\theta)$ から来る $(\cos\theta)^l$ の積の項の係数を比較すれば良い。進行方向が \mathbf{k} の平面波を球面波で表現するには、(14.111) を利用する。

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_l i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (22.100)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}$ は、夫々 \mathbf{k}, \mathbf{r} に対応する単位ベクトルである。

vector 平面波と球面波に対しては、vector 平面波の振幅を vector で表せば良い。次の様に z 軸方向に進むものとしておく。

$$\mathbf{A} = \mathbf{u} e^{ikz} \quad (22.101)$$

簡単の為に \mathbf{u} は単位ベクトルであるとしておく。 \mathbf{u} として、球基底での単位ベクトル ξ_μ (22.36) をとる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &= \xi_\mu e^{ikz} = \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kr) Y_{l0} \xi_\mu \\ &= \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kr) \sum_L (l0\ 1\mu|L\mu) \mathbf{T}_{lL\mu} \end{aligned} \quad (22.102)$$

ここで、 $\mu=0$ とおくと、

$$\mathbf{A}_0 = \sqrt{4\pi} \sum_\lambda i^{\lambda-1} \left\{ j_{\lambda-1}(kr) \sqrt{\lambda} \mathbf{T}_{\lambda-1\lambda 0} + j_{\lambda+1}(kr) \sqrt{\lambda+1} \mathbf{T}_{\lambda+1\lambda 0} \right\} \quad (22.103)$$

この式は、純横波 $R_\lambda(kr) \mathbf{T}_{\lambda\lambda 0}$ に直交している。円偏光は $\mu = \pm 1$ と置くと得られる。 μ のかわりに p と書くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= -\sqrt{2\pi} \sum_l i^l \sqrt{(2l+1)} j_l(kr) \mathbf{T}_{llp} \\ &\quad + \sqrt{2\pi} \sum_L i^{L-1} \left\{ \sqrt{L+1} j_{L-1}(kr) \mathbf{T}_{L-1Lp} - \sqrt{L} j_{L+1}(kr) \mathbf{T}_{L+1Lp} \right\} \end{aligned} \quad (22.104)$$

この式の右辺第1項は純粋な横波であり、第2項は(22.103)に直交している。これで、3個の独立な球面波が揃った。但し‘光’の場合としては(22.104)のみが実現される。