The Bulletin of Toyohashi Junior College
1995, No. 12, 147-161

原　著

原価見積における習熟曲線理論の活用

The Use of Learning Curve Theory in Estimating Production Cost

片　岡　眞　吾

概　要

各生産工程の習熟曲線を測定し活用する目的は二つある．その一つは正しい工数見積による合理的納期管理に資するためであり，二つ目は，正しい工数見積による合理的原価管理に資するためである．ただし原価コストは工数の関数であることに注意する．

本論文の目的は，習熟曲線の理解を容易にし，習熟曲線の活用を促進することである．まず，計算例を通して習熟曲線の種々のパラメータの求め方と活用方法について解説する．最後に原価見積への習熟曲線理論の活用として，加工・組立・検査の一連の工程からなる大型バルブの生産工程における製品原価見積例をしめす．

序

習熟曲線はある製品を繰り返し生産するとき，その製品の単位生産工数が逓減する習熟現象を簡明に表す．この現象は，作業者の技能習熟が直接要因であり，製品設計や工程の継続的な改善活動が間接要因として働いていると考えられている．

習熟曲線理論の多くはいずれも人的要因が複合的に起因する工数逓減の現象の存在を活用している．その応用例として機体組立工程での習熟は良く知られており，古くから軍用機の見積額の根拠となったことは周知のとおりである．

すなわち，生産量の倍増により一定率の習熟が期待されるとき，習熟曲線理論を適用することができる．以下は，ある製品を生産する加工工程を想定し，習熟曲線理論について述べる．

1.　習熟曲線

「生産量を倍増していけば，単位当たり加工時間は一定の比率で減少していく」という仮説が実務によくあてはまるのを習熟曲線理論という．

例えば，ある製品一個を生産する場合の加工時間が 100 時間で，生産量を倍増するごとに 1 個当りの加工時間すなわち単位加工時間が 90％の比率で減少するとき，生産量を倍増して 2 個生産した場合の単位加工時間は 90 時間となる．以下同様に，4 個生産する場合の単位加工時間は 81 時間となり，8 個生産する場合は 72.9 時間となる．生産量が倍になるごとに減少する単位加工時間の一定の逓減率を習熟率と呼ぶ．習熟率 90％で生産量が倍増するごとに単位加工時間が減少する曲線を 90％習熟曲線と呼ぶ．この数値例を次表にしめす．

生産量	単位加工時間	習熟率％
1 個	100	－－
2 個	90	90％
4 個	81	90％
8 個	73	90％

したがって，80％習熟曲線の場合には，次のようになる．

生産量	単位加工時間	習熟率%
1個	100	‐‐
2個	80	80%
4個	64	80%
8個	51	80%

いま，習熟率をpと表し，任意の生産量x個の場合の単位加工時間をy(x)，倍の生産量2x個の場合の単位加工時間をy(2x)としたとき．習熟率pを次式で定義する．

$p = y(2x) / y(x)$　……①

ただし，$y(2x) < y(x)$

$0 < p < 1$

よって，習熟率pが小さいほど単位加工時間は急激に減少し習熟効果は大きい．

さて，文献（1），（2）によれば，生産工程の特性と習熟率との間で，次表のような関係があるといわれている．すなわち，より人的要因の少ないより自動化された工程の習熟率はより大きく，習熟効果はより小さい．逆に人的要因が多い手作業の占める割合がより大きい工程の習熟率はより小さく，習熟効果はより大きいという関係がわかる．

生産工程の特性	習熟率%
完全なオートメーション工程　…	100%
機械作業75%　手作業25%……	90%
機械作業50%　手作業50%……	85%
機械作業25%　手作業75%……	80%

2．習熟曲線モデル

ここでは実用的な習熟曲線モデルとそのパラメータの数学的特性について述べる．

2.1　pのベキ乗モデル

まず習熟率をp，生産量が1個のときの加工時間をcとするとき，生産量を倍増して2個とした場合，1個当りの加工時間すなわち単位加工時間は習熟率pで逓減し$c \times p$となる．同様に，2個から4個と生産量を倍増した場合，生産量2個の単位加工時間$c \times p$にpを掛けた$c \times p \times p$が生産量4個の単位加工時間となる．すなわち，生産量が1個のときの加工時間cに習熟率pを生産量が1個から倍増した回数だけ掛け合わせればその生産量の単位加工時間が求められる．この習熟曲線理論を数式で表すと次のようになる．

いま，1個から次のように倍増する生産量x個：1，2，4，8，16，32，・・・・は，2のベキ乗で書き直すことができる．すなわち，x：2^0，2^1，2^2，2^3，2^4，2^5，・・・・と表すことができる．いま任意の生産量x個を2のベキ乗で置き換えた数をa(x)とすれば，

$a(x) = \log x / \log 2$　……②

となる．このa(x)は任意の生産量x個が1個から倍増してきた回数である．習熟率pおよび生産量が1個の場合の加工時間cが与えられたとき，任意の生産量xの単位加工時間y(x)はcに習熟率pのa(x)乗を掛け合わせて求められる．すなわち，

$y(x) = cp^{a(x)}$　……③

ただし，y(x)　＝任意の生産量x個を加工したときの単位加工時間

c　＝生産量1個目の加工時間

$a(x) = \log x / \log 2$

$p = y(2x) / y(x)$ の習熟率

この③式をpのベキ乗モデルと呼ぶ．

この③式が正しいことは，90%習熟曲線の仮説数値を当てはめれば明らかである．

――計算例1．――

生産量x個	$y(x) = cp^{a(x)}$	単位加工時間
1個の場合	$y(1) = 100 \times 0.9^0$	＝ 100
($x = 1 = 2^0$ に注意)		
2個の場合	$y(2) = 100 \times 0.9^1$	＝ 90
($x = 2 = 2^1$ に注意)		
4個の場合	$y(4) = 100 \times 0.9^2$	＝ 81
($x = 4 = 2^2$ に注意)		

2.2　対数線型モデル

さて，③式の両辺に対数をとれば

$\log y(x) = a(x) \log p + \log c$　……④

ベキ数 a(x) と log y(x) の線型モデルとなる．

次に，②式を④式の a(x) に代入すると，

$$\log y(x) = \frac{\log x}{\log 2} \log p + \log c$$

これを変形し

$$\log y(x) = \frac{\log p}{\log 2} \log x + \log c$$

ただし，$0 < p < 1$

よって，log p ／ log 2 は負値をとる．これを－n(p) とすると，

$-n(p) = \log p / \log 2$　……⑤

ただし，－n(p) は習熟率 p で決定する定数である．この－n(p) を上式に代入すると，単位加工時間 y(x) は生産量 x の関数となる．すなわち，

$\log y(x) = -n(p) \log x + \log c$　……⑥

となり，⑥式を対数線型モデルと呼ぶ．

2.3　指数モデル

いま⑥式の対数をはずすと，単位加工時間 y(x) を生産量 x の指数関数で習熟曲線を定義できる．すなわち，

$y(x) = c\,x^{-n(p)}$　……⑦

ただし，

y(x)　＝任意の生産量 x 個の場合の単位加工時間

c　＝生産量 1 個目の加工時間

習熟率 p は①式で定義され，⑦式で展開すると係数－n(p) との間で以下のような関係がある．

$$\begin{aligned} p &= y(2x) / y(x) \\ &= c(2x)^{-n(p)} / c\,x^{-n(p)} \\ &= 2^{-n(p)} \end{aligned}$$　……⑧

ただし，$0 < p < 1$

⑧式を－n(p) について解くと⑤式と同じ関係式が求められる．すなわち

$-n(p) = \log p / \log 2$

ここで，⑦式を指数モデルと呼ぶ．指数モデルは，p のベキ乗モデルをより一般化した習熟曲線モデルである．以下は，この指数モデルを基にその特性と活用について述べる．

表 1．習熟率 p% と n(p) と 1 － n(p) の数値表

習熟率 p	n(p)	1 – n(p)	習熟率 p	n(p)	1 – n(p)	習熟率 p	n(p)	1 – n(p)
70%	0.5146	0.4854	77%	0.3771	0.6229	84%	0.2515	0.7485
71	0.4941	0.5059	78	0.3585	0.6415	85	0.2345	0.7655
72	0.4739	0.5261	79	0.3401	0.6599	86	0.2176	0.7824
73	0.4540	0.5460	80	0.3219	0.6781	87	0.2009	0.7991
74	0.4344	0.5656	81	0.3040	0.6960	88	0.1844	0.8156
75	0.4150	0.5850	82	0.2863	0.7137	89	0.1681	0.8319
76	0.3959	0.6041	83	0.2688	0.7312	90	0.1520	0.8480

注）数値表は習熟率 p とモデル式の係数 n（p）の相互の関係を示す．加工時間見積およびモデル式の推定に活用する．

（1）習熟率 p%＝ y(2x) ／ y(x) × 100%

（2）n(p) は対数線型モデル⑥式および指数モデル⑦式の係数

$-n(p) = \log p / \log 2$

（3）係数 1 － n(p) は総加工時間 t(x) の⑪式および限界習熟曲線 m(x) の⑰式の係数である．

2.4　パラメータ p と n(p) の関係

さて，⑦式の生産量と単位加工時間の関係を図示すれば，図 1 の滑らかな指数曲線が描ける．⑦式に対数をかけた⑥式の対数線型モデルは両対数グラフで習熟曲線が直線になることを暗示している．すなわち，習熟曲線の係数－n(p) は図 2 の両対数グラフ上で下降する直線の傾きを表す．

いま，係数 n(p) および習熟率 p を求める方法には二通りある．

第 1 は，生産量 x とその倍の 2x の単位加工時間の実績データがあれば①式から習熟率 p を求め，⑤式から n(p) を算出できる．

第 2 は，任意の生産量 2 点の実績データさえあれば図 2 の両対数グラフ上で習熟曲線は簡単な直線となり，直線の傾きを計測して，係数 n(p) を求めればよい．この n(p) から⑧式によって習熟率 p が算出できる．

この習熟率 p と n(p) の値相互の関係を表 1 の数値表にまとめておき⑤式または⑧式の計算を省けるようにした．

3.　加工時間見積

習熟曲線による加工時間の見積では，習熟率 p％および生産量 1 個目の加工時間がわかったならば，任意の生産量の単位加工時間，総加工時間，そして追加注文が発生したときの追加生産量のみの単位加工時間ならびに追加生産 1 個ごとの個別加工時間を知ることができる．

3.1　初度加工時間 c

⑦式で定義した生産量 1 個目の加工時間 c は，生産開始時の最初の製品 1 個を加工する時間を計測した実績データを採用できる．このときの c を初度加工時間と呼ぶ．ロット生産では，ロットサイズの総加工時間のみが実績データとして計測される．したがって，単位加工時間は総加工時間を生産個数で除して算出できるが，生産開始時の 1 個目の加工時間は計測できないケースがある．初度加工時間 c が計測できないとき見積が必要になる．

いま，習熟率 p および生産量 x の単位加工時間 y(x) が既知ならば，⑦式より生産量 1 個の場合の加工時間 c は次式で求められる．

$$c = y(x)\ x^{n(p)}$$

いま，

$$k(p,x) = x^{n(p)}$$

とすると，c は

$$c = y(x)\ k(p,x) \qquad \cdots\cdots⑨$$

で求められる．

3.2　単位加工時間 y(x)

また，習熟率 p および c が既知ならば，⑦式から任意の生産量 x の単位加工時間 y(x) は，

$$y(x) = c \times 1 ／ k(p,x) \qquad \cdots\cdots⑩$$

で求められる．

k(p,x) および 1 ／ k(p,x) 値は，習熟率 p と生産量 x によって決定される．表 2 の数値表にこれらを一覧した．c および y(x) を求めるために表 2 を使った簡易計算が可能となる．

3.3　総加工時間 t(x)

さて，⑦式で定義した習熟曲線は単位加工時間を表す．納期の見積には総加工時間が必要になる．総加工時間 t(x) は上式⑩に生産量 x 個を掛ければよい．または，指数モデル⑦式の両辺に x を掛けると総加工時間 t(x) が同様に求められる．すなわち，

$$t(x) = xy(x) = xcx^{-n(p)}$$

$$t(x) = cx^{1-n(p)} \qquad \cdots\cdots⑪$$

となる．

次に，k(p,x) による初度加工時間 c および y(x) の簡易計算例を示す．

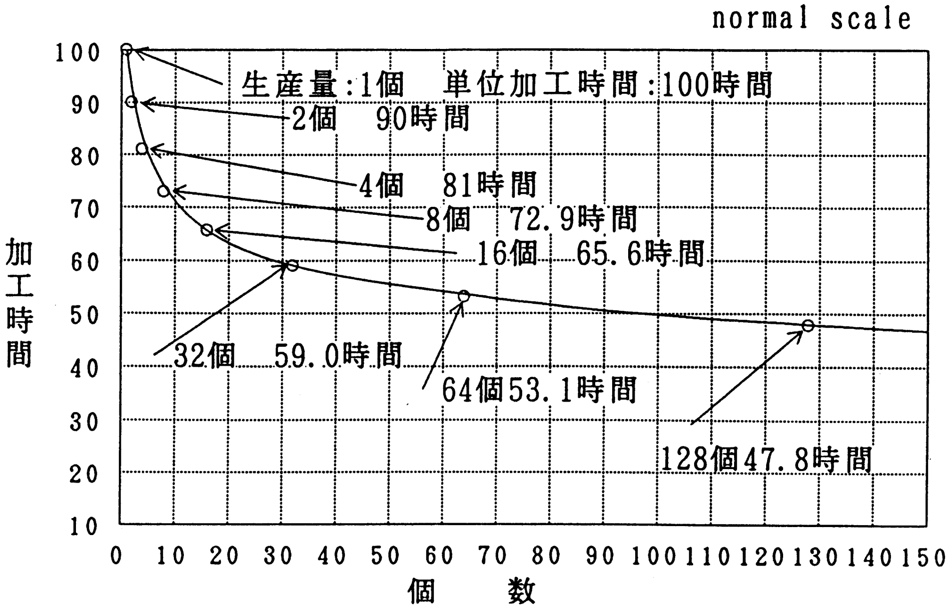

図 1.　普通グラフの 90%習熟曲線

注）プロットした点は 1 個生産したときの単位加工時間 100 時間から生産量を 128 個まで倍増していったときの単位加工時間である．単位加工時間は生産量が倍になるごとに元の単位加工時間の 90%に逓減した．

したがって，習熟率 p%が 90%である．表 1 の数値表から，指数モデルの係数－n(90) は－0.152 とわかる．よって，図中の 90%習熟曲線の指数モデルは次式となる．$y(x) = 100x^{-0.152}$

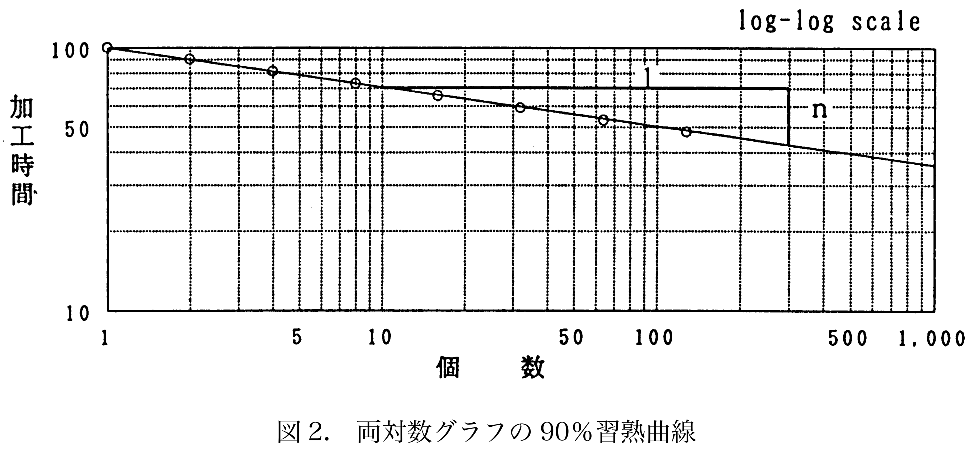

図 2.　両対数グラフの 90%習熟曲線

注）図 1 と同じデータを両対数グラフ上にプロットした．習熟曲線を普通グラフに描けば図 1 のように滑らかなカーブとなるが，両対数グラフに描けば下降する直線となる．係数－n(p) は両対数グラフ上の習熟曲線の勾配 n を測定して－0.152 と求まる．n(p) が 0.152 の習熟率 p%は表 1 の数値表から 90%とわかる．したがって，図中の 90%習熟曲線の対数線型モデルは次式となる．$\log y(x) = -0.152 \log x + \log 100$

——計算例2.——

ある製品の生産実績データから生産量50個の単位加工時間y(50)が90時間，および習熟率pが経験的に80％とわかっている．この製品の初度加工時間cおよび生産量を200個としたときの単位加工時間y(200)ならびに総加工時間t(200)を見積もれ．

(1) まず⑨式から初度加工時間cは，

c = y(50) k(80,50)

ただし，実績データからy(50)は，

y(50) = 90時間

表2から，k(80,50) = 3.5233

したがって，cの計算結果は，

c = 90 × 3.5233

= 317.097時間

(2) 次に生産量200個としたときの単位加工時間y(200)は⑩式から，

y(200) = 317.097 ／ k(80,200)

表2から，1/k(80,200) = 0.1816

y(200) = 317.097 × 0.1816

= 57.585時間／個

(3) 最後に200個の総加工時間t(200)は，(2)で求めたy(200)に生産量200個を掛ければ求まるから，

t(200) = y(200) × 200

= 57.585 × 200

= 11517時間

表2．k(p, x)と1／k(p, x)の数値表

習熟率p%	80%		85%		90%	
個　数　x	k	1／k	k	1／k	k	1／k
50	3.5233	0.2838	2.5024	0.3996	1.8124	0.5518
100	4.4041	0.2271	2.9440	0.3397	2.0138	0.4966
150	5.0182	0.1993	3.2376	0.3089	2.1418	0.4669
200	5.5051	0.1816	3.4635	0.2887	2.2375	0.4469
250	5.9151	0.1691	3.6495	0.2740	2.3147	0.4320
300	6.2727	0.1594	3.8089	0.2625	2.3797	0.4202
350	6.5918	0.1517	3.9491	0.2532	2.4362	0.4105
400	6.8814	0.1453	4.0747	0.2454	2.4861	0.4022
450	7.1473	0.1399	4.1888	0.2387	2.5310	0.3951
500	7.3939	0.1352	4.2935	0.2329	2.5719	0.3888
1000	9.2424	0.1082	5.0512	0.1980	2.8577	0.3499
2000	11.5530	0.0866	5.9426	0.1683	3.1752	0.3149
3000	13.1639	0.0760	6.5353	0.1530	3.3770	0.2961
4000	14.4412	0.0692	6.9913	0.1430	3.5280	0.2834
5000	15.5168	0.0644	7.3668	0.1357	3.6497	0.2740
10000	19.3960	0.0516	8.6668	0.1154	4.0552	0.2466

注）$k(p,x) = x^{n(p)}$：このk(p,x)は習熟率pが既知で任意の生産量x個の単位加工時間から初度加工時間cを算出するための定数．

1／$k(p,x) = x^{-n(p)}$：この1／k(p,x)は既知の習熟率pと初度加工時間cとから任意の生産量x個の単位加工時間y(x)を算出するための定数．

3.4　追加生産量の加工時間

加工時間の見積には習熟曲線の他に限界習熟曲線という概念が必要となる．習熟曲線は総平均値の概念であるが，限界習熟曲線は追加生産各 1 個の個別値に関する概念である．

換言すれば，単位加工時間 y(x) とは累計生産量 x 個で総加工時間 t(x) を除した累計平均加工時間のことである．すなわち，⑦式で定義した習熟曲線とは，x が累計生産量，そして y(x) が累計平均加工時間を表し，累計生産量 x が倍になるごとに一定の習熟率 p（80％～90％）で逓減する曲線である．これに対して，生産開始の 1 個目から追加 1 個ごとの個別加工時間 m(x) を表す限界習熟曲線が存在することはいうまでもない．

この限界習熟曲線と区別するために，⑦式の習熟曲線を累計平均習熟曲線と呼ぶ．この累計平均習熟曲線に基づく加工時間見積では，累計生産量 x 個までを加工したときの単位加工時間 y(x) が求められる．また，この y(x) に累計生産量 x を掛けて求められる総加工時間 t(x) の⑪式を累計習熟曲線と呼ぶ．

では，追加注文の生産における追加分のみの単位加工時間，および限界習熟曲線による個別加工時間はどのように求めるのであろうか．

3.4.1　限界習熟率 e(p) による簡易計算

簡単なケースとして，追加注文が入る以前に生産した初期生産量の単位加工時間と習熟率 p および習熟曲線が与えられることを前提にする．次に，ちょうど初期生産量と同じ個数を加工する追加注文が入ったときの追加分のみの単位加工時間見積を考える．

まず，初期生産量 x_0 個そして追加生産量も同じ x_0 個で総生産量は $2x_0$ 個となる．x_0 個の総加工時間と $2x_0$ 個の総加工時間は，⑪式からそれぞれ $t(x_0)$，$t(2x_0)$ となる．このとき追加分 x_0 個のみの総加工時間は $t(2x_0) - t(x_0)$ となり，これを追加生産量 x_0 個で除した平均加工時間が追加分のみの単位加工時間となる．

いま初期生産量 x_0 個と同量の追加注文量 x_0 個のみの単位加工時間を $a(x_0, x_0)$ と表すと，次のようになる，

$$a(x_0,x_0) = \frac{t(2x_0) - t(x_0)}{x_0} \qquad \cdots\cdots ⑫式$$

これを⑪式で展開すると，

$$= \frac{c(2x_0)^{1-n(p)} - cx_0^{\ 1-n(p)}}{x_0}$$

$$= cx_0^{\ -n(p)}(2 \cdot 2^{-n(p)} - 1)$$

$$= y(x_0)(2p - 1)$$

となる．

上式の右辺の $y(x_0)$ は初期生産量 x_0 の単位加工時間である．また，習熟率 p は与えられた習熟曲線において一定であるから (2p − 1) は習熟率 p によって決定される．これを限界習熟率 e(p) とする．すなわち，

$$e(p) = 2p - 1 \qquad \cdots\cdots ⑬$$

で表し，習熟率 p のときの限界習熟率 e(p) の値を表 3 の数値表に示す．

よって，この e(p) を使って単位加工時間 $a(x_0,x_0)$ を求める簡易計算式ができる．すなわち，

$$a(x_0,x_0) = y(x_0)e(p) \qquad \cdots\cdots ⑭$$

となる．

次に，限界習熟率 e(p) の数値表を参照する簡易計算例を示す．

――計算例 3. ――――――――――――――

実績データより，生産工程の習熟率 p％が 80％および初期生産量 x_0 が 10 個のときの単位加工時間 y(10) が 30 時間／個と分かっている．いま，初期生産量と同じ個数 10 個を加工する追加注文が入った．追加生産分 10 個のみの単位加工時間を次の手順で見積もる．

（1）習熟率 p = 80％で，初期生産量 x_0 = 10 個と同じ追加生産量 10 個分のみの単位加工時間 a(10,10) は⑭式から次のよう

になる．

$a(10,10) = y(10)\ e(80)$

(2) ただし，実績データから，

$y(10) = 30$ 時間／個

(3) 習熟率 p％＝80％のとき限界習熟率 e(80) は，数値表3または⑬式から，

$e(80) = 2 \times 0.80 - 1$

$= 0.60$

(4) したがって，追加分の単位加工時間は，

$a(10,10) = 30 \times 0.60$

$= 18$ 時間／個

となる．

3.4.2　追加生産量Δ x の単位加工時間

つぎに，上述の簡易計算法を発展させる．いま，初期生産量 x_0 個に追加してΔx 個を生産する場合の追加生産量Δx 個のみの単位加工時間を $a(x_0, \Delta x)$ と表す．

この単位加工時間 $a(x_0, \Delta x)$ を算出するためには，まず，初期生産量 x_0 個の総加工時間 $t(x_0)$ と初期生産量 x_0 個に追加Δx 個を加えた $x_0 + \Delta x$ 個を生産する場合の総加工時間 $t(x_0 + \Delta x)$ を求める．

表3．限界習熟率 e(p) の数値表

習熟率 p％	e(p)％	習熟率 p％	e(p)％
70	40	83	66
71	42	84	68
72	44	85	70
73	46	86	72
74	48	87	74
75	50	88	76
76	52	89	78
77	54	90	80
78	56	91	82
79	58	92	84
80	60	93	86
81	62	94	88
82	64	95	90

注）限界習熟率 e(p) は，習熟率 p が既知のとき次式で決定される定数である．$e(p) = 2p - 1$

初期生産量と同じ追加生産量を生産したときの追加生産量のみの単位加工時間の見積⑭式に使う．

したがって，追加分Δx 個のみの総加工時間は，$t(x_0 + \Delta x) - t(x_0)$ で算出でき，これをΔ x 個で除した平均加工時間が追加分のみの単位加工時間 $a(x_0, \Delta x)$ である．以上を既に定義した式で説明すると，

$$a(x_0, \Delta x) = \frac{t(x_0 + \Delta x) - t(x_0)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ⑮$$

となる．これを⑪式で展開すると，

$$= \frac{c(x_0 + \Delta x)^{1-n(p)} - c{x_0}^{1-n(p)}}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ⑯$$

となる．

3.4.3　限界習熟曲線 m(x)

さて，⑯式は，$x_0 = x$ としΔx→0とすると，総加工時間⑪式の t(x) を x で微分した次の限界習熟曲線 m(x) ⑰式となる．

$$\lim_{\Delta x \to 0} a(x, \Delta x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x)^{1-n(p)} - cx^{1-n(p)}}{\Delta x}$$

よって，

$$m(x) = \frac{dt(x)}{dx}$$

$$m(x) = c(1 - n(p))x^{-n(p)} \quad \cdots\cdots ⑰$$

ただし，m(x) は x 個目の個別加工時間を表している．したがって，製品の限界コストすなわち個別の原価はこの限界習熟曲線から個別時間を見積り求めることになる．

⑰式から個別加工時間 m(x) は生産量 x 個の単位加工時間 y(x) に $1 - n(p)$ を掛けた値となっていることがわかる．

$$0 < 1 - n(p) < 1$$

であるから，

$$m(x) < y(x)$$

となる．また，$m(x)$ と $y(x)$ の習熟率 p は等しく係数 $n(p)$ も等しい．したがって，限界習熟曲線は両対数グラフにおける習熟曲線の下に平行な直線で描くことができる．

3.4.4 近似計算法

次に，$m(x)$ で $x = x_0 + \Delta x / 2$ とすると，

$$a(x_0, \Delta x) \fallingdotseq m(x_0 + \Delta x/2)$$
$$\fallingdotseq C(1 - n(p))(x_0 + \Delta x/2)^{-n(p)} \quad \cdots\cdots⑱$$

⑱式の右辺の意味は，限界習熟曲線の生産量が $x_0 + \Delta x / 2$ の点で読み取れる個別加工時間値 $m(x_0 + \Delta x / 2)$ である．すなわち，初期生産量 x_0 個に追加分の半分の $\Delta x / 2$ 個を加えた $x_0 + \Delta x / 2$ 個目を生産したさいの個別時間値である．

すなわち，⑱式は初期生産量が x_0 個で追加注文 Δx 個を生産したときの追加生産量 Δx 個のみの単位加工時間 $a(x_0, \Delta x)$ を個別加工時間 $m(x_0 + \Delta x / 2)$ で求める近似式である．

以上，追加生産量の単位加工時間見積の二つの方法の計算例を次に示す．

――計算例 4.

工程の習熟率 p％が 85％，初度加工時間 c = 100 時間で，初期生産量 $x_0 = 250$ 個の単位加工時間 $y(x_0)$ が 27.4010 時間／個と実績データから分かっている．いま，追加注文 100 個がはいり追加生産量 $\Delta x = 100$ 個のみの単位加工時間 $a(x_0, \Delta x)$ を見積る．

まず，初期生産量 $x_0 = 250$ 個で，追加生産量 $\Delta x = 100$ 個とすると，追加生産量のみの単位加工時間 $a(250,100)$ は⑮式から次のようになる．

$$a(250,100) = \frac{t(250 + 100) - t(250)}{100}$$

(1) 初期総加工時間 t(250) は，実績データの単位加工時間 y(250) = 27.4010 時間／個に生産量 250 を掛けて求まる．

$$t(250) = y(250) \times 250$$
$$= 27.4010 \times 250$$
$$= 6850.25 \text{ 時間}$$

(2) また，追加分を含む総生産量 350 個の総加工時間 t(350) を求めるためには，まず，単位加工時間 y(350) を⑩式で求め，これに 350 個を掛ければよい．すなわち，

$$y(350) = 100 / k(85, 350)$$
$$= 100 \times 0.2532$$
$$= 25.32 \text{ 時間／個}$$

したがって，総加工時間 t(350) は，

$$t(350) = y(350) \times 350$$
$$= 25.32 \times 350$$
$$= 8862.00 \text{ 時間}$$

(3) よって，単位加工時間 a（250,100）は，

$$a(250,100) = \frac{8862.00 - 6850.25}{100}$$
$$= 20.12 \text{ 時間／個}$$

となる．

――計算例 5.

次に，上述の計算例 4. で求めた追加生産分の単位加工時間 a(250,100) を⑱式の近似式から求めてみる．

(1) a(250,100) は⑱式で次のようになる．

$$a(250,100) \fallingdotseq m(250 + 100/2)$$

上式の右辺は，

$$m(250 + 100/2) = m(300)$$

となる．

(2) すなわち，限界習熟曲線の⑰式で 300 個目の個別時間 m(300) を追加分の単位加工時間 a(250,100) の近似値とすることと同じである．したがって，

$$m(300) = c(1 - n(85))300^{-n(85)}$$

ただし，上式の右辺 c は実績データの初度加工時間であるから，

$$c = 100.00$$

数値表 1 から，

$$1 - n(85) = 0.7655$$

数値表 2 から，

$$300^{-n(85)} = 1/k(85,300)$$
$$= 0.2625$$

(3) よって，

$$m(300) = 100.00 \times 0.7655 \times 0.2625 = 20.0944\text{時間}$$

すなわち，追加分の単位加工時間は，

$a(250,100) \fallingdotseq 20.09$

となる．

結論的に，⑮式から求めた追加分の単位加工時間20.12時間／個より0.03時間ほど少なめの見積りであるが実用的には問題ないと考える．

---

4. 習熟曲線の最小二乗法による推定

ここでは，生産工程の実績データあるいは製品の試作データから，最小二乗法による，⑦式で定義した習熟曲線の初度工数cおよびn（p）の推定方法を示す．

次の表4は，一人で段取りから完成までを受け持つ椅子の手作り作業時間報告をまとめたものである．表4の実績データは月次で，その月の生産個数と所要工数を記録し，表の各項目を次のように算出している．

i ＝月

t_i ＝月次の所要工数（人時）をi月まで累計した累計工数である．

x_i ＝月次の生産個数をi月まで累計した累計個数である．

y_i ＝累計工数t_iを累計個数x_iで除した累計平均工数（人時／個）である．

⑦式で定義した指数モデルの習熟曲線を実績データの各項目の変数名にしたがって，あらためてここで定義すると次式になる．

$$y_i = cx_i^B \quad \cdots\cdots ⑲$$

ただし，

c＝最小二乗法で求まる習熟曲線モデルの仮説上の初度工数である．

B＝－n(p)とする．すなわち，⑦式の係数－n(p)は①式で求まる習熟率pから⑤式で算出できる．しかし，累計個数が倍になる累計平均工数の実績データがない場合，習熟率pを算出できないので，係数－n(p)をBとして推定し⑧式でpを求める．

次に，⑲式を対数変換すると

$$\log y_i = \log c + B \log x_i$$

となる．計算を簡単にするため，

$$X_i = \log x_i$$

$$Y_i = \log y_i$$

$$A = \log c$$

とすれば，⑲式の対数変換した式は，次のような簡単な一次の線型式になる．

$$Y_i = A + BX_i \quad \cdots\cdots ⑳$$

この⑳式の正規方程式を示せば，

$$AN + B\,\Sigma X_i = \Sigma Y_i$$

$$A\,\Sigma X_i + B\,\Sigma X_i^2 = \Sigma X_i Y_i$$

ただし，Nは月次データの数である．

この正規方程式から，係数AとBを求める．すなわち，

$$B = \frac{\Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i\,\Sigma Y_i / N}{\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2 / N} \quad \cdots\cdots ㉑$$

ただし，Bはそのまま係数－n(p)の値となる．

$$A = \Sigma Y_i / N - B\,\Sigma X_i / N \quad \cdots\cdots ㉒$$

ただし，この推定値Aから仮説上の初度工数cに

$$c = 10^A$$

で変換する必要がある．

以上を計算するために作成した表5の計算表の結果を㉑式に代入すると，

$$B = \frac{7.91076 - 51.22110 / 6}{8.49177 - 39.28185 / 6} = -0.3219311$$

Bは係数－n(p)であるから，数値表1または⑧式から習熟率pが求まる．

$$-n(p) = -0.3219311$$

$$p = 2^{-0.3219311}$$

$= 0.8000$

習熟率 p％は 80％とわかる．

いま，累計個数が 5 個と 10 個のとき，および 23 個と 46 個のときにそれぞれ累計個数が倍増しており，このときの累計平均工数の実績データを習熟率の定義式⑤式に代入し，次のように習熟率 p を求めることができる．

$$p = y(10) ／ y(5) = 23.750 ／ 29.700 = 0.7997$$

$$p = y(46) ／ y(23) = 14.565 ／ 18.196 = 0.8005$$

よって，推定した係数 n(p) で求められた習熟率とほぼ等しいことがわかる．

次に，係数 A は計算表の結果および算出した B を㉒式に代入して，

$$A = 8.17246/6 + 0.321930 \times 6.26752/6 = 1.69836$$

となり，A から c に変換すると，

$$c = 10^{1.69836} = 49.92973 \text{ 人時}$$

よって，仮説上の初度工数 c は 49.93 人時となり，実績データの 50 人時とほぼ等しいことが分かる．以上の計算結果から，

累計平均習熟曲線は，

$$y_i = 49.93\ x_i^{-0.3219}$$

となり，同時に以下の習熟曲線モデル式が求まることはいうまでもない．すなわち，

累計工数習熟曲線は⑪式から，

$$t_i = 49.93\ x_i^{1-0.3219} = 49.93\ x_i^{0.6781}$$

個別工数を表す限界習熟曲線は⑰式から，

$$m_i = 49.93(1 - 0.3219)x_i^{-0.3219} = 33.86\ x_i^{-0.3219}$$

となる．

図 3 の両対数グラフは，横軸を累計個数，縦軸を工数とし，表 4 の実績データの累計平均工数を●，累計工数を×でプロットした．同時に推定したモデル式の曲線を示した．プロットした点とモデル式の曲線がよく適合していることがわかる．ただし，限界習熟曲線上にプロットの点がないのは個別時間の実績データがないためである．

表 4．椅子製作の実績データ

月 i	月次所要工数	累計工数 t_i 人時	月次生産個数	累計個数 x_i	累計平均個数 y_i
1	50.00	50.00	1	1	50.000
2	98.50	148.50	4	5	29.700
3	89.00	237.50	5	10	23.750
4	181.00	418.50	13	23	18.196
5	138.50	557.00	12	35	15.914
6	113.00	670.00	11	46	14.565

注）i 月の累計工数とは月次工数を i 月まで累計した工数である．i 月の累計個数とは月次生産個数を i 月まで累計した個数である．i 月の累計平均工数とは i 月の累計工数を累計生産個数で除した単位工数である．なお，椅子 1 脚ごとの個別工数データはなかった．

表 5．計算表

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	0.00000	1.69897	0.00000	0.00000
2	0.69897	1.47276	0.48856	1.02941
3	1.00000	1.37566	1.00000	1.37566
4	1.36173	1.25997	1.85430	1.71573
5	1.54407	1.20179	2.38415	1.85564
6	1.66276	1.16332	2.76476	1.93431
計算結果	ΣX_i	ΣY_i	VX_i^2	ΣX_iY_i
	6.26752	8.17246	8.49177	7.91076
	$(\Sigma Xi)^2 = 39.28185$		$\Sigma X_i \Sigma Y_i = 51.22110$	

注）$X_i = \log x_i$　$Y_i = \log y_i$　データ数 N = 6

5. 大型バルブの原価見積例

大型バルブの原価見積における習熟曲線理論の活用例を示す．この大型バルブの各工程の手作業部分に習熟曲線理論が適用できる．

いま，大型バルブ50個の注文を受けた．大型バルブの加工工程は図4に示すように，バルブは機械職場で機械加工され，組立職場で組立てられ，検査職場で水圧検査され出荷される．なお，組立職場と検査職場は全て手作業である．

5.1 インプットデータ

原価見積に必要なインプットデータを簡単のため仮説数値で次のように設定する．

1）材料単価

バルブの材料は合金を使う．この合金1kgの価格は500円である．

2）材料消費量

大型バルブ1個を作る場合の材料消費量は100kgである．材料消費量（kg／個）は生産量の関係で歩留りが異なり，経験的に表6の通りである．

3）加工費率

各職場の加工費率は表7の通りである．

4）見積時間

各職場の大型バルブ1個を作る場合の時間見積すなわち初度加工時間は表8の通りである．

5）各職場の習熟率

各職場にある手作業時間に影響する習熟率p%は表9の通りである．

5.2 見積計算手順

以上の仮説数値で原価見積を実施すれば，次の通りである．

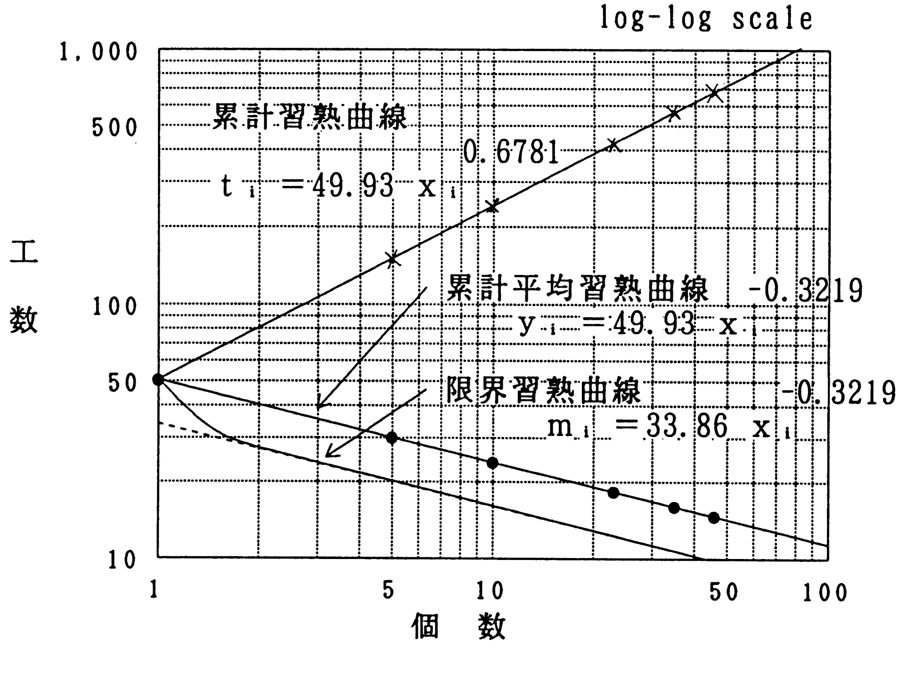

図3．椅子製作の習熟曲線（両対数グラフ）

注）実績データの累計平均工数●および累計工数×をプロットした．最小二乗法で推定した累計平均習熟曲線は仮説上の初度工数が約50人時／個で習熟率は80%であった．この推定式から，累計工数を表す累計工数習熟曲線，個別工数を表す限界習熟曲線をもとめ図中にそれぞれ示した．

(1) 材料費の見積：

材料費（50 個） ＝ 材料単価
× 材料消費量
× 加工個数
＝ @500
× 70kg/ 個
× 50 個
＝ 1,750,000 円……(1)

(2) 職械職場の加工費の見積：

① 段取後始末原価

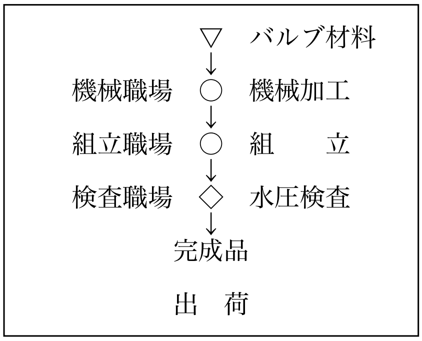

図 4. 大型バルブ加工工程

表 6. 大型バルブ材料消費量

生産実績（ロットサイズ）	材料消費量（kg/1 個）	生産実績（ロットサイズ）	材料消費量（kg/1 個）
1 個	100	30 個	85
10 個	95	50 個	70
20 個	90	100 個	60

表 7. 職場別加工費率

機械職場	固定費率　@2,000 円 変動費率　@1,000 円 労働費率　@2,000 円
組立職場	労働費率　@2,100 円
検査職場	労働費率　@1,500 円

段取り後始末は生産ロットサイズに関係なく一回限りであり固定費率と労働費率のみが発生し，習熟曲線は無関係である．

段取後始末時間 ＝ 1 時間

段取後始末原価 ＝［@2,000（固定費率）
＋ @2,000（労働費率）］
× 1 時間
＝ 4,000 円 ……①

② 機械作業原価

機械作業には固定費率，変動費率および労働費率の 3 者が発生する．

機械作業時間 ＝ 2 時間× 50 個
＝ 100 時間

機械作業原価 ＝［@2,000（固定費率）
＋ @1,000（変動費率）
＋ @2,000（労働費率）］
× 100 時間
＝ 500,000 円 ……②

③ 手作業原価

機械職場の手作業には，固定費率，変動費率および労働費率の 3 者が発生し，しかも手作業時間には，90％習熟曲線が影響する．したがって，バルブ 50 個の手作業時間 t(50) は，⑩式で求められる単位手作業時間 y(50) に個数 50 を掛け合わせて見積ることにすれば次のようになる．

表 8. 職場別作業時間見積

機械職場	段取後始末 機 械 作 業 手　作　業	1 時間 2 時間 1 時間
組立職場	段取後始末 手　作　業	0.5 時間 1.5 時間
検査職場	段取後始末 手　作　業	0.5 時間 0.5 時間

表 9. 職場別習熟率 p％

機械職場	90％
組立職場	80％
検査職場	90％

手作業時間 t(50) ＝ y(50) × 50 個
＝1時間
× 1/k(90, 50)
× 50 個
＝1時間
× 0.5518
× 50 個
＝27.590 時間
手作業原価 ＝［@2,000（固定費率）
＋@1,000（変動費率）
＋@2,000（労働費率）］
× 27.590 時間
＝137,950 円 ……③
したがって，機械職場の加工費の合計は次の通りとなる．
機械職場加工費 ＝ 4,000 ①
＋500,000 ②
＋137,950 ③
＝ 641,950 円 ……(2)

(3) 組立職場の加工費の見積：
① 段取後始末原価
段取後始末は一回限りであるから習熟曲線とは無関係であることに注意する．
段取後始末時間 ＝0.5 時間
段取後始末原価 ＝@2,100（労働費率）
× 0.5 時間
＝1,050 円 ……①
② 手作業原価
組立職場の手作業には，労働費率が発生し，手作業時間には80％習熟曲線が影響する．したがって，
手作業時間 t(50) ＝ y(50) × 50 個
＝1.5 時間
× 1/k(80,50)
× 50 個
＝1.5 時間
× 0.2838
× 50 個
＝21.285 時間
手作業原価 ＝@2,100（労働費率）
× 21.285 時間
＝44,699 円…②
したがって，組立職場の加工費の合計は次の通りとなる．
組立職場加工費 ＝ 1,050 ①
＋44,699 ②
＝ 45,749 円 ……(3)

(4) 検査職場の加工費の見積：
① 段取後始末原価
段取後始末は一回限りであるから習熟曲線とは無関係であることに注意する．
段取後始末時間 ＝0.5 時間
段取後始末原価 ＝@1,500（労働費率）
× 0.5 時間
＝ 750 円 ……①
② 手作業原価
検査職場の手作業には，労働費率が発生し，しかも手作業時間には90％習熟曲線が影響する．したがって，
手作業時間 t(50) ＝ y(50) × 50 個
＝0.5 時間
× 1/k(90,50)
× 50 個
＝0.5 時間
× 0.5518
× 50 個
＝13.795 時間
手作業原価 ＝@1,500（労働費率）
× 13.795 時間
＝20,693 円 ……②
したがって，検査職場の加工費の合計は次の通りとなる．
検査職場加工費 ＝ 750 ①
＋20,693 ②
＝ 21,443 円 ……(4)

以上の見積計算結果を表10の原価見積表に要約する．

6．まとめと展望

習熟曲線の数式モデルは⑦式に示した指数モデルが最も実用的と一般に考えられている．習熟率ｐのベキ乗モデル③式は生産量の増大と単位加工時間の逓減現象の規則性を習熟率ｐによって指数関数の知識を持たない初学者にも理解できると考え導入部で示した．

指数モデルから対数変換した対数線型モデルが１次の線型式となることから，習熟曲線モデルのパラメータは最小二乗法で推定できた．同時に，この習熟曲線モデルは両対数グラフに実績データをプロットした点を通る直接で表せる．このグラフ化の簡便さから実務によく利用されてきた．しかし，データの蓄積によりこの習熟曲線の精度や種々様々な工程の習熟特性を記録し分析するためデジタル計算処理が必要となると考え，習熟曲線モデルの数学的特性ならびに加工時間見積や原価見積に必要な計算方法ならびに数値表および計算表を工夫し本論で解説した．

原価見積に必要な習熟曲線理論の活用と原価見積手順を示した著作物は少ないようである．習熟曲線理論は標準原価を静態的に決定するのではなく，累積生産量とともに単位加工時間（工数）が逓減することを前提に原価を動態的に決定することができる．製造工程の習熟を考慮した詳細な分析はより正確で合理的な納期管理ならびに原価管理を達成するものと考える．

表 10．大型バルブ原価見積表

材 料 費		1,750,000（1）
加工費	職械職場	
	段取後始末	4,000
	機械作業	500,000
	手作業	137,950
	計	641,950（2）
	組立職場	
	段取後始末	1,050
	手作業	44,699
	計	45,749（3）
	検査職場	
	段取後始末	750
	手作業	20,693
	計	21,443（4）
総原価＝(1)＋(2)＋(3)＋(4)		2,459,142 円

大型バルブの原価見積例では，各職場で人的要因の大きい手作業部分の作業時間習熟のみを取りあげ原価見積の計算手順を示した．しかしながら，習熟曲線を応用して価格やコストと累積生産量との関係を表す経験曲線では，単位工数と累積生産量との関係を表す習熟曲線よりも 10％～ 20％も逓減傾向が大きいと報告されている．製品歩留，品質の向上そして材料コストの逓減などコストの逓減傾向を促進する要因を特定できないが，コストや価格は人的要因が工程や作業に比べさらに複雑で大きいのではなかろうか．ならば，製品より工場や会社全体の高いレベルの原価管理に習熟曲線の応用範囲を拡大できると考えられる．

最後に本研究は当大学の石尾登教授より多大の御助言と御指導を賜りました．また日本私学財団「特色ある教育研究」平成６年度私学補助「経営管理の理論とコンピュータ化の接点を探る」の石尾・片岡の共同研究成果の一部を引用しました．

参考文献

（1）Hirshmann, W. B.
“Learning Curve.”
Chemical Engineering,
Vol. 71, No. 7, 1964, pp. 95–100
（2）Hirshleiffer, J.
“The Firm’s Cost Function:
A Successful Reconstruction?”
Journal of Busines (Chicago),
Vol. 35, No. 3, 1962, pp. 235–255
（3）師岡孝次
「習熟性工学」
建帛社　1975，200 頁
（4）石尾・片岡
「原価計算プラクティス・セット」
豊橋短期大学　経営情報科テキスト