

Один метод построения Парето-оптимальных равновесий по Нэшу

К.Н. Кудрявцев¹, В.И. Жуковский², И.С. Стабулит³

¹ Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия
kudrkn@gmail.com

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются оптимальные по Парето равновесия по Нэшу. Получены достаточные условия существования таких равновесий, использующие свертку Гермейера функций выигрыша. В качестве примера построено Парето-оптимальное равновесие по Нэшу в игре Брайанта.

Ключевые слова: бескоалиционные игры, Парето-оптимальность, равновесие по Нэшу

Выбор равновесия в бескоалиционных играх является важной и непростой задачей. Одна из наиболее известных концепций равновесия – равновесие по Нэшу (*NE*) [1]. Это понятие широко используется в экономике, социологии, военных науках и во многих других областях человеческой деятельности. Однако, множеству ситуаций равновесия по Нэшу присуще одно негативное свойство: могут существовать две ситуации равновесия по Нэшу такие, что выигрыши каждого игрока в одной из них строго больше соответствующих выигрышей в другой.

Избавиться от такого «негатива» можно выбирая из всех равновесий по Нэшу то, которое одновременно является оптимальным по Парето (*PoNE*). Однако, разработанные на настоящий момент методы построения *NE* не могут гарантировать его оптимальность по Парето. Известные же нам методы поиска *PoNE* сводятся, как правило, к нахождению множества всех ситуаций равновесия по Нэшу, с последующим построением их Парето-границы (например [2,3]).

Предлагаемый метод построения *PoNE* сводится к нахождению седловой точки специального вида гермейеровской свертки функций выигрыша. В качестве примера, строится *PoNE* в игре Брайанта [4].

1 Оптимальное по Парето равновесие по Нэшу

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц в нормальной форме

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A. Kononov et al. (eds.): DOOR 2016, Vladivostok, Russia, published at <http://ceur-ws.org>

$$\langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle. \quad (1)$$

В (1) множество игроков $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, их стратегии $x_i \in X_i \subseteq R^{n_i}$ ($i \in \mathbf{N}$), ситуации $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = X_1 \times \dots \times X_N$, функция выигрыша i -го игрока есть $f_i(x)$. Далее используем обозначение $(x|z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$.

Определение 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, \dots, x_N^e)$ называется равновесной по Нэшу в игре (1), если

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x^e | x_i) = f_i(x^e) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2)$$

Игре (1) поставим в соответствие N -критериальную задачу

$$\langle X, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle. \quad (3)$$

Определение 2. Альтернатива $x^p \in X$ является оптимальной по Парето в (3), если при $\forall x \in X$ несовместна система неравенств

$$f_i(x) \geq f_i(x^p) \quad (i = 1, \dots, N),$$

из которых хотя бы одно – строгое.

Определение 3. Ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ называется Парето-оптимальным равновесием по Нэшу (PoNE) в игре (1), если она: во-первых, равновесна по Нэшу в игре (1); во-вторых, оптимальна по Парето в задаче (3).

2 Достаточные условия существования PoNE

Рассмотрим далее скалярные функции

$$\varphi_i(x, z) = f_i(z|x_i) - f_i(x) \quad (i \in \mathbf{N}), \quad \varphi_{N+1}(x, z) = \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i(x) - \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i(z), \quad (4)$$

где $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_i \in X_i$ ($i = 1, \dots, N$), $z \in X$, $x \in X$. Гермейеровской сверткой [5] скалярных функций (4) будет

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z). \quad (5)$$

Сопоставим игре (1) вспомогательную антагонистическую игру

$$\langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle, \quad (6)$$

в которой первый игрок выбирает свою стратегию $x \in X$ с целью увеличить, а его противник формирует стратегию $z \in X$, стремясь уменьшить значение платежной функции $\varphi(x, z)$ из (4), (5).

Седловая точка (x^0, z^*) в игре (6) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z) \quad \forall x, z \in X.$$

В [6] были получены достаточные условия существования PoNE, основанные на следующей теореме.

Теорема 1. Если в антагонистической игре (6) существует седловая точка (x^0, z^*) , то минимаксная стратегия z^* есть PoNE в бескоалиционной игре (1).

Видимо, при построении PoNE более удобным, чем теорема 1, является следующее следствие.

Следствие 1. Если в антагонистической игре (6) минимакс $\min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = 0$, то минимаксная стратегия z^* есть PoNE в бескоалиционной игре (1).

3 Игра Брайанта

В качестве примера рассмотрим игру Брайанта [4]. В игре принимает участие n игроков, стратегии которых $x_i \in [0, 5]$ ($i = 1, \dots, n$). На множестве X ситуаций $x = (x_1, \dots, x_n)$ определены функции выигрыша игроков

$$f_i(x) = 2 \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - x_i. \quad (7)$$

Множество равновесий по Нэшу в этой игре имеет вид [4]

$$X^e = \{x^e = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda) \mid \forall \lambda \in [0, 5]\},$$

но PoNE будет только $x^e = (5, 5, \dots, 5)$.

Итак, используя следствие 1, построим свертку Гермейера (5), где функции

$$\varphi_i(x, z) = 2 \min\{z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_n\} - x_i - \\ - 2 \min\{z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n\} + z_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (8)$$

$$\varphi_{n+1}(x, z) = 2n \min\{x_1, \dots, x_n\} - x_1 - x_2 - \dots - x_n - \\ - 2n \min\{z_1, \dots, z_n\} + z_1 + z_2 + \dots + z_n. \quad (9)$$

Для $i = 1, \dots, n$ из (8) будет

$$\varphi_i(x, z) = \begin{cases} x_i - 2 \min \{z_1, \dots, z_n\}, & x_i \leq \min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n\}, \\ 2 \min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_n\} - x_i - \\ \quad - 2 \min \{z_1, \dots, z_n\} + z_i, & x_i > \min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n\}. \end{cases}$$

Ясно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ максимум $\varphi_i(x, z)$ по $x_i \in [0, 5]$ достигается при $x_i(z) = \min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n\}$. При этом

$$\max_{x_i \in [0, 5]} \varphi_i(x, z) = \min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_n\} - 2 \min \{z_1, \dots, z_n\} + z_i.$$

Так как $\min \{z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, z_n\} \geq \min \{z_1, \dots, z_n\}$ и $z_i \geq \min \{z_1, \dots, z_n\}$, то

$$\max_{x \in X} \varphi_i(x, z) \geq 0 \quad \forall z \in X, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Легко заметить, что максимум (9) по $x \in X$ получится при $x = (5, 5, \dots, 5)$, и

$$\max_{x \in X} \varphi_{n+1}(x, z) = 5n - 2n \min \{z_1, \dots, z_n\} + z_1 + \dots + z_n. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что при $\forall z \in X$ будет $\max_{x \in X} \varphi(x, z) = \max_{x \in X} \varphi_{n+1}(x, z)$.

Осталось заметить, что минимум по $z \in X$ функции $\max_{x \in X} \varphi(x, z)$ достигается при $z^* = (5, 5, \dots, 5)$ и $\min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = 0$. Следовательно PoNE в исходной игре будет ситуация $z^* = (5, \dots, 5)$.

4 Заключение

Предложенный подход позволяет свести поиск PoNE к задаче построения седловой точки во вспомогательной антагонистической игре. Заметим, что численные методы построения седловой точки гермейеровской свертки ранее не разрабатывались. Вероятно, в этой задаче есть свои особенности, изучением которых авторы планируют заняться в будущем.

Список литературы

1. Nash, J.F.: Equilibrium points in N-person games. Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 36, 48 - 49 (1950)
2. Gasko, N., Suci, M., Lung, R.I., Dumitrescu, D.: Pareto-optimal Nash equilibrium detection using an evolutionary approach. Acta Univ. Sapientiae, Informatica 4 N.2, 237 - 246 (2012)
3. Gatti, N., Rocco, M., Sandhom, T.: On the verification and computation of strong Nash equilibrium. Proceedings of the ACM International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, Saint Paul, USA, May 6-10, 723 - 730 (2013)

4. Bryant, J.: A simple rational expectations Keynes type model. *Quarterly J. Economics* 98, 525 – 529 (1983)
5. Гермейер, Ю.Б.: Введение в теорию исследования операций. М.: Наука (1971)
6. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н.: Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях. *Математическая теория игр и ее приложения*. Т.7, N.1. 74 - 91 (2015)

One Method for Constructing Pareto-Optimal Nash Equilibriums

Konstantin Kudryavtsev¹, Vladislav Zhukovskiy² and Irina Stabulit³

¹ South Ural State University, 76 Lenin Ave., Chelyabinsk, Russian Federation
kudrkn@gmail.com

² M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, Russian Federation

³ Chelyabinsk State University, 129 Bratiev Kashirinykh st., Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. In this paper the strategy profiles that are the Pareto-optimal Nash equilibriums are considered. Sufficient conditions for existence of the equilibrium for the pure strategies are found. These conditions use the Germier convolutions of the utility functions. For example, Pareto-optimal Nash equilibrium in Bryant games is constructed.

Keywords: non-cooperative game, Pareto-optimums, Nash equilibrium