



## La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions



### *The Landau critical velocity for a particle in a Fermi superfluid*

Yvan Castin\*, Igor Ferrier-Barbut, Christophe Salomon

Laboratoire Kastler-Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités et Collège de France, Paris, France

#### INFO ARTICLE

##### Historique de l'article :

Disponible sur Internet le 29 janvier 2015

##### Mots-clés :

Gaz de fermions  
Superfluidité  
Vitesse critique  
Critère de Landau  
Atomes froids

##### Keywords:

Fermi gases  
Superfluidity  
Critical velocity  
Landau criterion  
Ultracold atoms

#### RÉSUMÉ

Nous déterminons la vitesse critique  $v_c^L$  d'une impureté en mouvement dans un superfluide de fermions par un raisonnement à la Landau, c'est-à-dire en nous limitant aux processus d'excitation minimale du superfluide par la particule.  $v_c^L$  est alors la plus petite des vitesses auxquelles ces processus sont énergétiquement permis. Comme le superfluide de fermions possède deux branches d'excitation, l'une fermionique prédite par la théorie de BCS et consistant à briser des paires de fermions, l'autre bosonique prédite par la RPA d'Anderson et consistant à les mettre en mouvement, il y a une vitesse critique de Landau  $v_{c,f}^L$  et  $v_{c,b}^L$  associée à chaque branche et  $v_c^L$  est la plus petite des deux. Dans l'espace des paramètres (force des interactions dans le superfluide, masse relative fermion-impureté), nous trouvons deux lignes de transition, correspondant respectivement à la discontinuité des différentielles première et seconde de  $v_c^L$ . Ces deux lignes se rejoignent en un point triple et partitionnent le plan en trois domaines. Nous étendons succinctement cette analyse au cas, très récemment réalisé à l'ENS, où l'objet en mouvement dans le superfluide de fermions est un superfluide d'impuretés bosoniques en interaction faible, plutôt qu'une impureté seule. Lorsque le potentiel chimique des bosons reste petit devant l'énergie de Fermi des fermions, la topologie des lignes de transition sur  $v_c^L$  ne change pas ; un résultat marquant est alors qu'au domaine  $v_c^L = c$ , où  $c$  est la vitesse du son dans le superfluide de fermions, correspond maintenant un domaine  $v_c^L = c + c_B$ , où  $c_B$  est la vitesse du son dans le superfluide de bosons, avec des frontières légèrement déplacées.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

#### ABSTRACT

We determine at the Landau the critical velocity  $v_c^L$  of a moving impurity in a Fermi superfluid, that is by restricting it to the minimal excitation processes of the superfluid.  $v_c^L$  is then the minimal velocity at which these processes are energetically allowed. The Fermi superfluid actually exhibits two excitation branches: one is the fermionic pair-breaking excitation, as predicted by BCS theory; the other one is bosonic and sets pairs into motion, as predicted by Anderson's RPA.  $v_c^L$  is the smallest of the two corresponding critical velocities  $v_{c,f}^L$  and  $v_{c,b}^L$ . In the parameter space (superfluid interaction strength, fermion-to-impurity mass ratio), we identify two transition lines, corresponding to a discontinuity of the first-order and second-order derivatives of  $v_c^L$ . These two lines meet in a triple

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [yvan.castin@lkb.ens.fr](mailto:yvan.castin@lkb.ens.fr) (Y. Castin).

point and split the plane in three domains. We briefly extend this analysis to the very recently realized case at ENS, where the moving object in the Fermi superfluid is a weakly interacting Bose superfluid of impurities, rather than a single impurity. For a Bose chemical potential much smaller than the Fermi energy, the topology of the transition lines is unaffected; a key result is that the domain  $v_c^L = c$ , where  $c$  is the sound velocity in the Fermi superfluid, is turned into a domain  $v_c^L = c + c_B$ , where  $c_B$  is the sound velocity in the Bose superfluid, with slightly shifted boundaries.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction, rappels et motivations

Les gaz dégénérés d'atomes neutres fermioniques de spin  $1/2$  en interaction, supposés ici non polarisés, c'est-à-dire avec des populations égales dans les deux états internes, sont réalisables en laboratoire depuis 2002 [1]. Ils présentent, en dessous d'une température critique, deux propriétés quantiques macroscopiques remarquables et bien distinctes. La première est la présence d'un condensat de paires, c'est-à-dire l'existence d'un mode macroscopiquement peuplé de l'opérateur densité à deux corps [2], qui se traduit physiquement par une longueur de cohérence macroscopique pour le champ de paires, limitée donc seulement par la taille du système. Cet « ordre à longue portée » est en principe mesurable directement par interférométrie [3], mais c'est pour l'instant la fraction de paires condensées  $f_c$  que l'on sait mesurer [4]. La seconde propriété, celle qui nous intéresse ici, est la superfluidité. Elle a la réputation d'être plus subtile, puisqu'elle met en jeu un ensemble de phénomènes complémentaires, dont certains reposent sur la métastabilité plutôt que sur des propriétés à l'équilibre. Nous en retiendrons ici deux aspects, en passant sous silence les réseaux de tourbillons quantiques [5] et les courants permanents.

Le premier aspect met en jeu la notion de fraction superfluide  $f_s$  : pour des conditions aux limites périodiques cubiques de période  $L$ , c'est la fraction du gaz qui n'est pas entraînée par un potentiel extérieur en mouvement, même au bout d'un temps arbitrairement long permettant au système d'atteindre l'équilibre thermique dans le repère en mouvement. Si le potentiel extérieur se déplace selon la direction  $Ox$ , à la vitesse  $v$ , la fraction normale  $f_n = 1 - f_s$  du gaz est par définition entraînée à cette même vitesse, si bien que

$$1 - f_s = \lim_{N \rightarrow \infty, \rho = \text{cte}} \lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\langle P_x \rangle}{Nmv} \quad (1)$$

où le gaz, composé de  $N$  atomes de masse  $m$  et de densité  $\rho = N/L^3$ , possède à l'équilibre une impulsion moyenne totale  $\langle P_x \rangle$  selon  $Ox$  en présence du potentiel extérieur. La triple limite doit être prise dans cet ordre, afin que la fraction normale soit une quantité intrinsèque. On fait d'abord tendre vers zéro l'amplitude  $\eta$  du potentiel extérieur, afin que  $f_n$  ne dépende pas de la forme du potentiel. Puis l'on fait tendre la vitesse d'entraînement vers zéro, avant de prendre la limite thermodynamique, de façon que l'on ait toujours :

$$v \ll \frac{2\pi\hbar}{mL} \quad (2)$$

En effet, prendre  $v$  égale au quantum de vitesse  $2\pi\hbar/(mL)$  permettrait, par invariance galiléenne des conditions aux limites périodiques à cette vitesse, de conclure que le gaz est au repos dans le référentiel du potentiel extérieur, ce qui conduirait à  $\langle P_x \rangle = Nmv$  dans le référentiel du laboratoire, et donc au résultat invariable (et non physique)  $f_n = 1$  [6]. La fraction superfluide  $f_s$  du gaz de fermions de spin  $1/2$  non polarisé a été très récemment mesurée dans le régime d'interaction forte, en fonction de la température  $T$  [7], et a permis de vérifier que la transition de phase superfluide se produit à la même température que celle de la condensation de paires [4] et que celle déduite des singularités de grandeurs thermodynamiques [8]. Une propriété importante attendue, et confirmée expérimentalement sur d'autres systèmes, est que  $f_s \rightarrow 1$  à température nulle.

Le deuxième aspect de la superfluidité, limité en toute rigueur au cas d'une température nulle, est l'existence d'une vitesse critique  $v_c$  en dessous de laquelle un objet traversant le gaz ne subit aucune force de friction et ne peut y déposer de l'énergie, donc y a un mouvement non amorti. Cet aspect a bien été observé dans les gaz d'atomes froids fermioniques pour un réseau optique unidimensionnel en mouvement [9]. Le calcul de la vitesse critique est souvent ardu, et le résultat dépend en général des caractéristiques de l'objet et de son couplage au gaz [10]. Cependant, pour un couplage arbitrairement faible à la densité du gaz,<sup>1</sup> dans l'esprit de la définition (1), on est conduit à se limiter, comme l'a fait Landau pour un gaz de bosons [11], à la première étape dans la dissipation de l'énergie cinétique de l'objet, à savoir la création du nombre minimal possible d'excitations élémentaires dans le gaz, une seule dans le cas de [11]. Formellement, ceci revient à calculer l'amplitude de diffusion de l'objet sur le gaz dans l'approximation de Born, au premier ordre en la constante de couplage

<sup>1</sup> Ce couplage peut être un couplage effectif : pour un objet quasi-pontuel, il est proportionnel à sa longueur de diffusion dans l'onde  $s$  avec les atomes du gaz.

gaz–objet, ou à évaluer le taux d'émission d'excitations par l'objet selon la règle d'or de Fermi, au second ordre en la constante de couplage ; dans les deux cas apparaît en facteur une distribution de Dirac assurant la conservation de l'énergie non perturbée [12]. Dans le présent travail, l'objet est, sauf dans la section 5, une particule de masse  $M$ , discernable des atomes du gaz, de vitesse initiale  $v$  donc d'énergie cinétique initiale  $\frac{1}{2}Mv^2$ . Après émission dans le gaz d'une excitation de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  et d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{q}}$ , sa vitesse vaut  $\mathbf{v} - \hbar\mathbf{q}/M$ , par conservation de l'impulsion, d'où

$$\hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \epsilon_{\mathbf{q}} \quad (3)$$

par conservation de l'énergie non perturbée. Comme  $|\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}| \leq qv$ , cette condition n'est satisfaite pour aucun  $\mathbf{q}$  si  $v$  est inférieure à la vitesse critique de Landau :

$$v_c^L = \inf_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \quad \text{avec } v_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \epsilon_{\mathbf{q}} \quad (4)$$

Un calcul de  $v_c^L$  pour une particule de masse  $M \rightarrow +\infty$  a été effectué dans la référence [13] avec les théories approchées de BCS et de la RPA ; il a fallu pour cela prendre en compte les deux branches d'excitation du superfluide de fermions, la branche fermionique avec bande interdite, décrivant la brisure des paires de Cooper d'atomes, et la branche bosonique sans bande interdite, mais de départ phononique en  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , décrivant la mise en mouvement des paires. On obtient ainsi [13]

$$v_c^L(\alpha = 0) = \min(\{[(\mu^2 + \Delta^2)^{1/2} - \mu]/m\}^{1/2}, c) \quad (5)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le superfluide de fermions de potentiel chimique  $\mu$  et de gap  $\Delta$ , et l'on note le rapport de masse d'un fermion et de l'impureté

$$\alpha = \frac{m}{M} \quad (6)$$

Le fait que la vitesse critique soit non nulle pour  $M \rightarrow +\infty$  semble contredire le raisonnement qui suit l'équation (2), l'effet d'un objet de masse infinie sur le superfluide pouvant être assimilé à celui d'un potentiel extérieur défilant à vitesse constante : on devrait donc avoir  $v_c \leq 2\pi\hbar/(mL) \rightarrow 0$  à la limite thermodynamique. C'est bien la notion (subtile) de métastabilité qui permet alors de donner un sens au raisonnement de Landau et de croire à la vitesse critique prédite  $v_c^L$  pour des temps assez courts : lorsque  $v < v_c^L$ , le premier pas vers la dissipation est bloqué par une barrière d'énergie, mais rien n'empêche que le système puisse franchir cette barrière aux temps longs par des processus d'ordre arbitrairement élevé en le couplage gaz–objet, correspondant à une énergie d'excitation  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  bien différente de celle des excitations élémentaires de l'équation (4). Ainsi, le processus improbable d'ordre  $N$  mettant en mouvement l'ensemble du gaz à la vitesse  $2\pi\hbar/(mL)$  selon  $Ox$ , par translation en impulsion de chacun de ses atomes de  $2\pi\hbar/L$  selon cette direction, correspond à  $q = 2\pi N/L$  et  $\epsilon_{\mathbf{q}} = N(2\pi\hbar)^2/(2mL^2)$ , donc à une vitesse critique  $v_{\mathbf{q}} = 2\pi\hbar/(2mL)$ , qui s'annule bien à la limite thermodynamique<sup>2</sup> pourvu que  $M$  reste  $\gg Nm$ .<sup>3</sup>

L'objectif du présent travail est d'étendre les calculs de la référence [13] au cas d'une masse  $M$  finie. Il y a pour cela une très forte motivation expérimentale : la prédiction de Landau pour la vitesse critique d'une impureté atomique dans un condensat de Bose–Einstein a été confirmée au MIT [16], et pourrait bientôt être mesurée dans un superfluide de fermions, grâce au mélange de bosons et de fermions superfluides récemment obtenu à l'ENS [17]. Le calcul de  $v_c^L$  pour une particule de masse  $M$  est effectué ici en trois étapes : on détermine successivement la vitesse critique  $v_{c,f}^L$  due à la branche d'excitation fermionique de BCS dans la section 2, celle  $v_{c,b}^L$  due à la branche bosonique de la RPA dans la section 3, la plus petite des deux vitesses donnant finalement  $v_c^L$  dans la section 4. Comme la référence [17] met en mouvement dans le superfluide de fermions un condensat de Bose–Einstein plutôt qu'une impureté seule, il convient de modifier la formule de Landau (4) pour prendre en compte l'effet des interactions entre les impuretés, ce qui est fait dans la section 5. Nous concluons dans la section 6.

## 2. Vitesse critique sur la branche fermionique

On pourrait croire naïvement que la vitesse critique  $v_{c,f}^L$  associée à la branche d'excitation fermionique du superfluide se déduit de l'expression générale (4) en prenant pour  $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$  la relation de dispersion correspondante  $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{f,\mathbf{k}}$  des quasiparticules fermioniques. Cependant, ce serait à tort, car ce serait faire fi des contraintes imposées par la conservation du

<sup>2</sup> Il est plus habituel d'invoquer comme excitation macroscopique la création par l'objet en mouvement d'un anneau de vorticité de rayon  $R$  dans le gaz, d'énergie d'excitation en  $R \ln R$  et d'impulsion en  $R^2$  [14]. Lorsque  $R$  est de l'ordre du diamètre du gaz, on aboutit cependant aux mêmes lois d'échelle en  $N$  et  $L$  pour  $q$ ,  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  et  $v_{\mathbf{q}}$ , à un facteur  $\ln L$  près dans  $\epsilon_{\mathbf{q}}$ . Quand l'objet est une particule quasi ponctuelle faiblement couplée au superfluide, l'émission d'un anneau de vorticité reste de toute façon improbable aux vitesses inférieures à  $v_c^L$  [12].

<sup>3</sup> Pour une masse  $M$  finie et un couplage répulsif suffisamment faible entre l'impureté et le superfluide, il a été montré récemment qu'il existe une véritable vitesse critique  $v_c$  non nulle à la limite thermodynamique, sans considération de métastabilité, donc même pour un temps d'interaction arbitrairement long entre l'impureté et le superfluide [15]. Lorsque le couplage tend vers zéro,  $v_c$  est obtenue en incluant dans (4) toutes les excitations possibles du superfluide, et pas seulement le nombre minimal d'excitations élémentaires, comme il sera fait ici. Pour l'anneau de vorticité de la note précédente, on trouve alors, après minimisation de  $v_{\mathbf{q}}$  sur le rayon de l'anneau, que  $v_c$  tend vers zéro en  $(\ln M)^{2/3}/M^{1/3}$  lorsque  $M \rightarrow +\infty$ .

nombre total de fermions. En réalité, l'impureté de masse  $M$  ne peut, par interaction avec le superfluide initialement dans le vide de quasi-particules, faire apparaître qu'un nombre *pair* d'excitations fermioniques. Ceci est particulièrement clair dans le cadre de la théorie de BCS : l'écriture en seconde quantification du hamiltonien d'interaction à deux corps entre l'impureté et les fermions fait apparaître les champs fermioniques  $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ ,  $\sigma = \pm 1/2$ , seulement *via* des termes quadratiques de la forme  $\hat{\psi}_\sigma^\dagger \hat{\psi}_{\sigma'}$  ; or, chaque  $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$  est une combinaison linéaire d'opérateurs d'annihilation  $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$  et de création  $\hat{b}_{\mathbf{k}-\sigma}^\dagger$  de quasi-particules, qui changent la parité de leur nombre. Dans le raisonnement à la Landau, il faut donc supposer que l'impureté crée au minimum *deux* quasi-particules fermioniques, de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . L'impureté subit alors un changement d'impulsion de  $-\hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  et acquiert une énergie de recul de  $\hbar^2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2/(2M)$ , ce qui conduit à la vitesse critique<sup>4</sup> :

$$v_{c,f}^L = \inf_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{2M} + \epsilon_{f, \mathbf{k}_1} + \epsilon_{f, \mathbf{k}_2}}{\hbar|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \quad (7)$$

Comme rien n'empêche d'effectuer la minimisation (sur  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ ), d'abord sur  $\mathbf{k}_1$  à  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  fixé, puis sur  $\mathbf{q}$ , on peut se ramener à une écriture plus opérationnelle et formellement équivalente à celle de l'équation (4) :

$$v_{c,f}^L = \inf_{\mathbf{q}} v_{f, \mathbf{q}} \quad \text{avec } v_{f, \mathbf{q}} = \frac{\frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \epsilon_{f, \mathbf{q}}^{\text{eff}}}{\hbar q} \quad (8)$$

où  $\epsilon_{f, \mathbf{q}}^{\text{eff}}$  est le bord inférieur du continuum à deux quasi-particules fermioniques au vecteur d'onde total fixé  $\mathbf{q}$  :

$$\epsilon_{f, \mathbf{q}}^{\text{eff}} \equiv \inf_{\mathbf{k}_1} (\epsilon_{f, \mathbf{k}_1} + \epsilon_{f, \mathbf{k}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{k}_1}) \quad (9)$$

Comme la relation de dispersion  $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{f, \mathbf{k}}$  est une fonction lisse du vecteur d'onde divergente à l'infini, la borne inférieure dans l'équation (9) est atteinte en un point de stationnarité, c'est-à-dire de gradient nul par rapport à  $\mathbf{k}_1$ , de la fonction à minimiser. Comme la relation de dispersion est de plus isotrope,

$$\epsilon_{f, \mathbf{k}} = \epsilon_f(k) \quad (10)$$

le gradient est nul si et seulement si

$$\epsilon'_f(k_1) \hat{\mathbf{k}}_1 = \epsilon'_f(k_2) \hat{\mathbf{k}}_2 \quad (11)$$

avec  $\hat{\mathbf{k}}_i$  la direction  $\mathbf{k}_i/k_i$  du vecteur  $\mathbf{k}_i$ ,  $\epsilon'_f(k)$  la dérivée de la fonction  $\epsilon_f(k)$ , et où l'on a toujours  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{k}_1$ . Il y a donc en général quatre branches de stationnarité possibles :

$$(i) : \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}/2, \quad (ii) : \hat{\mathbf{k}}_1 = \hat{\mathbf{k}}_2, k_1 \neq k_2, \quad (iii) : \hat{\mathbf{k}}_1 = -\hat{\mathbf{k}}_2, \quad (iv) : \epsilon'_f(k_1) = \epsilon'_f(k_2) = 0 \quad (12)$$

Dans les deux cas intermédiaires, les dérivées  $\epsilon'_f(k_1)$  et  $\epsilon'_f(k_2)$  sont, bien entendu, respectivement égales et opposées.

Particularisons cette discussion au cas de la théorie de BCS, de relation de dispersion :

$$\epsilon_{f, \mathbf{k}} = \epsilon_f(k) = \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

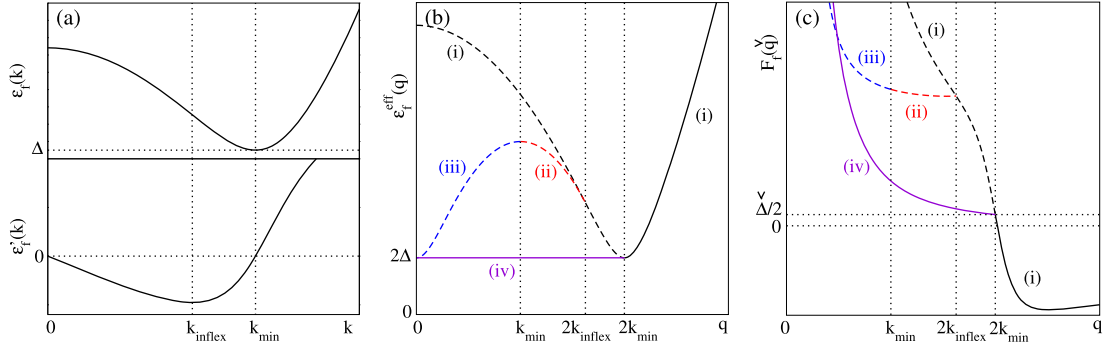
Pour un potentiel chimique  $\mu > 0$ , elle présente une forme de chapeau mexicain, donc un caractère fermionique bien affirmé, avec une bande interdite de largeur le gap  $\Delta$ . La fonction  $\epsilon_f(k)$  est alors concave décroissante jusqu'au point d'inflexion  $k_{\text{inflex}}$ , puis convexe décroissante jusqu'à la position  $k_{\text{min}}$  de son minimum,

$$k_{\text{min}} = \frac{(2m\mu)^{1/2}}{\hbar} \quad (14)$$

et enfin convexe croissante au-delà. Les quatre branches de stationnarité peuvent alors être réalisées. Contrairement à la branche (i), les autres branches n'existent que pour  $q = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$  assez faible. Pour explorer la branche (ii), on peut se limiter à  $k_1 \in [0, k_{\text{inflex}}]$  et  $k_2 \in [k_{\text{inflex}}, k_{\text{min}}]$ , et l'on trouve que  $q = k_1 + k_2$  décrit  $[k_{\text{min}}, 2k_{\text{inflex}}]$  ; de même, pour la branche (iii), on peut prendre  $0 \leq k_1 \leq k_{\text{min}} \leq k_2$ , et l'on trouve que  $q = k_2 - k_1$  décrit  $[0, k_{\text{min}}]$ .<sup>5</sup> Finalement, la branche (iv) correspond

<sup>4</sup> Dans le cas d'un objet en mouvement de masse infinie, on trouve pourtant dans la littérature la formule habituelle  $v_{c,f}^{\text{hab}} = \inf_{\mathbf{q}} \epsilon_f(q)/(\hbar q)$  [13], avec  $\epsilon_f(q) = \epsilon_{f, \mathbf{q}}$ , ce qui semble relever de l'erreur naïve susmentionnée. En réalité, notre équation (7) redonne bien  $v_{c,f}^{\text{hab}}$  lorsque  $M \rightarrow +\infty$ . D'une part,  $\lim_{M \rightarrow +\infty} v_{c,f}^L \leq v_{c,f}^{\text{hab}}$  puisque dans l'équation (7) apparaissent en particulier les configurations  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ . D'autre part, la minimisation sur les directions de  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  à modules fixés est immédiate lorsque  $M = +\infty$ , il faut prendre les vecteurs d'onde colinéaires et de même sens, et il reste  $\lim_{M \rightarrow +\infty} v_{c,f}^L = \inf_{k_1, k_2} \frac{\epsilon_f(k_1) + \epsilon_f(k_2)}{\hbar(k_1 + k_2)}$ , qui est  $\geq v_{c,f}^{\text{hab}}$  puisque  $\epsilon_f(k_i) \geq \hbar k_i v_{c,f}^{\text{hab}}$  pour tout  $k_i$ .

<sup>5</sup> Ceci résulte du fait que  $k_1 + k_2$  pour (ii) et  $k_1 - k_2$  pour (iii) sont des fonctions croissantes de  $k_1$ . Les branches (ii) et (iii) se raccordent de façon lisse ( $C^\infty$ ) en  $q = k_{\text{min}}$ , comme on peut le voir en introduisant la quantité algébrique  $\bar{k}_1 \in [-k_{\text{min}}, k_{\text{inflex}}]$  et l'extension correspondante  $\phi(\bar{k}_1) = \epsilon_{f, \bar{k}_1, \bar{k}_1}$  de  $\epsilon_f(k_1)$  aux arguments négatifs. L'unique solution  $k_2 \geq k_{\text{inflex}}$  de  $\phi'(k_2) = \phi'(\bar{k}_1)$  permet alors un paramétrage lisse  $q = \bar{k}_1 + k_2(\bar{k}_1)$  de l'ensemble (ii) plus (iii). En revanche, (i) et (ii), ainsi que (iv) et (i), se raccordent de façon  $C^1$  seulement : en  $q = 2k_{\text{inflex}}$ , la dérivée seconde est nulle sur (i) et vaut  $-3[\epsilon_f^{(3)}(k_{\text{inflex}})]^2/[2\epsilon_f^{(4)}(k_{\text{inflex}})] < 0$  sur (ii) ; en  $q = 2k_{\text{min}}$ , la dérivée seconde est nulle sur (iv) et vaut  $\epsilon_f''(k_{\text{min}})/2 > 0$  sur (i).



**Fig. 1.** (Couleur en ligne.) Pour la branche d'excitation fermionique de la théorie de BCS à potentiel chimique  $\mu > 0$ , (a) relation de dispersion  $\epsilon_f(k)$  et sa dérivée première  $\epsilon'_f(k)$ , utiles à la discussion des branches de stationnarité (12); (b) les branches en question en fonction de  $q$ , en trait plein si d'énergie minimale, en tireté sinon; (c) fonction  $F_f(q)$  permettant de minimiser  $v_f(q)$  par discussion graphique, voir l'équation (16). Les quantités sur l'axe vertical de (c) sont adimensionnées, comme il est précisé dans le texte.

simplement à  $k_1 = k_2 = k_{\min}$ , et à  $q$  variant de 0 à  $2k_{\min}$ . Sur son domaine d'existence, la branche (iv) est clairement celle d'énergie minimale, puisque les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  des deux quasi-particules sont au fond de la rigole du chapeau mexicain. Au-delà, les branches (ii) et (iii) n'existent plus donc l'énergie minimale est obtenue sur la branche (i). Cette discussion est illustrée sur la figure 1. Nous retenons donc, pour  $\mu > 0$ ,

$$\epsilon_f^{\text{eff}}(q) \underset{\text{branche (iv)}}{\stackrel{q \leq 2k_{\min}}{=} 2\Delta}, \quad \epsilon_f^{\text{eff}}(q) \underset{\text{branche (i)}}{\stackrel{q \geq 2k_{\min}}{=} 2\epsilon_f(q/2)} \quad (15)$$

en accord avec la référence [13]. Pour un potentiel chimique  $\mu < 0$ , lorsque les paires de Cooper d'atomes tendent à se bosoniser, la relation de dispersion (13) est une fonction convexe, avec une bande interdite de largeur  $(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}$ . Comme  $\epsilon_f(k)$  est alors strictement croissante pour  $k > 0$ , seule la branche (i) est réalisée.

Pour obtenir la contribution de la branche fermionique de BCS à la vitesse critique de Landau, il reste à minimiser la fonction  $v_{f,q} = v_f(q)$  dans l'équation (8). Comme cette fonction dérivable diverge en  $q = 0$  et en  $q = \infty$ , elle atteint son minimum avec une dérivée nulle en un point  $q_0$ ,  $v'_f(q_0) = 0$ . On adimensionne le problème en exprimant les nombres d'onde  $q$  et  $q_0$  en unités de  $(2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$  (c'est-à-dire  $k_{\min}$  si  $\mu > 0$ ), les énergies  $\epsilon_f^{\text{eff}}$  et  $\Delta$  en unités de  $|\mu|$  et les vitesses  $v_f(q)$  et  $v_{c,f}^L$  en unités de  $[|\mu|(2m)]^{1/2}$ , ce qui conduit à  $\check{v}_f(\check{q}) = \alpha\check{q} + \frac{\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})}{\check{q}}$  et à la jolie équation implicite

$$\alpha = F_f(\check{q}_0) \quad \text{avec} \quad F_f(\check{q}) = \frac{d}{d\check{q}} \left( -\frac{\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})}{\check{q}} \right) \quad \text{et} \quad \check{v}_{c,f}^L = \alpha\check{q}_0 + \frac{\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q}_0)}{\check{q}_0} \quad (16)$$

Ici, le symbole suscrit repère les variables sans dimension et le rapport de masse  $\alpha$  est donné par l'équation (6). Une discussion graphique de l'équation (16) est facile à effectuer. Dans le cas le plus riche  $\mu > 0$ , les différentes branches de la fonction  $F_f$ , correspondant aux branches (12) de la fonction  $\epsilon_f^{\text{eff}}$ , sont représentées sur la figure 1c; seules les lignes en trait plein sont à prendre en compte, puisqu'elles correspondent aux branches d'énergie minimale. On voit donc que, pour  $\alpha > \check{\Delta}/2$ , la vitesse critique est réalisée sur la branche (iv), avec  $\check{q}_0 = (2\check{\Delta}/\alpha)^{1/2}$  et

$$\check{v}_{c,f}^L \underset{\text{branche (iv)}}{\stackrel{\alpha > \check{\Delta}/2}{=} 2(2\check{\Delta}\alpha)^{1/2}} \quad (17)$$

Pour  $\alpha < \check{\Delta}/2$ , elle est réalisée sur la branche (i), et correspond à la plus grande des racines réelles de l'équation polynômiale de degré quatre en  $\check{v}^2$ , en principe exprimable par radicaux<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} & \check{v}^8 + 8(1 - \alpha^2)\check{v}^6 + \check{v}^4[\check{\Delta}^2(16\alpha^4 - 80\alpha^2 - 8) + 16\alpha^4 - 128\alpha^2 + 16] \\ & + \check{v}^2[32\check{\Delta}^2(4\alpha^2 - 1)(5\alpha^2 + 1) + 128\alpha^2(5\alpha^2 - 1)] - 16(4\alpha^2 - 1)[4\alpha^2(1 + \check{\Delta}^2) - \check{\Delta}^2]^2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

À la limite  $\alpha \rightarrow 0$  d'une impureté de masse infinie, on retrouve le premier terme du second membre de l'équation (5), qui provient effectivement de la branche d'excitation fermionique [13]. Il reste à caractériser la nature de la transition lorsque, par variation continue du rapport de masse  $\alpha$  ou du gap réduit  $\check{\Delta}$  (c'est-à-dire par variation des interactions dans le gaz de fermions), la vitesse critique  $v_{c,f}^L$  passe de la branche (iv) à la branche (i). Comme on le voit bien par discussion graphique,

<sup>6</sup> Après des regroupements astucieux de termes et des élévations au carré dans les deux équations extrêmes de (16), on est ramené à deux équations polynômiales sur  $\check{q}_0$ .  $\check{v}$  doit en annuler le résultant, dont le polynôme en  $\check{v}$  de l'équation (18) constitue un diviseur.

$\check{q}_0$  est continu à la transition donc  $\check{v}_{c,f}^L$  aussi. Or, en dérivant une fois la troisième équation de (16) par rapport à  $\alpha$  à  $\check{\Delta}$  fixé, on trouve, compte tenu de la première équation de (16), que la dérivée première de  $\check{v}_{c,f}^L$  est également continue :

$$\frac{d}{d\alpha} \check{v}_{c,f}^L = \check{q}_0 \quad (19)$$

C'est donc la dérivée seconde de  $\check{v}_{c,f}^L$  qui doit être discontinue : en dérivant (19) et la première équation de (16) par rapport à  $\alpha$ , ainsi que la fonction  $F_f$  sur les branches (iv) et (i), on obtient

$$\left[ \frac{d^2}{d\alpha^2} \check{v}_{c,f}^L \left( \alpha = \frac{\check{\Delta}^+}{2} \right) \right]^{-1} - \left[ \frac{d^2}{d\alpha^2} \check{v}_{c,f}^L \left( \alpha = \frac{\check{\Delta}^-}{2} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{4} \check{\epsilon}_f'' (\check{k} = 1) = \frac{1}{\check{\Delta}} \quad (20)$$

si bien que la vitesse critique  $\check{v}_{c,f}^L$  présente une transition du *second* ordre sur la ligne  $\alpha = \check{\Delta}/2$ , voir la [figure 3a](#). Dans le cas moins riche d'un potentiel chimique  $\mu < 0$ ,  $v_{c,f}^L$  est toujours réalisée sur la branche (i) et ne peut présenter aucune transition.

### 3. Vitesse critique sur la branche bosonique

La conservation du nombre de fermions n'empêche bien entendu pas l'impureté, en se déplaçant dans le superfluide, d'y créer un seul quantum sur sa branche d'excitation bosonique, puisqu'il s'agit d'une mise en mouvement collective, de type onde sonore, des paires de Cooper d'atomes. La vitesse critique associée à la branche bosonique est donc donnée comme dans l'équation (4) par

$$v_{c,b}^L = \inf_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}} v_{b,\mathbf{q}} \quad \text{avec } v_{b,\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + \epsilon_{b,\mathbf{q}} \quad (21)$$

La relation de dispersion des quasi-particules bosoniques  $\mathbf{q} \mapsto \epsilon_{b,\mathbf{q}} = \epsilon_b(q)$  est cependant plus difficile à cerner que celle des quasi-particules fermioniques. Son domaine d'existence  $\mathcal{D}$  dans l'espace des vecteurs d'onde, sur lequel il faut minimiser  $v_{b,\mathbf{q}} = v_b(q)$  dans l'équation (21), est lui-même délicat à déterminer. Comme l'a montré la référence [13], il n'est pas nécessairement compact ni connexe. On sait seulement, de manière générale, grâce à l'hydrodynamique des superfluides, que la branche atteint la limite des faibles nombres d'onde  $q \rightarrow 0$  de manière linéaire en  $q$ ,

$$\epsilon_b(q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \hbar c q \quad (22)$$

le coefficient  $c$  n'étant autre que la vitesse du son dans le superfluide de fermions, déductible de l'équation d'état du gaz par l'expression bien connue  $mc^2 = \rho \frac{d\mu}{d\rho}$ . On sait aussi que  $\epsilon_b(q)$  doit être inférieur au bord  $\epsilon_f^{\text{eff}}(q)$  du continuum à deux excitations fermioniques au vecteur d'onde total  $\mathbf{q}$  considéré. Sinon, le mouvement collectif des paires s'amortirait, car son énergie, définie comme un pôle du facteur de structure dynamique, deviendrait complexe [18].

On peut obtenir numériquement  $\epsilon_b(q)$  à un ordre d'approximation compatible avec la théorie de BCS utilisée dans la section 2 grâce à la RPA [19], mise en œuvre de façon très fouillée dans la référence [13], non seulement dans le régime d'interaction faible [18], mais pour des interactions arbitrairement fortes au sein du superfluide.<sup>7,8</sup> Les résultats correspondants sur le domaine d'existence sont résumés dans le [Tableau 1](#); y est introduit, en sus de  $\Delta/\mu$ , l'habituel paramétrage des interactions par  $1/(k_F a)$ , où  $a$  est la longueur de diffusion dans l'onde  $s$  entre deux fermions de spins opposés et  $k_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$  est le nombre d'onde de Fermi du gaz parfait non polarisé de spin 1/2 de même densité totale  $\rho$  que le superfluide. Il reste à minimiser la fonction  $v_b(q)$  sur le domaine d'existence  $\mathcal{D}$ , en distinguant les différentes formes.

Lorsque la branche bosonique existe à tout nombre d'onde, par exemple pour  $\mu < 0$ , il se trouve que la relation de dispersion  $q \mapsto \epsilon_b(q)$  est convexe, donc toujours au-dessus de sa tangente en l'origine. Alors  $\epsilon_b(q) \geq \hbar c q$  pour tout  $q$ , le minimum absolu de  $v_b(q)$  est atteint en  $q = 0$  et  $v_{c,b}^L = c$ . Dans la suite de la discussion, on peut donc se restreindre au cas  $\mu > 0$ .

La minimisation de  $v_b(q)$  sur la seconde composante connexe de  $\mathcal{D}$ , à savoir  $q \in [q_{\text{inf}}, +\infty[$ , lorsqu'elle existe, est également assez simple. On trouve que l'énergie  $\epsilon_b(q)$  y est « collée au plafond », c'est-à-dire partout extrêmement proche de  $\epsilon_f^{\text{eff}}(q)$ ; comme  $q_{\text{inf}}$  est toujours supérieur au point d'annulation de  $F_f(\check{q})$  [voir la [figure 1c](#)], les trois fonctions  $q \mapsto \epsilon_f^{\text{eff}}(q)/q$ ,

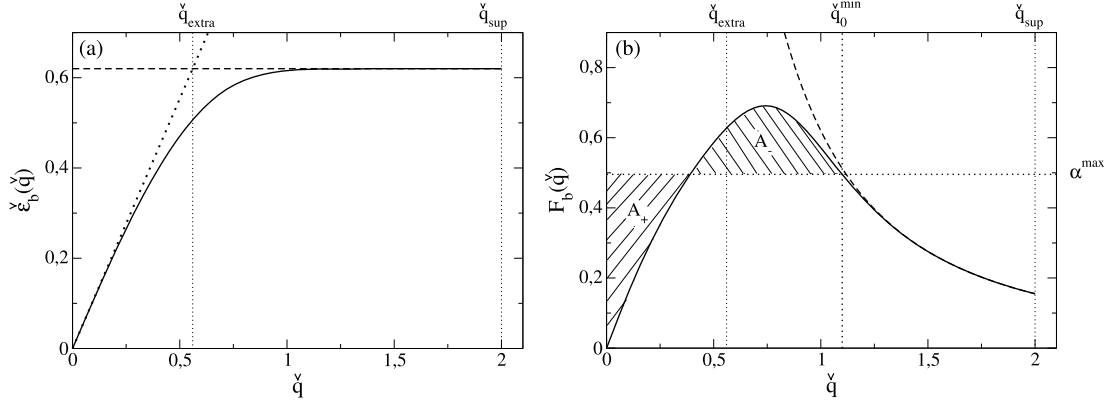
<sup>7</sup> En pratique, nous résolvons par dichotomie une équation sur  $\omega = \epsilon_b(q)/\hbar$  de la forme  $f(\omega, q) = 1$ , où  $f = I_{11} I_{22} / (\omega^2 I_{12}^2)$  est, à  $q$  fixé, une fonction décroissante de  $\omega$  tendant vers  $+\infty$  en  $\omega = 0$ . Les intégrales doubles  $I_{12}$ ,  $I_{11}$  et  $I_{22}$  sont celles (15), (16) et (17) de la référence [13]. Pour tout  $q \leq 2k_{\text{min}}$ ,  $f(\omega, q) \rightarrow -\infty$  logarithmiquement lorsque  $\omega \rightarrow \epsilon_f^{\text{eff}}(q)/\hbar = 2\Delta^-/\hbar$ , car  $I_{11} \rightarrow +\infty$  [13] alors que  $I_{22} < 0 \forall \omega \in [0, 2\Delta/\hbar]$ , ce qui assure l'existence d'une racine  $\omega \in [0, 2\Delta/\hbar]$ . Aussi  $\mathcal{D}$  contient-il au moins tous les vecteurs d'onde de module  $q \leq 2k_{\text{min}}$  [13].

<sup>8</sup> Tout comme la théorie de BCS, la RPA n'est que qualitativement correcte dans le régime d'interaction forte, et les écarts au spectre de la RPA peuvent être mesurés sur les modes collectifs d'excitation [20].

**Tableau 1**

Domaine d'existence  $\mathcal{D}$  de la branche d'excitation bosonique du superfluide, plus précisément ensemble de ses nombres d'onde  $q$  possibles, d'après la RPA de la référence [13], et (de notre cru) convexité de la relation de dispersion  $q \mapsto \epsilon_b(q)$ . La perte de convexité (de concavité) est due à l'apparition d'une partie concave (convexe) aux grands (faibles) nombres d'onde  $q$ . Sur la composante  $[q_{\text{inf}}, +\infty[$  lorsqu'elle existe, il y a toujours convexité. En  $q = q_{\text{sup}}$  et  $q = q_{\text{inf}}$ , la branche bosonique rejoint le continuum à deux excitations fermioniques au nombre d'onde total considéré, c'est-à-dire que  $\epsilon_b(q) = \epsilon_f^{\text{eff}}(q)$ . Un résultat important de la référence [13] est qu'on a toujours  $q_{\text{sup}} > 2k_{\text{min}}$  défini dans l'équation (14). Le paramètre  $1/(k_{\text{F}}a)$  plus habituellement utilisé que  $\Delta/\mu$  pour mesurer la force des interactions, voir le texte, est déduit ici de l'équation d'état de BCS [13].  $1/(k_{\text{F}}a) = 0$  est la limite unitaire, atteinte en  $\Delta/\mu = 1,162\dots$ , et  $\mu < 0$  si et seulement si  $1/(k_{\text{F}}a) > 0,553\dots$ . On notera le paradoxe de notation  $q_{\text{sup}} < q_{\text{inf}}$ .

$1/(k_{\text{F}}a)$	$\Delta/\mu$	$\mathcal{D}$	forme de $\epsilon_b(q)$
$> 0,161$	$> 1,729$ ou $< 0$	$[0, +\infty[$	convexe
$\in ]0; 0,161[$	$\in ]1,162; 1,729[$	$[0, q_{\text{sup}}] \cup [q_{\text{inf}}, +\infty[$	convexe si $\Delta/\mu > 1,71$
$< 0$	$\in ]0; 1,162[$	$[0, q_{\text{sup}}]$	concave si $\Delta/\mu < 0,88$



**Fig. 2.** Pour la valeur  $\Delta/\mu = 0,31$  choisie à titre d'exemple : (a) relation de dispersion adimensionnée  $\check{\epsilon}_b(\check{q})$  de la branche bosonique (trait plein), de départ phononique (gros pointillé) mais plafonnée par le bord du continuum à deux excitations fermioniques  $\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})$  au vecteur d'onde total considéré (tireté), et (b) fonction  $F_b(\check{q})$  auxiliaire de discussion graphique pour la minimisation de  $v_b(q)$ . Ici, la branche bosonique existe seulement sur l'intervalle compact  $[0, q_{\text{sup}}]$  et  $v_b(q)$  admet un minimum local en  $q_0$  à l'intérieur de l'intervalle si et seulement si le rapport de masse  $\alpha$  est compris strictement entre les valeurs  $F_b(\check{q}_{\text{sup}})$  et  $\sup_{\check{q}} F_b(\check{q})$ . Le tireté en (b) correspond à l'approximation  $F_b(\check{q}) \simeq F_f^{(iv)}(\check{q}) = 2\check{\Delta}/\check{q}^2$ ; elle est légitime assez près de  $q = q_{\text{sup}}$  et lorsque  $\check{\Delta}$  est assez faible. C'est bien le cas ici, même pour la valeur minimale  $\check{q}_0^{\text{min}}$  de  $\check{q}_0$  (c'est-à-dire la valeur maximale  $\alpha^{\text{max}}$  de  $\alpha$ ) accessible dans la zone  $B_{q_0}$  de la figure 3b à  $\check{\Delta}$  fixé, donc telle que  $A_+ = A_-$  dans l'équation (24).

$q \mapsto \epsilon_b(q)/q$  et  $q \mapsto v_b(q)$  sont croissantes pour  $q \geq q_{\text{inf}}$ . On vérifie alors numériquement que le minimum  $v_b(q_{\text{inf}})$  de  $v_b(q)$  sur cette seconde composante connexe est toujours supérieur à la vitesse du son, donc non pertinent.

Il reste à minimiser  $v_b(q)$  sur l'intervalle d'existence  $[0, q_{\text{sup}}]$ , ce qui peut conduire en général à trois cas de figure : le minimum absolu est (a) en  $q = 0$ , (b) en  $q = q_{\text{sup}}$  ou (c) en un point  $q_0$  à l'intérieur de l'intervalle. Il faut d'abord étudier les minima locaux de  $v_b(q)$  suivant ces trois cas, puis les comparer.

*Les minima locaux :* pour progresser, nous introduisons les mêmes adimensionnement, fonction auxiliaire  $F(q)$  et discussion graphique que pour la branche fermionique :

$$\check{v}_b(\check{q}) = \alpha\check{q} + \frac{\check{\epsilon}_b(\check{q})}{\check{q}} \quad \text{et} \quad F_b(\check{q}) = \frac{d}{d\check{q}} \left( -\frac{\check{\epsilon}_b(\check{q})}{\check{q}} \right), \quad \text{si bien que} \quad \frac{d}{d\check{q}} \check{v}_b(\check{q}) = \alpha - F_b(\check{q}) \quad (23)$$

On constate d'abord que  $F_b(0) = 0$  et  $\frac{d}{d\check{q}} \check{v}_b(0) = \alpha > 0$ , donc que  $v_b(q)$  a toujours un minimum en  $q = 0$ , car la première correction au terme linéaire dans l'équation (22) est cubique, le développement de Taylor de  $[\epsilon_b(q)]^2$  ne contenant, d'après la RPA, que des puissances paires de  $q$ . Ensuite, la fonction  $v_b(q)$  admet un minimum en  $q = q_{\text{sup}}$  à la simple condition que  $\frac{d}{d\check{q}} \check{v}_b(\check{q}_{\text{sup}}) < 0$  donc que  $\alpha < F_b(\check{q}_{\text{sup}})$ . Enfin,  $v_b(q)$  admet un minimum local en  $q_0 \in ]0, q_{\text{sup}}[$  si sa dérivée première s'annule en  $q_0$  et si sa dérivée seconde y est positive. Graphiquement, ceci signifie que  $\check{q} \mapsto F_b(\check{q})$  croise la droite horizontale d'ordonnée  $\alpha$  à l'intérieur de l'intervalle avec une dérivée négative, c'est-à-dire *de haut en bas*. Pour que ce soit possible pour une certaine valeur de  $\alpha$ , il faut et il suffit que la fonction continue  $F_b(\check{q})$  admette un maximum strictement positif sur  $]0, q_{\text{sup}}[$ , comme sur la figure 2.

*Le minimum global*  $v_{c,b}^l$  : les valeurs  $v_b(0) = c$  et  $v_b(q_{\text{sup}})$  peuvent être comparées directement, après calcul numérique de  $c$  et  $q_{\text{sup}}$ , puisque  $\epsilon_b(q)$  et  $\epsilon_f^{\text{eff}}(q)$  (connu analytiquement) coïncident en  $q_{\text{sup}}$ . Lorsqu'il existe, le minimum local de  $v_b(q)$  en  $q_0 \in ]0, q_{\text{sup}}[$  est en pratique inférieur à  $v_b(q_{\text{sup}})$ , puisque  $F_b(\check{q})$  reste sous la droite horizontale d'ordonnée  $\alpha$  sur l'intervalle  $[\check{q}_0, \check{q}_{\text{sup}}]$  si bien que  $v_b(q)$  y est croissante. Il est aussi facilement comparable à la vitesse du son : par intégration de la troisième équation de (23), on trouve que

$$\check{v}_b(\check{q}_0) - \check{c} = \int_0^{\check{q}_0} d\check{q} [\alpha - F_b(\check{q})] = A_+ - A_- \quad (24)$$

où  $A_+$  et  $A_-$  sont les aires (comptées positivement) des zones délimitées par le graphe de  $F_b(\check{q})$  et la droite horizontale d'ordonnée  $\alpha$ , respectivement en dessous et au-dessus de cette droite, lorsque  $\check{q}$  décrit  $[0, \check{q}_0]$ . Ce sont les zones hachurées sur la [figure 2b](#), réalisée dans le cas particulier  $A_+ = A_-$ , c'est-à-dire pour la valeur  $q_0^{\min}$  de  $q_0$  en dessous de laquelle  $v_b(q_0)$  cesse d'être inférieure strictement à  $c$ .

Le résultat de la minimisation globale est indiqué sur la [figure 3b](#). La ligne de séparation entre les zones où  $v_{c,b}^L = v_b(q_{\text{sup}})$  et  $v_{c,b}^L = v_b(q_0)$  correspond au cas limite  $q_0 \rightarrow q_{\text{sup}}$ , c'est-à-dire à l'équation  $\alpha = F_b(\check{q}_{\text{sup}})$ ; elle conduit donc, comme le montre la généralisation de la propriété (19) sur  $v_{c,f}^L$  [voir (29) et la [note 9](#)], à une transition du second ordre sur  $v_{c,b}^L$ , autrement dit à une discontinuité de sa dérivée seconde dans la direction normale à la ligne. Les autres lignes de séparation, sur lesquelles  $c = v_b(q_0)$  ou  $c = v_b(q_{\text{sup}})$ , conduisent à des transitions du premier ordre sur  $v_{c,b}^L$ , c'est-à-dire à une discontinuité de sa dérivée première, puisque la position du minimum de  $v_b(q)$  saute de 0 à  $q_0^{\min} > 0$  ou à  $q_{\text{sup}}$ . On notera l'existence d'un point triple à la confluence des trois zones.

#### 4. Synthèse : vitesse critique globale de la particule

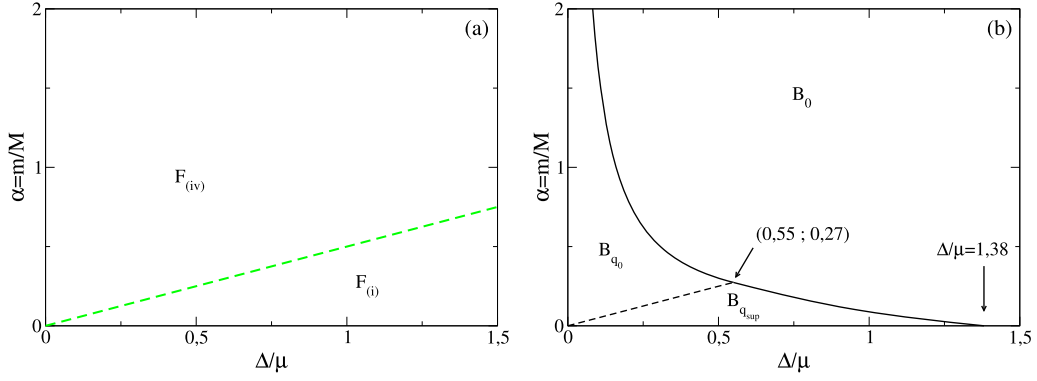
La vitesse critique globale de Landau pour une particule en mouvement dans le superfluide est donnée par la plus petite des deux vitesses  $v_{c,f}^L$  et  $v_{c,b}^L$  des sections précédentes. Pour  $\mu < 0$  ou  $\Delta/\mu > 1,729$ , on a toujours  $v_{c,b}^L = c < v_{c,f}^L$ , si bien que  $v_c^L$ , identiquement égale à la vitesse du son, est d'origine bosonique. En effet, comme le montre le [Tableau 1](#), la branche d'excitation bosonique existe alors pour tout  $q$ , avec une énergie  $\epsilon_b(q)$  partout  $< \epsilon_f^{\text{eff}}(q)$ , si bien que  $v_b(q) < v_f(q)$  et  $v_{c,b}^L < v_{c,f}^L$  dans les équations (8) et (21); de plus, la convexité de  $q \mapsto \epsilon_b(q)$  impose  $v_{c,b}^L = c$ , voir la section 3. Pour  $\mu > 0$  et  $\Delta/\mu < 1,729$ , le diagramme dans le plan  $(\Delta/\mu, \alpha = m/M)$  de la [figure 4a](#) montre que la vitesse critique est d'origine fermionique ( $v_{c,f}^L < v_{c,b}^L$ ) dans une sorte de triangle à un côté incurvé; la base du triangle repose sur l'axe  $\alpha = 0$ , où l'impureté est de masse infinie, et a bien une extension maximale donnée par le point de croisement  $\Delta/\mu \simeq 1,38$  des deux termes au second membre de (5). La vitesse critique est partout ailleurs d'origine bosonique. On peut d'ailleurs comprendre simplement pourquoi c'est nécessairement le cas à droite de ce point de croisement :  $v_f(q)$  et donc  $v_{c,f}^L$  dans l'équation (8) sont des fonctions croissantes de  $1/M$ , c'est-à-dire de  $\alpha$  après adimensionnement; comme  $v_{c,f}^L(\alpha = 0) > c$  dès que  $\Delta/\mu \gtrsim 1,38$  d'après (5), on a bien également  $v_{c,f}^L(\alpha) > c$  pour tout  $\alpha > 0$ .

Il reste à voir dans quelle mesure la ou les lignes de transition prédites sur  $v_{c,f}^L$  et  $v_{c,b}^L$ , voir la [figure 3](#), subsistent sur la vitesse critique globale  $v_c^L$ , ou sont au contraire masquées parce que la vitesse critique issue de la branche d'excitation concurrente est plus faible. Nous avons représenté la ligne de transition de  $v_{c,f}^L$  – entre les branches de stationnarité (i) et (iv) –,  $\alpha = \check{\Delta}/2$ , par un tireté vert sur la [figure 4a](#). La portion correspondant à  $\check{\Delta} > 0,55$  est entièrement masquée par la vitesse critique bosonique et est donc omise; mais, de façon remarquable et peut-être inattendue, la portion correspondant à  $\check{\Delta} < 0,55$  est indiscernable, à la résolution de la figure, de la frontière entre le domaine bosonique et le domaine fermionique! De même, nous avons représenté les lignes de transition de  $v_{c,b}^L$  – suivant que  $v_b(q)$  soit minimale en  $q = 0$ ,  $q = q_{\text{sup}}$  ou strictement entre ces deux valeurs – par un trait noir, plein ou tireté selon que la transition est du premier ou du second ordre. Deux autres faits remarquables apparaissent. D'une part, le tireté noir est en pratique indiscernable du tireté vert, et donc aussi de la frontière entre les domaines bosonique et fermionique. D'autre part, la portion de trait plein de  $\check{\Delta} > 0,55$  semble coïncider fort bien avec une autre partie de cette frontière. Finalement, la portion de trait plein aux abscisses  $\check{\Delta} < 0,55$  est immergée dans le domaine bosonique, qu'elle partage en deux sous-domaines  $B_1$  et  $B_2$  séparés par une transition du premier ordre sur  $v_c^L$ . Nous allons maintenant énoncer quelques faits simples permettant de comprendre une partie de ces constatations.

*Des zones d'origine prévisible :* le domaine  $B_{q_{\text{sup}}}$  où  $v_{c,b}^L = v_b(q_{\text{sup}})$  conduit nécessairement à  $v_{c,b}^L \geq v_{c,f}^L$ , donc est, dans le diagramme final sur  $v_c^L$ , entièrement masqué par la vitesse critique issue de la branche d'excitation fermionique. En effet, en  $q = q_{\text{sup}}$ , la branche d'excitation bosonique rejoint le « plafond »  $\epsilon_f^{\text{eff}}(q)$  à deux excitations fermioniques, donc  $v_b(q_{\text{sup}}) = v_f(q_{\text{sup}}) \geq \inf_q v_f(q) = v_{c,f}^L$ . On en déduit que la frontière entre  $B_1$  et  $F$  est *au-dessus* de la ligne de transition entre les zones  $B_{q_0}$  [où  $v_{c,b}^L = v_b(q_0)$ ] et  $B_{q_{\text{sup}}}$  [où  $v_{c,b}^L = v_b(q_{\text{sup}})$ ], c'est-à-dire *au-dessus* du tireté noir sur la [figure 4a](#).

De façon symétrique, le domaine  $F_{(iv)}$  de  $v_{c,f}^L$  correspondant à la branche de stationnarité (iv), c'est-à-dire à  $\alpha > \check{\Delta}/2$ , ne peut qu'être entièrement masqué par la contribution de la branche d'excitation bosonique. En effet, sur la branche (iv), le minimum de  $v_f(q)$  est atteint sur l'intervalle  $q \in [0, 2k_{\text{min}}]$ , voir la [figure 1c](#). Or, sur cet intervalle, la branche d'excitation bosonique existe bien, puisque  $q_{\text{sup}} > 2k_{\text{min}}$  comme l'a montré la référence [13], et y conduit à une vitesse  $v_b(q)$  en tout point inférieure à la vitesse  $v_f(q)$ , puisqu'on a toujours  $\epsilon_b(q) \leq \epsilon_f^{\text{eff}}(q)$ . Alors,  $v_{c,b}^L$  est inéluctablement inférieure à  $v_{c,f}^{(iv)} = \inf_{q \in [0, 2k_{\text{min}}]} v_f(q)$ , et la frontière entre  $B_1$  et  $F$  est *en dessous* de la ligne de transition entre les zones  $F_{(iv)}$  et  $F_{(i)}$  sur  $v_{c,f}^L$ , c'est-à-dire *en dessous* du tireté vert sur la [figure 4a](#).





**Fig. 3.** (Couleur en ligne.) Diagramme dans le plan  $(\check{\Delta} = \Delta/\mu, \alpha = m/M)$ ,  $\mu > 0$ , indiquant (a) pour la branche d'excitation fermionique du superfluide, sur quelle branche de stationnarité de l'équation (12) la vitesse critique  $v_{c,f}^L$  est réalisée (avec les notations parlantes  $F_{(i)}$  et  $F_{(iv)}$ ), et (b) pour la branche d'excitation bosonique, si la vitesse critique  $v_{c,b}^L$  est atteinte en la borne inférieure  $q = 0$  (zone  $B_0$ ), en la borne supérieure  $q = q_{sup}$  (zone  $B_{q_{sup}}$ ) ou à l'intérieur de son intervalle d'existence,  $q = q_0 \in ]0, q_{sup}[$  (zone  $B_{q_0}$ ). Les lignes en trait plein (en tireté) signalent une transition du premier ordre (du second ordre) sur  $v_{c,f}^L$  ou sur  $v_{c,b}^L$ , c'est-à-dire avec une différentielle première (seconde) discontinue.

Pour résumer, la frontière entre  $B_1$  et  $F$  doit passer entre le plafond tireté vert, d'équation  $\alpha = F_f(2) = \check{\Delta}/2$  (voir dans la section 2), et le plancher tireté noir, d'équation  $\alpha = \lim_{\check{q}_0 \rightarrow \check{q}_{sup}} F_b(\check{q}_0) = F_b(\check{q}_{sup})$  (voir dans la section 3). Or, comme le montre le calcul numérique, la quantité  $F_b(\check{q}_{sup})$ , considérée comme une fonction de  $\check{\Delta}$ , est extrêmement proche de  $\check{\Delta}/2$  jusqu'à  $\check{\Delta} \approx 0,6$ , valeur au-delà de laquelle son graphe commence à s'incurver vers le bas. Ainsi, pour  $\check{\Delta} < 0,55$ , l'écart est inférieur à quatre pour mille, et  $q_{sup}$  y diffère d'ailleurs de  $2k_{min}$  de moins d'un pour mille. Aussi la frontière entre  $B_1$  et  $F$ , le tireté vert et le tireté noir sont-ils presque confondus sur la figure 4a. Nous serons plus précis à la fin de cette section, grâce à un raisonnement analytique, et nous montrerons qu'en fait la frontière  $B_1 - F$  se trouve exactement sur le tireté noir et qu'il y a égalité parfaite de deux zones du plan  $(\check{\Delta}, \alpha)$  :

$$B_{q_0} = B_1 \quad (25)$$

*Explication de la quasi-coïncidence des tiretés à la frontière  $B_1 - F$  :* dans la limite  $\check{\Delta} = \Delta/\mu \ll 1$ , on peut comprendre physiquement comme suit pourquoi les tiretés vert et noir sont presque confondus. Le départ linéaire de  $\epsilon_b(q)$  aux faibles  $q$ , si on l'extrapole linéairement, atteint le plafond à deux excitations fermioniques  $\epsilon_f^{eff}(q) \simeq 2\Delta$  en un point  $q_{extra} \approx 2\Delta/(\hbar c) \ll 2k_{min}$ , puisque  $c \simeq (2\mu/3m)^{1/2}$  dans cette limite. En réalité, la branche d'excitation bosonique s'infléchit autour de  $q = q_{extra}$ , puis longe le plafond de très près jusqu'à l'atteindre en le point  $q_{sup}$ , qui est ici extrêmement proche de  $2k_{min}$  ( $\check{q}_{sup} \simeq 2$ ). On peut donc s'attendre à pouvoir identifier  $\epsilon_b(q)$  et  $\epsilon_f^{eff}(q)$ , donc les fonctions  $F_f(\check{q})$  et  $F_b(\check{q})$ , sur un voisinage assez étendu de  $q_{sup}$  ou de  $\check{q}_{sup}$  bien à droite de  $q_{extra}$  ou de  $\check{q}_{extra} \simeq 3^{1/2}\check{\Delta}$ , la fonction  $F_f(\check{q})$  étant assimilable à son expression  $\frac{d}{d\check{q}}(-2\check{\Delta}/\check{q}) = 2\check{\Delta}/\check{q}^2$  sur la branche de stationnarité (iv), voir les équations (15) et (16). En un mot,

$$F_b(\check{q}) \simeq \frac{2\check{\Delta}}{\check{q}^2} \quad \text{pour } \check{\Delta} \ll \check{q} \text{ et } \check{\Delta} \ll 1 \quad (26)$$

Ces idées sont illustrées avec succès sur la figure 2. Ceci explique donc pourquoi  $F_b(\check{q}_{sup}) \simeq \check{\Delta}/2$  aux faibles  $\check{\Delta}$ . Ce qui est remarquable cependant est que, de ce point de vue, la valeur  $\check{\Delta} = 0,55$  est déjà faible.

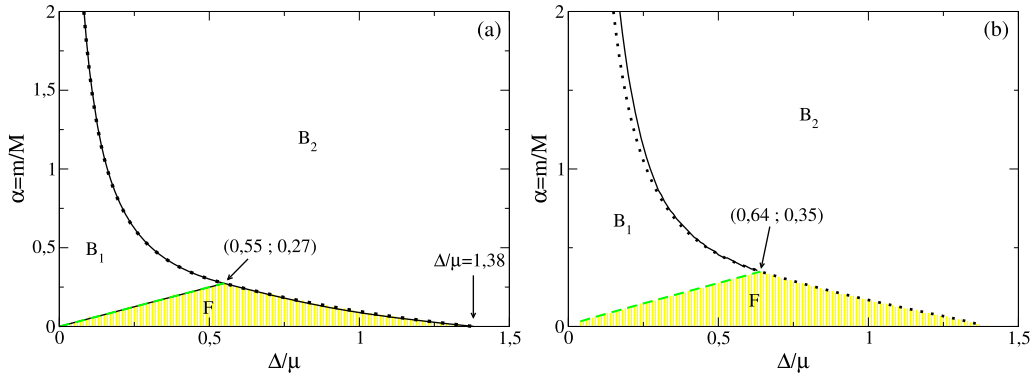
*Quasi-coïncidence de  $v_{c,f}^L$  et  $v_{c,b}^L$  sur la zone  $B_1$  :* on peut se demander si l'approximation précédente (26) est bonne, non seulement en  $\check{q} = \check{q}_{sup}$ , mais aussi, dans la zone  $B_{q_0}$  de la figure 3b, en la position  $q_0$  du minimum absolu de  $v_b(q)$ . À  $\check{\Delta}$  fixé, il suffit de le vérifier pour la valeur minimale accessible  $q_0^{\min}$  de  $q_0$ , correspondant à la valeur maximale de  $\alpha$  atteinte dans cette zone et telle que  $A_+ = A_-$  dans l'équation (24). On trouve par le calcul numérique que c'est bien le cas,  $\check{q}_0^{\min}$  restant en définitive suffisamment loin à droite de la position du maximum de  $F_b(\check{q})$ , maximum bien sûr non décrit par (26). On en déduit le résultat remarquable que, dans la zone  $B_{q_0}$ , donc en pratique dans la zone  $B_1$  :

$$\forall (\check{\Delta}, \alpha) \in B_1, \quad v_c^L = v_{c,b}^L \simeq v_{c,f}^L \quad (27)$$

où l'on peut utiliser l'équation (17) pour évaluer  $v_{c,f}^L$ .

*La ligne  $v_{c,f}^L = c$  est remarquable :* une fois établie la nature bosonico-fermionique de la zone  $B_1$ , c'est-à-dire la validité de l'approximation (27), il est simple d'estimer la position de la frontière entre les zones  $B_1$  et  $B_2$ , c'est-à-dire en pratique entre la zone  $B_{q_0}$  et la zone  $B_0$  telle que  $v_{c,b}^L = c$ . Il suffit pour cela de résoudre l'équation

$$v_{c,f}^L = c \quad (28)$$



**Fig. 4.** (Couleur en ligne.) (a) Diagramme dans le plan ( $\check{\Delta} = \Delta/\mu$ ,  $\alpha = m/M$ ),  $\mu > 0$ , indiquant dans quelle zone la vitesse critique globale  $v_c^L$  de l'impureté de masse  $M$  a une origine bosonique (cas  $v_{c,b}^L < v_{c,f}^L$ , repéré par la lettre B et un fond uni blanc) ou une origine fermionique (cas  $v_{c,f}^L < v_{c,b}^L$ , repéré par la lettre F et un fond à rayures jaunes). Le domaine bosonique est séparé en deux sous-domaines  $B_1$  et  $B_2$  par la ligne de transition du premier ordre entre les zones  $B_0$  et  $B_{q_0}$  [trait plein noir aux abscisses  $\check{\Delta} < 0,55$ ] de la figure 3b. De façon inattendue, la frontière entre  $B_2$  et F est proche de la ligne de transition du premier ordre entre les zones  $B_{q_{sup}}$  et  $B_0$  [trait plein noir aux abscisses  $\check{\Delta} > 0,55$ ] de la figure 3b. Autre fait remarquable, la partie non masquée de la ligne de transition du second ordre sur  $v_{c,f}^L$  [tireté vert] et la ligne de transition du second ordre entre les zones  $B_{q_0}$  et  $B_{q_{sup}}$  [tireté noir], qui encadrent la frontière entre  $B_1$  et F, sont en pratique indiscernables; une étude analytique permet de montrer que les frontières  $B_1 - F$  et  $B_{q_0} - B_{q_{sup}}$  coïncident en fait exactement, que  $v_b(q)$  et  $v_f(q)$  y ont conjointement leur minimum en  $q = q_{sup}$ , et que  $v_c^L$  y présente une transition du second ordre. Dernier point notable, la ligne  $v_{c,f}^L = c$  [gros pointillé noir] reproduit non seulement exactement la frontière entre  $B_2$  et F, comme il se doit, mais aussi très bien celle entre  $B_2$  et  $B_1$ . (b) Généralisation du diagramme précédent au cas d'un superfluide d'impuretés bosoniques en mouvement dans le superfluide de fermions, à rapport fixée  $\mu_B/E_F = 0,1$  entre le potentiel chimique des bosons dans le référentiel de leur centre de masse et l'énergie de Fermi des fermions. La nouvelle vitesse critique  $v_c^L$  présente elle aussi une partition en trois zones, séparées comme précédemment par une discontinuité de sa différentielle seconde (frontière  $F - B_1$ ) ou première (frontières  $F - B_2$  et  $B_1 - B_2$ ): la zone F (à rayures jaunes), où  $v_c^L = v_{c,f}^L$ , et les zones  $B_1$  et  $B_2$ , où  $v_c^L = v_{c,b}^L$ . La frontière  $F - B_1$ , sur laquelle  $v_b(q)$  et  $v_f(q)$  ont leur minimum en  $q = q_{sup}$ , est très proche de la frontière  $F_{(i)} - F_{(iv)}$  à la valeur de  $\mu_B$  considérée [tireté vert, interrompu lorsqu'il atteint la zone  $B_2$ ]. La frontière  $F - B_2$  est bien donnée exactement par le gros pointillé noir  $v_{c,f}^L = c + c_B$ , où  $c(c_B)$  est la vitesse du son dans le superfluide de fermions (de bosons) au repos, à droite du point triple. La frontière  $B_1 - B_2$ , qui est simplement la frontière  $B_{q_0} - B_0$  à la valeur de  $\mu_B$  considérée [trait plein noir], dévie au contraire du pointillé lorsqu'on s'éloigne du point triple sur sa gauche.

Le gros pointillé noir correspondant, sur la figure 4a, tombe bien (presque) sur le trait plein noir pour  $\check{\Delta} < 0,55$ . Mieux encore, dans la partie à  $\check{\Delta} > 0,55$ , où  $\alpha < \check{\Delta}/2$  et  $v_{c,f}^L$  provient maintenant de la branche de stationnarité (i), il reproduit *exactement* la frontière entre les zones  $B_2$  et F. En effet,  $v_b(q_{sup}) = v_f(q_{sup}) \geq v_{c,f}^L$  comme nous l'avons vu, donc la zone  $B_{q_{sup}}$  est hors-jeu, et la transition  $F - B_2$  est nécessairement une transition  $F - B_0$ , donnée par l'équation (28).

*Une quasi-coïncidence à la frontière  $B_2 - F$*  : en définitive, il nous reste à expliquer la quasi-coïncidence des frontières  $F - B_2$  et  $B_{q_{sup}} - B_0$ , c'est-à-dire du gros pointillé et du trait plein noirs sur la partie  $\check{\Delta} > 0,55$  de la figure 4a. Cette quasi-coïncidence est cependant plus approximative que les autres, et probablement accidentelle. Il se trouve qu'au point de la frontière  $F - B_2$  d'abscisse  $\check{\Delta} = 0,55$ ,  $q_{sup}$  est très proche de la position  $q = 2k_{min}$  du minimum de  $v_f(q)$ ; de même, au point terminal de cette frontière d'abscisse  $\check{\Delta} \approx 1,38$ ,  $q_{sup} \approx 2,59$  est, ce que nous n'expliquons pas, très proche de la position  $q \approx 2,61$  du minimum de  $\check{v}_f(q)$ . Aussi les frontières  $F - B_2$  et  $B_{q_{sup}} - B_0$  se touchent-elles (presque) en leurs extrémités. Dans leur région intermédiaire cependant,  $0,55 < \check{\Delta} < 1,38$ , leur écart devient perceptible sur la figure 4a; le calcul numérique confirme que  $q_{sup}$  peut y dévier significativement de la position du minimum de  $v_f(q)$ , d'au moins 5%, mais ceci conduit somme toute à un faible écart entre  $v_b(q_{sup}) = v_f(q_{sup})$  et  $\inf_q v_f(q)$  puisque  $v_f(q)$  varie seulement au second ordre autour de son minimum.

*Ordre des transitions et synthèse* : il reste à préciser quel est l'ordre minimal des différentielles de  $v_c^L$  discontinues aux frontières entre les zones  $B_1$ ,  $B_2$  et F. Aucune frontière n'ayant de portion verticale dans le plan ( $\check{\Delta}$ ,  $\alpha$ ), nous pouvons nous limiter aux dérivées de  $v_c^L$  par rapport à  $\alpha$  à  $\check{\Delta}$  fixé et tirer ainsi parti, dans chaque zone, de la propriété générale :

$$\frac{d}{d\alpha} \check{v}_c^L = \check{q}_0^{abs} \quad (29)$$

où  $q_0^{abs}$ , fonction de  $\alpha$ , est la position du minimum absolu  $q_{0,b}$  de  $q \mapsto v_b(q)$  ou  $q_{0,f}$  de  $q \mapsto v_f(q)$ , selon que  $v_c^L$  est issue de la branche d'excitation bosonique ou fermionique.<sup>9</sup>

Une autre propriété remarquable, peut-être même surprenante, est que la branche d'excitation bosonique  $q \mapsto \epsilon_b(q)$  est rigoureusement *tangente* au plafond à deux excitations fermioniques  $q \mapsto \epsilon_f^{eff}(q)$  au point d'abscisse  $q = q_{sup}$  où elle le rejoint<sup>10</sup> :

<sup>9</sup> Lorsque  $v_c^L = v_{c,f}^L$ , c'est une tautologie de l'équation (19). Lorsque  $v_c^L = v_{c,b}^L$ , on a soit  $0 < q_{0,b} < q_{sup}$ , auquel cas  $\alpha = F_b(q_{0,b})$ , et il suffit de dériver  $\check{v}_b(q_{0,b}(\alpha))$  par rapport à  $\alpha$  dans l'équation (23), soit  $q_{0,b} = 0$  ou  $q_{sup}$ , auquel cas  $q_{0,b}$  est localement constant et le résultat est trivial.

<sup>10</sup> Utilisons la note 7 et les expressions explicites des intégrales  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  et  $I_{22}$  de la référence [13]. Par dérivation de l'équation implicite  $f(\omega_b(q), q) = 1$  par rapport à  $q$ , nous obtenons  $\frac{d}{dq} \omega_b(q) = -\partial_q f / \partial_\omega f$ . Par dérivation partielle  $\partial_\omega$  ou  $\partial_q$  de chaque intégrale sous le signe somme, nous faisons apparaître

$$\frac{d}{dq} \epsilon_b(q_{\text{sup}}) = \frac{d}{dq} \epsilon_f^{\text{eff}}(q_{\text{sup}}), \quad \text{si bien que } F_b(\check{q}_{\text{sup}}) = F_f(\check{q}_{\text{sup}}) \quad (30)$$

En revanche, dès que  $q < q_{\text{sup}}$ , l'écart d'énergie (négatif)  $\epsilon_b(q) - \epsilon_f^{\text{eff}}(q)$  est de dérivée  $> 0$ , si bien que  $F_b(\check{q}) < F_f(\check{q})$ . Ainsi, lorsqu'on est près de la frontière  $B_1 - F$ , les fonctions  $F_b(\check{q})$  et  $F_f(\check{q})$  convergent en décroissant vers la même limite  $F_f(\check{q}_{\text{sup}})$  lorsque  $q \rightarrow q_{\text{sup}}^-$ , la première fonction restant inférieure à la seconde, qui continue à décroître au-delà de  $\check{q}_{\text{sup}}$ , voir la figure 1c. Par discussion graphique, on montre alors que la frontière  $F - B_1$  est atteinte en  $\alpha = F_f(\check{q}_{\text{sup}})$ , avec  $q_{0,b} = q_{0,f} = q_{\text{sup}}$  et, comme il se doit,  $v_b(q_{0,b}) = v_f(q_{0,f})$  : d'après (29),  $v_c^L$  y présente une transition du second ordre ; on en déduit la coïncidence exacte des frontières  $F - B_1$  et  $B_{q_0} - B_{q_{\text{sup}}}$  et l'égalité des zones dans l'équation (25).<sup>11</sup>

La suite est plus simple. À la frontière  $B_1 - B_2$ ,  $q_{0,b}$  saute de la valeur strictement positive  $q_0^{\text{min}}$  (à droite du maximum de  $F_b(\check{q})$ , voir la figure 2b) à la valeur nulle, donc  $v_c^L$  présente une transition du premier ordre. Il en va de même à la frontière  $F - B_2$ , où  $v_f^{(i)}(q_{0,f}) = c \equiv v_b(q_{0,b} = 0)$  et la position du minimum absolu  $q_0^{\text{abs}}$  saute de la valeur  $q_{0,f} \geq 2k_{\text{min}}$  à la valeur nulle.

## 5. Vitesse relative critique d'un superfluide de bosons et d'un superfluide de fermions

Il est fort probable qu'une vérification expérimentale de la vitesse critique de Landau ici prédictive aura lieu pour un grand nombre d'impuretés, plutôt qu'une seule. Comme il est souhaitable d'envoyer dans le superfluide de fermions un ensemble monocinétique d'impuretés, on est naturellement conduit à utiliser un condensat de Bose-Einstein de telles impuretés, avec des interactions en général non négligeables, comme c'est le cas dans la référence [17]. Il faut donc généraliser le raisonnement à la Landau au cas d'un superfluide de bosons en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans le superfluide de fermions.

Le superfluide de bosons est initialement à température nulle dans le référentiel de son centre de masse. L'interaction bosons-fermions de type densité-densité, arbitrairement faible comme il est dit dans la section 1, crée au minimum une excitation élémentaire dans le superfluide de bosons, de quantité de mouvement  $\hbar\mathbf{q}$  et d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{B},\mathbf{q}} + \hbar\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q} \mapsto \epsilon_{\mathbf{B},\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{B}}(q)$  étant la relation de dispersion pour un superfluide au repos.<sup>12</sup> De manière concomitante, une paire d'excitations fermioniques de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  et d'énergie  $\epsilon_{f,\mathbf{k}_1} + \epsilon_{f,\mathbf{k}_2}$ , avec  $\mathbf{q} = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ , ou une excitation bosonique de vecteur d'onde  $-\mathbf{q}$  et d'énergie  $\epsilon_{b,-\mathbf{q}}$  apparaît dans le superfluide de fermions. Ce processus minimal d'excitation ne peut cependant conserver l'énergie si la vitesse relative  $v$  des deux superfluides est inférieure aux vitesses critiques de Landau

$$v_{c,f}^L = \inf_{\mathbf{q}} v_f(q) \quad \text{avec } v_f(q) = \frac{\epsilon_{\mathbf{B}}(q) + \epsilon_f^{\text{eff}}(q)}{\hbar q} \quad (31)$$

$$v_{c,b}^L = \inf_{\mathbf{q}} v_b(q) \quad \text{avec } v_b(q) = \frac{\epsilon_{\mathbf{B}}(q) + \epsilon_b(q)}{\hbar q} \quad (32)$$

c'est-à-dire à  $v_c^L$ , la plus petite des deux vitesses. Dans la suite, nous utiliserons la forme de Bogolioubov

$$\epsilon_{\mathbf{B}}(q) = \left[ \frac{\hbar^2 q^2}{2M} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2M} + 2\mu_{\mathbf{B}} \right) \right]^{1/2} \quad (33)$$

où  $\mu_{\mathbf{B}}$  est le potentiel chimique (positif) du superfluide de bosons au repos et  $M$  la masse d'un boson. Les expressions précédentes (8) et (21) correspondent, comme il se doit, au cas limite  $\mu_{\mathbf{B}} \rightarrow 0$ .

L'étude de la vitesse critique  $v_{c,f}^L$  issue de la branche fermionique peut se faire analytiquement, après adimensionnement comme dans l'équation (16) et en introduisant la largeur  $\check{Q}_{\mathbf{B}}$  de  $\check{\epsilon}_{\mathbf{B}}(\check{q})/\check{q}$ , donnée par

$$\check{Q}_{\mathbf{B}}^2 = \frac{2M}{m} \frac{\mu_{\mathbf{B}}}{|\mu|} = \frac{2\check{\mu}_{\mathbf{B}}}{\alpha} \quad (34)$$

dans l'intégrande un facteur  $1/[\epsilon_{f,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{f,\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \epsilon_b(q)]^2$ , dont l'intégrale tridimensionnelle sur  $\mathbf{k}$  a une divergence infrarouge lorsque  $q \rightarrow q_{\text{sup}}^-$  donc lorsque  $\epsilon_f^{\text{eff}}(q) - \epsilon_b(q) \rightarrow 0^+$ , puisque  $\check{\epsilon}_{f,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \check{\epsilon}_{f,\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \xrightarrow{\mathbf{k} \rightarrow 0} \check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q}) + \check{k}^2(\check{q}^2 - 4)/\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q}) + (\check{\mathbf{k}} \cdot \check{\mathbf{q}})^2 \check{\Delta}^2/(\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})/2)^{3/2} + O(k^4)$ . Alors  $\partial_{\check{\omega}} \check{I}_{11} = \check{\omega}^2 J + O(1)$ ,  $\partial_{\check{\omega}} \check{I}_{12} = (\check{q}^2 - 4)J/2 + O(1)$ ,  $\partial_{\check{\omega}} \check{I}_{22} = [\check{\omega}^2 - (2\check{\Delta})^2]J + O(1)$ , où les  $O(1)$  restent bornés lorsque  $(\check{\omega}, \check{q}) \rightarrow (\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q}_{\text{sup}}), \check{q}_{\text{sup}})$  alors que  $J = \int \frac{d^3k}{4\pi} [(\check{\epsilon}_{f,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \check{\epsilon}_{f,\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - \check{\omega}) \check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})]^{-2}$  diverge. De même,  $\partial_{\check{q}} \check{I}_{11} = [-\frac{d}{d\check{q}} \check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})] \check{\omega}^2 J + O(1)$ ,  $\partial_{\check{q}} \check{I}_{12} = [-\frac{d}{d\check{q}} \check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})](\check{q}^2 - 4)J/2 + O(1)$  et  $\partial_{\check{q}} \check{I}_{22} = [-\frac{d}{d\check{q}} \check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})][\check{\omega}^2 - (2\check{\Delta})^2]J + O(1)$ . Comme  $\frac{\check{\omega}^2}{\check{I}_{11}} + \frac{\check{\omega}^2 - (2\check{\Delta})^2}{\check{I}_{22}} - \frac{\check{q}^2 - 4}{\check{I}_{12}}$  ne tend pas vers zéro, on obtient la propriété (30).

<sup>11</sup> Si  $\alpha < F_b(\check{q}_{\text{sup}}) = F_f(\check{q}_{\text{sup}})$ , le minimum de  $v_b(q)$ , atteint en  $q_{\text{sup}}$ , est plus grand que celui de  $v_f(q)$ , atteint en  $q_{0,f} > q_{\text{sup}}$ , puisque  $v_f(q_{0,f}) < v_f(q_{\text{sup}}) = v_b(q_{\text{sup}})$ . Si  $\alpha > F_b(\check{q}_{\text{sup}}) = F_f(\check{q}_{\text{sup}})$ , le minimum de  $v_f(q)$ , atteint en  $q_{0,f} < q_{\text{sup}}$ , est plus grand que celui de  $v_b(q)$ , atteint en  $q_{0,b} < q_{\text{sup}}$ , puisque  $v_b(q_{0,b}) < v_b(q_{\text{sup}}) < v_f(q_{0,f})$ .

<sup>12</sup> Ceci découle des propriétés suivantes de la transformation unitaire  $T_t(\mathbf{v})$  représentant la mise en mouvement d'ensemble à la vitesse  $\mathbf{v}$ , c'est-à-dire le changement de référentiel galiléen à la vitesse  $-\mathbf{v}$ ,  $T_t(\mathbf{v}) = \exp[-i \sum_j \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_j / \hbar] \exp[i \sum_j m_{\mathbf{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_j / \hbar] \exp[i t N_{\mathbf{B}} m_{\mathbf{B}} v^2 / 2]$ , la somme portant sur les  $N_{\mathbf{B}}$  bosons, de masse  $m_{\mathbf{B}} = M$  et d'opérateurs position  $\mathbf{r}_j$  et impulsion  $\mathbf{p}_j$  :  $T_t^\dagger(\mathbf{v}) H_{\mathbf{B}} T_t(\mathbf{v}) = H_{\mathbf{B}} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{B}} + N_{\mathbf{B}} m_{\mathbf{B}} v^2 / 2$  et  $T_t^\dagger(\mathbf{v}) \mathbf{P}_{\mathbf{B}} T_t(\mathbf{v}) = \mathbf{P}_{\mathbf{B}} + N_{\mathbf{B}} m_{\mathbf{B}} \mathbf{v}$ , où  $H_{\mathbf{B}}$  est le hamiltonien des bosons et  $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}$  leur opérateur quantité de mouvement totale. Il reste alors à comparer les énergies et impulsions de  $T_t(\mathbf{v})|\psi_0\rangle$  et  $T_t(\mathbf{v})|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ , où les vecteurs d'état  $|\psi_0\rangle$  et  $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$  sont ceux du superfluide au repos dans son état fondamental ou en présence d'une excitation élémentaire de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

On cherche d'abord les minima locaux, de dérivée nulle :

$$\check{v}_f(\check{q}) = \alpha(\check{q}^2 + \check{Q}_B^2)^{1/2} + \frac{\check{\epsilon}_f^{\text{eff}}(\check{q})}{\check{q}}, \quad \text{si bien que } \frac{d}{d\check{q}} \check{v}_f(\check{q}) = \frac{\alpha\check{q}}{(\check{q}^2 + \check{Q}_B^2)^{1/2}} - F_f(\check{q}) \quad (35)$$

expression dont la racine se trouve sur la branche de stationnarité (iv) [plutôt que sur la branche (i)] si et seulement si la fonction croissante  $\check{q} \mapsto \alpha\check{q}/(\check{q}^2 + \check{Q}_B^2)^{1/2}$  atteint la valeur  $\check{\Delta}/2$  sur  $\check{q} \in [0, 2]$ , donc si et seulement si

$$\frac{2\alpha}{(4 + \check{Q}_B^2)^{1/2}} \geq \frac{\check{\Delta}}{2} \quad (36)$$

comme le montre une discussion graphique à l'aide de la [figure 1c](#). Le plan  $(\check{\Delta}, \alpha)$  est donc séparé à nouveau en deux domaines  $F_{(i)}$  et  $F_{(iv)}$ , à la frontière desquels  $\check{v}_{c,f}$  présente une transition du second ordre.

L'étude de la vitesse critique  $v_{c,b}^L$  issue de la branche bosonique est faite numériquement. On trouve, comme dans le cas à une impureté, une partition du plan  $(\check{\Delta}, \alpha)$  en trois domaines  $B_0$ ,  $B_{q_{\text{sup}}}$  et  $B_{q_0}$ , suivant que le minimum absolu de  $v_b(q)$  est atteint au bord inférieur, au bord supérieur ou à l'intérieur de l'intervalle d'existence  $[0, q_{\text{sup}}]$  de la branche bosonique en question. Les frontières diffèrent peu de celles à une impureté seule, puisqu'on a pris ici un potentiel chimique des bosons petit devant l'énergie de Fermi des fermions. On notera le résultat simple mais important que  $v_{c,b}^L = c + c_B$  dans toute la zone  $B_0$ ,  $c$  et  $c_B$  étant les vitesses du son dans les superfluides de fermions et de bosons au repos.

Le diagramme dans le plan  $(\check{\Delta}, \alpha)$  pour la vitesse critique globale  $v_c^L$  est présenté sur la [figure 4b](#) et est décrit en détail dans la légende. Les résultats et leur discussion sont d'ailleurs proches du cas à une impureté, voir la section précédente, aussi nous contentons-nous de signaler ici une différence notable : le gros pointillé d'équation  $v_{c,f}^L = c + c_B$  ne donne plus une bonne approximation de la frontière  $B_1 - B_2$ , sauf près du point triple.

## 6. Conclusion

Nous avons étendu le calcul de la vitesse critique de Landau dans un superfluide de fermions non polarisé au cas où l'objet en mouvement est (a) une impureté de masse finie  $M$ , puis (b) un superfluide de telles impuretés bosoniques, avec prise en compte des excitations du superfluide de fermions à la BCS par brisure des paires (branche d'excitation fermionique) et à la RPA par leur mise en mouvement (branche d'excitation bosonique) comme dans la référence [13].

Lorsque le potentiel chimique des fermions est négatif,  $\mu < 0$ , nous trouvons que la vitesse critique est déterminée par la partie phononique de la branche d'excitation bosonique et vaut donc simplement (a) la vitesse du son  $c$  dans le superfluide de fermions, puis (b) la somme  $c + c_B$ , où  $c_B$  est la vitesse du son dans le superfluide de bosons au repos.

Lorsque le potentiel chimique des fermions est positif,  $\mu > 0$ , ces résultats ne valent que dans une certaine zone  $B_2$  du plan  $(\Delta/\mu, m/M)$ , où  $\Delta$  et  $m$  sont le gap et la masse d'une particule du superfluide de fermions. Pour (a) aussi bien que pour (b), au moins dans le régime d'un potentiel chimique  $\mu_B$  des bosons au repos petit devant l'énergie de Fermi des fermions, il existe alors deux autres zones, une zone  $B_1$  où la vitesse critique est déterminée par la partie intermédiaire, non phononique, de la branche d'excitation bosonique et une zone  $F$  où la vitesse critique vaut celle  $v_{c,f}^L$  associée à la branche d'excitation fermionique. La vitesse critique a une différentielle seconde discontinue à la frontière  $F - B_1$ , et une différentielle première discontinue en  $F - B_2$  et en  $B_1 - B_2$ , les trois frontières étant concourantes en un point triple. La frontière  $F - B_2$  s'obtient, de manière exacte, en résolvant l'équation  $v_{c,f}^L = c$  [cas (a)] ou  $v_{c,f}^L = c + c_B$  [cas (b)]. La frontière  $B_1 - B_2$  est, de même, exactement sur la ligne d'égalité entre les vitesses critiques issues des parties phononique et intermédiaire de la branche d'excitation bosonique ; dans le cas (a), on l'obtient avec une bonne approximation en résolvant l'équation plus simple  $v_{c,f}^L = c$ , parce que la vitesse critique dans  $B_1$  est en réalité proche de  $v_{c,f}^L$  ; dans le cas (b), cette approximation est nettement moins bonne, sauf près du point triple. Finalement, la frontière  $F - B_1$  est exactement sur la ligne  $v_{c,f}^L = v_f(q_{\text{sup}})$ , c'est-à-dire que la fonction  $v_f(q)$  y est minimale en le nombre d'onde maximal  $q_{\text{sup}}$  de la branche d'excitation bosonique et peut être identifiée, avec une bonne approximation dans les deux cas (a) et (b), à une portion de la ligne de discontinuité de la différentielle seconde de  $v_{c,f}^L$ , donnée par l'équation  $m/M = \Delta/(2\mu)$  pour le cas (a), et par l'égalité dans l'inégalité (36) pour le cas (b).

Ces prédictions pourraient être vérifiées expérimentalement avec le mélange de superfluides des isotopes bosonique  $^7\text{Li}$  et fermionique  $^6\text{Li}$  du lithium récemment préparé à l'ENS [17]. Ainsi, la transition du premier ordre à la frontière  $B_1 - B_2$  prédite ici pourrait être révélée en faisant varier la longueur de diffusion entre fermions de spins opposés, donc  $\Delta$ , grâce à une résonance de Feshbach, et en mesurant la vitesse critique correspondante ; on devrait alors observer une rupture de pente dans la vitesse critique en fonction de la force des interactions, au passage de la ligne  $B_1 - B_2$ . En revanche, la valeur du rapport de masse  $m/M \simeq 6/7$ , imposée, ne permet pas de franchir les autres frontières.

Il serait envisageable de prolonger la présente étude théorique à ce qui a été directement mesuré dans la référence [17], à savoir le taux d'amortissement des oscillations du superfluide de bosons dans le superfluide de fermions harmoniquement piégé, en prenant en compte d'éventuels effets de température non nulle. Il faudrait aussi voir si l'interaction entre fermions et bosons est suffisamment faible pour qu'on puisse restreindre l'analyse, comme le fit Landau et comme ce fut fait ici, au nombre minimal possible d'excitations élémentaires, et obtenir la même barrière d'énergie (empêchant l'amortissement

du mouvement des impuretés dans le superfluide de fermions) que dans l'expérience. Toutes questions que nous espérons inspiratrices de travaux ultérieurs, aussi bien théoriques qu'expérimentaux.

## Remerciements

Notre équipe, également affiliée à l'IFRAF, remercie pour son soutien financier le DIM Nano-K (projet ATOMIX) et l'Institut de France (prix Louis D.). Nous remercions les membres de l'équipe « fermions froids » ainsi que Claude Cohen-Tannoudji, Franck Laloë et Xavier Leyronas pour d'utiles discussions.

## Références

- [1] M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon, *Ultracold Fermi Gases*, Società italiana di fisica, Bologne, Italie, 2007; S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of ultracold atomic Fermi gases*, *Rev. Mod. Phys.* 80 (2008) 1215; W. Zwerger, *The BCS–BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, Berlin, 2012.
- [2] A.J. Leggett, *Quantum Liquids*, Section 2.4, Oxford University Press, Oxford, UK, 2006.
- [3] I. Carusotto, Y. Castin, *Atom interferometric detection of the pairing order parameter in a Fermi gas*, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 223202.
- [4] M. Zwierlein, C. Stan, C. Schunck, S. Raupach, A. Kerman, W. Ketterle, *Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance*, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 120403; S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, Cheng Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Pure gas of optically trapped molecules created from fermionic atoms*, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 240402.
- [5] M. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck, W. Ketterle, *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas*, *Nature* 435 (2005) 1047.
- [6] I. Carusotto, Y. Castin, *Superfluidity of the 1D Bose gas*, *C. R. Phys.* 5 (2004) 107.
- [7] L.A. Sidorenkov, Meng Khoon Tey, R. Grimm, Yan-Hua Hou, L. Pitaevskii, S. Stringari, *Second sound and the superfluid fraction in a Fermi gas with resonant interactions*, *Nature* 498 (2013) 78.
- [8] S. Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, *Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas*, *Nature* 463 (2010) 1057; Mark J.H. Ku, A.T. Sommer, Lawrence W. Cheuk, M. Zwierlein, *Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas*, *Science* 335 (2012) 563.
- [9] D. Miller, J. Chin, C. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner, W. Ketterle, *Critical velocity for superfluid flow across the BEC–BCS crossover*, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007) 070402.
- [10] T. Frisch, Y. Pomeau, S. Rica, *Transition to dissipation in a model of superflow*, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 1644.
- [11] L. Landau, *The theory of superfluidity of helium II*, *J. Phys. (USSR)* 5 (1941) 71.
- [12] G.E. Astrakharchik, L.P. Pitaevskii, *Motion of a heavy impurity through a Bose–Einstein condensate*, *Phys. Rev. A* 70 (2004) 013608.
- [13] R. Combescot, M.Yu. Kagan, S. Stringari, *Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC–BCS crossover*, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 042717.
- [14] B. Svistunov, E. Babaev, N. Prokofev, *Superfluid States of Matter*, Chapitre 1, CRC Press, Londres, 2014, p. 42.
- [15] O. Lychkovskiy, *Perpetual motion and backscattering oscillations of a mobile impurity in a quantum fluid*, arXiv:1403.7408v2.
- [16] A.P. Chikkatur, A. Görlitz, D.M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, W. Ketterle, *Suppression and enhancement of impurity scattering in a Bose–Einstein condensate*, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 483.
- [17] I. Ferrier-Barbut, M. Delehay, S. Laurent, A.T. Grier, M. Pierce, B.S. Rem, F. Chevy, C. Salomon, *A mixture of Bose and Fermi superfluids*, *Science* 345 (2014) 1035.
- [18] A. Minguzzi, G. Ferrari, Y. Castin, *Dynamic structure factor of a superfluid Fermi gas*, *Eur. Phys. J. D* 17 (2001) 49.
- [19] P.W. Anderson, *Random-phase approximation in the theory of superconductivity*, *Phys. Rev.* 112 (1958) 1900.
- [20] A. Altmeyer, S. Riedl, C. Kohstall, M.J. Wright, R. Geursen, M. Bartenstein, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Precision measurements of collective oscillations in the BEC–BCS crossover*, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 040401.