ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

Е. С. Барановский, М. А. Артемов

О СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАНАЛЕ*

Воронежский государственный университет, Российская Федерация,
394006, Воронеж, Университетская пл., 1

В статье изучаются математические модели, описывающие ламинарные изотермические течения жидкостей второго порядка в плоском канале под действием постоянного перепада давления. Необходимость расчета таких течений возникает в ряде прикладных задач, связанных с моделированием движения полимерных сред. Цель настоящей работы заключается в нахождении точных решений с учетом различных типов краевых условий на стенках канала. Наряду с классическим условием прилипания рассматривается условие Навье, согласно которому скорость скольжения жидкости по твердой поверхности прямо пропорциональна касательным напряжениям. Используются также условия проскальзывания порогового типа и смешанные граничные условия в предположении, что стенки канала могут отличаться по физическим свойствам. На основе анализа соотношений параметров модели течения для каждой из этих краевых задач построены точные решения, характеризующие скорость движения жидкости внутри канала и на его стенках и давление. Из полученных решений, в частности, следует, что давление существенно зависит от коэффициента нормальных напряжений, особенно в тех зонах канала, где велико изменение (в поперечном к каналу направлении) скорости течения. В то же время поле скоростей не зависит от данного коэффициента и, следовательно, совпадает с распределением скоростей, имеющем место в случае обычной ньютоновской жидкости. В работе также установлено, что при применении условий порогового проскальзывания ключевой величиной является произведение модуля перепада давления и половины толщины канала. Если это произведение превышает некоторое критическое значение, то на стенках канала возникает эффект скольжения жидкости; в противном случае реализуется режим прилипания. Если допустить, что на одной из стенок канала выполнено условие Навье, а на другой стенке — условие порогового проскальзывания, то соответствующее пороговое значение для возникновения пристенного скольжения в определенной мере снижается. Построенные в работе точные решения могут быть использованы при определении области применимости дифференциальных моделей полимерных жидкостей, а также при

Барановский Евгений Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; esbaranovskii@gmail.com

Артемов Михаил Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой; artemov_m_a@mail.ru

Baranovskii Evgenii Sergeevich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; esbaranovskii@gmail.com

Artemov Mikhail Anatolievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair; artemov_m_a@mail.ru

* Работа Е. С. Барановского выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-31-00182 мол_а).

 https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.401

тестировании приближенных аналитических, численных и асимптотических методов исследования гидродинамических систем со сложной реологией. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: неньютоновские жидкости, жидкости второго порядка, течение Пуазейля, условия проскальзывания, краевые задачи, точные решения.

E. S. Baranovskii, M. A. Artemov

STEADY FLOWS OF SECOND-GRADE FLUIDS IN A CHANNEL

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., Voronezh,
394006, Russian Federation

In this paper, we study mathematical models describing steady flows of second-grade fluids in a plane channel. The flows are driven by constant pressure gradient. We consider various boundary conditions on the channel walls, namely, the no-slip condition, the free-slip condition, threshold slip conditions, and mixed boundary conditions. For each of the boundary value problems, we construct exact solutions, which characterize the velocity and pressure fields in the channel. Using these solutions, we show that the pressure significantly depends on the normal stress coefficient α, especially in those subdomains, where the change of flow velocity is large (in the transverse direction of the channel). At the same time, the velocity field is independent of α, and therefore coincides with the velocity field that occurs in the case of a Newtonian fluid (when $\alpha = 0$). Moreover, we establish that the key point in a description of stick-slip flows is value of ξh, where ξ is module of the gradient pressure, h is the half-channel height. If ξh exceeds some threshold value, then the slip regime holds at solid surfaces, otherwise the fluid adheres to the channel walls. If it is assumed that the free-slip condition (Navier's condition) is provided on one part of the boundary, while on the other one a stick-slip condition holds, then for the slip regime the corresponding threshold value is reduced to a certain extent, but not by more than half. Refs 15.

Keywords: non-Newtonian fluids, second-grade fluids, the Poiseuille flow, slip boundary conditions, boundary value problems, exact solutions.

1. Введение. Многие применяемые на практике материалы могут быть отнесены к классу *жидкостей сложности* N (см. [1, 2]). В таких средах тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T}$ задается соотношением

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_N),$$

в котором p — давление; $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор; $\boldsymbol{F}$ — некоторая функция (разумеется, эта функция не может быть произвольной, точнее говоря, она должна удовлетворять определенным соотношениям, вытекающим из физического смысла модели); $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_N$ — тензоры Ривлина—Эриксена:

$$\boldsymbol{A}_1 = \nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{A}_j = \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}_{j-1} + \boldsymbol{A}_{j-1}\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{j-1}, \quad j = 2, \dots, N,$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость течения; оператор d/dt обозначает полную (субстанциональную) производную,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}_{j-1} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}_{j-1} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}_{j-1}.$$

Если $\boldsymbol{F}$ — полином степени N, то соответствующую жидкость называют *жидкостью порядка* N.

Классическая несжимаемая ньютоновская жидкость с тензором

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \nu\boldsymbol{A}_1, \ \ \nu > 0,$$

является жидкостью первого порядка. Достаточно хорошо изученные нелинейно-вязкие жидкости, для которых выполнено реологическое соотношение

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \nu(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{A}_1,$$

принадлежат к классу моделей сложности 1.

В этой статье речь пойдет о жидкостях второго порядка с тензором

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \nu\boldsymbol{A}_1 + \alpha_1\boldsymbol{A}_2 + \alpha_2\boldsymbol{A}_1^2, \tag{1}$$

где ν, α_1, α_2 — материальные константы (ν — вязкость жидкости; α_1 и α_2 — коэффициенты нормальных напряжений). Эти константы, согласно результатам [3], должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\nu \geqslant 0, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Характерной особенностью жидкостей второго порядка является то, что в них при сдвиговом течении появляются нормальные напряжения.

Введя обозначение

$$\alpha = \alpha_1 = -\alpha_2,$$

перепишем (1) в виде

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \nu\boldsymbol{A}_1 + \alpha\boldsymbol{A}_2 - \alpha\boldsymbol{A}_1^2. \tag{2}$$

Далее будет изучен ряд задач о движении несжимаемой жидкости (2) в плоском бесконечном канале в режиме установившегося (независящего от времени) течения.

Особенностью данной статьи является то, что при расчете течения используются несколько типов краевых условий. Наряду с классическим условием прилипания $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ будут рассмотрены условия свободного и порогового проскальзываний, а также смешанные краевые условия в предположении, что стенки канала могут отличаться по своим физическим свойствам. Такие постановки задач вызывают интерес как в теоретических исследованиях, так и при решении прикладных задач. Важность учета эффекта пристенного скольжения и его влияния на различные характеристики течений, особенно в случае неньютоновских жидкостей, отмечается во многих работах (см., например, недавние публикации [4–9] и приведенные в них ссылки). Существенный вклад в изучение причин и механизмов скольжения жидкостей и дисперсных систем по поверхности твердого тела внес Д. М. Толстой [10].

В настоящей статье для каждой из представленных краевых задач построены точные решения, определяющие скорость течения и давление в канале. Найдены соотношения параметров модели, при выполнении которых имеет место скольжение/прилипание на стенках канала.

Следует отметить, что в [11] выполнен расчет ламинарных течений жидкостей сложности 2 в плоском канале и цилиндрической трубе, а также течения между концентрическими цилиндрами при краевом условии проскальзывания Навье, которое является частным (точнее говоря, предельным) случаем условия порогового проскальзывания, рассмотренного в данной статье.

Вопросы о существовании, единственности и качественном поведении решений уравнений движения жидкостей второго порядка при условии Навье на границе области течения изучаются в [12–14].

2. Постановка задач. Как известно, стационарное движение однородной несжимаемой жидкости описывается системой уравнений

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\boldsymbol{S} - \nabla p + \rho\boldsymbol{g}, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{4}$$

где ρ — плотность жидкости; $\boldsymbol{v}$ — скорость течения; $\boldsymbol{S}$ — девиатор напряжений; p — давление в канале; $\boldsymbol{g}$ — объемные силы. Операторы div и ∇ действуют по пространственным переменным x, y, z.

Пусть жидкость заполняет область, заключенную между параллельными плоскостями $z = -h$ и $z = h$, и движется вдоль оси x под действием постоянного перепада давления*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\xi, \quad \xi > 0, \tag{5}$$

и

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} = (0, 0, -g).$$

При таком течении для компонент скорости $\boldsymbol{v}$ имеем

$$v_1 = u(z), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

где $u = u(z)$ — некоторая функция. При этом, в силу легко проверяемого равенства

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

система (3) сводится к соотношению

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \nabla p - \rho\boldsymbol{g}. \tag{6}$$

Выполнение условия несжимаемости (4) очевидно.

Рассмотрим задачу о пуазейлевом течении жидкостей второго порядка в канале $-h \leqslant z \leqslant h$. Предполагая, что для жидкости справедлив реологический закон (2), и учитывая равенство

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S},$$

запишем (6) в виде

$$\operatorname{div}(\nu\boldsymbol{A}_1 + \alpha\boldsymbol{A}_2 - \alpha\boldsymbol{A}_1^2) = \nabla p - \rho\boldsymbol{g}. \tag{7}$$

Полученное уравнение является основным для расчета течения в канале. Неизвестными в (7) являются функции u и p. Разумеется, для полной физической определенности к (7) необходимо добавить краевые условия для скорости u на стенках канала.

В этой статье рассматриваются следующие краевые задачи.

Задача A. *Найти решение системы* (5), (7) *с краевыми условиями прилипания*

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \textit{при} \ z = \pm h. \tag{8}$$

Задача B. *Найти решение системы* (5), (7) *при условиях порогового проскальзывания на стенках канала* $z = \pm h$

*В литературе такое течение принято называть *плоским течением Пуазейля.* Для ньютоновской жидкости этот тип течений хорошо изучен (см., например, [15]).

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\
\boldsymbol{v}_{\tan}=\boldsymbol{0},\quad \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}\leqslant\sigma,\\
(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}=-(\sigma+k\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3})\frac{\boldsymbol{v}_{\tan}}{\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}},\quad \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}>\sigma.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Здесь и далее используются такие обозначения: $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к стенке канала; $\boldsymbol{v}_{\tan}$ — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{v}$, т. е.

$$\boldsymbol{v}_{\tan}=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n};$$

$k>0$ — коэффициент проскальзывания; $\sigma\geqslant 0$ — параметр, определяющий пороговое значение величины $\|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}$, при превышении которого имеет место пристенное скольжение жидкости.

Задача C. *Найти решение системы* (5), (7) *при смешанных краевых условиях*

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0\ \ \textit{при}\ \ z=h,\\
\boldsymbol{v}_{\tan}=\boldsymbol{0},\ \ \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}\leqslant\sigma\ \ \textit{и}\ \ z=h,\\
(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}=-(\sigma+k\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3})\frac{\boldsymbol{v}_{\tan}}{\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}},\ \ \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}>\sigma\ \ \textit{и}\ \ z=h,\\
\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\ \ \textit{при}\ \ z=-h.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Задача D. *Найти решение системы* (5), (7) *при смешанных краевых условиях*

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0\ \ \textit{при}\ \ z=\pm h,\\
\boldsymbol{v}_{\tan}=\boldsymbol{0},\ \ \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}\leqslant\sigma\ \ \textit{и}\ \ z=h,\\
(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}=-(\sigma+k_1\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3})\frac{\boldsymbol{v}_{\tan}}{\|\boldsymbol{v}_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}},\ \ \textit{если}\ \|(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3}>\sigma\ \ \textit{и}\ \ z=h,\\
(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}=-k_2\boldsymbol{v}_{\tan}\ \ \textit{при}\ \ z=-h,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где $k_1>0$ *и* $k_2\geqslant 0$.

З а м е ч а н и е. Четвертое равенство системы (11) указывает на то, что пристенное скольжение возникает при наличии любых ненулевых касательных напряжений, что соответствует предельному случаю (при $\sigma\to 0+$) для рассмотренных выше условий порогового скольжения. В литературе такое равенство известно как *условие проскальзывания Навье*. Иногда его называют также *условием свободного проскальзывания* [4]. При этом данное равенство не следует путать с условием отсутствия трения $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})_{\tan}=0$, которое имеет место только при $k_2=0$.

3. Решение задачи A. Сначала вычислим тензоры Ривлина—Эриксена $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ и девиатор напряжений $\boldsymbol{S}$:

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&0&u'(z)\\0&0&0\\u'(z)&0&0\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2(u'(z))^2\end{bmatrix},
$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -\alpha(u'(z))^2 & 0 & \nu u'(z) \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu u'(z) & 0 & \alpha(u'(z))^2 \end{bmatrix}$$

и запишем уравнение (7) в виде

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} -\alpha(u'(z))^2 & 0 & \nu u'(z) \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu u'(z) & 0 & \alpha(u'(z))^2 \end{bmatrix} = \nabla p - \rho \boldsymbol{g}.$$

Последнее уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{gathered} \nu u''(z) = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}, \\ \alpha[(u'(z))^2]' = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z} + \rho g. \end{gathered} \tag{12}$$

В первую очередь найдем давление p. Из второго равенства (12) вытекает, что давление не зависит от y, т. е. $p = p(x,z)$. Кроме того, учитывая (5), приходим к выводу, что давление следует искать в виде

$$p(x,z) = -\xi x + \phi(z)$$

с неизвестной функцией $\phi(z)$.

Из третьего соотношения (12) выводим, что

$$\phi(z) = \alpha(u'(z))^2 - \rho g z + C,$$

здесь C — константа. Полагая $C = \rho g h$, получаем

$$\phi(z) = \alpha(u'(z))^2 + \rho g(h - z). \tag{13}$$

Из первого уравнения (12) и (5) следует, что

$$\nu u'(z) = -\xi z + C_0, \tag{14}$$

где C_0 — константа. По физическому смыслу задачи А поле скоростей должно быть симметрично относительно плоскости $z = 0$, т. е. функция $u(z)$ — четная. Следовательно, $u'(0) = 0$. Полагая $z = 0$ в (14), находим, что $C_0 = 0$. Поэтому

$$u'(z) = -\frac{\xi z}{\nu}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13), получаем

$$\phi(z) = \frac{\alpha\xi^2}{\nu^2} z^2 + \rho g(h - z).$$

Определим теперь скорость u. Из (15) следует, что

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu} z^2 + C_1, \tag{16}$$

причем константа C_1 должна быть выбрана таким образом, чтобы выполнялись условия прилипания (8) на стенках канала. Поскольку $u(z)$ — четная функция, то достаточно убедиться в том, что граничные условия выполнены на верхней стенке канала. Подставляя $z = h$ в (16), находим, что

$$C_1 = \frac{\xi h^2}{2\nu}.$$

Таким образом, получаем решение задачи A:

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2), \tag{17}$$

$$p(x, z) = -\xi x + \frac{\alpha \xi^2}{\nu^2} z^2 + \rho g(h - z).$$

4. Решение задачи B. Рассмотрим теперь ситуацию, когда на стенках канала выполняются условия порогового проскальзывания (9). При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в п. 3, можно убедиться в справедливости соотношений (13), (15) и (16) для задачи B.

Далее, непосредственно вычисляя

$$\boldsymbol{Tn}|_{z=\pm h} = -\,p(x, \pm h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\alpha(u'(\pm h))^2 & 0 & \nu u'(\pm h) \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu u'(\pm h) & 0 & \alpha(u'(\pm h))^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \pm \nu u'(\pm h) \\ 0 \\ \mp p(x, \pm h) \pm \alpha(u'(\pm h))^2 \end{pmatrix},$$

с учетом (15) находим, что

$$\|(\boldsymbol{Tn}|_{z=\pm h})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3} = |\nu u'(\pm h)| = \xi h.$$

Исходя из этого равенства и (9), рассмотрим отдельно два случая: $\xi h \leqslant \sigma$ и $\xi h > \sigma$.

Если $\xi h \leqslant \sigma$, то, согласно второму равенству (9), пристенное скольжение отсутствует и поле скоростей в канале, как и в задаче A, определяется по формуле (17).

Если же имеет место соотношение $\xi h > \sigma$, то скорость жидкости на стенках канала будет уже отлична от нуля. При этом, в силу третьего условия (9), должны выполняться равенства

$$\pm \nu u'(\pm h) = -(\sigma + k u(\pm h)).$$

Отсюда с учетом (15) имеем

$$-\xi h = -(\sigma + k u(\pm h))$$

и, следовательно,

$$u(\pm h) = \frac{\xi h - \sigma}{k}.$$

Используя это равенство и (16), находим поле скоростей

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) + \frac{\xi h - \sigma}{k}.$$

Объединяя решения, построенные для каждого из описанных случаев, получаем решение задачи B:

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) + (1 - \theta(\sigma - \xi h))\frac{\xi h - \sigma}{k},$$

$$p(x, z) = -\xi x + \frac{\alpha\xi^2}{\nu^2}z^2 + \rho g(h - z),$$

в котором θ — функция Хевисайда,

$$\theta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ s < 0, \\ 1, & \text{если } \ s \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Решение задачи C. При рассмотрении модели движения со смешанными краевыми условиями нужно иметь в виду, что поле скоростей, вообще говоря, не является симметричным относительно плоскости $z = 0$, и соотношение (15) может не выполняться. Поэтому вновь обратимся к первому уравнению системы (12), откуда после интегрирования по z находим, что

$$\nu u(z) = -\frac{\xi}{2}z^2 + C_1 z + C_2, \tag{18}$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы.

Принимая во внимание условие $u(-h) = 0$, из (18) выводим, что

$$C_2 = \frac{\xi}{2}h^2 + C_1 h.$$

Подставляя C_2 в (18), приходим к соотношению

$$\nu u(z) = -\frac{\xi}{2}(z^2 - h^2) + C_1(z + h). \tag{19}$$

Теперь необходимо определить константу C_1, исходя из условия порогового проскальзывания на верхней стенке канала.

Дифференцируя тождество (18) по z, получаем, что

$$\nu u'(z) = -\xi z + C_1. \tag{20}$$

С учетом (20) имеем

$$(\boldsymbol{Tn}|_{z=h})_{\tan} = \begin{pmatrix} \nu u'(h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi h + C_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Рассмотрим отдельно случаи прилипания и проскальзывания жидкости на стенке $z = h$. Если имеет место прилипание $u(h) = 0$, то из (19) следует, что $C_1 = 0$. Согласно второму условию (10), такой режим течения реализуется, если

$$\|(\boldsymbol{Tn}|_{z=h})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3} = \xi h \leqslant \sigma.$$

Пристенное скольжение возникает при выполнении неравенства

$$\|(\boldsymbol{Tn}|_{z=h})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3} = \xi h - C_1 > \sigma.$$

Ясно, что в этом случае

$$0 \leqslant C_1 < \xi h - \sigma$$

и, в силу третьего условия (10), должно выполняться равенство

$$\nu u'(h) = -(\sigma + k u(h)).$$

Отсюда, принимая во внимание (19) и (20), получаем

$$-\xi h + C_1 = -\left(\sigma + k\frac{2hC_1}{\nu}\right)$$

и затем вычисляем константу C_1 по равенству

$$C_1 = \frac{\nu(\xi h - \sigma)}{\nu + 2hk}.$$

Учитывая изложенное выше, запишем решение задачи C, пригодное для любых допустимых значений параметров модели:

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) + (1 - \theta(\sigma - \xi h))\frac{(\xi h - \sigma)(z + h)}{\nu + 2hk},$$
$$p(x, z) = -\xi x + \alpha(u'(z))^2 + \rho g(h - z). \quad (22)$$

6. Решение задачи D. Очевидно, что при решении задачи D можно использовать соотношения (18), (20) и (21). Возможны два случая: либо на стенке $z = h$ реализуется условие прилипания, либо имеет место пристенное скольжение жидкости.

Сначала найдем решение для первого случая. Подставим $z = h$ в (18). Поскольку $u(h) = 0$, получаем, что

$$C_2 = \frac{\xi h^2}{2} - C_1 h$$

и, следовательно,

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) + \frac{C_1}{\nu}(z - h). \quad (23)$$

Выберем теперь константу C_1 таким образом, чтобы выполнялось условие проскальзывания Навье на нижней стенке канала:

$$-\nu u'(-h) = -k_2 u(-h). \quad (24)$$

Принимая во внимание (20) и (23), перепишем (24) в виде

$$-\xi h - C_1 = \frac{2hk_2C_1}{\nu},$$

откуда находим, что

$$C_1 = -\frac{\xi h\nu}{\nu + 2k_2h}. \tag{25}$$

Выясним теперь, при каких соотношениях на параметры модели реализуется описанный выше случай. Согласно второму равенству (11), при $z = h$ должно выполняться неравенство

$$\|(\boldsymbol{Tn})_{\tan}\|_{\mathbb{R}^3} \leqslant \sigma. \tag{26}$$

Учитывая (21) и (25), приходим в выводу, что (26) справедливо, если

$$\xi h \leqslant \sigma\left(1 - \frac{\nu}{2(\nu + k_2h)}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на верхней стенке канала имеет место скольжение жидкости. Тогда граничные условия (11) сводятся к следующей системе:

$$\nu u'(h) = -(\sigma + k_1u(h)),$$

$$-\nu u'(-h) = -k_2u(-h),$$

которую с учетом (18) и (20) можно переписать так:

$$-\xi h + C_1 = -\left(\sigma + k_1\left(-\frac{\xi h^2}{2\nu} + \frac{C_1h}{\nu} + \frac{C_2}{\nu}\right)\right),$$

$$-(\xi h + C_1) = -k_2\left(-\frac{\xi h^2}{2\nu} - \frac{C_1h}{\nu} + \frac{C_2}{\nu}\right).$$

Отсюда находим константы C_1 и C_2 по формулам

$$C_1 = -\frac{(\xi h(k_1 - k_2) + \sigma k_2)\nu}{2hk_1k_2 + \nu(k_1 + k_2)},$$

$$C_2 = -\frac{2h^3\xi k_1k_2 + 3h^2\nu\xi(k_1 + k_2) + 4h\nu^2\xi - 2h\nu\sigma k_2 - 2\nu^2\sigma}{4hk_1k_2 + 2\nu(k_1 + k_2)}.$$

Принимая во внимание третье равенство (11), нетрудно проверить, что рассматриваемый случай реализуется, если выполнено неравенство

$$\xi h > \sigma\left(1 - \frac{\nu}{2(\nu + k_2h)}\right). \tag{28}$$

Подводя итоги п. 6, запишем в явном виде полученное решение задачи D:

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) - \frac{\xi h}{\nu + 2k_2h}(z - h),$$

если параметры модели удовлетворяют соотношению (27); в противном случае, т. е. при выполнении неравенства (28), поле скоростей определяется по формуле

$$u(z) = -\frac{\xi}{2\nu}(z^2 - h^2) - \frac{\xi h(k_1 - k_2) + \sigma k_2}{2hk_1k_2 + \nu(k_1 + k_2)}z +$$

$$+\ \frac{\xi h^2(k_1+k_2)+2\xi h\nu-\sigma hk_2-\nu\sigma}{2hk_1k_2+\nu(k_1+k_2)}.$$

Давление p в обоих случаях вычисляется по (22).

7. Заключение. В настоящей работе построены точные решения ряда краевых задач, описывающих стационарные течения жидкостей второго порядка в плоском канале под действием постоянного перепада давления при краевых условиях прилипания, условиях порогового и свободного пристенного скольжения, а также при смешанных краевых условиях.

Полученные решения показывают, что давление в канале существенно зависит от коэффициента нормальных напряжений α, особенно в тех зонах канала, где велико изменение (в поперечном к каналу направлении) скорости течения. В то же время поле скоростей не зависит от α и, следовательно, совпадает с полем скоростей, имеющем место в случае ньютоновской жидкости, когда $\alpha = 0$.

При рассмотрении условий порогового проскальзывания ключевой величиной является произведение ξh. Если оно превышает заданное пороговое значение, то на стенках канала возникает эффект скольжения жидкости; в противном случае реализуется режим прилипания. Если предположить, что на одной из стенок канала имеет место условие свободного скольжения (условие Навье), а на другой стенке — условие порогового проскальзывания, то соответствующее пороговое значение для пристенного скольжения в определенной мере снижается, но не более чем в 2 раза.

Литература

1. *Rivlin R. S., Ericksen J. L.* Stress-deformation relations for isotropic materials // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1955. Vol. 4, N 2. P. 323–425.

2. *Dunn J. E., Rajagopal K. R.* Fluids of differential type: Critical review and thermodynamic analysis // Intern. Journal of Engineering Science. 1995. Vol. 33, N 5. P. 689–729.

3. *Dunn J. E., Fosdick R. L.* Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1974. Vol. 56. P. 191–252.

4. *Rajagopal K. R.* On some unresolved issues in non-linear fluid dynamics // Russian Mathematical Surveys. 2003. Vol. 58, N 2. P. 319–300.

5. *Арефьев Н. Н., Штин С. М.* Метод определения реологических характеристик сапропеля // Горн. информ.-аналит. бюл. (науч.-технич. журн.). 2007. № 1. С. 41–47.

6. *Kazatchkov I. B., Hatzikiriakos S. G.* Relaxation effects of slip in shear flow of linear molten polymers // Rheologica Acta. 2010. Vol. 49, N 3. P. 267–274.

7. *Hatzikiriakos S. G.* Wall slip of molten polymers // Progress in Polymer Science. 2012. Vol. 37, N 4. P. 624–643.

8. *Макарова М. А., Пышнограй И. Г., Пышнограй Г. В., Алтухов Ю. А., Головичева И. Э., Трегубова Ю. Б., Третьяков И. В., Афонин Г. Л., Аль Джода Х. Н. А.* Постановка мезоскопических граничных условий для скорости проскальзывания на границе // Ползуновский вестник. 2012. № 3-1. С. 61–74.

9. *Ивицкий И. И.* Моделирование пристенного скольжения полимера // Технологический аудит и резервы производства. 2014. Т. 5, № 3 (19). С. 8–11.

10. *Толстой Д. М.* Скольжение жидкостей и дисперсных систем по твердым поверхностям: докт. дис. М.: Моск. станкоинструмент. ин-т, 1953. 349 с.

11. *Hron J., Le Roux C., Malek J., Rajagopal K.R.* Flows of incompressible fluids subject to Navier's slip on the boundary // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. P. 2128–2143.

12. *Le Roux C.* Existence and uniqueness of the flow of second-grade fluids with slip boundary conditions // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1999. Vol. 148. P. 309–356.

13. *Busuioc A. V., Ratiu T. S.* The second grade fluid and averaged Euler equations with Navier-slip boundary conditions // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. P. 1119–1149.

14. *Baranovskii E. S.* Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015. N 91. P. 1–12.

15. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / пер. с нем. Г. А. Вольперта; под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука, 1974. 712 с. [*Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag, 1951, 483 s.]

Для цитирования: *Барановский Е. С., Артемов М. А.* О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 342–353. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.401

References

1. Rivlin R. S., Ericksen J. L. Stress-deformation relations for isotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1955, vol. 4, no. 2, pp. 323–425.

2. Dunn J. E., Rajagopal K. R. Fluids of differential type: Critical review and thermodynamic analysis. *Intern. Journal of Engineering Science*, 1995, vol. 33, no. 5, pp. 689–729.

3. Dunn J. E., Fosdick R. L. Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1974, vol. 56, pp. 191–252.

4. Rajagopal K. R. On some unresolved issues in non-linear fluid dynamics. *Russian Mathematical Surveys*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 319–300.

5. Aref'ev N. N., Shtin S. M. Metod opredelenija reologicheskih harakteristik sapropelja [Method for determination of rheological properties of sapropel]. *Gorn. inform.-analit. bjul. (nauch.-tehnich. zhurn.)* [*Mining Informational and Analytical Bulletin. Scientific and Technical Journal*], 2007, no. 1, pp. 41–47. (In Russian)

6. Kazatchkov I. B., Hatzikiriakos S. G. Relaxation effects of slip in shear flow of linear molten polymers. *Rheologica Acta*, 2010, vol. 49, no. 3, pp. 267–274.

7. Hatzikiriakos S. G. Wall slip of molten polymers. *Progress in Polymer Science*, 2012, vol. 37, no. 4, pp. 624–643.

8. Makarova M. A., Pyshnograj I. G., Pyshnograj G. V., Altuhov Ju. A., Golovicheva I. Je., Tregubova Ju. B., Tret'jakov I. V., Afonin G. L., Al' Dzhoda H. N. A. Postanovka mezoskopicheskih granichnyh uslovij dlja skorosti proskal'zyvanija na granice [Formulation of mesoscopic boundary conditions for the slip velocity on the boundary]. *Polzunovsky Vestnik* [*Polzunovsky Journal*], 2012, no. 3-1, pp. 61–74. (In Russian)

9. Ivickij I. I. Modelirovanie pristennogo skol'zhenija polimera [Modeling of wall slip of polymers]. *Tehnologicheskij audit i rezervy proizvodstva* [*Technology Audit and Production Reserves*], 2014, vol. 5, no. 3 (19), pp. 8–11. (In Russian)

10. Tolstoy D. M. *Skol'zhenie zhidkostej i dispersnyh sistem po tverdym poverhnostjam* [*Slipping liquids and disperse systems on solid surfaces*]. Doct. dis. Moscow, Moscow Machine-Instrument Institute, 1953, 349 p. (In Russian)

11. Hron J., Le Roux C., Malek J., Rajagopal K. R. Flows of incompressible fluids subject to Navier's slip on the boundary. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, vol. 56, pp. 2128–2143.

12. Le Roux C. Existence and uniqueness of the flow of second-grade fluids with slip boundary conditions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1999, vol. 148, pp. 309–356.

13. Busuioc A. V., Ratiu T. S. The second grade fluid and averaged Euler equations with Navier-slip boundary conditions. *Nonlinearity*, 2003, vol. 16, pp. 1119–1149.

14. Baranovskii E. S. Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2015, no. 91, pp. 1–12.

15. Schlichting H. *Grenzschicht-Theorie* [*Boundary-layer theory*]. Karlsruhe, Verlag Publ., 1951, 483 s. (Russ. ed.: Schlichting H. *Teorija pogranichnogo sloja.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 712 p.)

For citation: Baranovskii E. S., Artemov M. A. Steady flows of second-grade fluids in a channel. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 342–353. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.401

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 13 марта 2017 г.

Статья принята к печати 12 октября 2017 г.