

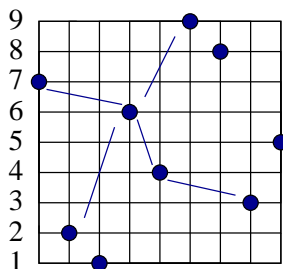
# SOUS-SUITES (DÉ)CROISSANTES DANS LES PERMUTATIONS : ASPECTS COMBINATOIRES

MIREILLE BOUSQUET-MÉLOU  
JOURNÉES ALEA 2009

ABSTRACT. On présente des outils combinatoires, pour partie classiques, permettant de dénombrer les permutations sans sous-suite (dé)croissante de longueur  $k$  : correspondance de Robinson-Schensted, tableaux de Young, pour arriver à la formule déterminantale de Gessel comptant les permutations en question. On évoque aussi l'énumération des *involutions* sans longue sous-suite (dé)croissante.

## 1. RAPPELS SUR LES PERMUTATIONS

Une permutation sur  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  est une bijection sur cet ensemble. On la note souvent comme un mot,  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  où  $\sigma_i = \sigma(i)$ . L'ensemble de ces permutations est noté  $\mathfrak{S}_n$ . Par exemple,  $\sigma = 7\ 2\ 1\ 6\ 4\ 9\ 8\ 3\ 5 \in \mathfrak{S}_9$ . On utilise aussi le graphe de  $\sigma$ , soit, dans l'exemple précédent :



Toujours pour notre permutation exemplaire, 2 6 8 est une sous-suite croissante, et 9 3 est une sous-suite décroissante. Il y a ici plusieurs sous-suites croissantes maximales (par exemple 2 6 8 et 2 6 9) et une seule sous-suite décroissante maximale, à savoir 7 6 4 3. Les unes et les autres se repèrent bien sur le graphe de  $\sigma$ . On note  $\text{cmax}(\sigma)$  (resp.  $\text{dmax}(\sigma)$ ) la taille (nombre de lettres) d'une sous-suite croissante (resp. décroissante) maximale. Dans notre exemple,  $\text{cmax}(\sigma) = 3$  et  $\text{dmax}(\sigma) = 4$ .

Rappelons que  $\mathfrak{S}_n$  est un groupe (pour la composition des permutations, vues comme fonctions de  $[n]$ ). Par exemple, si  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  et  $\tau_i$  est la transposition élémentaire qui échange  $i$  et  $i + 1$ , on a  $\sigma\tau_i = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+2} \cdots \sigma_n$ . Le graphe de la permutation inverse  $\sigma^{-1}$  s'obtient en prenant le symétrique de celui de  $\sigma$  par rapport à la première diagonale. Au passage,  $\text{cmax}(\sigma) = \text{cmax}(\sigma^{-1})$  et  $\text{dmax}(\sigma) = \text{dmax}(\sigma^{-1})$ . Une *involution* est une permutation égale à son inverse. Une *inversion* de  $\sigma$  est un couple  $(i, j)$  tel que  $i < j$  et  $\sigma_i > \sigma_j$ . La *signature* de  $\sigma$  est  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$ , où  $\text{inv}(\sigma)$  désigne le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

Toutes les symétries du carré agissent sur  $\mathfrak{S}_n$ . En particulier, on note  $\text{mir}(\sigma) = \sigma_n \cdots \sigma_2 \sigma_1$  le *miroir* de  $\sigma$ . Notons que cette fois  $\text{cmax}(\sigma) = \text{dmax}(\text{mir}(\sigma))$  et  $\text{dmax}(\sigma) = \text{cmax}(\text{mir}(\sigma))$ .

---

*Date:* 9 Mars 2009.

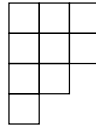
L'objectif principal de cet exposé est l'énumération des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telles que  $\text{dmax}(\sigma) \leq d$ . On note  $a(n, d)$  le nombre de ces permutations, et  $\mathfrak{S}_{n,d}$  l'ensemble correspondant. La remarque qui précède implique que  $a(n, d)$  est aussi le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  telles que  $\text{cmax}(\sigma) \leq d$ .

## 2. LA BIJECTION DE ROBINSON-SCHENSTED

Une *partition* de l'entier  $n \in \mathbb{N}$  est une suite décroissante finie d'entiers positifs dont la somme est  $n$  :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d = n.$$

On note  $|\lambda| = n$  le *poids*, ou la *taille*, de  $\lambda$ , et  $\ell(\lambda) = d$  sa *longueur*, c'est-à-dire le nombre de parts. Par exemple,  $\lambda = (3, 3, 2, 1)$  est une partition de 9 de longueur 4. On représente une partition par un diagramme, dont les lignes correspondent aux parts  $\lambda_i$ . Dans le cas précédent :



Un *tableau de Young (standard)* de forme  $\lambda$  est un remplissage des cases de ce diagramme par les entiers de 1 à  $n$  (chaque entier apparaissant une fois exactement), qui doit être croissant dans les lignes (vers la droite) et colonnes (vers le bas). Par exemple :

1	3	5
2	4	8
6	9	
7		

La *partition conjuguée* de  $\lambda$ , notée  $\lambda^*$ , a pour diagramme le symétrique de celui de  $\lambda$  par rapport à la (seconde) diagonale. On définit de même le conjugué d'un tableau de Young.

La bijection de Robinson-Schensted, qui figure dans des termes un peu vagues dans un papier de Gilbert de Beauregard Robinson en 1938 [19] et dans des termes tout à fait précis dans celui de Schensted en 1961 [22], transforme une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  en une paire  $(P, Q)$  de tableaux de Young de taille  $n$  et de même forme. L'opération élémentaire qui permet de construire  $P$  pas à pas, en lisant les entrées  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  de  $\sigma$  dans cet ordre, est *l'insertion en ligne* dans un tableau, que nous décrivons maintenant.

Imaginons avoir déjà construit un tableau partiel  $P_{i-1}$ , de taille  $i-1$ , qui contient les lettres  $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$  de  $\sigma$ . On forme le tableau  $P_i$  comme suit :

- si  $P_{i-1}$  est vide (ce qui n'arrive que pour  $i = 1$ ),  $P_i$  est réduit à une case contenant  $\sigma_i$ ,
- si toutes les entrées de la première ligne de  $P_{i-1}$  sont inférieures à  $\sigma_i$ , on insère  $\sigma_i$  au bout à droite de la première ligne,
- sinon, soit  $x$  la plus petite valeur supérieure à  $\sigma_i$  figurant dans la première ligne de  $P_{i-1}$ . On remplace  $x$  par  $\sigma_i$  dans  $P_{i-1}$ . La valeur  $x$  est *éjectée*, et on l'insère dans le tableau formé des lignes 2, 3, ... de  $P_{i-1}$ .

Le tableau final  $P_n$  obtenu après lecture complète de  $\sigma$  est le premier tableau  $P$  de la paire  $(P, Q)$  associée à  $\sigma$  par la bijection de Robinson-Schensted. Le second tableau,  $Q$ ,

a la même forme que  $P$ , et code l'ordre de création des cases de  $P$ . Plus précisément, la case de  $P$  créée à l'instant  $i$  porte dans  $Q$  l'étiquette  $i$ .

Un exemple est urgent : pour  $\sigma = 7\ 2\ 1\ 6\ 4\ 9\ 8\ 3\ 5$ , on forme tour à tour les tableaux suivants pour aboutir à  $P$  :

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & 2 & 1 & 1\ 6 & 1\ 4 & 1\ 4\ 9 & 1\ 4\ 8 & 1\ 3\ 8 & 1\ 3\ 5 \\ & 7 & 2 & 2 & 2\ 6 & 2\ 6 & 2\ 6\ 9 & 2\ 4\ 9 & 2\ 4\ 8 = P \\ & & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6\ 9 \\ & & & & & & & 7 & 7 \end{array}$$

Quant au tableau  $Q$ , il traduit l'ordre dans lequel ont été créées les cases de  $P$  :

$$\begin{array}{c} 1\ 4\ 6 \\ 2\ 5\ 7 = Q \\ 3\ 9 \\ 8 \end{array}$$

**Théorème 1.** *La transformation  $\Phi$  qui associe à une permutation  $\sigma$  la paire  $(P, Q)$  décrite ci-dessus est une bijection entre permutations de  $\mathfrak{S}_n$  et paires de tableaux de Young de taille  $n$  et de même forme.*

*Cette bijection a de belles propriétés de symétrie. Si  $\Phi(\sigma) = (P, Q)$  alors  $\Phi(\sigma^{-1}) = (Q, P)$ , et  $\Phi(\text{mir}(\sigma)) = (P^*, Q')$ , où  $P^*$  est le tableau conjugué de  $P$  (la description de  $Q'$  est plus délicate).*

*Enfin, les paramètres  $\text{cmax}(\sigma)$  et  $\text{dmax}(\sigma)$  sont respectivement la largeur et la hauteur du tableau  $P$ .*

Le fait que  $\Phi$  soit une bijection est le Lemme 3 dans l'article de Schensted [22]. La deuxième propriété de symétrie lui est également due. Il semble ne pas avoir remarqué la première, due à Schützenberger [23]. Il est vrai que, pour remarquable qu'elle soit, elle n'est pas commode à prouver à partir de cette description de  $\Phi$ . En revanche, deux descriptions plus tardives de  $\Phi$ , celle de Viennot [27] et celle de Fomin [7, 6] rendent évidente cette symétrie.

Le lien entre les sous-suites croissantes et décroissantes maximales de  $\sigma$  et les dimensions de  $P$  est dû à Schensted. Notons que ces deux résultats sont équivalents, via le fait que  $\Phi(\text{mir}(\sigma)) = (P^*, Q')$  et que  $\text{cmax}(\sigma) = \text{dmax}(\text{mir}(\sigma))$ .

Enfin, la description du tableau  $Q'$  a été donnée par Schützenberger [23].

De nombreux autres détails, notamment bibliographiques, figurent dans le chapitre 7 du second volume de *Enumerative Combinatorics*, par Stanley [25], et dans l'appendice 7.1 de ce même ouvrage.

### 3. LA FORMULE DES ÉQUERRES

Il s'agit ici de dénombrer les tableaux de Young de forme  $\lambda$  donnée. Le nombre de tels tableaux est traditionnellement noté  $f_\lambda$ , ou  $f^\lambda$  ou  $f(\lambda)$ , et on jonglera sans doute avec ces différentes notations ci-dessous.

La bijection de Robinson-Schensted nous dit que :

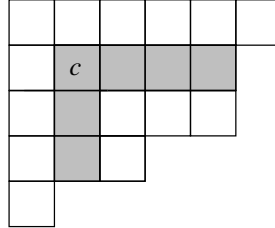
$$\sum_{|\lambda|=n} f_\lambda^2 = n!$$

Pour les amateurs d'algèbre, ceci est qu'une instance de la formule

$$\sum_{\chi \text{ irred}} (\dim \chi)^2 = |G|$$

qui lie l'ordre d'un groupe fini  $G$  aux dimensions de ses représentations irréductibles [24]. En effet, les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  (un groupe d'ordre  $n!$  s'il en fut) sont indexées par les partitions  $\lambda$  de  $n$ , et la dimension de la représentation indexée par  $\lambda$  est précisément le nombre  $f_\lambda$ . On ne creusera pas cette veine ici. Il faut toutefois savoir que les outils combinatoires que l'on déroule jouent un rôle important dans l'étude des représentations de  $\mathfrak{S}_n$  et des fonctions symétriques. Voir [25, Chap. 7] ou [15] ou [20] pour un petit aperçu...

Revenons donc à nos moutons : l'énumération des tableaux de forme  $\lambda$ . À chaque case  $c$  de  $\lambda$  (ou de son diagramme...) on associe un ensemble de cases appelé *équerre* de  $c$ , comme illustré ci-dessous :



On note  $h_c$  la longueur de cette équerre (c'est-à-dire le nombre de cases qu'elle comporte). Pour l'exemple ci-dessus,  $h_c = 6$ .

**Théorème 2.** *Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Le nombre de tableaux de Young standard de forme  $\lambda$  est :*

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{c \in \lambda} h_c}.$$

Par exemple, pour la partition  $\lambda$  de la page 2,

$$f_\lambda = \frac{9!}{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 168.$$

En exprimant les équerres en fonction des parts  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  de  $\lambda$ , on se convainc que la formule ci-dessus, dite *formule des équerres*, est équivalente à :

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (\lambda_i - i + d)!} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\lambda_i - \lambda_j - i + j). \quad (1)$$

C'est sous cette forme qu'elle a été démontrée pour la première fois, par MacMahon en 1909 [16]. La formulation en termes d'équerres est due à Frame, Robinson et Thrall [8], qui en ont donné une très jolie preuve probabiliste. Nous allons ici démontrer (1) par un principe de réflexion, assez voisin de celui que nous utiliserons en Section 4 pour dénombrer les permutations sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$ .

Un tableau  $P$  de forme  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ , avec  $|\lambda| = n$ , se code par un mot de longueur  $n$ , disons  $u = u_1 \cdots u_n$ , sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, d\}$ , de la façon suivante :  $u_i = k$  si l'entier  $i$  figure dans la ligne  $k$  de  $P$  (la ligne supérieure est, par convention, la ligne 1). Le codage du tableau de la page 2 est ainsi  $u = 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3$ . Ce codage est une bijection entre tableaux de taille  $n$  et *mots de Yamanouchi* de longueur  $n$ . Un mot  $u = u_1 \cdots u_n$  est dit de Yamanouchi si pour toute factorisation  $u = vw$ ,

$$u = vw \Rightarrow |v|_1 \geq |v|_2 \geq \cdots \geq |v|_d, \quad (2)$$

où  $|v|_k$  désigne le nombre d'occurrences de la lettre  $k$  dans le mot  $v$ . La forme de  $\lambda$  est donnée par la *composition* de  $u$ , c'est-à-dire que  $\lambda_k = |u|_k$ . Ces mots de Yamanouchi

peuvent encore être vus comme des chemins dans  $\mathbb{N}^d$  : on part de l'origine  $(0, \dots, 0)$  et on fait un pas  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  quand on lit la lettre  $k$  (il est entendu que la coordonnée 1 dans  $e_k$  arrive en  $k$ -ième position). La condition (2) se traduit en disant que tout point  $(x_1, \dots, x_d)$  du chemin doit être dans le secteur

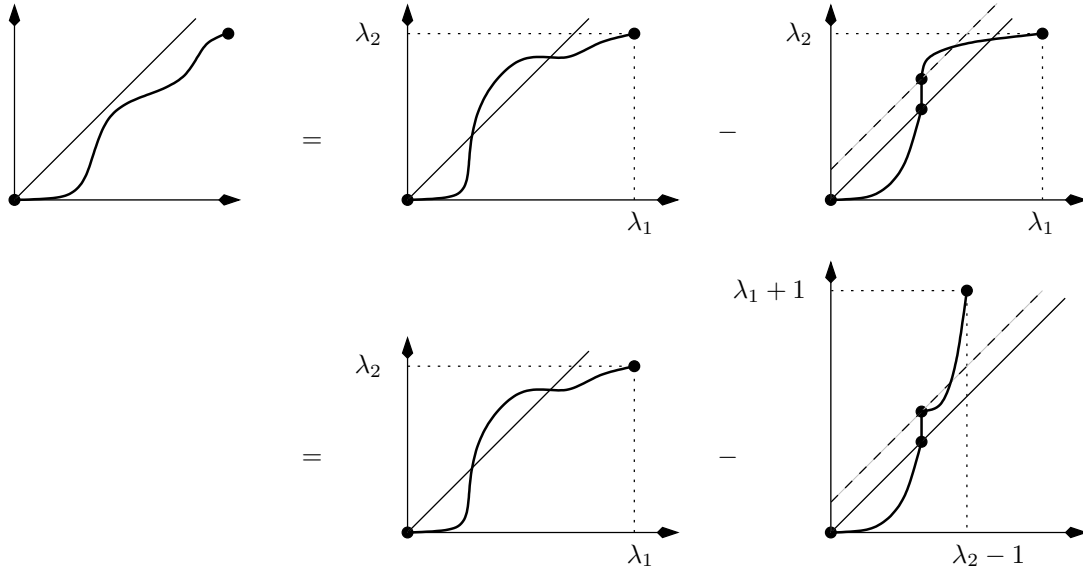
$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_d \geq 0. \tag{3}$$

Le point final du chemin est  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ .

Par exemple, un tableau de forme  $(\lambda_1, \lambda_2)$  se code par un chemin sous-diagonal dans  $\mathbb{N}^2$ , un *méandre*, en d'autres termes. Lesquels méandres on sait fort bien compter par le principe de réflexion :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \binom{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} - \binom{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + 1} \tag{4}$$

comme illustré ci-dessous.



C'est ce principe qu'on va généraliser pour compter les chemins (ou mots) de Yamanouchi en dimension  $d$ .

**Proposition 3.** *Le nombre de tableaux de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ , où  $|\lambda| = n$ , est*

$$f_\lambda = n! \det \left( \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la spécialisation de cette expression au cas  $d = 2$  donne bien (4).

*Proof.* On cherche à dénombrer les chemins de Yamanouchi finissant au point  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . On va définir une classe plus vaste de chemins, dotés d'un signe.

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_d$ . On note  $T(\sigma)$  le point de  $\mathbb{N}^d$  de coordonnées  $(\lambda_{\sigma_1} - \sigma_1 + 1, \dots, \lambda_{\sigma_d} - \sigma_d + d)$ . On note  $\mathcal{P}_\sigma$  l'ensemble des chemins (à pas unitaires et positifs) issu de l'origine de  $\mathbb{N}^d$  et finissant en  $T(\sigma)$ . Le *signe* d'un tel chemin est  $\varepsilon(\sigma)$ , la signature de  $\sigma$ . Notons que  $\mathcal{P}_\sigma$  est vide dès que l'une des coordonnées de  $T(\sigma)$  est strictement

négative. On note enfin  $\mathcal{P} = \cup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{P}_\sigma$ . Le nombre de chemins de  $\mathcal{P}_\sigma$  est

$$\frac{n!}{\prod_{1 \leq i \leq d} (\lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i)!}$$

Pour  $\sigma = \text{id}$ , le point  $T(\sigma)$  coïncide avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . Donc  $\mathcal{P}_{\text{id}}$  contient en particulier les chemins de Yamanouchi que l'on cherche à dénombrer. Pour  $\sigma \neq \text{id}$ , il n'y a pas de chemin de Yamanouchi (au sens de la condition (2) ou (3)) dans  $\mathcal{P}$ . En effet,  $\sigma$  a au moins une inversion  $(i, j)$ , et le point  $T(\sigma)$  qui est le point d'arrivée de tous les chemins de  $\mathcal{P}_\sigma$ , a pour coordonnées  $(x_1, \dots, x_d)$  avec  $x_i = \lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i$  et  $x_j = \lambda_{\sigma_j} - \sigma_j + j$ , de sorte que

$$x_i - x_j = (\lambda_{\sigma_i} - \lambda_{\sigma_j}) + (i - j) + (\sigma_j - \sigma_i)$$

et chacun de ces termes est négatif (car  $\sigma_j < \sigma_i$ ), le terme  $(i - j)$  étant même strictement négatif. Les conditions (3) ne sont donc pas vérifiées par le point final  $T(\sigma)$ .

On va maintenant définir une involution sur les chemins de  $\mathcal{P}$  qui ne sont *pas* de Yamanouchi, involution qui change le signe de ces chemins. Compte tenu du dénombrement que nous avons fait pour les chemins de  $\mathcal{P}_\sigma$ , ceci prouvera que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \frac{n!}{\prod_i (\lambda_{\sigma_i} - \sigma_i + i)!}$$

compte les chemins de Yamanouchi (lesquels, d'après ce qui précède, finissent forcément en  $\lambda$ ). Ce qui est précisément la formule déterminantale de la proposition.

Allons-y donc avec cette involution. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , et  $u$  un mot (chemin) de  $\mathcal{P}_\sigma$  qui n'est pas de Yamanouchi. Il existe un préfixe  $v$  de  $u$  et un entier  $k < d$  tel que  $u = v(k+1)w$  avec  $|v|_k = |v|_{k+1}$ . (Manifestement, le préfixe  $v(k+1)$  ne satisfait pas les conditions (2)). On choisit  $v$  de longueur minimale, de sorte que le préfixe  $v(k+1)$  est le premier qui pose problème. On associe à  $u$  le mot  $\psi(u) = v(k+1)\tilde{w}$ , où  $\tilde{w}$  est obtenu en remplaçant dans  $w$  toute occurrence de  $k$  par  $(k+1)$ , et inversement.

On vérifie aisément que  $\psi(u) \in \mathcal{P}_\tau$ , avec  $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+2} \cdots \sigma_n$ , de sorte que  $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ . De plus,  $\psi(u)$  n'est pas non plus un mot de Yamanouchi : son premier "problème" survient pour le préfixe  $v(k+1)$ . Cette remarque implique que  $\psi(\psi(u))$  coïncide avec  $u$ .

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

Il reste à déduire de la proposition 3 la formule des équerres, sous sa forme (1). C'est en fait facile :

$$\begin{aligned} f_\lambda &= n! \det \left( \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \\ &= n! \det \left( \frac{(\lambda_i - i + j + 1) \cdots (\lambda_i - i + d)}{(\lambda_i - i + d)!} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (\lambda_i - i + d)!} \det ((\lambda_i - i + j + 1) \cdots (\lambda_i - i + d))_{1 \leq i, j \leq d}. \end{aligned}$$

Le coefficient  $(i, j)$  de ce dernier déterminant s'écrit  $P_j(\lambda_i - i)$  où  $P_j(x) = (x + j + 1) \cdots (x + d)$  est un polynôme en  $x$  de degré  $d - j$  et de coefficient dominant 1. Ce déterminant est donc égal au déterminant de Vandermonde  $\det((\lambda_i - i)^{d-j})$ , c'est-à-dire à  $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j - i + j)$ . Ce qui donne pour  $f_\lambda$  l'expression (1). ■

4. PERMUTATIONS SANS SOUS-SUITE DÉCROISSANTE DE LONGUEUR  $d + 1$ 

Venons-en maintenant à l'énumération des permutations  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  dont les sous-suites décroissantes sont de longueur au plus  $d$ . En d'autres termes  $\text{dmax}(\sigma) \leq d$ . Rappelons que le nombre de telles permutations est noté  $a(n, d)$ . Par la bijection de Robinson-Schensted,  $a(n, d)$  est aussi le nombre de paires de tableaux de Young de taille  $n$ , de même forme, et de hauteur au plus  $d$ . Via la formule des équerrés (1), ceci fournit une première expression de  $a(n, d)$  :

$$a(n, d) = \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0} \frac{n!}{\prod_{i=1}^d (\lambda_i - i + d)!} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\lambda_i - \lambda_j - i + j).$$

Les théorèmes de clôture sur les suites  $P$ -récurrentes (ou de façon équivalente sur les séries  $D$ -finies [13, 14]) impliquent alors que pour tout  $d$ , la série  $\sum_n a(n, d)t^n$  est *différentiellement finie* : elle satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en  $t$  (voir sur ce sujet le cours de Bruno Salvy à ALEA en 2003 [21]). Pour des conjectures sur la forme de ces équations, voir [2, 3].

Nous allons ici être plus gourmands, et donner une expression close, non pas de la série génératrice ordinaire  $\sum_n a(n, d)t^n$ , mais d'une série génératrice qu'on pourrait qualifier de *Bessel*,

$$A_d(t) = \sum_{n \geq 0} a(n, d) \frac{t^{2n}}{n!^2}.$$

Noter l'exposant  $2n$  de  $t$  et, bien sûr, la division par  $n!^2$ . Cette série est tout aussi différentiellement finie que la série génératrice ordinaire. La formule ci-dessous a été démontrée pour la première fois par Gessel en 1990 [10].

**Théorème 4.** *Pour  $i \in \mathbb{Z}$ , soit*

$$I_i(t) = \sum_{n \geq \max(0, -i)} \frac{t^{2n+i}}{n!(n+i)!}. \quad (5)$$

*En particulier,  $I_i(t) = I_{-i}(t)$ . Alors la série de Bessel des permutations sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  est*

$$A_d(t) = \det (I_{i-j})_{1 \leq i, j \leq d}.$$

*Proof.* Nous donnons ici une preuve publiée par Gessel, Weinstein et Wilf en 1998 [9]. À la suite, on donnera quelques détails sur la preuve originale, qui est moins élémentaire.

Les paires  $(P, Q)$  de tableaux de même forme que l'on veut compter se codent par des paires de chemins de Yamanouchi dans  $\mathbb{Z}^d$ , finissant au même point  $\lambda$ . De façon équivalente, en parcourant le chemin du tableau  $P$ , puis, à l'envers, le chemin du tableau  $Q$ , on obtient un chemin de  $\mathbb{Z}^d$ , commençant et finissant à l'origine, formé de pas unitaires  $e_k$  et  $-e_k$ , les pas positifs venant avant les pas négatifs, et dont chaque sommet  $(x_1, \dots, x_d)$  vérifie la condition de Yamanouchi (3). Par exemple, la paire  $(P, Q)$  de la page 3 se code par le chemin (ou mot...)

$$1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ \bar{4} \ \bar{2} \ \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{1} \ \bar{3} \ \bar{2} \ \bar{1},$$

la lettre  $k$  (resp.  $\bar{k}$ ) représentant le pas  $e_k$  (resp.  $-e_k$ ). Après avoir traduit en termes de mots la condition de Yamanouchi sur ces chemins à pas positifs et négatifs, on aboutit à l'énoncé suivant : les permutations de  $\mathfrak{S}_n$  sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  sont en bijection avec les mots  $u$  de longueur  $2n$  sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, d, \bar{1}, \dots, \bar{d}\}$ , où

les lettres barrées arrivent après les lettres non barrées, et tels que pour toute factorisation  $u = vw$  :

$$u = vw \quad \Rightarrow \quad |v|_1 - |v|_{\bar{1}} \geq |v|_2 - |v|_{\bar{2}} \geq \cdots \geq |v|_d - |v|_{\bar{d}} \geq 0. \quad (6)$$

On va maintenant définir une classe plus vaste de chemins, dotés d'un signe. Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_d$ . On note  $T(\sigma)$  le point  $(1 - \sigma_1, \dots, d - \sigma_d)$ . On note  $\mathcal{P}_\sigma$  l'ensemble des chemins (à pas unitaires positifs ou négatifs) de  $\mathbb{Z}^d$ , issus de l'origine, finissant en  $T(\sigma)$ , et *triés* (les pas positifs viennent avant les pas négatifs). Le *signe* d'un tel chemin est  $\varepsilon(\sigma)$ , la signature de  $\sigma$ . Notons que la longueur de ces chemins est toujours paire (la somme des coordonnées du point d'arrivée étant 0). On note enfin  $\mathcal{P} = \cup_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathcal{P}_\sigma$ . Le nombre de chemins de longueur  $2n$  dans  $\mathcal{P}_\sigma$  est

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{n_1, \dots, n_d} \frac{(2n)!}{\prod_i n_i! (n_i + i - \sigma_i)!},$$

la somme portant sur les  $d$ -uplets  $(n_1, \dots, n_d)$  tels que  $\sum_i n_i = n$  (avec  $n_i \geq 0$  et  $n_i + i - \sigma_i \geq 0$ ). Il est facile de voir que la somme ci-dessus (sans le facteur  $1/\binom{2n}{n}$ ) compte *tous* les chemins de longueur  $2n$  allant de l'origine à  $T(\sigma)$  : ces chemins font  $n_i + i - \sigma_i$  pas  $e_i$ , et  $n_i$  pas  $-e_i$ . La longueur totale est

$$\sum_i (2n_i + i - \sigma_i) = 2 \sum_i n_i = 2n.$$

Par ailleurs, il est clair que le nombre de ces chemins s'obtient en multipliant le nombre de chemins *triés* par  $\binom{2n}{n}$  (ce binomial décrit le mélange du mot positif et du mot négatif). D'où le résultat sur le dénombrement des chemins triés de  $\mathcal{P}_\sigma$ .

Pour  $\sigma = \text{id}$ , le point  $T(\sigma)$  coïncide avec l'origine. Donc  $\mathcal{P}_{\text{id}}$  contient en particulier les chemins triés satisfaisant (6) que l'on cherche à dénombrer. Pour  $\sigma \neq \text{id}$ , aucun chemin de  $\mathcal{P}_\sigma$  ne satisfait (6). En effet, l'une des coordonnées du point d'arrivée  $T(\sigma)$  est alors négative, et on a fait dans cette direction plus de pas négatifs que positifs.

On va maintenant définir une involution sur les chemins de  $\mathcal{P}$  qui ne sont satisfont pas (6), involution qui change le signe de ces chemins. Compte tenu du dénombrement que nous avons fait pour les chemins de  $\mathcal{P}_\sigma$ , ceci prouvera que le nombre de permutations  $\tau$  de  $\mathfrak{S}_n$  satisfaisant  $\text{dmax}(\tau) \leq d$  est :

$$a(n, d) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \sum_{n_1, \dots, n_d} \frac{(2n)!}{\prod_i n_i! (n_i + i - \sigma_i)!},$$

où, de nouveau,  $\sum_i n_i = n$ . Ensuite, quelques manipulations indolores (passage à la série génératrice de Bessel, identification d'un déterminant) achèvent la preuve, comme esquissé ici :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a(n, d) \frac{t^n}{n!^2} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \sum_{n_1, \dots, n_d} \prod_{i=1}^d \frac{t^{2n_i + i - \sigma_i}}{n_i! (n_i + i - \sigma_i)!} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^d \sum_{n_i} \frac{t^{2n_i + i - \sigma_i}}{n_i! (n_i + i - \sigma_i)!} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^d I_{i - \sigma_i}(t) \\ &= \det(I_{i-j})_{1 \leq i, j \leq d}. \end{aligned}$$



Décrivons donc pour finir notre involution. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , et  $u$  un mot (chemin) de  $\mathcal{P}_\sigma$  qui ne satisfait pas (6). Remarquons d'abord que, pour tout préfixe  $v$  de  $u$ , on a bien  $|v|_d - |v|_{\bar{d}} \geq 0$ . En effet,  $|u|_d - |u|_{\bar{d}} = d - \sigma_d \geq 0$ , et les pas positifs arrivent dans  $u$  avant les pas négatifs. Donc le problème vient d'une autre des inégalités de (6) : il existe un préfixe  $v$  de  $u$  et un entier  $k < d$  tel que  $u = vxw$  avec  $|v|_k - |v|_{\bar{k}} = |v|_{k+1} - |v|_{\overline{k+1}}$  et  $x = k + 1$  ou  $x = \bar{k}$ . (Manifestement, le préfixe  $vx$  ne satisfait pas les conditions (6)). On choisit  $v$  de longueur minimale, de sorte que le préfixe  $vx$  est le premier qui pose problème. On associe à  $u$  le mot  $\psi(u) = vx\tilde{w}$ , où  $\tilde{w}$  est obtenu en remplaçant dans  $w$  toute occurrence de  $\pm k$  par  $\pm(k+1)$ , et inversement.

On vérifie aisément que  $\psi(u) \in \mathcal{P}_\tau$ , avec  $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+2} \cdots \sigma_n$ , de sorte que  $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ . De plus,  $\psi(u)$  ne satisfait pas non plus la condition (6) : son premier "problème" survient pour le préfixe  $vx$ . Cette remarque implique que  $\psi(\psi(u))$  coïncide avec  $u$ .

Ceci achève la preuve du théorème. ■

Terminons cette section par quelques détails sur la preuve originale, qui utilise plus d'outils [10]. À savoir, par ordre d'apparition à l'écran :

- (1) la bijection de Robinson-Schensted pour se ramener à du dénombrement de tableaux (également utilisée ci-dessus bien entendu) ;
- (2) une identité sur les fonctions de Schur  $s_\lambda$  (ce sont des fonctions symétriques qui comptent des tableaux *semi-standard*, plus généraux que les tableaux standard considérés ici). Cette identité est une formule déterminantale pour

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y), \quad (7)$$

où la somme porte sur les partitions de hauteur au plus  $d$ . Elle s'obtient en combinant la formule de Jacobi-Trudi exprimant les  $s_\lambda$  en termes des fonctions symétriques homogènes  $h_i$ , et la formule de Cauchy-Binet pour le déterminant d'un produit de matrices ;

- (3) finalement, l'application à l'expression déterminantale de (7) d'un certain homomorphisme  $\theta$  qui est au cœur du papier de Gessel, et permet, en gros, d'extraire la contribution des tableaux standard d'une série qui s'interprète en termes de tableaux semi-standard.

## 5. INVOLUTIONS SANS SOUS-SUITE DÉCROISSANTE DE LONGUEUR $d + 1$

Il existe aussi une formule close pour la série génératrice *exponentielle* des *involutions* sans sous-suite décroissante de longueur  $d+1$  (ou, de façon équivalente, pour les tableaux standard de hauteur au plus  $d$ ). Les propriétés de la bijection de Robinson-Schensted (Théorème 1) et la conjugaison des tableaux montrent qu'il est équivalent d'énumérer les involutions sans sous-suite *croissante* de longueur  $d+1$ , mais ça n'est pas du tout évident sur les involutions elles-mêmes, si on ne connaît pas la bijection de Robinson-Schensted...

Le résultat suivant est encore dû à Gessel [10] et utilise à peu près les mêmes outils que sa preuve du théorème 4.

On note  $b(n, d)$  le nombre d'involutions de  $\mathfrak{S}_n$  sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$ , et

$$B_d(t) = \sum_{n \geq 0} b(n, d) \frac{t^n}{n!}.$$

**Théorème 5.** *La série exponentielle des involutions sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  est*

$$B_d(t) = \begin{cases} \det(I_{i-j} + I_{i+j-1})_{1 \leq i, j \leq d/2} & \text{si } d \text{ est pair,} \\ e^t \det(I_{i-j} - I_{i+j})_{1 \leq i, j \leq (d-1)/2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les séries  $I_i(t)$  sont définies par (5).

À ma connaissance, il n'existe pas de preuve analogue à celle que nous avons donnée plus haut pour les *permutations* sans longue sous-suite décroissante. En revanche, il en existe une qui n'utilise qu'une construction récursive simple de ces involutions, par insertion du cycle contenant la valeur maximale (voir [4] et la section 6.1).

Il existe aussi des formules déterminantales pour la série génératrice exponentielle :

- des involutions sans point fixe sans sous-suite croissante de longueur  $d + 1$  (Baik & Rains 2001 [1]),
- des involutions sans point fixe sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  (Goulden 1992 [11]).

Les deux problèmes ne sont pas équivalents cette fois.

Signalons enfin une observation due à Wilf [28], et qui semble attendre une explication combinatoire : lorsque  $d$  est pair,

$$A_d(t) = B_d(t)B_d(-t).$$

## 6. REMARQUES, COMPLÉMENTS, BIBLIOGRAPHIE...

### 6.1. STRUCTURES DÉCOMPOSABLES

La preuve qu'on a donnée pour le dénombrement des permutations sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  utilise de façon clef la bijection de Robinson-Schensted. Pourtant, ces permutations sont des structures décomposables récursivement : une permutation de  $\mathfrak{S}_{n,d}$  s'obtient en insérant la valeur  $n$  dans une permutation de  $\mathfrak{S}_{n-1,d}$ . Lors de cette insertion, il faut prendre garde à ne pas créer une sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$ . Pour cela, il nous faut garder en mémoire où démarre la sous-suite décroissante de longueur  $d$  la plus à droite. Mais pour mettre à jour cette information, il nous faut garder en mémoire où démarre la sous-suite décroissante de longueur  $d - 1$  la plus à droite. Et ainsi de suite, jusqu'à la position de la descente la plus à droite. Moyennant quoi, on peut écrire des récurrences simples pour le nombre  $a(n, d; k_d, \dots, k_2)$  de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$ , où la sous-suite décroissante de longueur  $i$  la plus à droite démarre en position  $k_i$  pour tout  $i \in [2, d]$ . Cette récurrence se traduit en une équation fonctionnelle sur la série génératrice correspondante  $A_d(t; u_d, \dots, u_2)$ , à  $d - 1$  variables catalytiques. On peut se demander comment résoudre directement cette équation.

La situation n'est pas désespérée : en exploitant une construction récursive similaire pour les *involutions* sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$ , due à Jaggard & Marincel [12], on peut obtenir les formules du Théorème 5 pour le comptage de ces involutions [4].

### 6.2. LIENS AVEC LES MATRICES ALÉATOIRES

On va faire court, compte tenu de l'ignorance de l'auteur sur le sujet. Ces liens semblent être de deux types au moins :

- (1) le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  sans sous-suite décroissante de longueur  $d + 1$  s'écrit

$$a(n, d) = \mathbb{E} \left( |\operatorname{tr}(M)^n|^2 \right),$$

pour une matrice  $M$  unitaire de taille  $k \times k$  distribuée selon la mesure de Haar sur le groupe unitaire. On se reportera par exemple à Rains [18] ;

- (2) à une normalisation près, la forme  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  du tableau associé à la permutation aléatoire (et uniforme)  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est distribuée, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , comme la suite (également normalisée, et également dans la limite où  $n \rightarrow \infty$ )  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  des valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire, pour la mesure gaussienne "habituelle" de densité

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\operatorname{tr}(M^2)) dM.$$

Il semble qu'Okounkov [17] en ait donné une explication directe via les cartes, dont on sait qu'elles sont liées et aux permutations, et aux matrices hermitiennes aléatoires [29]. Un beau sujet pour de prochaines journées ALEA !

### 6.3. RÉFÉRENCES

Le sujet est foisonnant. En amont de la bibliographie ci-dessous, on peut partir, pour les aspects combinatoires de la question, de l'article de synthèse qu'a écrit Stanley pour le congrès des mathématiciens en 2006 [26]. La loi de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation était aussi à l'honneur dans une autre conférence plénière de ce même congrès, celle de Deift [5].

### REFERENCES

- [1] J. Baik and E. M. Rains. Algebraic aspects of increasing subsequences. *Duke Math. J.*, 109(1):1–65, 2001.
- [2] F. Bergeron, L. Favreau, and D. Krob. Conjectures on the enumeration of tableaux of bounded height. *Discrete Math.*, 139(1-3):463–468, 1995.
- [3] F. Bergeron and F. Gascon. Counting Young tableaux of bounded height. *J. Integer Seq.*, 3(1):Article 00.1.7, 1 HTML document (electronic), 2000.
- [4] M. Bousquet-Mélou. Bare-hand enumeration of involutions with no long decreasing subsequence. In preparation.
- [5] P. Deift. Universality for mathematical and physical systems. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 125–152. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [6] S. Fomin. Duality of graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 3(4):357–404, 1994.
- [7] S. Fomin. Schensted algorithms for dual graded graphs. *J. Algebraic Combin.*, 4(1):5–45, 1995.
- [8] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall. The hook graphs of the symmetric groups. *Canadian J. Math.*, 6:316–324, 1954.
- [9] I. Gessel, J. Weinstein, and H. S. Wilf. Lattice walks in  $\mathbf{Z}^d$  and permutations with no long ascending subsequences. *Electron. J. Combin.*, 5(1):Research Paper 2, 11 pp. (electronic), 1998.
- [10] I. M. Gessel. Symmetric functions and P-recursiveness. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53(2):257–285, 1990.
- [11] I. P. Goulden. A linear operator for symmetric functions and tableaux in a strip with given trace. *Discrete Math.*, 99(1-3):69–77, 1992.
- [12] A. D. Jaggard and J. J. Marincel. Generating tree isomorphisms for pattern-avoiding involutions. To appear in *Ann. Combinatorics*. Available at [http://dimacs.rutgers.edu/~adj/Research/jm\\_involts.html](http://dimacs.rutgers.edu/~adj/Research/jm_involts.html).
- [13] L. Lipshitz. The diagonal of a  $D$ -finite power series is  $D$ -finite. *J. Algebra*, 113(2):373–378, 1988.
- [14] L. Lipshitz.  $D$ -finite power series. *J. Algebra*, 122:353–373, 1989.
- [15] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.

- [16] P. A. MacMahon. *Combinatory analysis. Vol. I, II (bound in one volume)*. Dover Phoenix Editions. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of *An introduction to combinatory analysis* (1920) and *Combinatory analysis. Vol. I, II* (1915, 1916).
- [17] A. Okounkov. Random matrices and random permutations. *Internat. Math. Res. Notices*, 20:1043–1095, 2000.
- [18] E. M. Rains. Increasing subsequences and the classical groups. *Electron. J. Combin.*, 5:Research Paper 12, 9 pp. (electronic), 1998.
- [19] G. de B. Robinson. On the Representations of the Symmetric Group. *Amer. J. Math.*, 60(3):745–760, 1938.
- [20] B. E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [21] B. Salvy. Séries différentiellement finies. <http://algo.inria.fr/salvy/Talks/Alea03/index.html>, Journées ALEA 2003.
- [22] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13:179–191, 1961.
- [23] M. P. Schützenberger. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scand.*, 12:117–128, 1963.
- [24] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.
- [25] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [26] R. P. Stanley. Increasing and decreasing subsequences and their variants. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 545–579. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [27] G. Viennot. Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)*, pages 29–58. Lecture Notes in Math., Vol. 579. Springer, Berlin, 1977.
- [28] H. S. Wilf. Ascending subsequences of permutations and the shapes of tableaux. *J. Combin. Theory Ser. A*, 60(1):155–157, 1992.
- [29] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction. *Math. Comput. Modelling*, 26(8-10):281–304, 1997.

M. BOUSQUET-MÉLOU : CNRS, LABRI, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, 351 COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE, FRANCE

*E-mail address:* mireille.bousquet@labri.fr