Exercices – cartes combinatoires et combinatoire algébrique
Journées Aléa 2017

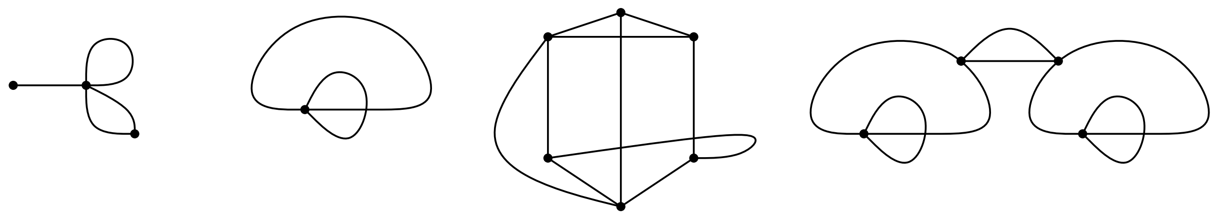
Guillaume Chapuy

Mars 2017

De préférence on traitera dans l'ordre :
Exercice 0 : Q1 ;
Exercice 1 : Q1 à Q6 ;
Exercice 2 : Q1 à Q7 ;
puis on fera comme on veut.

Exercice 0 – Warmup

1. Combien de faces ont les cartes suivantes ? Quel est leur genre ?



2. Peut-on ajouter une arête (et zéro sommet) à la première carte pour créer une carte de genre 1 ? Une carte à 4 faces ? Une carte de genre 1 à 4 faces ?
3. Peut-on ajouter une arête à la seconde carte pour créer une carte à 2 faces ? Une carte de genre 2 ?

Exercice 1 – Cartes à une face précubiques, approche par trisections

Dans cet exercice on va s'intéresser à des cartes à une face précubiques c'est-à-dire n'ayant que des sommets de degré 3 *et des sommets de degré* 1 *(et une seule face). Ces cartes sont enracinées sur une feuille (et non étiquetées). On dit qu'une telle carte est de taille* n *si elle a* $2n+1$ *arêtes.*

1. En genre 0, une carte à une face est un arbre, et une carte à une face précubique n'est rien d'autre qu'un arbre binaire planté. Il y en a donc $Cat(n)$ de taille n. On est d'accord ?
2. Partant de la racine, on fait le tour de notre carte en longeant les arêtes à notre gauche. On numérote ainsi les *coins* de 1 à $2(2n+1)$. Sur la page suivante, la numérotation est faite sur les deux premiers exemples, à vous de la compléter sur les deux autres exemples.
   Maintenant, à vous d'ajouter avec un crayon la numérotation sur les deux exemples suivant.
3. Un sommet de degré 3 est dit *entrelacé* si les étiquettes de ses coins sont de la forme (i,k,j) en sens antihoraire, avec $i<j<k$. Sur les quatre exemples précédents, entourer les sommets entrelacés et faire (sans y croire) une conjecture pour le nombre v^* de tels sommets en genre g.
4. Un coin est une *descente* s'il est incident à sommet de degré 3 *et* s'il est suivi d'un coin d'index plus petit en sens antihoraire, ou alors s'il est une feuille, et une *montée sinon.* On note n_+, n_- le nombre de montées, descentes. Montrer que $n_- = 2v^* + (v - v^*)$. Par ailleurs, en raisonnant sur les quatre coins incidents à une arête, donner une relation entre n_- et n_+ et en déduire que votre conjecture était vraie, à savoir :
$$v^* = 2g.$$

Hint : (on rappelle la formule d'Euler $s + f = a + 2 - 2g$ où $f = 1$ est le nombre de faces !)

5. Montrer qu'en prenant une carte à une face de genre $g - 1$ avec trois feuilles (non racines) marquées, il y a deux façons de recoller ces trois feuilles : soit on fabrique une carte de genre $g - 1$ à trois faces, soit on fabrique une carte de genre g avec un sommet entrelacé marqué. Ici ce sera bien de dessiner des petits exemples à la main !

6. Déduire des deux questions précédentes que le nombre $\alpha_g(n)$ de cartes précubiques de genre g à $2n + 1$ arêtes, à une face, satisfait :

$$2g\alpha_g(n) = \binom{n_{g-1}}{3}\alpha_g(n)$$

   où $n_g = n + 1 - 3g$ est le nombre de feuilles d'une telle carte. Puis réfléchir encore un peu et en déduire :

$$\alpha_g(n) = \frac{1}{2^g g!}\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+2-3g)}{3!^g}\mathrm{Cat}(n).$$

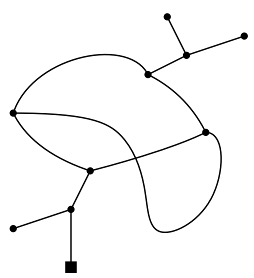
   Dans un premier temps on fera plutôt l'exo suivant que les deux questions "bonus" ci-dessous.

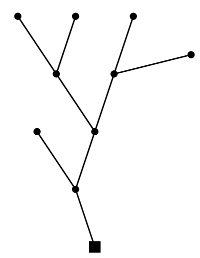
7. * Pour les féru.e.s, dire un mot de l'asymptotique ! (comptage, limite d'échelle, diamètre...)

8. ** En se disant qu'après tout, un graphe d'excès fixé est "moralement cubique, asymptotiquement", expliquer comment ce qui précède permet, en fait, d'énumérer asymptotiquement les cartes à une face de genre g, *sans contraintes sur les degrés des sommets*. En déduire *sans calcul* qu'à g fixé, le nombre $\epsilon_g(n)$ de cartes à une face de genre g enracinées à n arêtes satisfait, quand n tend vers l'infini :

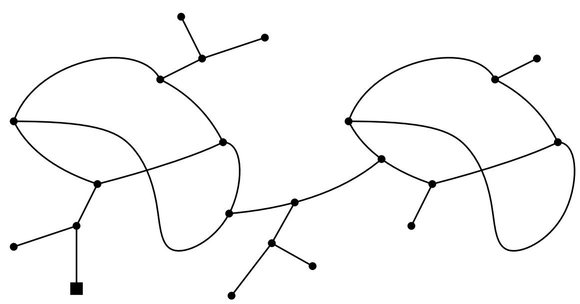
$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}12^g g!}n^{3g-\frac{3}{2}}4^n.$$

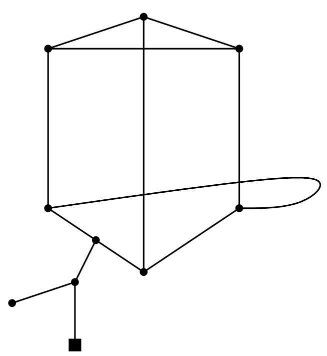
   (note culturelle : le miracle de la bijection arbres-binaires/arbres plans ne marche plus exactement en genre $g > 0$. Si on veut aller au delà du premier terme de l'asymptotique, alors il faut aller plus loin dans la combinatoire ; cela dit, c'est possible, je peux donner les références)





■ = racine





Exercice 2 – Éléments de Jucys-Murphy et algèbre de groupe

On considère les éléments suivants de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$*, appelés éléments de Jucys-Murphy et notés* $J_1, J_2, \ldots, J_n$ *:*

$$J_i = \sum_{a<i} (a, i) = (1, i) + (2, i) + \cdots + (i-1, i).$$

On remarque au passage que $J_1 = 0$.

1. Se remémorer (ou découvrir avec joie !) l'algorithme de Knuth pour engendrer une permutation aléatoire uniforme :
   Commencer avec le tableau trié $[1..n]$.
   Pour i **de** 1 **à** n **faire :** Je tire un nombre uniforme $X_i \in [1..i]$ puis j'échange les entrées en positions i et X_i.
   Renvoyer le tableau.
2. Se convaincre que l'algo de Knuth marche, par exemple, par induction. Quel est le nombre de cycles de la permutation obtenue à la fin ?
3. On note $\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de la permutation σ. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} (u + J_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u^{\ell(\sigma)} \cdot \sigma,$$
   où les deux membres vivent dans l'algèbre du groupe.
4. Montrer que les éléments de Jucys-Murphy commutent ! Puis remarquer qu'il aurait mieux valu se poser cette question *avant* de considérer le produit dans la question précédente. Bon.
5. On forme la série génératrice (le polynôme générateur en fait) des cartes biparties étiquetées (connexes ou non) dont les degrés des sommets blancs (resp. noirs) sont donnés par la partition $\lambda_\circ$ (resp. $\lambda_\bullet$), et comptées avec une poids u^f où f est le nombre de faces. Montrer que ce nombre est égal à
$$\sum_{\lambda_\diamond \vdash n} B_{\lambda_\circ, \lambda_\bullet, \lambda_\diamond} u^{\ell(\lambda_\diamond)} = [id] K_{\lambda_\circ} K_{\lambda_\bullet} \prod_{i=1}^{n} (u + J_i)$$
   où on rappelle que $K_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathcal{C}_\lambda}$ est la somme des permutations de type cyclique λ, et où $[id]$ indique que l'on extrait le coefficient de la permutation identité.
6. Étant donnée une partition λ, et une case $\square$ de λ en position (x, y), le *contenu* de $\square$ est la quantité $x - y$. Le dessin suivant représente la partition $[4, 3, 3, 1]$ avec, dans chaque case, son contenu.

-3			
-2	-1	0	
-1	0	1	
0	1	2	3

   Une fonction $\tilde{f} : \lambda \mapsto \tilde{f}(\lambda)$ des partitions dans (mettons) $\mathbb{K}$ est dite *multiplicative* si elle est de la forme :
$$\tilde{f}(\lambda) = \prod_{\square \in \lambda} f(c(\square)).$$
   On note alors g la fonction $g(i) = f(1) \ldots f(i)$, si $i \geq 0$ et $g(i) = \frac{1}{f(i) \ldots f(-1)}$ si $i \leq 0$. Autrement dit, formellement :
$$g(i) = \frac{\prod_{j=-\infty}^{i} f(j)}{\prod_{j=-\infty}^{0} f(j)}$$
   Montrer que $\tilde{f}(\lambda)$ s'exprime simplement en fonction des quantités $(g(\lambda_i - i), i \geq 1)$.

7. En déduire que si $\lambda \mapsto r(\lambda)$ est une application de la forme :

$$r(\lambda) = \det \left(H_{-i,\lambda_j - j} \right)_{i,j \geq 1}$$

où H est une certaine matrice bi-infinie, indexée par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, alors la fonction $\lambda \longmapsto \tilde{f}(\lambda) r(\lambda)$ est encore de cette forme, en remplaçant la matrice H par sa conjuguée par une matrice diagonale bien choisie.

8. Montrer que tout polynôme symétrique en les éléments de Jucys-Murphy appartient au centre de l'algèbre du groupe, c'est à dire, commute avec la multiplication par n'importe quelle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

9. * Pour la culture, ceci n'est pas vraiment une question. Si $\tilde{f}(J_1, \ldots, J_n)$ est un polynôme symétrique en les Jucys-Murphy, alors $\tilde{f}$ est dans le centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, et agit donc comme un scalaire (une homothétie) sur chaque représentation V^λ. Le théorème de Jucys et Murphy dit que ce scalaire n'est autre que $\tilde{f}(c(\square), \square \in \lambda)$, la même fonction appliquée aux contenus de λ. En particulier, si $\tilde{f}$ est multiplicative, comme par exemple :

$$\tilde{f}(J_1, \ldots, J_n) = \prod_i (u + J_i)$$

alors ce scalaire est une fonction multiplicative des contenus. La question 7 nous dit que ces fonctions se comportent bien vis-à-vis des "manipulations déterminantales" que l'on verra au cours numéro 2, et c'est le point crucial qui fait que les fonctions génératrices de cartes sont des fonctions tau...

Exercice 3 – La récurrence de Goulden et Jackson, à partir de l'équation KP, par effeuillage local

Goulden et Jackson ont obtenu en 2009 (et des physiciens mathématiciens avant eux) une relation de récurrence pour compter les cartes cubiques (ou les triangulations) par genre et arêtes. Leur formule est une conséquence simple de l'équation KP, mais plutôt que faire cette dérivation par le calcul, on va la faire ici de manière combinatoire.

La série génératrice des cartes dont les sommets ont degrés 1, 2 *ou* 3, *avec une variable p_i marquant les sommets de degré i, une variable u marquant les faces, et une variable z marquant les arêtes, satisfait l'équation KP :*

$$F_{2,2} - F_{3,1} + \frac{1}{12} F_{1^4} + \frac{1}{2} (F_{1^2})^2 = 0 \qquad (1)$$

Dans cette série, les cartes à n arêtes sont étiquetées de leur $2n$ demi-arêtes, et c'est une série exponentielle. Autrement dit, dans cette série, chaque carte étiquetée à n arêtes est comptée avec un poids $\frac{z^n}{(2n)!}$, et donc chaque carte enracinée est comptée avec un poids $\frac{z^n}{2n}$. Les indices dans (1) *indiquent des dérivées partielles par rapport aux p_i.*

On note $t_g(n)$ le nombre de cartes cubiques enracinées ayant $2n$ sommets et uniquement des sommets de degré 3. *Elles ont donc $3n$ arêtes.*

1. Montrer en utilisant la formule d'Euler qu'une carte comptée par $t_g(n)$ a $n + 2 - 2g$ faces.
En notant θ la substitution :

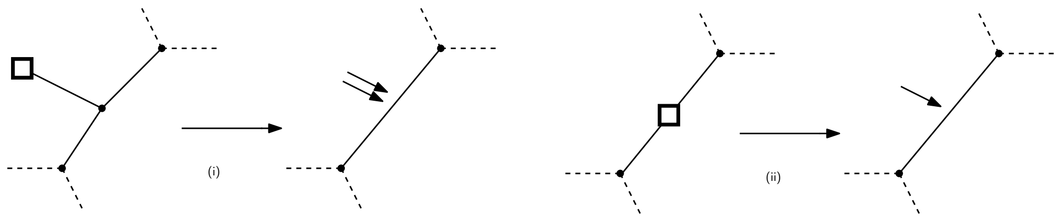
$$\theta : p_i \longleftarrow \delta_{i,3}$$

on a donc

$$t_g(n) = 6n \cdot [z^{3n} u^{n+2-2g}] \theta F(\mathbf{p}).$$

2. On se propose maintenant d'appliquer l'opérateur θ à l'équation KP (1), puis d'extraire le coefficient de $[z^{3n+2} u^{n+2-2g}]$. On espère pouvoir exprimer chacun des termes obtenus en fonction de $t_g(n)$. Dans les questions suivantes, un nombre "pondéré" de cartes est simplement le nombre de telles cartes enracinées, divisé par $2n$ où n est le nombre d'arêtes. En s'inspirant de la figure ci-dessous,
(i). Montrer que le nombre pondéré de cartes à $3n + 2$ arêtes de genre g, avec deux sommets de degré 2 marqués et tous les autres sommets de degré 3 est égal à :

$$[z^{3n+2} u^{n+2-2g}] \theta F_{2,2}(\mathbf{p}) = (3n+1)(3n) \frac{t_g(n)}{6n} = \frac{3n+1}{2} t_g(n).$$



(ii) De manière similaire, montrer que le nombre pondéré de telles cartes, portant cette fois une feuille marquée et tous les autres sommets de degré 3, est égal à

$$[z^{3n+2}u^{n+2-2g}]\theta F_1(\mathbf{p}) = (6n)\frac{t_g(n)}{6n} = t_g(n).$$

3. En raisonnant comme à la question précédente, traiter les cas de plusieurs feuilles marquées pour obtenir :

$$[z^{3n+2k}u^{n+2-2g}]\theta F_{1^k}(\mathbf{p}) = (6n+4k-4)\dots(6n+4)6n\frac{t_g(n)}{6n}.$$

4. En extrayant le coefficient $[z^{3n}u^{n+2-2g}]$ dans l'équation KP (1), en déduire la récurrence de Goulden et Jackson : $t_g(n) = \frac{1}{3n+2}f_g^n$ où f_g^n satisfait la récurrence :

$$f_g^n = \frac{4(3n+2)}{n+1}\Big(n(3n-2)f_{g-1}^{n-2} + \sum_{\substack{i+j=n-2\\h+k=g}} f_h^i f_k^j\Big).$$

Les conditions initiales sont : $f_0^{-1} = \frac{1}{2}$ et $f_g^n = 0$ pour toutes les valeurs "non combinatoires" telles que $n < -2$ ou $2g > n+1$.

5. Se convaincre que cette récurrence est vraiment extraordinaire !

6. * Retrouver le comptage des cartes à une face précubiques effectué bijectivement dans l'exercice 1, à partir de l'équation KP et des méthodes de cet exercice.