ALÉA 2019

Introduction à l'algorithmique du texte

Julien Clément (GREYC, Caen)

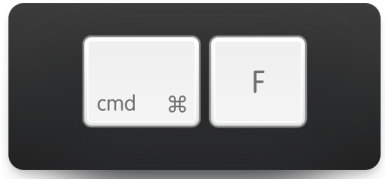
Remerciements à Véronique Terrier pour les emprunts et son aide

Quelques liens utiles

- La séance d'exercices avec travaux pratiques
- La feuille d'exercices

Introduction

Rechercher un motif dans un texte, indexer des données textuelles, expliciter les régularités d'un texte sont des problèmes omniprésents en informatique
→ éditeur de texte, moteur de recherche, bases de données textuelles, analyse de séquences biologiques, compression



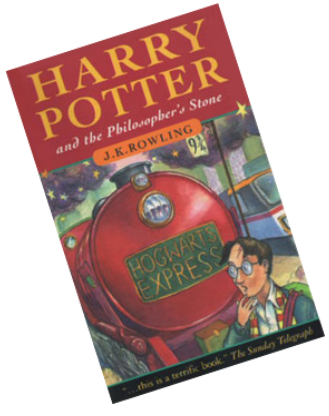
Contingences pratiques :

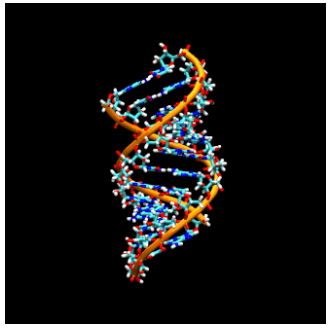
- **on travaille sur des données de grande taille**
  → il est impératif de trouver des algorithmes qui soient de petites complexités à la fois en temps et en espace
- les données sont des **séquences de caractères** et n'ont **pas de structure explicite**
  → définir des algorithmes rapides nécessite de définir les structures adéquates pour représenter et manipuler efficacement les chaînes de caractères (structures pas trop coûteuses à construire et peu gourmandes en espace)

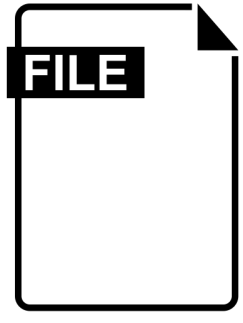
D'ailleurs, qu'est-ce qu'un texte ?

D'ailleurs, qu'est-ce qu'un texte ?

Exemples







- Homo_sapiens.GRCh38.dna.chromosome.1 (225 080 Ko, ASCII)

  TAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCC
  TAACCCAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCC
  TAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCCTAACCCTAACCCTAAACCCTAAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCCAACCCCAACCCCA
  ACCCCAACCCCAACCCCAACCCTAACCCCTAACCCTAACCCTAACCCTACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCTAACCCCTAACCCCTAACC
  CTAACCCTAACCCTAACC...

- L'assommoir (Emile Zola, 930Ko, latin1)

  Gervaise avait attendu Lantier jusqu'à deux heures du matin. Puis, toute frissonnante d'être restée en camisole à l'air vif de la fenêtre, elle s'était assoupie, jetée en travers du lit, fiévreuse, les joues trempées de larmes. Depuis huit jours, au sortir du Veau à deux têtes, où ils mangeaient, il l'envoyait se coucher avec les enfants et ne reparaissait que tard dans la nuit, en racontant qu'il cherchait du travail. Ce soir-là, pendant...

- War and Peace (Léon Tolstoï, 3110 Ko, ASCII)

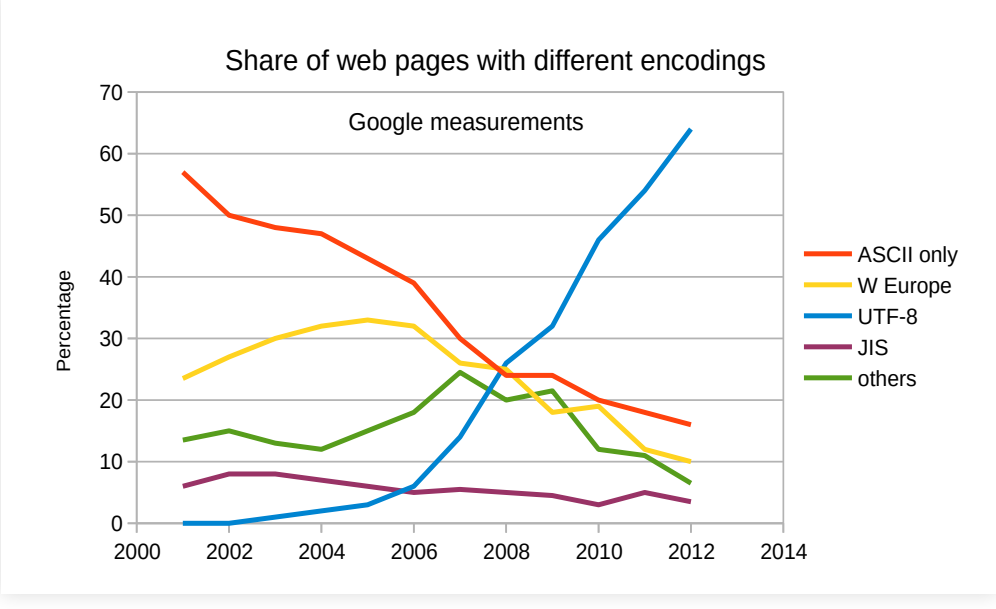
  Well, Prince, so Genoa and Lucca are now just family estates of the Buonapartes. But I warn you, if you don't tell me that this means war, if you still try to defend the infamies and horrors perpetrated by that Antichrist--I really believe he is Antichrist--I will have nothing more to do with you and you are no longer my friend, no longer my 'faithful slave,' as you call yourself! But how do you do? I see I have frightened you--sit down and tell me all the news." It was...

D'ailleurs, qu'est-ce qu'un texte ?

L'encodage : un détail important !

UTF-8

- code à longueur variable (1 à 4 octets)
- pouvant représenter le standard UNICODE (1 112 064 symboles)
- rétro-compatible avec ASCII



Depuis : 87,6 % en 2016, 90,5 % en 2017 et près de 93.1% en février 2019
(usage pour le web - sources : wikipedia)

Recherche de motifs

Partie 1

Notations

- Un **alphabet** Σ : un ensemble fini de symboles, appelés lettres ou caractères
- Un **mot** ou un **texte** sur l'alphabet Σ : une suite de lettres de Σ
- La **longueur** d'un mot w, notée $|w|$: le nombre de lettres du mot
- Le **mot vide**, i.e., le mot de longueur 0 : ε
- Par convention, on indice les lettres d'un mot **à partir de** 0 :

$$w = w[0]w[1]\dots w[n-1] \text{ avec } n = |w|$$

- La séquence de lettres partant de la **position** i **et de longueur** j :

$$w[i..i+j-1] = w[i]w[i+1]\dots w[i+j-1]$$

- Σ^* : l'ensemble de tous les mots sur Σ
- Σ^+ : l'ensemble de tous les mots **non vides** sur Σ

Notations (suite)

- Les **préfixes** de w :

$$\mathrm{Pref}(w) = \{x : \text{ il existe } y \in \Sigma^* \text{ tel que } w = xy\}$$

- Les **suffixes** de w :

$$\mathrm{Suf}(w) = \{y : \text{ il existe } x \in \Sigma^* \text{ tel que } w = xy\}$$

- Les **facteurs** de w :

$$\mathrm{Fact}(w) = \{z : \text{ il existe } x, y \in \Sigma^* \text{ tel que } w = xzy\}$$

Un préfixe, suffixe ou facteur d'un mot w est **propre**, s'il est différent de w lui-même.

Soit $w = abbaac$, on a

- $\mathrm{Pref}(w) = \{\varepsilon, a, ab, abb, abba, abbaa, abbaac\}$
- $\mathrm{Suf}(w) = \{\varepsilon, c, ac, aac, baac, bbaac, abbaac\}$
- $\mathrm{Fact}(w) = \{\varepsilon,\ a, b, c,\ aa, ab, ac, ba, bb,\ aac, abb, baa, bba, abba,$
  $baac, bbaa, abbaa, bbaac, abbaac\}$

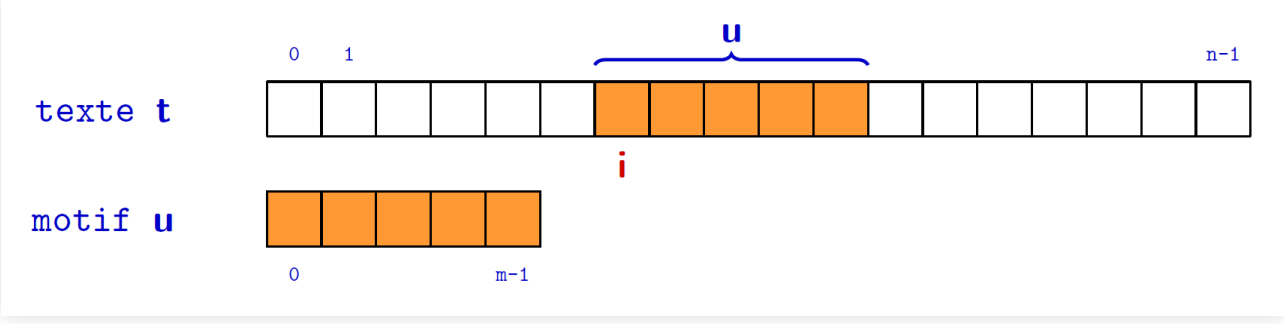
Différentes notions et approches pour la recherche de motif

(Pattern matching)

- **Motif vu comme**
  - un mot (fini)
  - une expression régulière
  - un ensemble fini de mots
  - un mot approché
- **Techniques variées**
  - stratégie de la fenêtre coulissante
  - basées sur les automates finis
  - avec une structure d'arbre (Trie, arbre de suffixes)
  - via de la programmation dynamique

Recherche de motif

Trouver les occurrences d'un motif $u \in \Sigma^+$ dans un texte $t \in \Sigma^+$



Deux types de solutions

1. **Motif fixé, texte variable**
   - Prétraitement sur le motif basé sur des propriétés combinatoires du motif
   - Recherche
2. **Texte fixé, motif variable**
   - Prétraitement sur le texte basé sur des techniques d'indexation
   - Recherche

Quel type d'occurrences? chevauchantes ? ~~non-chevauchantes ?~~

Je n'aborde pas ici les techniques classiques de théorie des automates

Stratégie de la fenêtre coulissante

Balayage et Décalage (Scan & Shift)

On lit le texte au travers d'une fenêtre coulissante de la taille du mot.

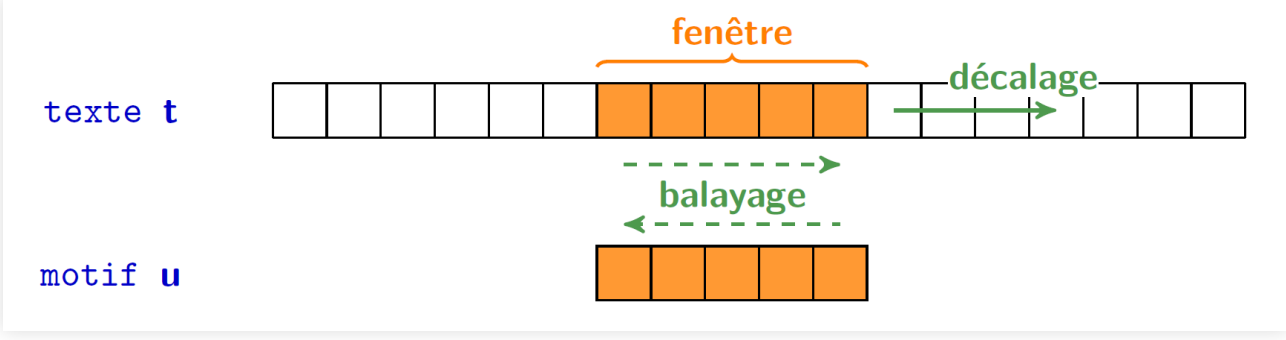


Schéma de base

```
Positionner la fenêtre au début du texte
Tant que la fenêtre est sur le texte
        Si  fenêtre == motif  alors  /* Balayage */
                Signaler occurrence
    Décaler la fenêtre /* Décalage */
```

Algorithme naïf

Recherche exhaustive

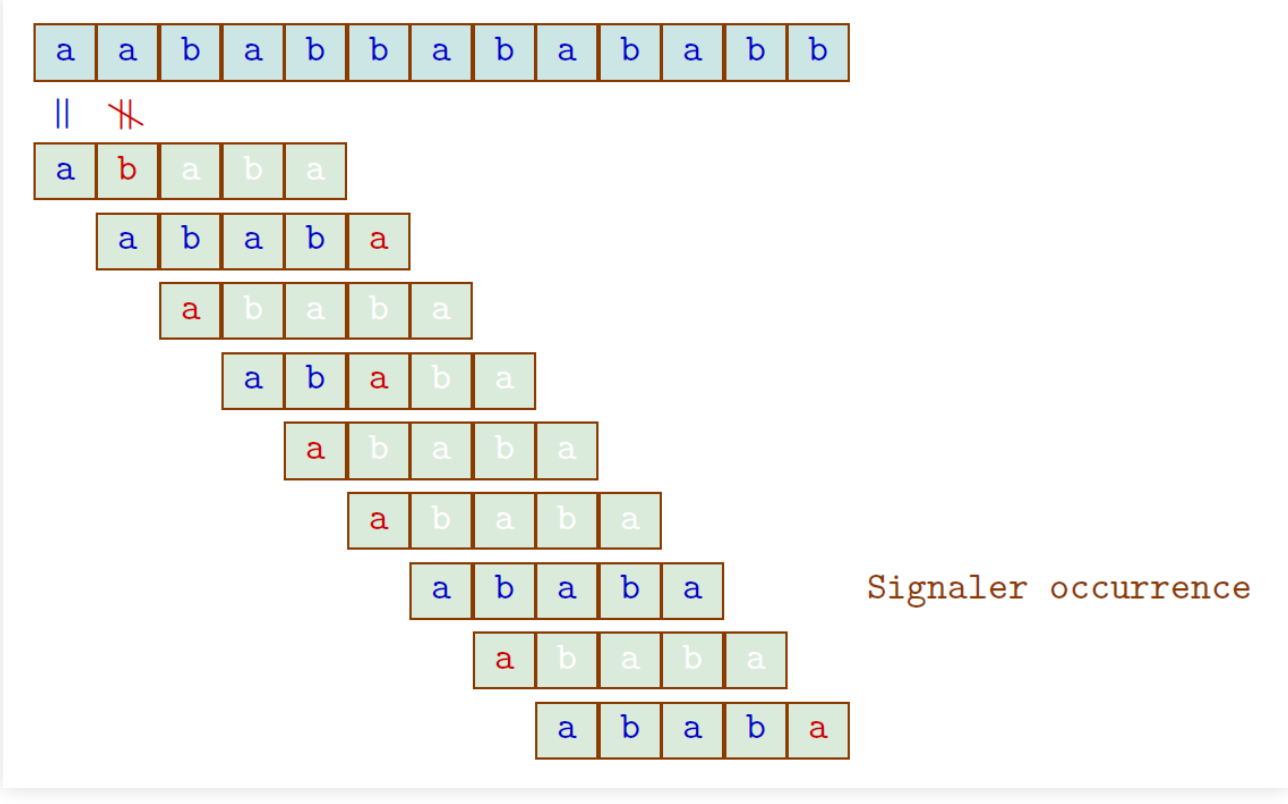
- Avec un balayage de gauche à droite
- Avec un shift systématique de +1 sur le texte

```
def naive_search(u, t):
  m = len(u)
  n = len(t)
  i = 0
  j = 0
  while i < n-m+1:
        while j < m and u[j] == t[i+j]: # scan
                j = j+1
        if  j == m:
                signal_occurrence(i)    # signaler une occurrence à la posi
        i = i+1                         # shift
        j = 0
```

Algorithme naïf

Exemple

- Le texte : $t = aababbababababb$ ($|t| = 13$)
- Le motif cherché : $u = ababa$



→ 24 comparaisons

Algorithme naïf

Coût de l'algorithme au pire

Quel est le nombre maximal de comparaisons de l'algorithme naïf avec un texte de longueur n et un motif de longueur m ?

$(n - m + 1) \times m$, i.e., une complexité au pire en $O(nm)$ → **quadratique !**

Exemple

ce nombre maximal est atteint pour $t = a^n$, $u = a^m$

Coût moyen de l'algorithme

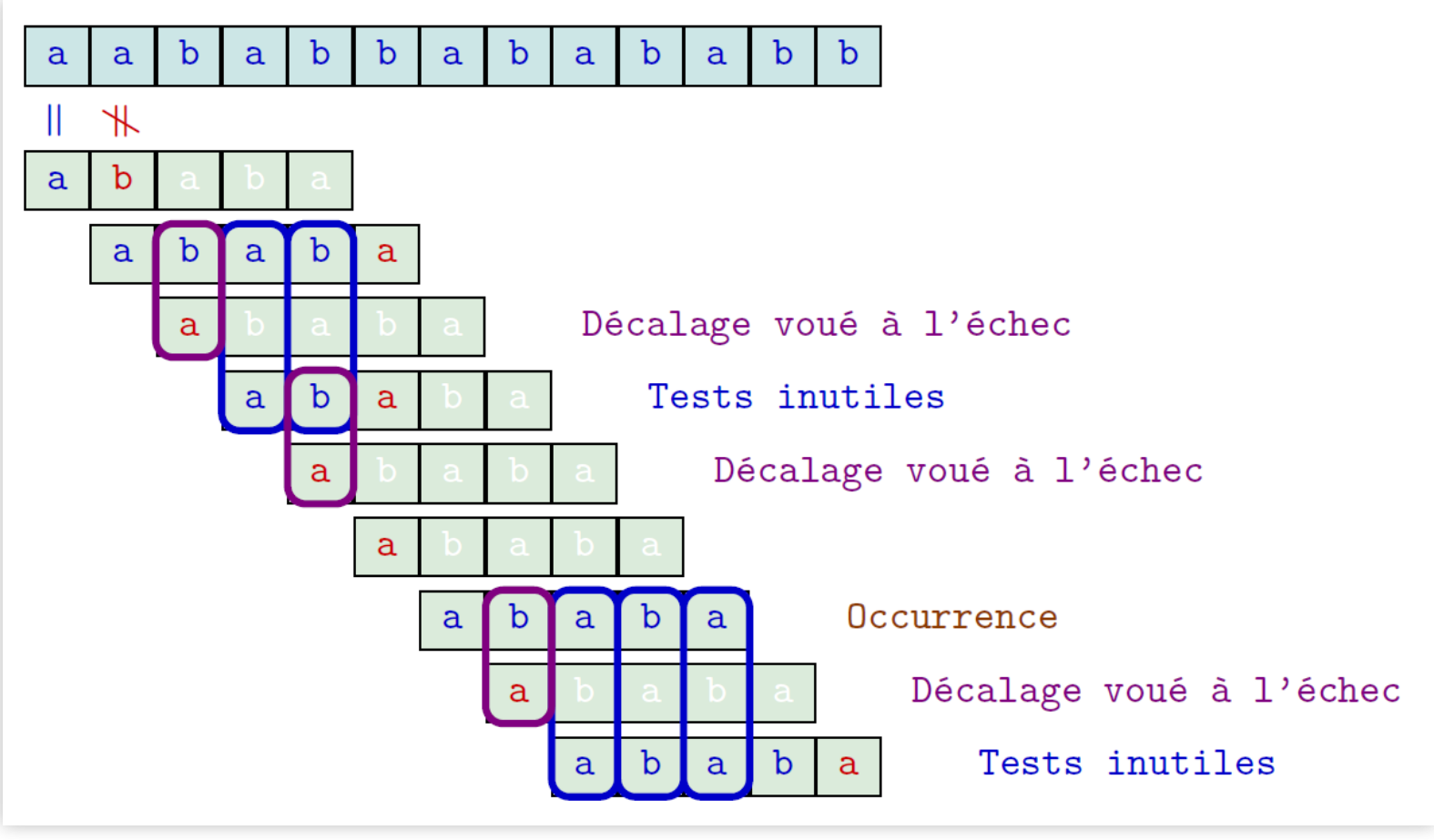
- $\sigma \geq 2$ dénote le nombre de lettres de l'alphabet Σ
- On se place dans le cas simple où toutes les lettres du texte et du mot sont tirées indépendamment avec une probabilité uniforme.
- Nombre moyen de comparaisons réalisées :

$$n\frac{1 - 1/\sigma^m}{1 - 1/\sigma} \leq \frac{1}{1 - 1/\sigma} \leq 2n$$

Le coût moyen est linéaire en la taille du texte, i.e., en $O(n)$

Algorithme naïf → Algorithme de Morris-Pratt

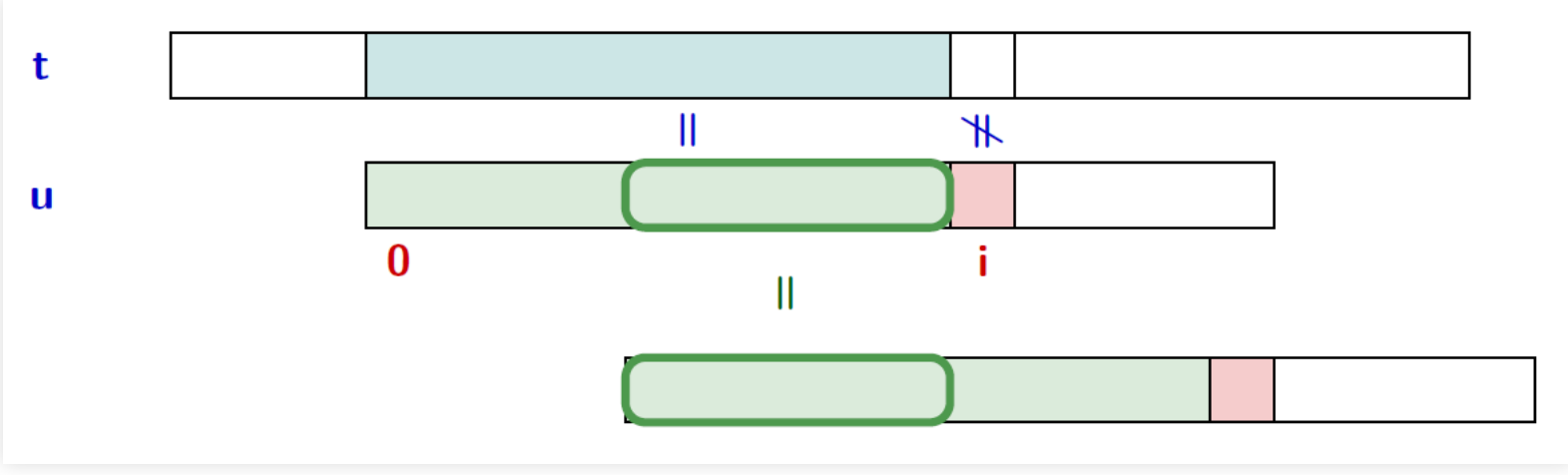
- Algo naïf : on oublie tout à chaque décalage
- Algo de Morris-Pratt : on mémorise les caractères du mot appareillés à ceux du texte



Algorithme naïf → Algorithme de Morris-Pratt

Principe

- Le balayage se fait de gauche à droite.
- Le décalage de la fenêtre est calculé à partir du motif et de ses bords



Calculer un "bon" décalage suite à un échec à la position i :

- Déterminer un préfixe propre de $u[0..i-1]$ qui soit également suffixe de $u[0..i-1]$,
- on veut le plus grand.

→ notion de **bord**

Bord

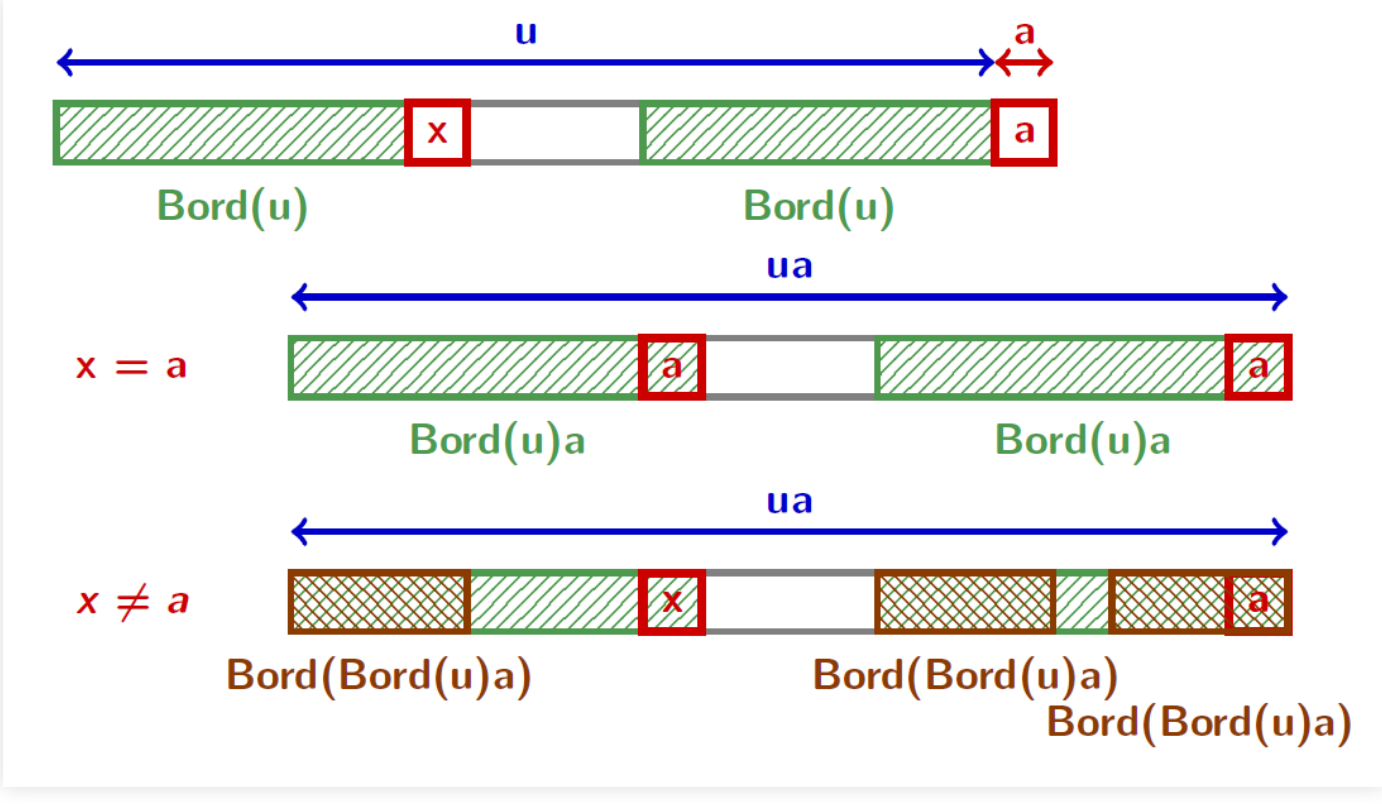
- Un **bord d'un mot w** est un mot différent de w qui est à la fois préfixe et suffixe de w
- Le **bord maximal de w**, noté $\mathrm{Bord}(w)$, est le plus long bord de w

- $w = abaababa$:
  - ensemble des bords de w : $\{\varepsilon, a, aba\}$
  - $\mathrm{Bord}(w) = aba$
- $w = aabaabaa$
  - ensemble des bords de w : $\{\varepsilon, a, aa, aabaa\}$
  - $\mathrm{Bord}(w) = aabaa$

Calculer le Bord

Pour tout mot $u \in \Sigma^+$ et tout caractère $a \in \Sigma$:

$$\mathrm{Bord}(ua) = \begin{cases} \mathrm{Bord}(u)a & \text{si } \mathrm{Bord}(u)a \text{ est un préfixe de } u \\ \mathrm{Bord}(\mathrm{Bord}(u)a) & \text{sinon} \end{cases}$$



La table des bords

Un tableau de $|w| + 1$ entiers, noté TB, et défini par :

$$TB[i] = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ |\text{Bord}(w[0..i-1])| & \text{si } 0 < i \leq |w| \end{cases}$$

`w = abaababa`

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w[i-1]		a	b	a	a	b	a	b	a
TB[i]	-1	0	0	1	1	2	3	2	3

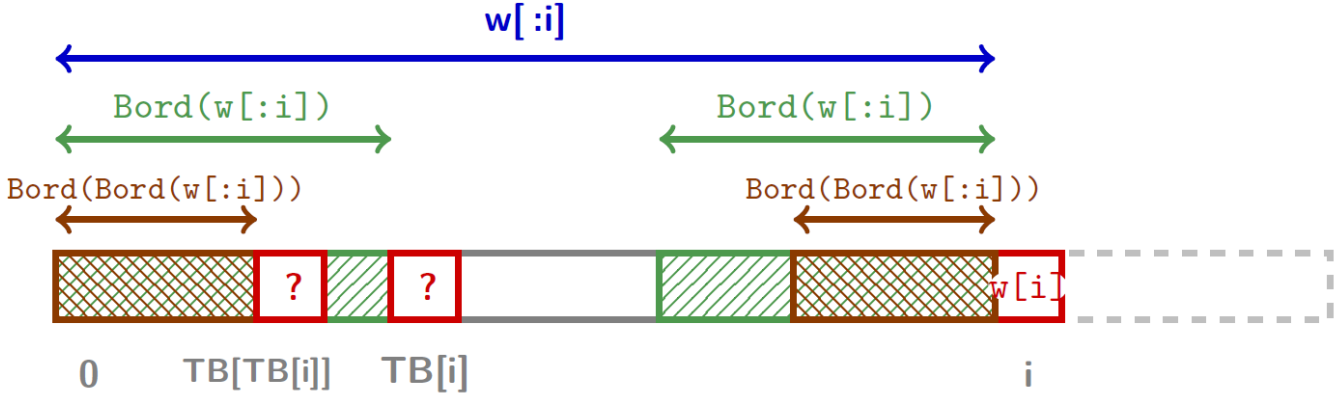
`w = aabaabaa`

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w[i-1]		a	a	b	a	a	b	a	a
TB[i]	-1	0	1	0	1	2	3	4	5

Calculer la table des bords

L'algorithme

```
def Bord(u):
    m = len(u)
    TB = [0 for i in range(m+1)]
    j = -1
    for i in range(0,m):
        TB[i] = j
        while(j >= 0 and u[j] != u[i]):
            j = TB[j]
        j = j+1
    TB[m] = j
    return TB
```



Calculer la table des bords

Complexité de l'algorithme

La complexité au pire est linéaire en la taille m du mot

Complexité est linéaire en le nombre de comparaisons entre lettres
$\approx$ Nombre total de fois où la condition du `while` est examinée

```
def Bord(u):
    m = len(u)
    TB = [0 for i in range(m+1)]
    j = -1
    for i in range(0,m):
                TB[i] = j
        while(j >= 0 and u[j] != u[i]): # comparaisons effectuées ici !!!
                        j = B[j]
        j = j+1
    TB[m] = j
    return TB
```

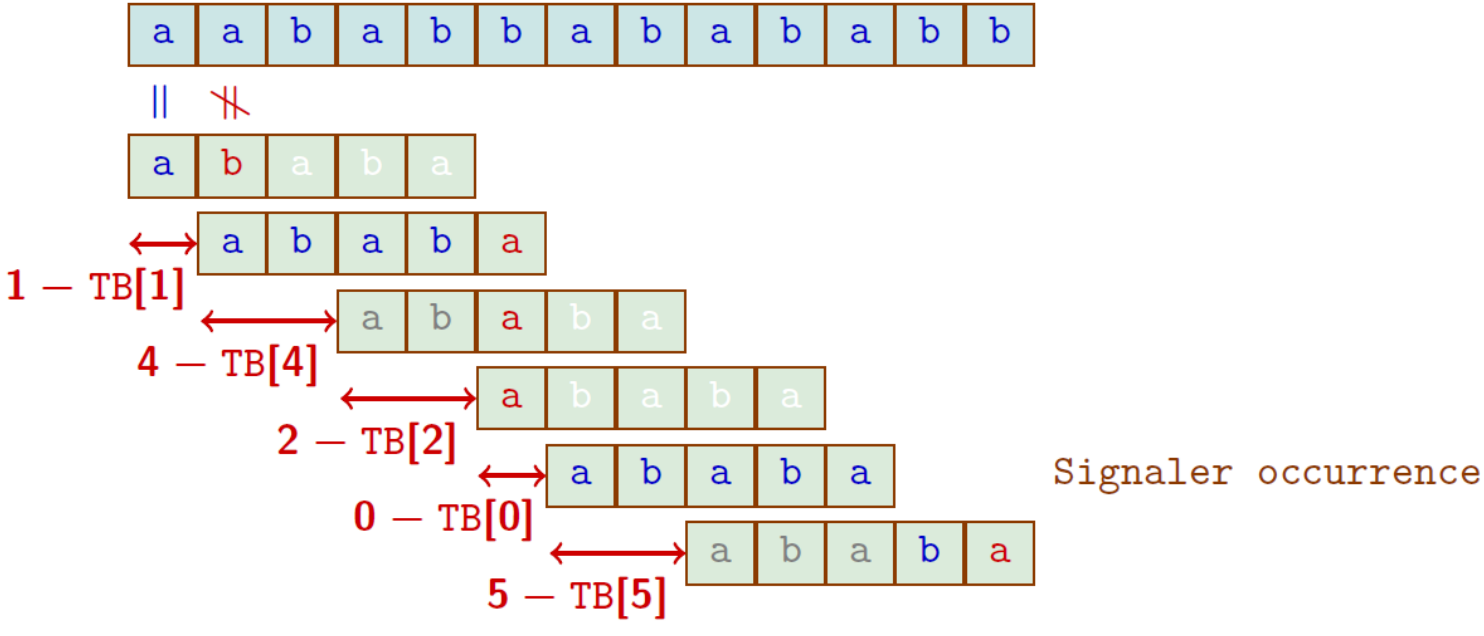
(Preuve typique) La quantité $\Delta(i,j) = 2i - j$ augmente au moins de 1 à chaque comparaison

- Au début : $\Delta(0,-1) = 1$
- À la fin : $\Delta(m-1,j) \leq 2m-2$. Donc $\#\text{comparaisons} \leq 2m-3$.

Algorithme de Morris-Pratt

- Le texte et le motif cherché : $t = aababbababababb$ et $u = ababa$
- Table des bords de u

i	0	1	2	3	4	5
w[i-1]		a	b	a	b	a
TB[i]	-1	0	0	1	2	3



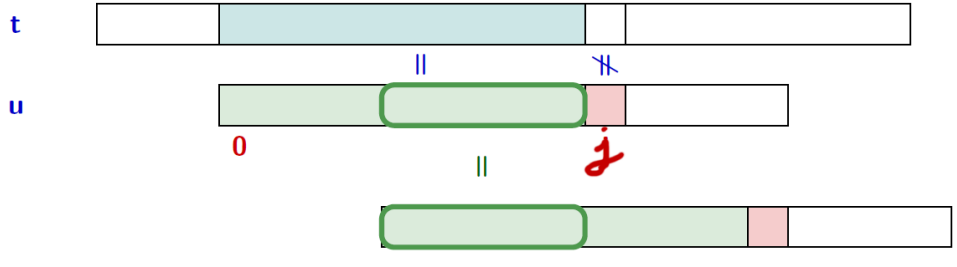
16 comparaisons

(À chaque étape, il est inutile de tester les $B[i]$ premiers caractères du motif; $TB[0] = -1$ permet de toujours décaler au moins de 1)

Recherche de motif

Utilisation de la table des bords

```
def findMP(u, t, TB=None):
    m = len(u)
    n = len(t)
    if TB is None:
        TB = Bord(u)
    i, j = 0, 0
    while i < n-m+1:
        while j < m and u[j] == t[i+j]:
            j = j+1
        if j == m:
            signal_occurrence(i)
        i = i + j - TB[j] # décalage calculé avec la table des bords
        if j != 0:
            j = TB[j] # pas la peine de comparer les symboles déjà apparei
```



→ Décalage : j - TB[j]

Algorithme de Morris-Pratt

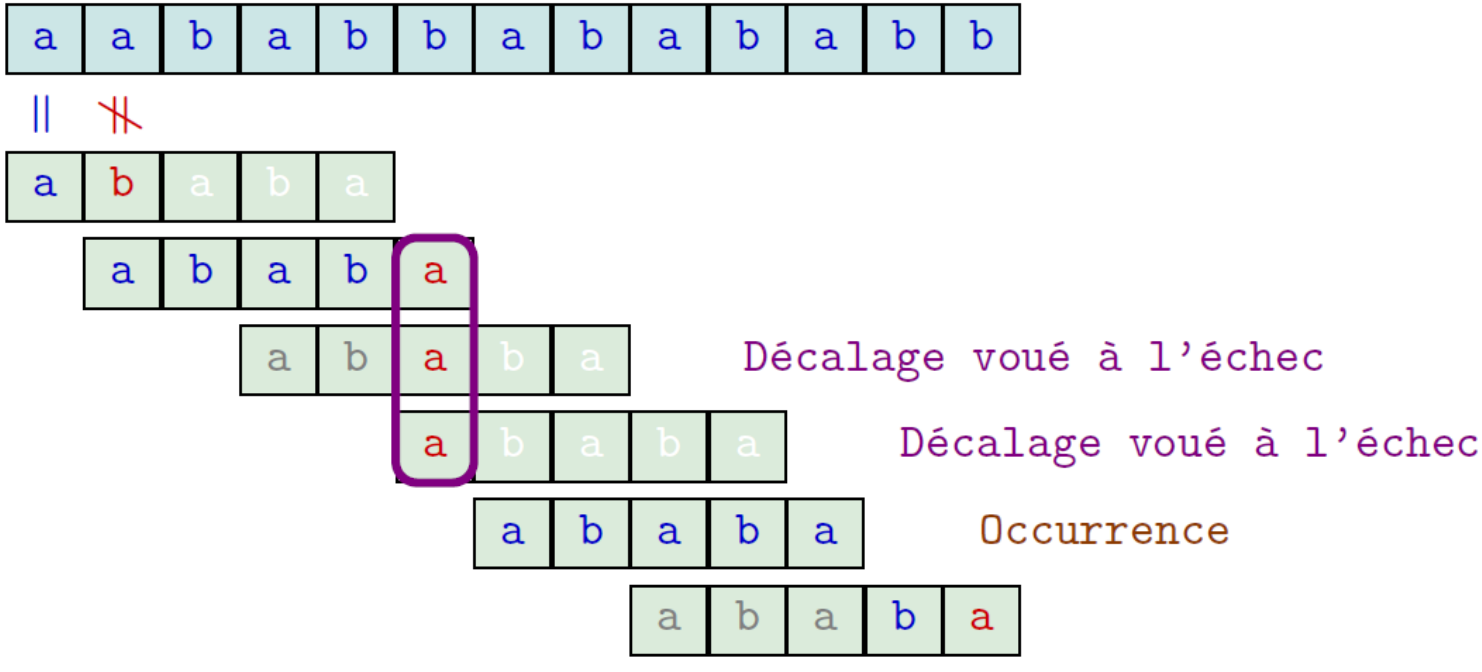
Complexité de l'algorithme

La complexité au pire est linéaire en $m + n$, somme des tailles du mot et du texte

- coût du prétraitement sur le motif :
  Le calcul de la table des bords a un coût en $O(m)$
- coût de la recherche : $O(n)$
  Considérer la quantité $\Delta'(2i + j)$
  (croît au moins de 1 à chaque comparaison)

De Morris-Pratt à Knuth-Morris-Pratt

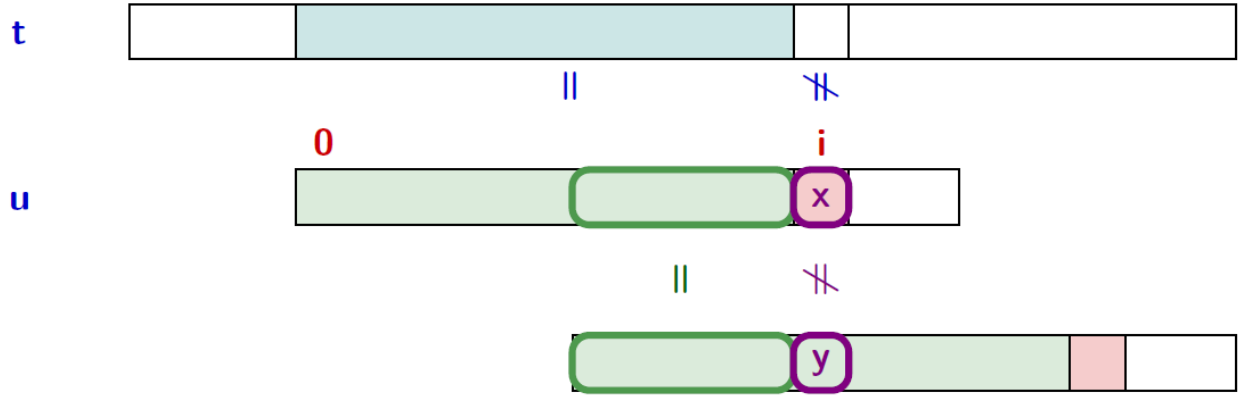
- MP : on mémorise les caractères du mot appareillés à ceux du texte
- KMP : on mémorise aussi les erreurs (un peu !)



De Morris-Pratt à Knuth-Morris-Pratt

Knuth-Morris-Pratt

- Le balayage se fait de gauche à droite.
- Le décalage de la fenêtre est calculé à partir du motif et de ses bords stricts



Calculer un « bon » décalage suite à un échec à la position i :

- Déterminer un préfixe propre de $u[0..i-1]$ qui soit suffixe de $u[0..i-1]$,
- tel que le caractère y suivant ce préfixe est différent du caractère x suivant le suffixe (i.e., le caractère qui a provoqué l'échec)
- on veut le plus grand

→ notion de **bord strict**

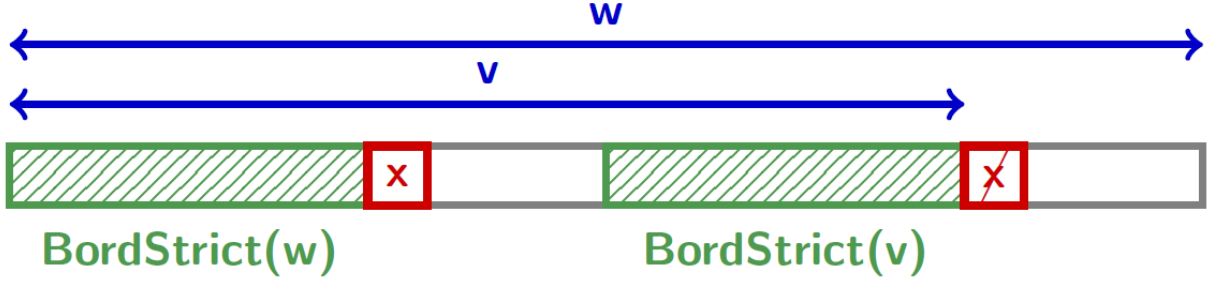
Bord strict

Définition

Soit w un mot et v un préfixe de w. b est un **bord strict** de v relativement à w si

- b est un bord de v
- $v = w$ ou $w[|v|] \neq w[|b|]$

« **Le bord strict maximal** » de v (relativement à w), noté $\mathrm{BordStrict}(v, u)$, est le plus long bord strict de v quand il existe.



Remarque : Le bord strict n'est pas toujours défini.
Par exemple, le préfixe ab n'admet pas de bord strict relativement à aba

La table des bords stricts

La table des bords stricts d'un mot w est tableau de $|w|+1$ entiers, noté S, et défini par :

$$S[i] = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \text{ ou } w[0..i-1] \text{ n'a pas de bord strict} \\ |\text{BordStrict}(w[0..i], w)| & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

On calcule facilement la table des bords stricts à partir de celle des bords

$$SB[0] = -1, \qquad SB[|w|] = TB[|w|],$$

et pour $0 < i < |w|$, on a

$$SB[i] = \begin{cases} TB[i] & \text{si } w[i] \neq w[TB[i]] \\ SB[TB[i]] & \text{sinon} \end{cases}$$

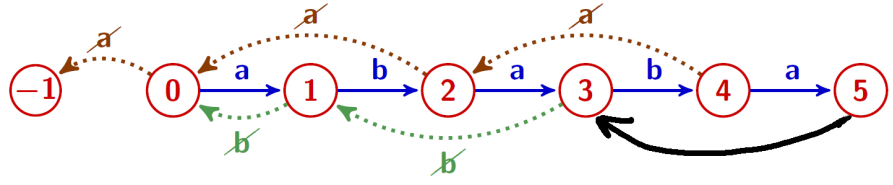
La table des bords stricts

Exemple

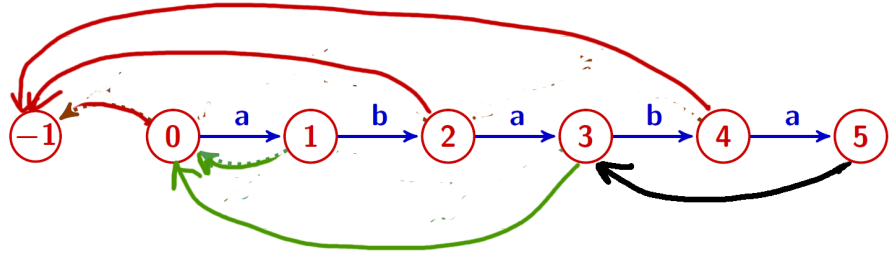
$w = ababa$

i	0	1	2	3	4	5
w[i-1]		a	b	a	b	a
TB[i]	-1	0	0	1	2	3
SB[i]	-1	0	-1	0	-1	3

- Représentation de TB

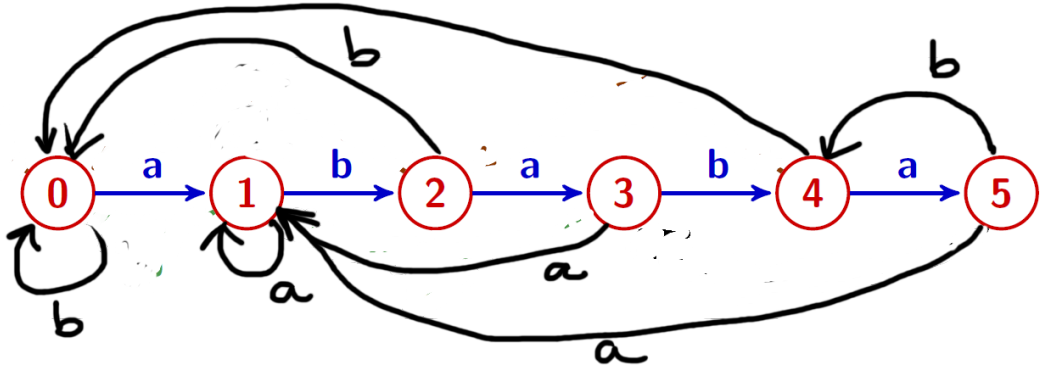


- Représentation de SB



Automate fini déterministe qui reconnaît $\Sigma^* w$

(Préparation pour l'automate d'Aho-Corasick...)



Morris-Pratt et Knuth-Morris-Pratt

Entrée : Un mot $u de longueur m et un texte t de longueur n$

- Prétraitement
  - calcul de la table des bords $O(m)$
  - calcul de la table des bords stricts $O(m)$
- Recherche $O(n)$ pour Morris-Pratt et Knuth-Morris-Pratt
  même algo hormis le décalage calculé avec les bords stricts :
  `i = i+j-TB[j]` → `i = i+j-SB[j]`

Mais alors ?

KMP offre une garantie supplémentaire par rapport à MP sur le nombre de comparaisons maximal pour un caractère du texte. Ce nombre est borné par :

- m pour MP
- $\log_\phi(1+m)$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour KMP

Utile si on veut un algo à faible délai entre deux caractères traités (applications temps réel)

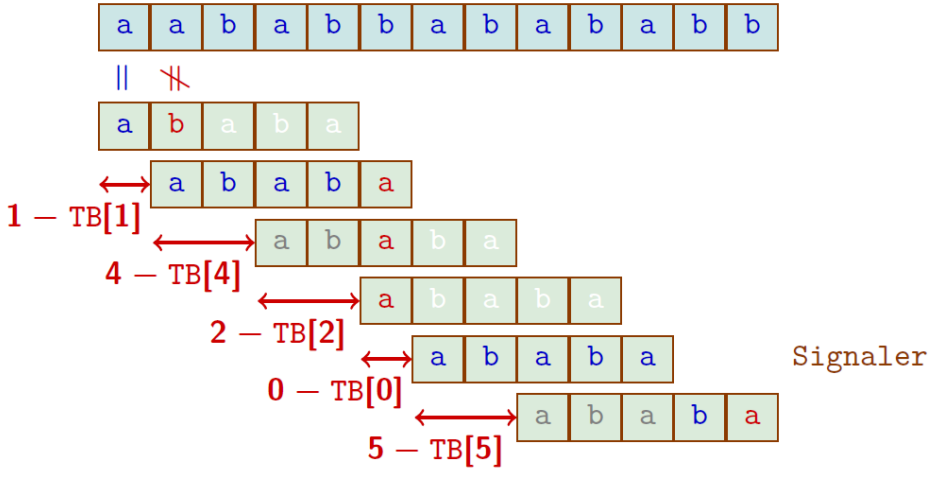
Knuth-Morris-Pratt

Exemple

$u = ababa, t = aababbababababb$

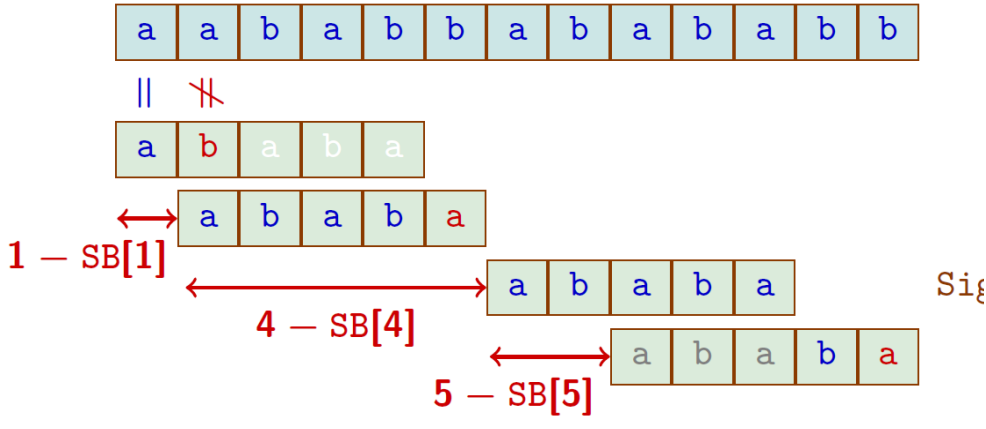
MP

16 comparaisons



KMP

14 comparaisons



Toute une zoologie d'algorithmes

Un autre exemple : algorithme du facteur miroir

Recherche : On applique l'automate qui reconnaît les suffixes du miroir sur les lettres de la fenêtre lue de droite à gauche

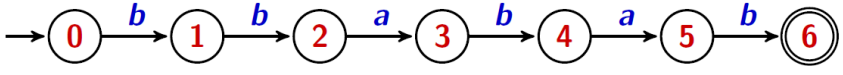
- À chaque fois que l'automate entre dans un état d'acceptation (sans que toutes les lettres de la fenêtre n'aient été consommées) on mémorise sa position. Cette position correspond à celle du plus grand suffixe du miroir jusqu'à présent rencontré.
- Lorsque l'automate s'arrête, soit parce qu'il se bloque (cas d'échec) ou que toutes les lettres de la fenêtre ont été consommées (occurrence détectée), la position précédemment mémorisée spécifie alors le décalage à effectuer.

Toute une zoologie d'algorithmes

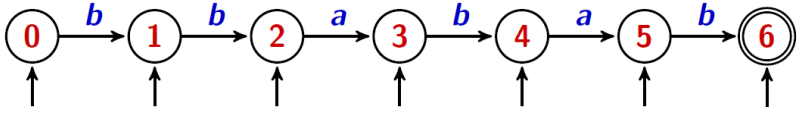
algorithme du facteur miroir

$u = bababb$

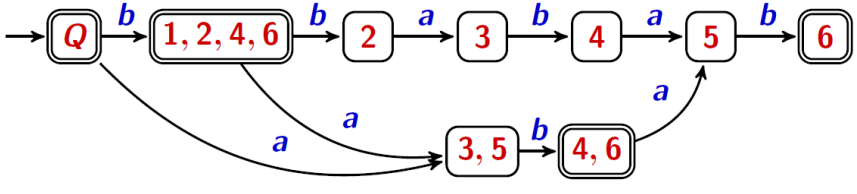
- L'AFD qui reconnaît $u^R = bbabab$

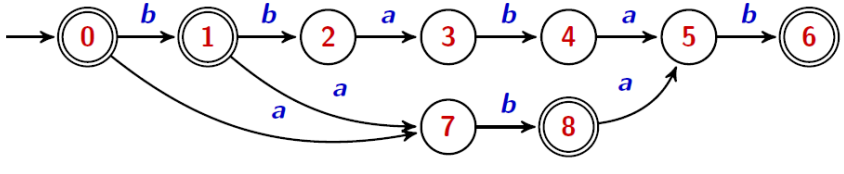


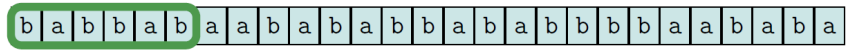
- L'AFN qui reconnaît les suffixes de $u^R = bbabab$



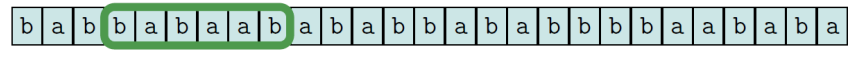
- L'AFD qui reconnaît les suffixes de $u^R = bbabab$



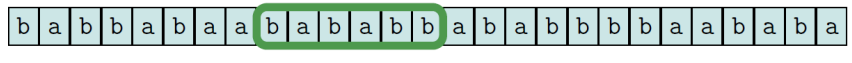




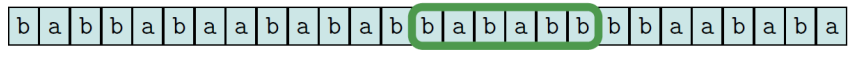
Préfixe ***bab*** trouvé : on décale la fenêtre de $|u| - |bab| = 3$



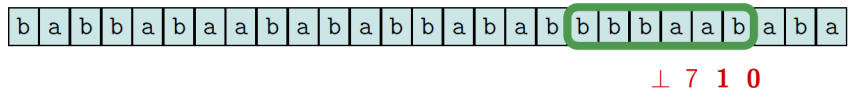
Préfixe ***b*** trouvé : on décale la fenêtre de $|u| - |b| = 5$



u = babbab trouvé
Préfixe ***b*** trouvé : on décale la fenêtre de $|u| - |b| = 5$



u = babbab trouvé
Préfixe ***b*** trouvé : on décale la fenêtre de $|u| - |b| = 5$



Préfixe ***b*** trouvé : on décale la fenêtre de $|u| - |b| = 5$

Cela fonctionne car l'automate est de taille linéaire et obtenu en temps linéaire.

Toute une zoologie d'algorithmes

Boyer-Moore

Principe

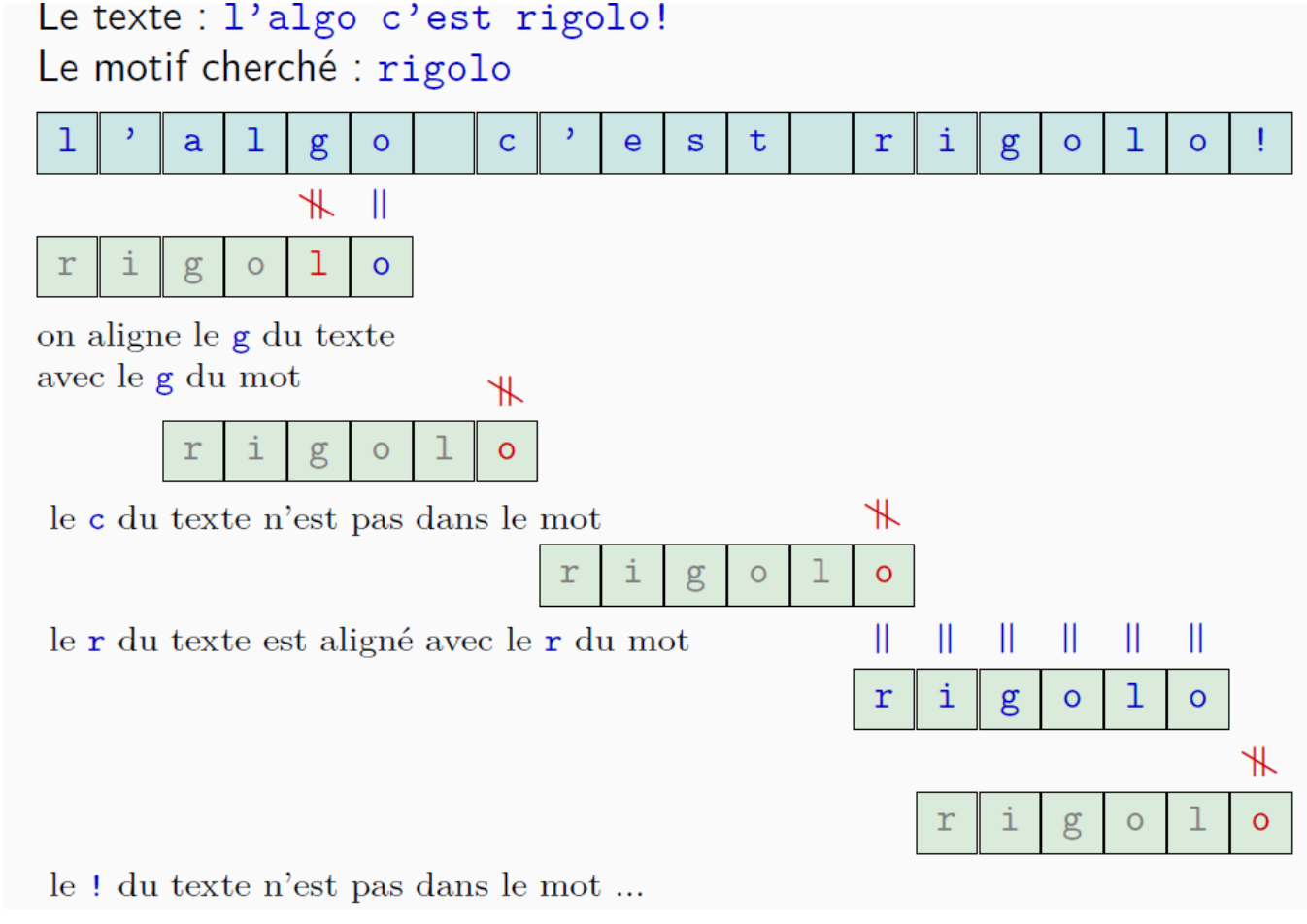
- La lecture se fait de droite à gauche.
- Le décalage de la fenêtre est calculé suivant deux règles :
  - la règle du bon caractère (heuristique simple)
  - la règle du bon suffixe (utilise deux tables)

Dans le pire des cas : l'algorithme original e complexité en temps en $O(nm)$ si le motif est présent, $O(n+m)$ si le motif n'est pas présent

Très efficace en pratique (et compatible avec le codage UTF-8)

Toute une zoologie d'algorithmes

Boyer-Moore : Règle du bon caractère



Cela fonctionne «bien» (sous-linéaire) lorsque l'alphabet est grand

Aho Corasick

Un cas important : le motif recherché est un ensemble (fini) de mots (finis)

On peut toujours effectuer la recherche un à un de chaque mot de l'ensemble mais ça ne va pas être efficace.

Problème

Étant donné un texte t et un ensemble $X = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de k mots, trouver toutes les occurrences de $u_1, \ldots, u_k$ dans t.

Si l'on note $m = |u_1| + \cdots + |u_k|$ la taille de l'ensemble X et n la taille du texte, on souhaiterait des algorithmes linéaires en $m + n$

Aho Corasick

Arbre lexicographique (trie développé)

Une structure de donnée adéquate pour représenter un ensemble de mots

Un **arbre lexicographique** est un arbre enraciné où
- les arêtes sont étiquetées par des caractères
- toutes les arêtes issues d'un même nœud ont des étiquettes distinctes.

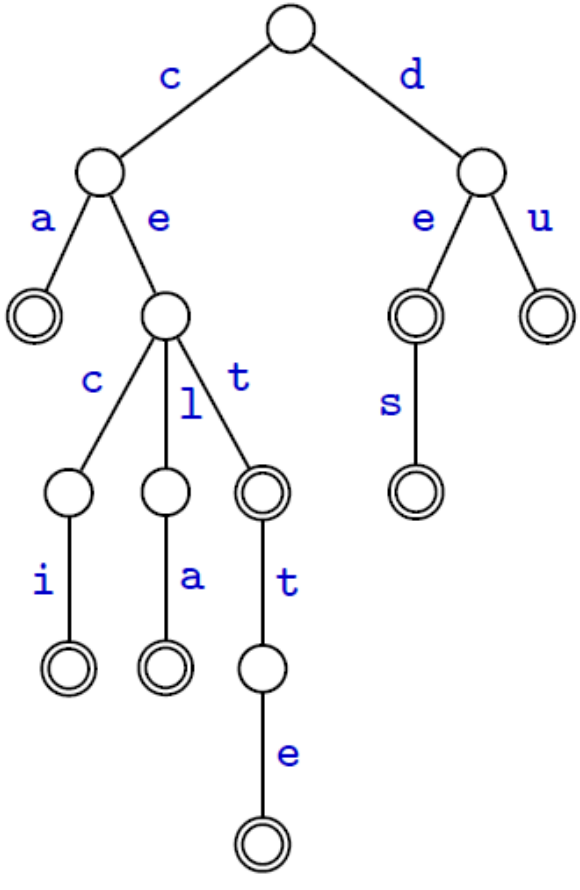
À chaque nœud de l'arbre correspond le mot formé des caractères qui étiquettent le chemin de la racine à ce nœud.

Les feuilles et certains nœuds internes sont marqués, ils représentent les mots de l'ensemble.

Remarque : on appelle parfois **trie** un tel arbre (trie = tree+retrieval)
→ plus exactement variante qui sépare les mots exactement selon les préfixes

Aho Corasick

Arbre lexicographique (trie développé)



- L'arbre représente l'ensemble X ={ca, ceci, cela, ces, cet, cette, de, des, du}
- L'ensemble des nœuds de l'arbre code les préfixes des mots de X : $\mathrm{Pref}(X)$ ={ε, c, d, ca, ce, de, du, cec, cel, cet, des, ceci, cela, cett, cette}

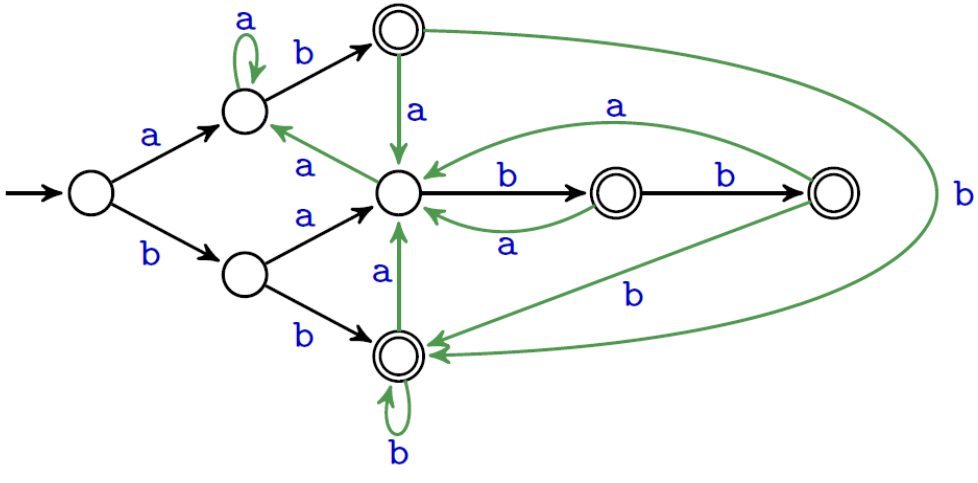
Aho Corasick

L'automate arbre qui reconnaît $\Sigma^* X$

Ses caractéristiques :

- $X = \{ab, bab, babb, bb\}$
- ses états correspondent aux nœuds de l'arbre lexicographique : $\mathrm{Pref}(X) = \{\varepsilon, a, b, ab, ba, bb, bab, babb\}$
- son état initial est la racine : ε
- ses états d'acceptations : $\mathrm{Pref}(X) \cap \Sigma^* X = \{ab, bb, bab, babb\}$
- sa fonction de transition :

$$\delta(p, x) = \begin{cases} px & \text{si } px \in \mathrm{Pref}(X) \\ \text{le plus long suffixe propre de } px \in \mathrm{Pref}(X) & \text{sinon} \end{cases}$$



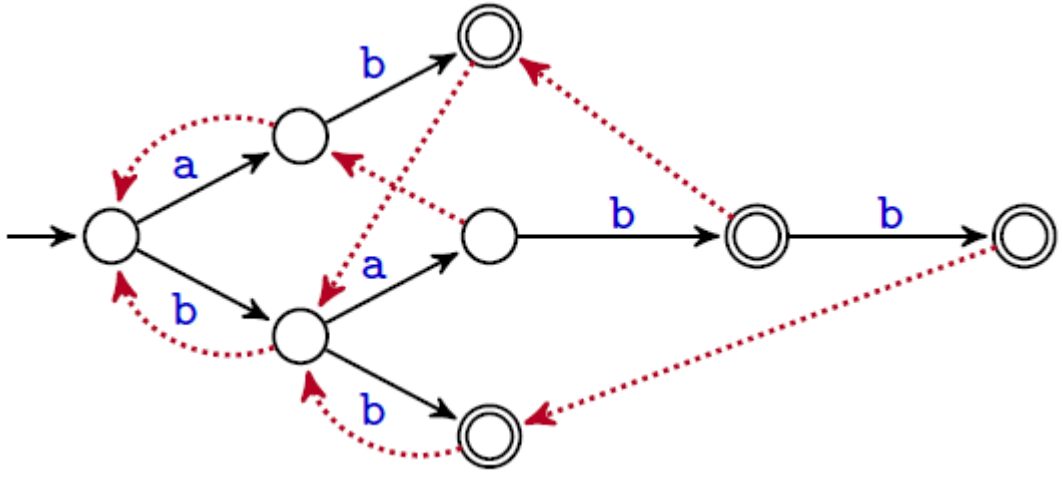
Problème : L'automate est complet → beaucoup de transitions inutiles/redondantes

Aho Corasick

Amélioration : avoir une représentation indépendante de la taille de l'alphabet Σ et donc moins gourmande en espace.

L'automate de Aho-Corasick associé à un ensemble de mots X est décrit par :

- l'**arbre** associé à X (comment le représenter ?)
- la **fonction de suppléance** f (représentée dans le graphe par des arcs non étiquetés); voir ci-après
- la fonction de **sortie** s qui associe à chaque état u de $\mathrm{Pref}(X)$ l'ensemble des mots p de X qui sont suffixes de u (= les **occurrences**)



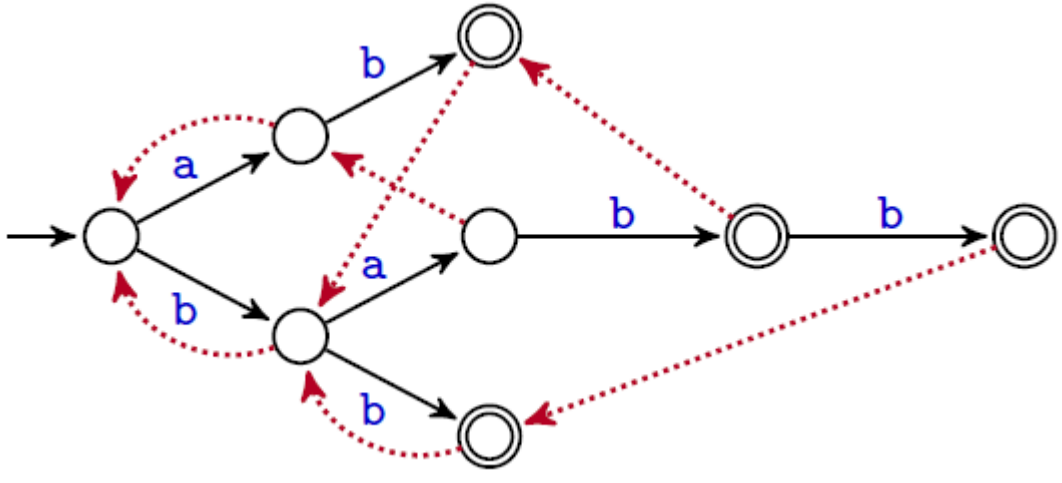
Important Cet automate est aussi important conceptuellement : il représente l'ensemble des corrélation entre les mots

Aho Corasick

Fonction de suppléance

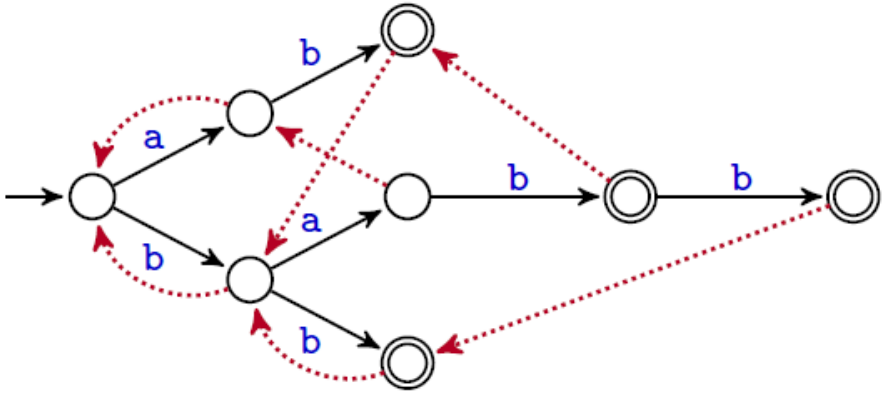
La fonction de suppléance $f : \mathrm{Pref}(X)\backslash\{\varepsilon\} \mapsto \mathrm{Pref}(X)$ est définie par :

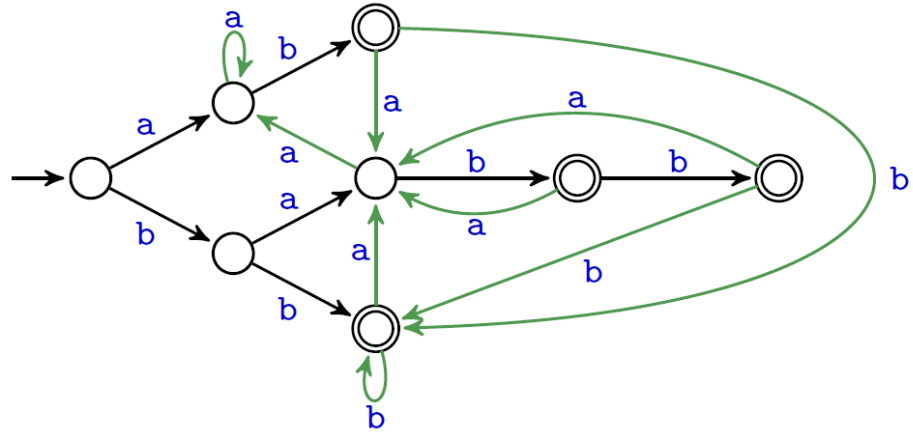
$f(u)$ est le plus long suffixe **propre** de u dans $\mathrm{Pref}(X)$



Remarque : La fonction de suppléance pour un mot seul correspond aux bords maximaux

Aho Corasick





Comment retrouver les transitions $\delta(p, x)$ de l'automate arbre avec la fonction de suppléance f ?

La définition

$$\delta(p,x) = \begin{cases} px & \text{si } px \in \mathrm{Pref}(X) \\ \text{le plus long suffixe propre de } px \in \mathrm{Pref}(X) & \text{sinon} \end{cases}$$

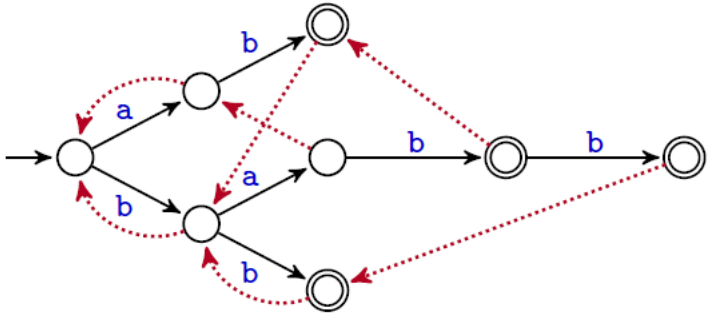
se traduit en

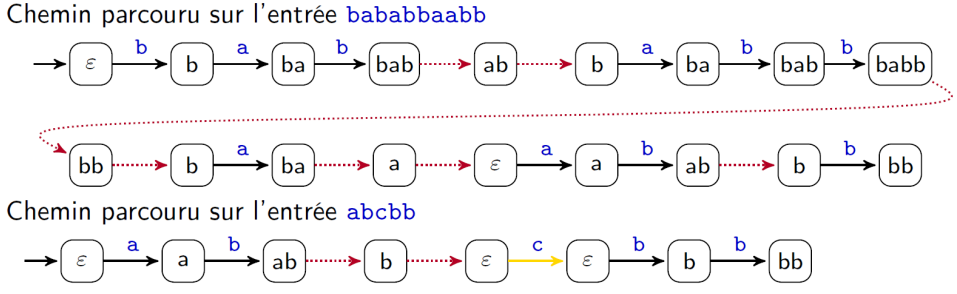
$$\delta(p,x) = \begin{cases} px & \text{si } px \in \mathrm{Pref}(X) \\ \delta(f(p),x) & \text{si } p \neq \varepsilon \text{ et } px \notin \mathrm{Pref}(X) \\ \varepsilon & \text{si } p = \varepsilon \text{ et } x \notin \mathrm{Pref}(X) \end{cases}$$

Aho Corasick

Recherche

$X = \{ab, bab, babb, bb\}$





Pour un texte t de longueur n, le chemin parcouru est de longueur au plus $2n$

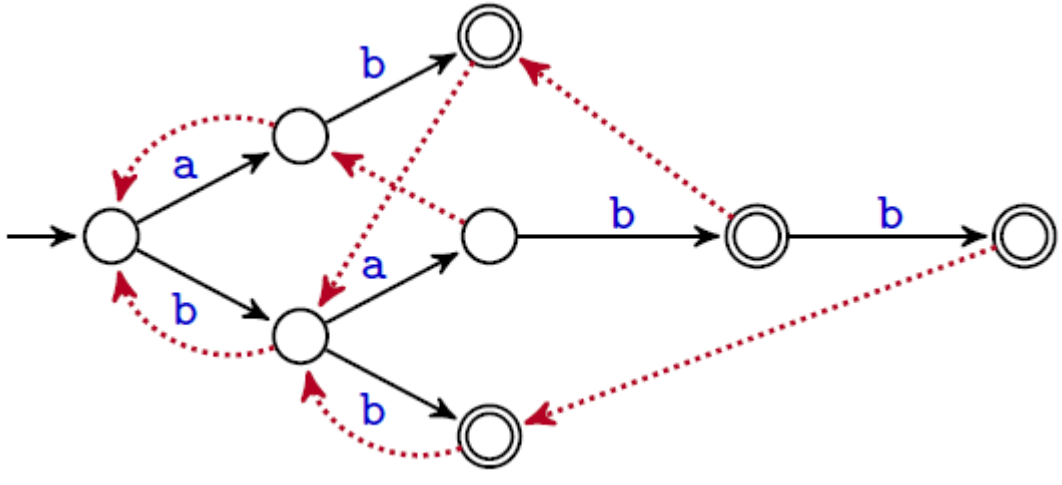
- traverse n arcs de l'arbre
- traverse au plus n liens de suppléance (on ne peut pas remonter dans l'arbre plus de fois qu'on ait descendu)

Aho-Corasick

Considérations algorithmiques (et implantation)

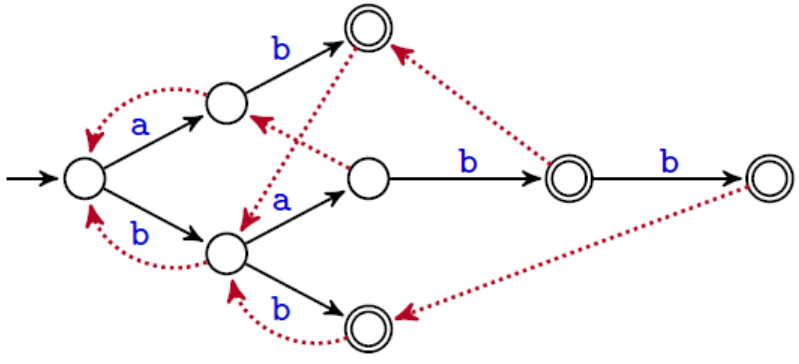
À partir de l'ensemble des mots X, on doit construire :

1. l'arbre lexicographique (tableaux de pointeurs, arbre binaire grâce à la bijection classique, table d'association, wavelet trees)
2. la fonction de suppléance (définition croisée)
3. la fonction de sortie (facile)



Aho-Corasick

Fonction de suppléance



La fonction de suppléance f et la fonction de transition δ ont des définitions croisées :

$$f(ux) = \begin{cases} \delta(f(u), x) & \text{si } u \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } u = \varepsilon \text{ (par convention)} \end{cases}$$

$$\delta(p, x) = \begin{cases} px & \text{si } px \in \mathrm{Pref}(X) \\ \delta(f(p), x) & \text{si } p \neq \varepsilon \text{ et } px \notin \mathrm{Pref}(X) \\ \varepsilon & \text{si } p = \varepsilon \text{ et } x \notin \mathrm{Pref}(X) \end{cases}$$

Grâce à un parcours en largeur de l'arbre : tout ce qu'il faut en temps utile pour construire f → Pré-calcul en $O(n)$

Remarque : la fonction de suppléance peut être «optimisée» (idem bord vs bord strict)

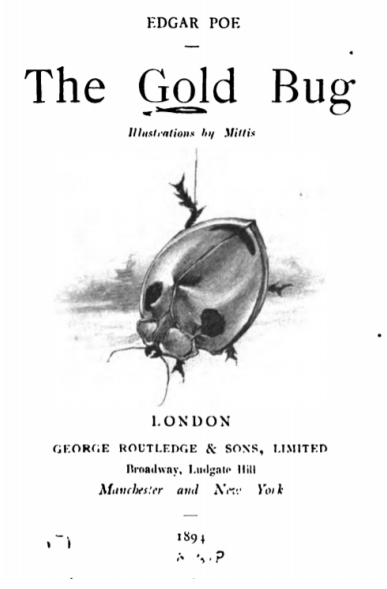
Quelques références

- Algorithmique du texte (Crochemore, Hancart, Lecroq)
- Jewels in stringology (Crochemore, Rytter)
- http://www-igm.univ-mlv.fr/~lecroq/string/ (Lecroq, Charras)
- Des analyses en moyenne (cf M. Régnier): Boyer-Moore, Morris-Pratt, Knuth-Morris-Pratt
- Représentations compressés de l'automate de Aho-Corasick (Belazzoughi 2017...)
- (liste vraiment non exhaustive)

Indexation

Partie 2

Edgar Allan Poe, "The Gold-Bug", Dollar Newspaper (Philadelphia, PA) June, 1843


EDGAR POE

The Gold Bug

Illustrations by Mittis

LONDON

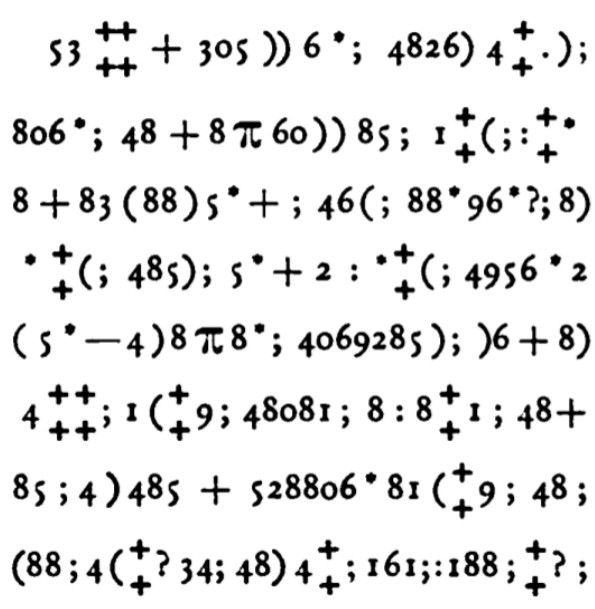
GEORGE ROUTLEDGE & SONS, LIMITED

Broadway, Ludgate Hill

Manchester and New York

1894


THE DOLLAR NEWSPAPER.


53‡‡† 305))6*; 4826)4‡.);
806*; 48†8¶60))85; 1‡(;:‡*
8†83(88)5*†; 46(; 88*96*?;8)
‡(; 485); 5†2:*‡(; 4956*2
(5*—4)8¶8*; 4069285);)6†8)
4‡‡; 1(‡9; 48081; 8:8‡1; 48†
85; 4)485 + 528806*81(‡9; 48;
(88; 4(‡?34; 48)4‡; 161; :188; ‡?;

Déchiffrer grâce aux fréquences des lettres : «*A good glass in the bishop's hostel in the devil's seat twenty-one degrees and thirteen minutes northeast and by north main branch seventh limb east side shoot from the left eye of the death's-head a bee line from the tree through the shot fifty feet out.*»

→ L'intérêt pour les occurrences dans les textes a une longue histoire

Indexation

Trouver les occurrences d'un motif u dans un texte t, **lorsque le texte t est fixe.**

- On prétraite le texte en utilisant des techniques d'indexation : essentiellement, on définit une structure de données qui mémorise l'ensemble des facteurs du texte
- On répond alors aux opérations de bases - recherche d'occurrences de motifs variables, nombre, positions - de manière facile à partir de l'index

Applications

statistique sur le texte, trouver des répétitions ou des régularités/irrégularités, compression du texte...

Indexation

Différentes façons de représenter l'index d'un texte :

- arbre des suffixes
- table des suffixes
- transformée de **Burrows-Wheeler**

Objectif

Utilisée pour des textes de grande taille, la structure d'indexation doit être économe. On voudrait :

- une occupation mémoire linéaire en la taille du texte
- une construction également en temps linéaire

La structure construite une fois pour toute, la recherche de motif dans le texte doit se faire en temps linéaire (ou quasi-linéaire) en la taille du motif

Trie des suffixes

Convention pratique

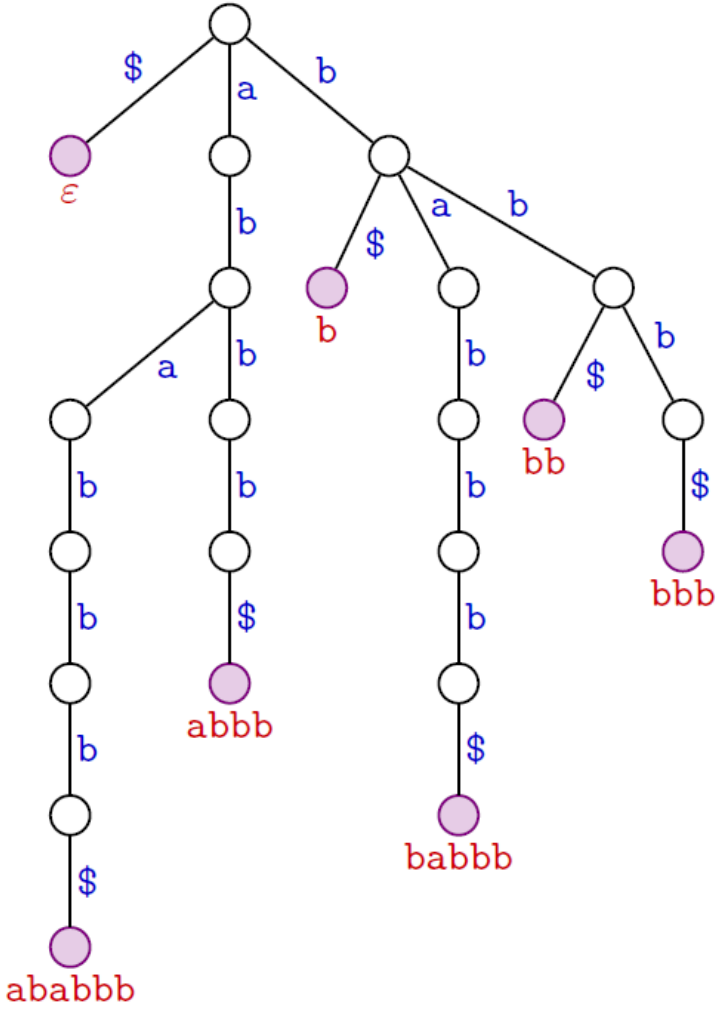
On ajoute à la fin du texte t un caractère $\$$ distinct de tous les autres caractères du texte.
Ce marqueur $\$$ garantit :

- qu'aucun suffixe de t n'est préfixe d'un autre suffixe de t
- une correspondance univoque entre les suffixes du texte t et les feuilles du trie des suffixes de $t\$$.

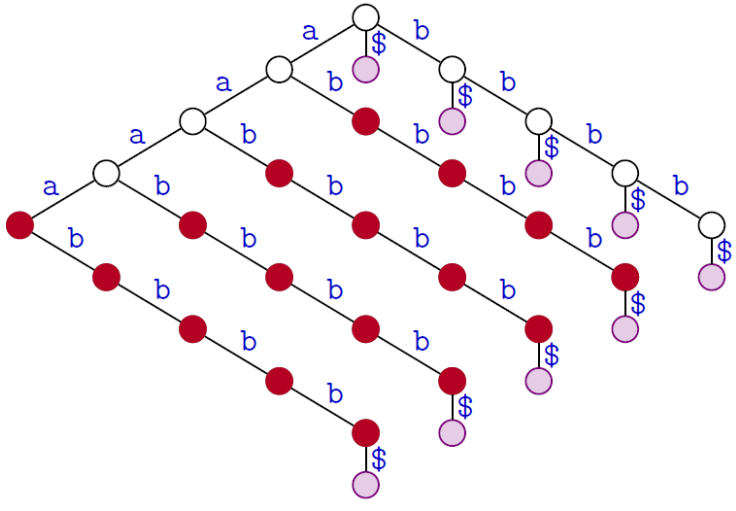
Ceci simplifie les traitements.

Trie des suffixes

texte : $ababbb$



Le trie des suffixes du texte a^4b^4 possède $(4+1)2 = 10$ noeuds internes



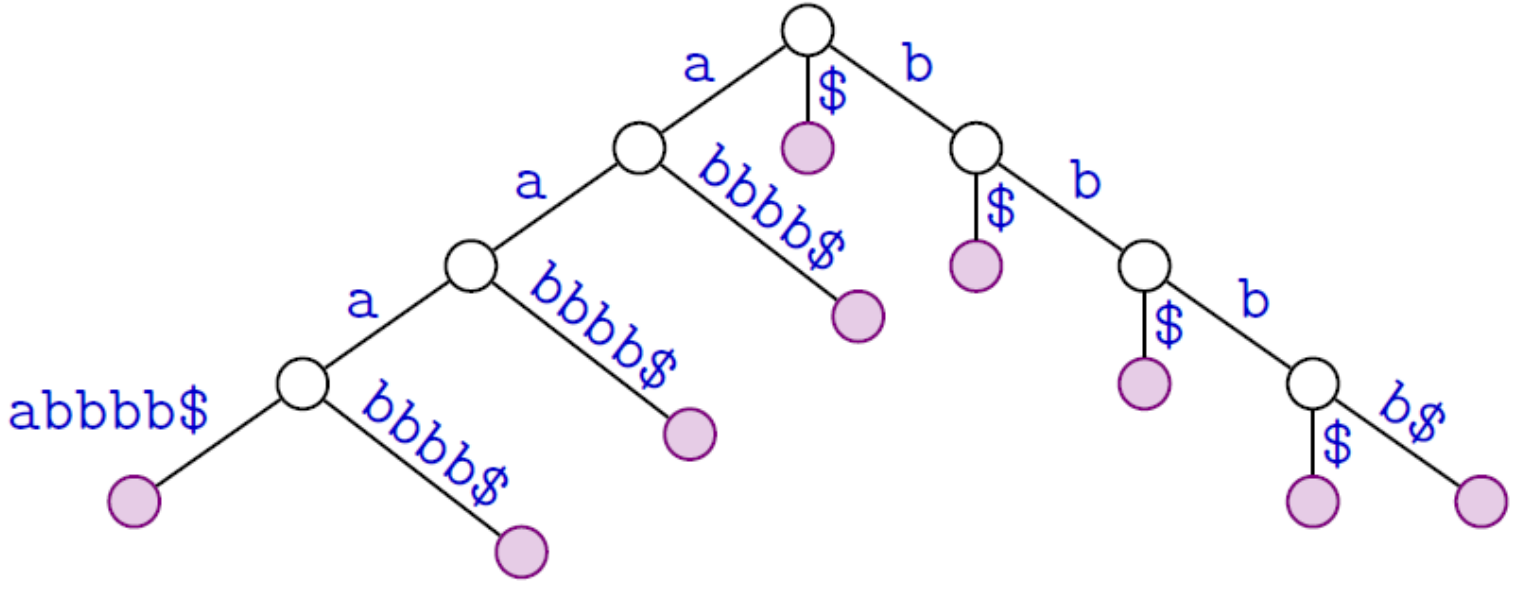
Le nombre de nœuds est quadratique en la taille du texte :
c'est trop !
→ **Éliminer les nœuds de degré sortant** 1

Trie des suffixes → Arbre des suffixes

Une version compacte du trie ($\sim$ arbre PATRICIA « Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric »)

- On conserve les nœuds internes qui sont des branchements (de degré sortant au moins 2) et les feuilles.
- Les étiquettes des arcs sont maintenant des facteurs de t.

L'arbre des suffixes de $t = a^4b^4$



Arbre des suffixes

Complexité en espace

Le nombre de nœuds d'un arbre des suffixes est linéaire en la taille du texte

Preuve

- autant de feuilles que de suffixes
- tous les nœuds internes sont branchants

Pour un texte t de longueur n, le nombre de nœuds de l'arbre des suffixes est d'au plus $2n$

Mais l'ensemble des étiquettes consomme un espace en $O(n^2)$ caractères. **C'est trop !**

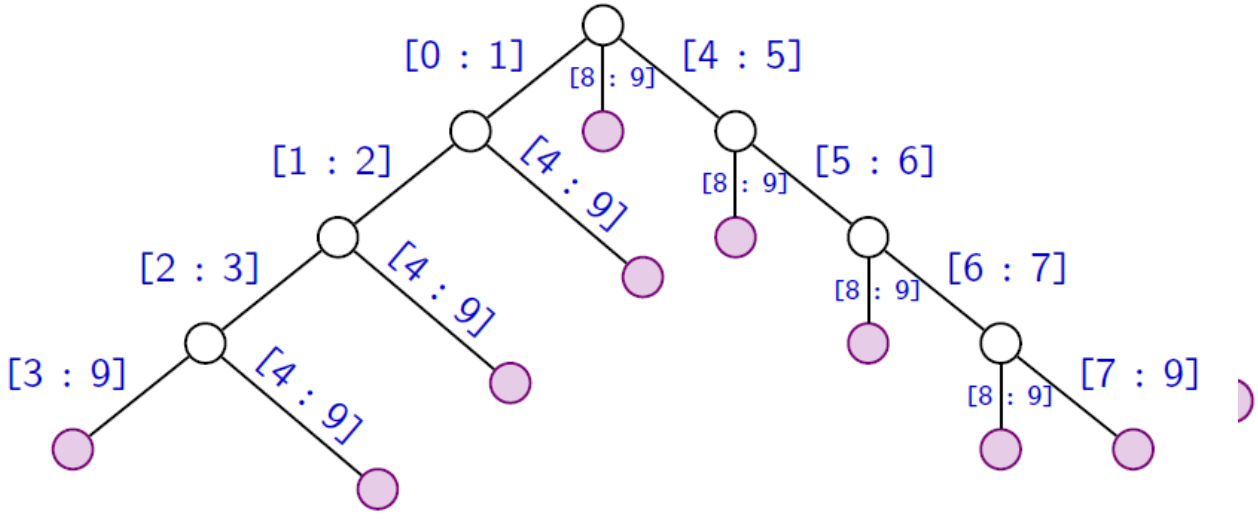
Arbre des suffixes

Question

Comment coder l'ensemble des $O(n)$ étiquettes avec un espace linéaire (en $O(n)$)?

On stocke le texte t et on code chaque étiquette (un facteur de t) via les deux indices `debut` et `fin` délimitant une plage du facteur dans t.

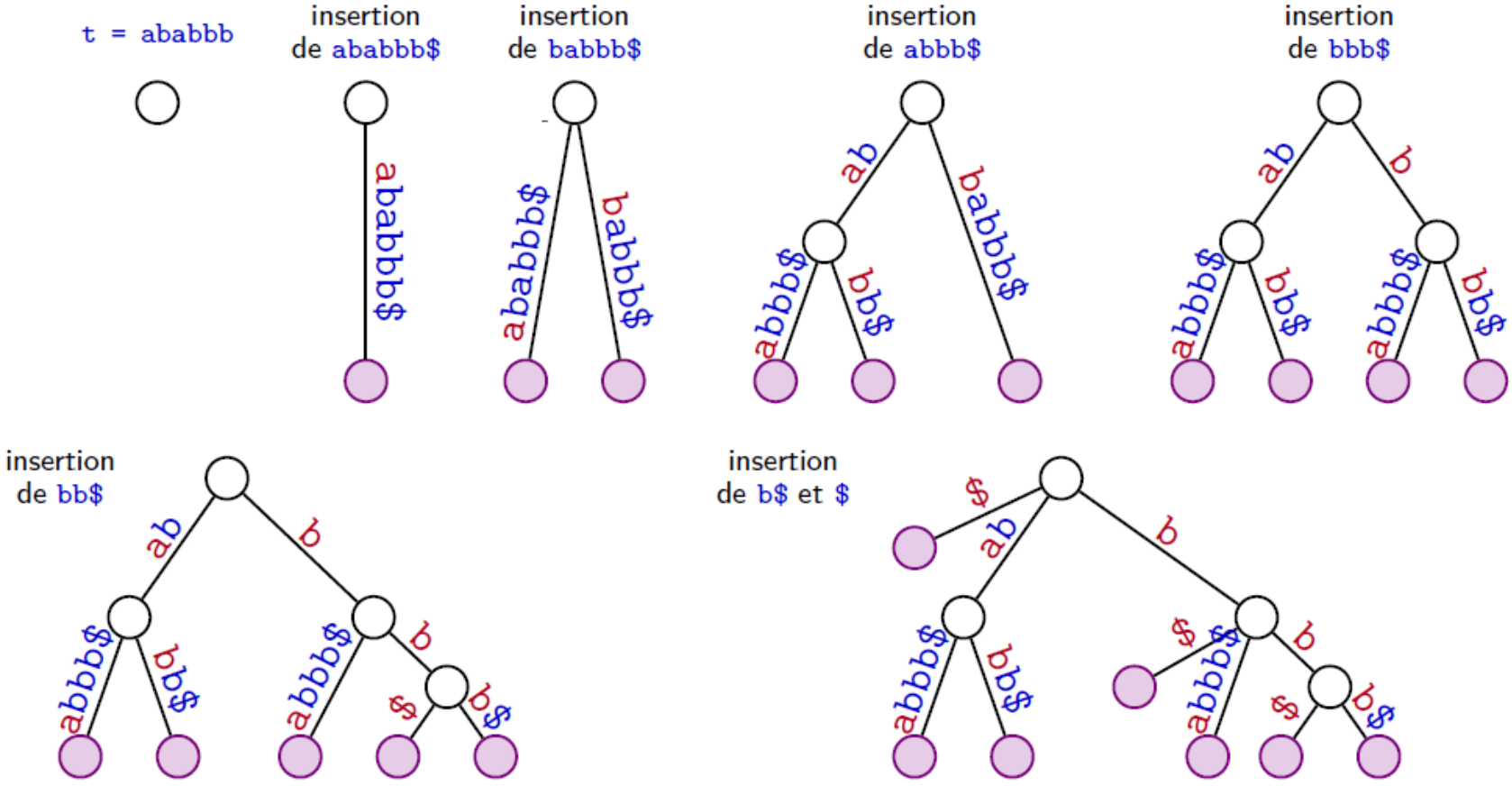
$t = aaaabbbb$



Construction de l'arbre des suffixes

Méthode naïve

Complexité en temps $O(n^2)$



Construction de l'arbre des suffixes

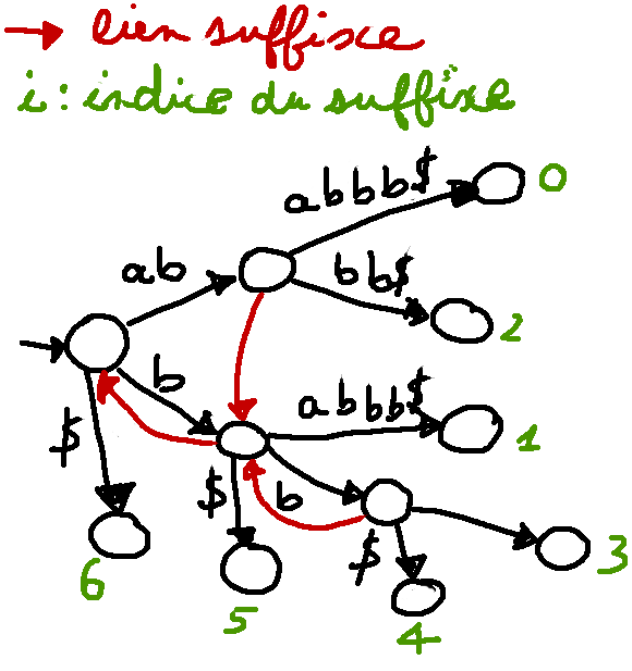
Plusieurs méthodes de construction (élaborées) en $O(n)$

- Weiner (1973)
- McCreight (1976)
- Ukkonen (1995)

On doit ajouter des liens → **les liens suffixes**

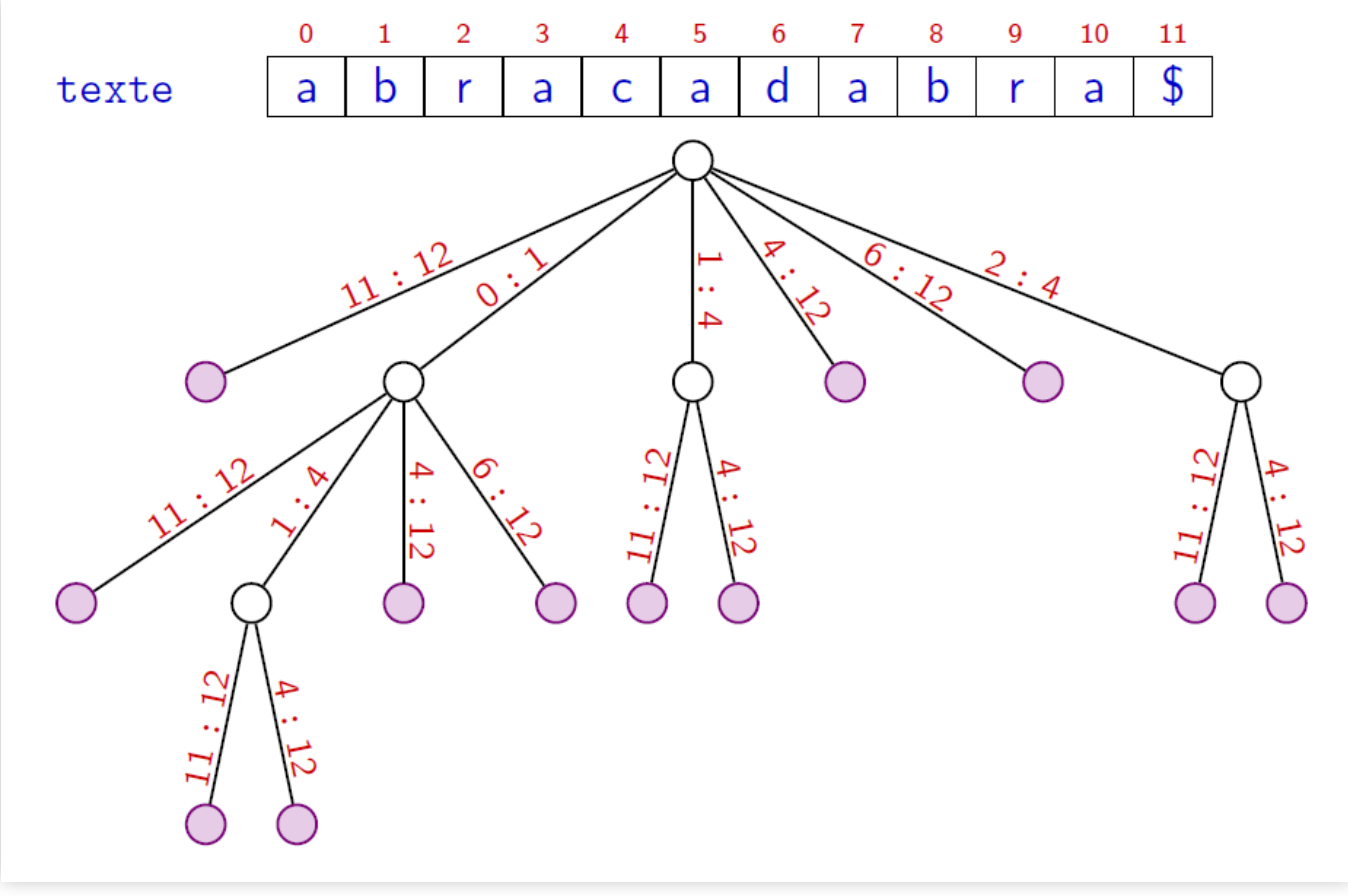
Pour un nœud d'étiquette au, le lien suffixe pointe vers le nœud d'étiquette u.

- définis pour les nœuds branchants (avec au moins deux fils)
- accélère la navigation pour un temps de construction $O(n)$



Arbre de suffixes

Recherche exacte



- Les motifs bra, $braca$, $acab$ sont ils dans le texte ?
- Comment déterminer le nombre d'occurrences ? la position ?

Arbre de suffixes (exemples d'applications)

Les plus longs facteurs qui apparaissent deux fois

L'arbre des suffixes associé au texte TCCATCATCC

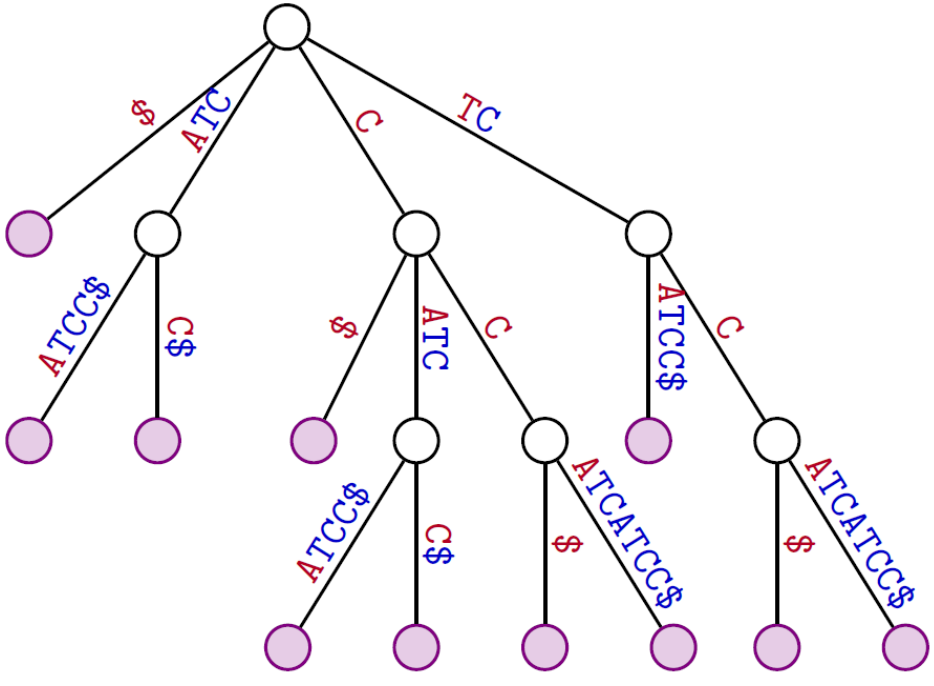


Schéma de l'algorithme :
Avec un parcours (en largeur ou en profondeur) de l'arbre des suffixes de t, déterminer le(s) nœud(s) interne(s) de profondeur maximale
(ici profondeur : longueur de l'étiquette du nœud)

Le noeud d'étiquette CTAC a la profondeur maximale → CATC plus long facteur répété

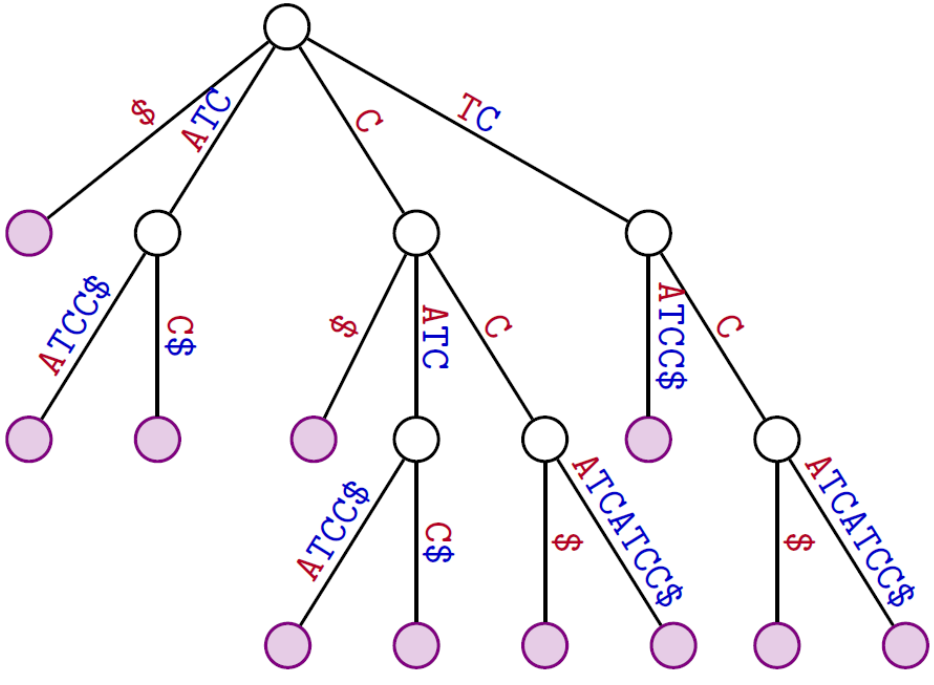
Complexité

Parcours de l'arbre $O(n)$

Arbre de suffixes (exemples d'applications)

Le nombre de facteurs distincts

L'arbre des suffixes associé au texte TCCATCATCC



Avec un parcours de l'arbre des suffixes de t, faire la somme les longueurs des étiquettes des arcs (on omet les marqueurs $)

Complexité

Parcours de l'arbre $O(n)$

Arbre de suffixes

Avantages :

algorithmes assez faciles à concevoir, l'information est facilement accessible

Inconvénients :

structure de données un peu lourde (texte à stocker, structure arborescente, gestion des pointeurs, liens suffixes)

C'est super... mais en pratique on préfère souvent la **table des suffixes** !

Indexation

Table de suffixes (suffix array)

Conçu par Manber & Myers (1993)

Avantages de la table

- structure très simple, utilise moins d'espace que l'arbre des suffixes
- performance en temps comparable à celle de l'arbre des suffixes

suffixes du texte triés en ordre lexicographique

le texte : $t = abracadabra$ ($|t| = 11$)

la liste des suffixes non vides

i	$t[i..n-1]$
0	abracadabra
1	bracadabra
2	racadabra
3	acadabra
4	cadabra
5	adabra
6	dabra
7	abra
8	bra
9	ra
10	a

la liste triée

i	$t[TS[i]..n-1]$	$TS[i]$
0	a	10
1	abra	7
2	abracadabra	0
3	acadabra	3
4	adabra	5
5	bra	8
6	bracadabra	1
7	cadabra	4
8	dabra	6
9	ra	9
10	racadabra	2

La table des suffixes $TS = [10, 7, 0, 3, 5, 8, 1, 4, 6, 9, 2]$

Table de suffixes

Définition

$TS[i]$ est la position du i-ème suffixe de $t = t[0..n-1]$ dans l'ordre lexicographique

$$t[TS[i]..n-1] \leq_{lex} t[TS[i+1]..n-1]$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
texte	a	b	r	a	c	a	d	a	b	r	a
TS	10	7	0	3	5	8	1	4	6	9	2

$$a \leq_{lex} abra \leq_{lex} abracadabra \leq_{lex} acadabra \leq_{lex} \cdots$$

L'inverse de la table des suffixes (c'est la permutation inverse)

$$ITS[i] = j \Leftrightarrow TS[j] = i$$

→ $ITS[i]$ le rang dans l'ordre lexicographique du suffixe $t[i..n-1]$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	10	3	7	4	8	1	5	9	0

Construction de la table des suffixes

- Construction naïve : trier les n suffixes du texte.
  Coût en $O(n^2 \log(n))$
  Le tri effectue $O(n \log(n))$ comparaisons et chaque comparaison a un coût en $O(n)$
- À partir de l'arbre des suffixes
  Coût en temps en $O(n)$
  1. construire l'arbre des suffixes : coût en $O(n)$
  2. parcours préfixé dans l'ordre lexicographique de l'arbre : coût en $O(n)$
- Construction directe

  Plusieurs algorithmes assez élaborés ont un coût en temps et en espace en $O(n)$

  - Kärkkäinen et Sanders (2003)
  - Ko et Aluru (2003)
  - Nong, Zhang, Chan (2009)

Ces méthodes directes sont un grand progrès !
(Auparavant, en pratique, méthodes de tri en $O(n \log n)$)

Regardons plus en détails l'algorithme de Kärkkäinen et Sanders

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Tri des suffixes basée sur une stratégie de type "diviser pour régner"

On partage les suffixes du texte en deux

- Ceux qui débutent aux positions multiples de 3 :

$$\mathrm{Suff}^0 = \{w[i..n-1] \,|\, i \mod 3 = 0\}$$

- Les autres :

$$\mathrm{Suff}^{12} = \{w[i..n-1] \,|\, i \mod 3 \neq 0\}$$

et l'on procède en trois étapes :

1. On construit la table TS^{12} résultant du tri de Suff^{12} en se ramenant à la construction de la table des suffixes d'un mot de longueur réduite au $2/3$ de la longueur initiale
2. On construit la table TS^0 résultant du tri de Suff^0 en utilisant la table TS^{12} construite à l'étape précédente
3. On fusionne les deux tables TS^0 et TS^{12} en utilisant à nouveau la table TS^{12}

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Un ingrédient important : tri par comptage (base du tri radix)

- Entrée : une liste de taille n d'éléments d'un ensemble Σ ordonné
- Sortie : la liste triée

Principe :

- Première passe : on compte effectifs des symboles de l'alphabet
- Deuxième passe : on affecte les éléments à leur bonne place

Si l'ensemble Σ est supposé de taille constante, le tri s'effectue en temps et espace « linéaire » $O(n)$.

```
def countsort(a, b, n, k) : # a est un tableau de n entiers de 1..k, b sera le tableau trié
    c = array("i", [0]*(k+1)) # tableau pour compter les effectifs
    for i in range(n) : # on compte les effectifs c[k] = nombre de symboles k dans a
        c[a[i]]+=1
    somme = 0           # on calcule les effectifs cumulés c[k] = nombre de symboles < k dans
    for i in range(k+1):
        freq, c[i] = c[i], somme
        somme += freq
    for i in range(n) : # on remet les choses à leur place
        b[c[a[i]]] = a[i]
        c[a[i]] += 1
```

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

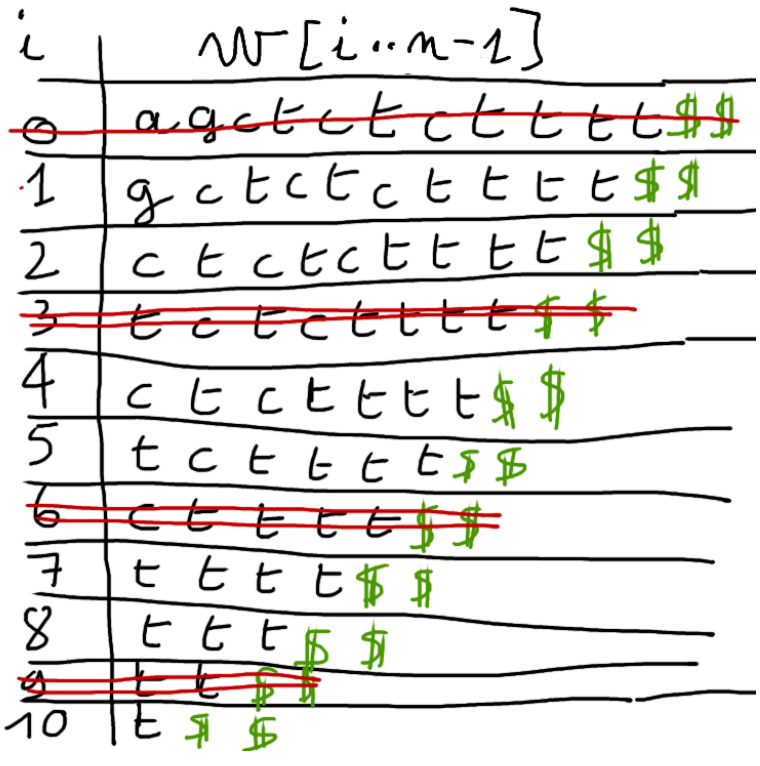
Étape 1. Construire la table TS^{12}

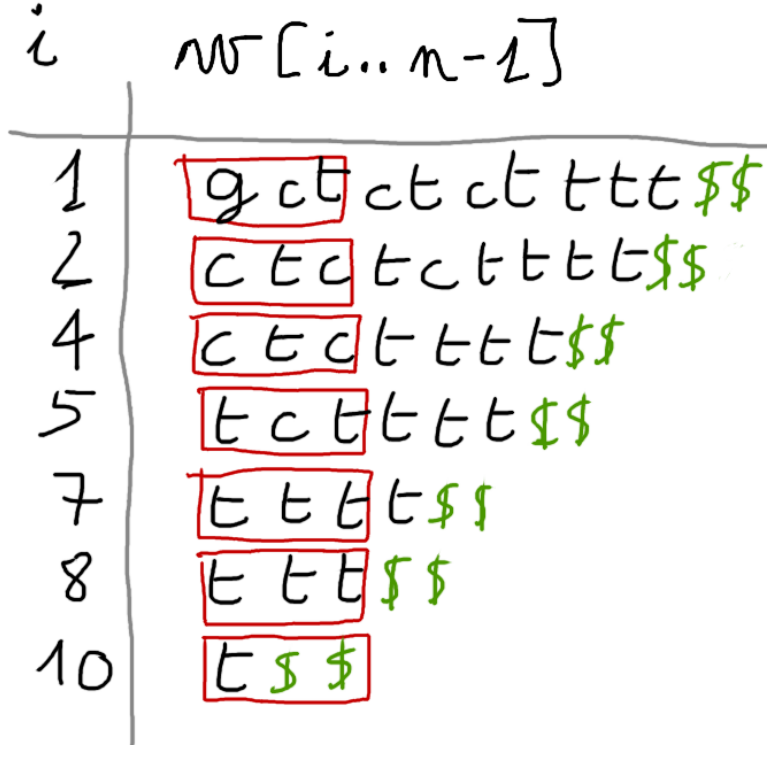
$w = agctctctttt \rightarrow w = agctctctttt\$\$$

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 1. Construire la table TS^{12}

On ne garde que les suffixes $w[i..n-1]$ avec $i \mod 3 \neq 0$

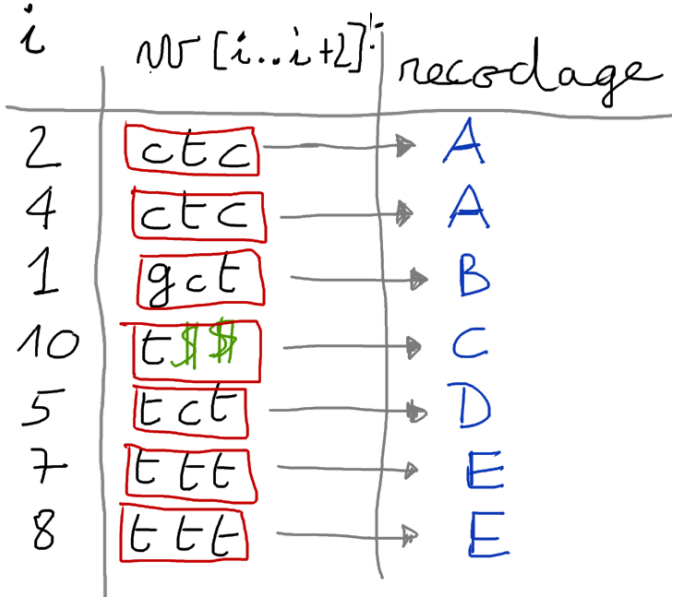




L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 1. Construire la table TS^{12}

on trie dans l'ordre lexicographique les facteurs de longueur 3 débutant aux positions $i \mod 3 \neq 0$ → tri radix (3 passes) qui s'effectue en temps linéaire.



Si les facteurs sont tous distincts, c'est terminé : on obtient directement la table TS^{12}

Dans le cas général, on recode chaque facteur de longueur 3 (par rapport à son rang dans l'ordre lexicographique)

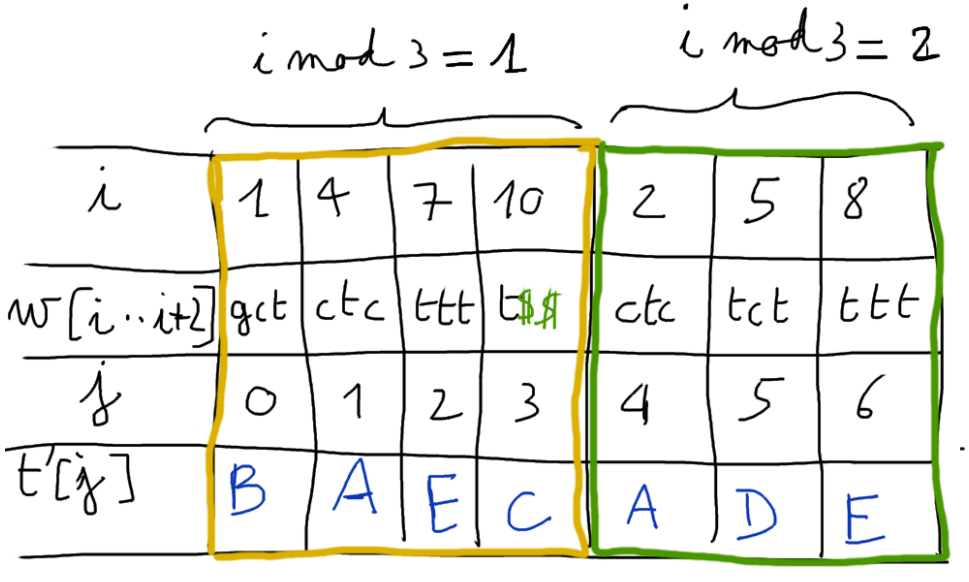
L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 1. Construire la table TS^{12}

À partir de ce renommage

$$ctc \to A, gct \to B, t\$\$ \to C, tct \to D, \$ttt \to E,$$

on construit un nouveau texte w', concaténation des rangs des facteurs en position $i \mod 3 = 1$ suivis des rangs des facteurs en position $i \mod 3 = 2$.

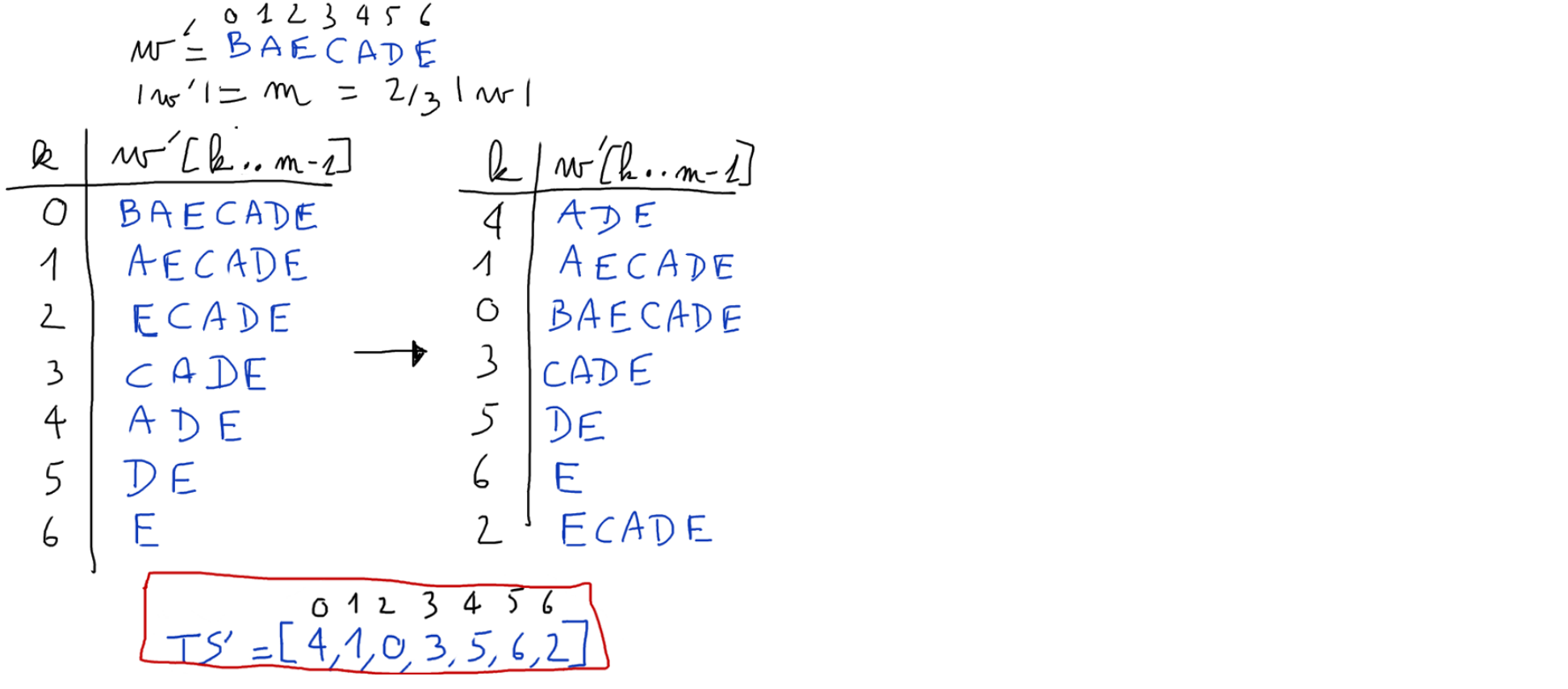


Ce texte $w' = BAECADE$ a une taille réduite au $2/3$ de la taille du texte initial.

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 1. Construire la table TS^{12}

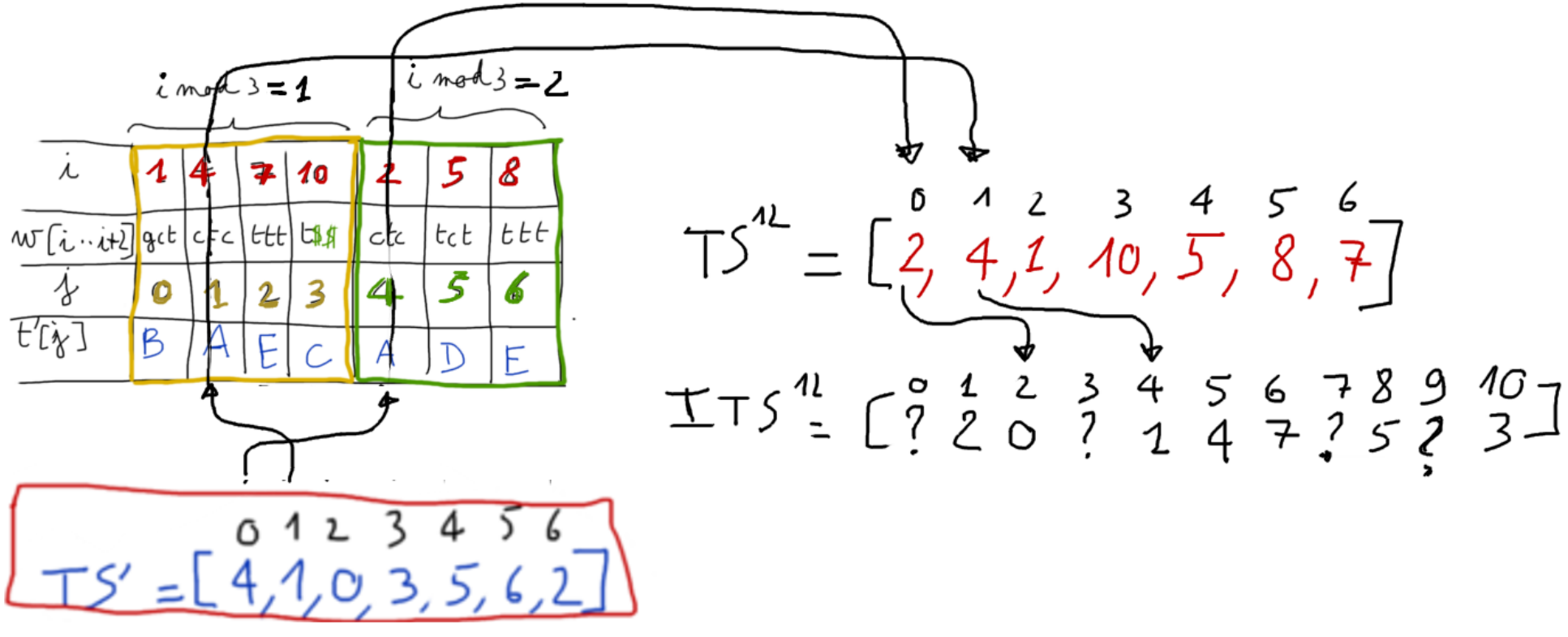
On construit la table des suffixes TS' de w' en appliquant de manière récursive l'algorithme sur w'.



L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 1. Construire la table TS^{12}

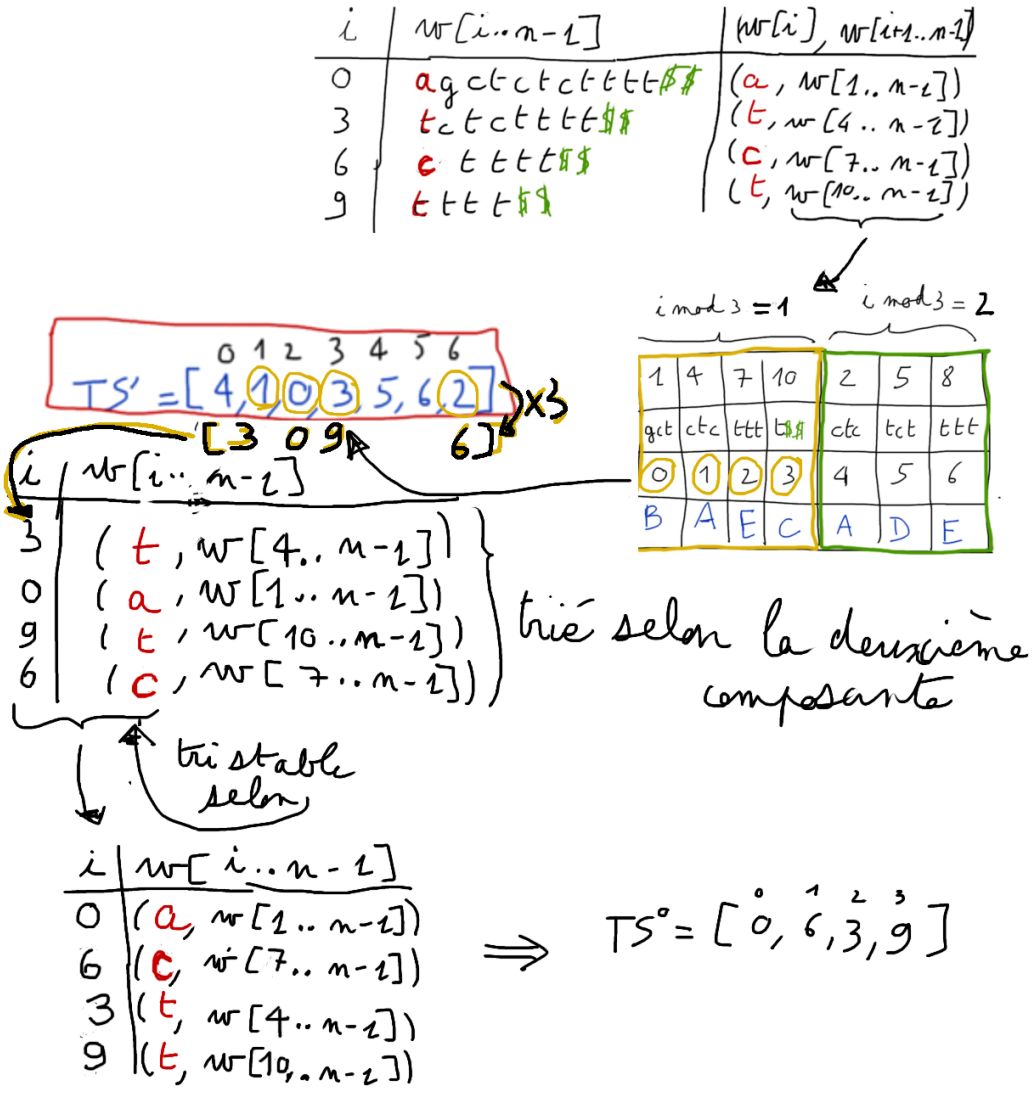
La table des suffixes de w' correspond à la table TS^{12} que l'on veut construire.



L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Étape 2. Construire la table TS^0

Il s'agit de trier les suffixes qui débutent aux positions multiples de 3



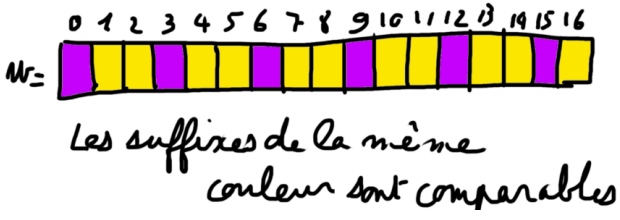
L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Etape 3. Fusion de TS^0 et TS^{12}

$w = agctctctttt$

$TS^0 = [0, 6, 3, 9]$ $\quad TS^{12} = [2, 4, 1, 10, 5, 8, 7]$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ITS^0[i]$	0			2			1			3	
$ITS^{12}[i]$		2	0		1	4		6	5		3



Les suffixes de la même couleur sont comparables

cas a)

$w[3i..n-1] < w[3j+1..n-1]$

$\Updownarrow$

$(w[3i], w[3i+1..n-1]) < (w[3j+1], w[3j+2..n-1])$

cas b)

$w[3i..n-1] < w[3j+2..n-1]$

$\Updownarrow$

$(w[3i], w[3i+1], w[3i+2..n-1]) < (w[3j+2], w[3j+3], w[3j+4..n-1])$

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Etape 3. Fusion de TS^0 et TS^{12}

$TS^0 = [0, 6, 3, 9]$ $\quad$ $TS^{12} = [2, 4, 1, 10, 5, 8, 7]$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ITS^0[i]$	0			2			1			3	
$ITS^{12}[i]$		2	0		1	4		6	5		3

Les suffixes de la même couleur sont comparables

cas a)

$w[3i..n-1] < w[3j+1..n-1]$

$\Updownarrow$

$(w[3i], w[3i+1..n-1]) < (w[3j+1], w[3j+2..n-1])$

cas b)

$w[3i..n-1] < w[3j+2..n-1]$

$\Updownarrow$

$(w[3i], w[3i+1], w[3i+2..n-1]) < (w[3j+2], w[3j+3], w[3j+4..n-1])$

- $w[0..10]$ et $w[2..10]$ $\Rightarrow$ cas b) $\quad$ ag.0 < ct.1 → 0
- $w[6..10]$ et $w[2..10]$ $\Rightarrow$ cas b) $\quad$ ct.5 > ct.1 → 2
- $w[6..10]$ et $w[4..10]$ $\Rightarrow$ cas a) $\quad$ c.6 > c.4 → 4
- $w[6..10]$ et $w[1..10]$ $\Rightarrow$ cas a) $\quad$ c.6 < g.0 → 6
- $w[3..10]$ et $w[1..10]$ $\Rightarrow$ cas a) $\quad$ t.1 > g.0 → 1
- $w[3..10]$ et $w[10..10]$ $\Rightarrow$ cas a) $\quad$ t.1 > t.$ → 10
- $w[3..10]$ et $w[5..10]$ $\Rightarrow$ cas b) $\quad$ tc.4 < tc.6 → 4
- $w[9..10]$ et $w[5..10]$ $\Rightarrow$ cas b) $\quad$ tt.$ > tc.6 → 5
- $w[9..10]$ et $w[8..10]$ $\Rightarrow$ cas b) $\quad$ tt.$ < tt.3 → 9

+ reste la liste 8, 7

$TS = [0, 2, 4, 6, 1, 10, 3, 5, 9]$

L'algorithme dissymétrique de Kärkkäinen et Sanders

Complexité

Évaluons $T(n)$ la complexité en temps de l'algorithme pour un texte de longueur n.
Les opérations réalisées et leur coût :

- Tri des suffixes pour les positions non multiples de 3
  - Extraire les facteurs $texte[i..i+2]$ avec $i \mod 3 \neq 0$ en $O(n)$
  - Tri des facteurs (un tri radix à 3 passes) en $O(n)$
  - Renommage des facteurs en {O(n)}
  - Construction de w' en {O(n)}
  - Appel récursif sur w' de longueur $2n/3$ en {T(2n/3)}
- Tri des suffixes pour les positions multiples de 3 + une passe d'un tri radix en {O(n)}
- Fusion des deux tables en $O(n)$

La complexité est ainsi déterminée par l'équation de récurrence (de type diviser pour régner)

$$T(n) = O(n) + T(2n/3)$$

Conclusion

l'algorithme a une complexité en $O(n)$

Table des suffixes versus Arbre des suffixes

Dans les applications mettant en jeu des textes de grande taille, la table de suffixes supplante l'arbre des suffixes :

- elle est plus économe en mémoire
- elle offre une meilleure localité spatiale qui diminue les erreurs de cache et le coût dû aux accès à la mémoire

Mais la table des suffixes seule ne permet pas de retrouver toute la structure de l'arbre des suffixes. La table des suffixes est ainsi souvent combinée avec des structures additionnelles (la table HTR, l'arbre d'intervalles de HTR...).

La table et ses structures auxiliaires restent économes en mémoire et permettent de définir l'équivalent d'un arbre des suffixes.

Une structure auxiliaire : la table HTR

Les préfixes communs à deux suffixes consécutifs

La table HTR stocke les longueurs des préfixes communs aux éléments consécutifs dans la table des suffixes

On dénote par $\mathrm{lcp}(s,t)$ le **plus long préfixe commun** aux mots s et t

$$\mathrm{lcp}(\text{vélocypède}, \text{vélocité}) = \text{véloc}$$

$HTR[i]$ est la longueur du plus long préfixe commun aux deux suffixes consécutifs (pour l'ordre lexicographique) indexés dans la table TS par $i-1$ et i.

$$HTR[i] = |\mathrm{lcp}(t[TS[i-1]..], t[TS[i]..])|$$

La construction s'effectue en temps linéaire.

Une structure auxiliaire : la table HTR

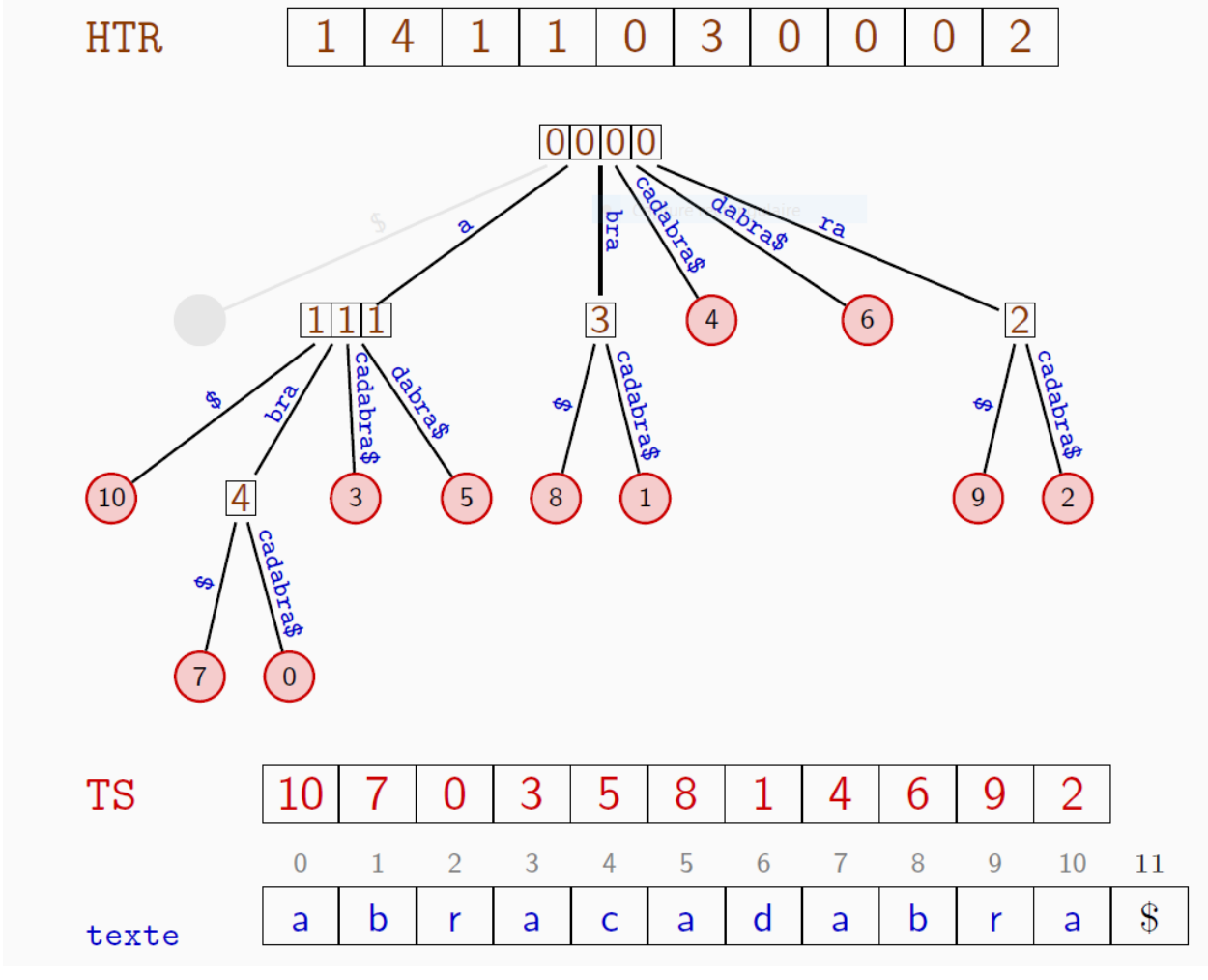
Exemple

La table HTR du texte $abracadabra$

i	$t[TS[i]..n-1]$	$\text{lcp}(t[TS[i]..n-1], t[TS[i]..n-1])$	$HTR[i]$
0	a		$-$
1	$abra$	a	1
2	$abracadabra$	$abra$	4
3	$acadabra$	a	1
4	$adabra$	a	1
5	bra	ε	0
6	$bracadabra$	bra	3
7	$cadabra$	ε	0
8	$dabra$	ε	0
9	ra	ε	0
10	$racadabra$	ra	2

Une structure auxiliaire : la table HTR

Les profondeurs des nœuds internes dans l'arbre des suffixes



Une structure auxiliaire : la table HTR

Propriété La longueur du prefixe commun des suffixes de la plage $i < j$ est

$$\text{lcp}(texte[TS[i]..n-1], texte[TS[j]..n-1]) = \min_{i < k \leq j}(HTR[k])$$

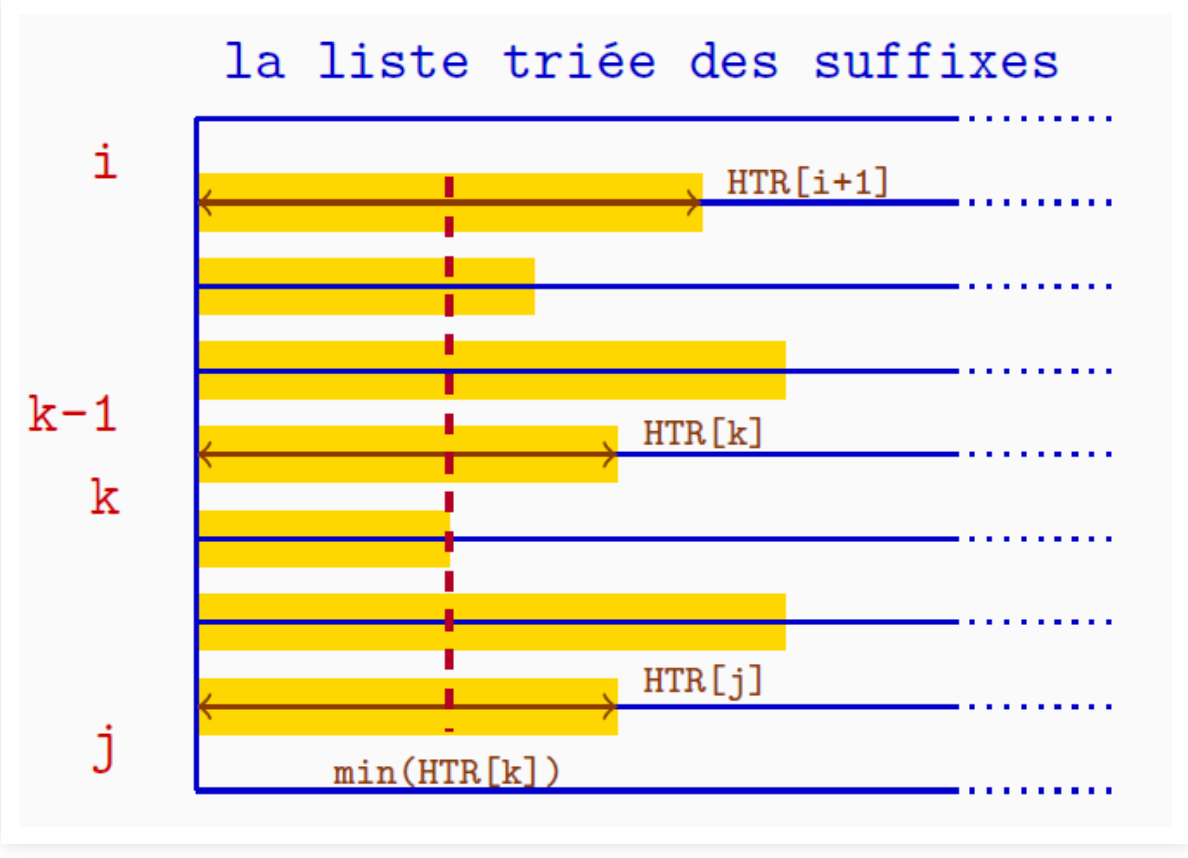


Table des suffixes : applications

Les utilisations de la table des suffixes sont multiples (et les mêmes que pour l'arbre des suffixes) :

- Recherche de motifs
- Détection des répétitions
- Recherche du plus long facteur commun à plusieurs chaînes
- Statistiques sur le texte
- Compression de texte

Examinons quelques cas concrets

Table des suffixes : applications

Détecter les répétitions d'un texte

On veut détecter le ou les plus longs facteurs répétés dans un texte.

Un facteur qui est répété, est préfixe commun de suffixes distincts. Et ces suffixes sont consécutifs dans la table des suffixes.
Les facteurs répétés les plus longs sont ainsi caractérisés par la valeur maximale de la table HTR.

0					5					10					15					20					25		
C	A	G	A	C	G	G	A	A	G	A	G	T	G	A	A	C	G	A	C	C	C	G	A	C	G	T

14	7	18	15	3	23	1	8	10	0	19	20	16	21	4	24	13	6	17	2	22	9	5	25	11	26	12
	2	1	2	3	3	1	3	2	0	1	2	1	4	2	2	0	3	2	3	4	2	1	1	2	0	1

Les plus longs facteurs répétés sont de longueur 4, valeur maximale de HTR.
Il y en a 2 (autant que le nombre de plages de valeur 4 dans HTR) qui sont :

- $CGAC$ figurant aux positions 16 et 21
- $GACG$ figurant aux positions 2 et 22

Table des suffixes : applications

Détecter les répétitions d'un texte

Généralisation :

détecter le ou les plus longs facteurs qui apparaissent au moins k fois dans un texte.

Ceci revient à trouver k suffixes consécutifs dans la table dont le préfixe commun est de longueur maximale.
Pour $k = 3$ occurrences, on calcule le minimum des plages de longueur $k - 1 = 2$ de la table HTR.

0				5					10					15					20					25	
C	A	G	A	C	G	G	A	A	G	A	G	T	G	A	A	C	G	A	C	C	C	G	A	C	G	T
14	7	18	15	3	23	1	8	10	0	19	20	16	21	4	24	13	6	17	2	22	9	5	25	11	26	12
	2	1	2	3	3	1	3	2	0	1	2	1	4	2	2	0	3	2	3	4	2	1	1	2	0	1
		1	1	2	3	1	1	2	0	0	0	1	1	2	2	0	0	2	2	3	2	1	1	1	0	0

2 facteurs de longueur 3 au moins trois fois:

- ACG figurant aux positions 15, 3 et 23
- GAC figurant aux positions 17, 2 et 22

Table des suffixes : applications

Le plus long facteur commun à plusieurs chaînes

on concatène les chaînes

$$bcabbcab, caabba, cbcabb$$

en les séparant avec des marqueurs distincts des autres caractères.

$$bcabbcab\S caabba*cbcabb$$

Les marqueurs garantissent alors que les préfixes communs à deux suffixes se calculent sur les fragments de la première chaîne qu'ils contiennent

	TS	HTR
§caabba*cbcabb	8	0
*cbcabb	15	0
a*cbcabb	14	0
aabba*cbcabb	10	1
ab§caabba*cbcabb	6	1
abb	19	2
abba*cbcabb	11	3
abbcab§caabba*cbcabb	2	3
b	21	0
b§caabba*cbcabb	7	1
ba*cbcabb	13	1
bb	20	1
bba*cbcabb	12	2
bbcab§caabba*cbcabb	3	2
bcab§caabba*cbcabb	4	1
bcabb	17	4
bcabbcab§caabba*cbcabb	0	5
caabba*cbcabb	9	0
cab§caabba*cbcabb	5	2
cabb	18	3
cabbcab§caabba*cbcabb	1	4
cbcabb	16	1

Table des suffixes : applications

Le nombre de facteurs distincts d'un texte

Un texte de longueur n comprend $n(n+1)/2$ facteurs non vides

$ababbb$ possède $21 = \frac{6\times 7}{2}$ facteurs :
$a, b, a, b, b, b, ab, ba, ab, bb, bb, aba, bab, abb, bbb, abab, babb, abbb, ababb, babbb, ababbb$
avec a, ab, bb répétés une fois et b répétés trois fois.

	0					5
texte	a	b	a	b	b	b
TS	0	2	5	1	4	3
HTR	0	2	0	1	1	2

- $HTR[1] = 2$: le préfixe ab est répété $\Rightarrow$ les facteurs ab et a sont répétés;
- $HTR[3] = 1$: b est répété
- $HTR[4] = 1$: b est répété;
- $HTR[5] = 2$: le préfixe bb est répété $\Rightarrow$ les facteurs bb et b sont répétés.

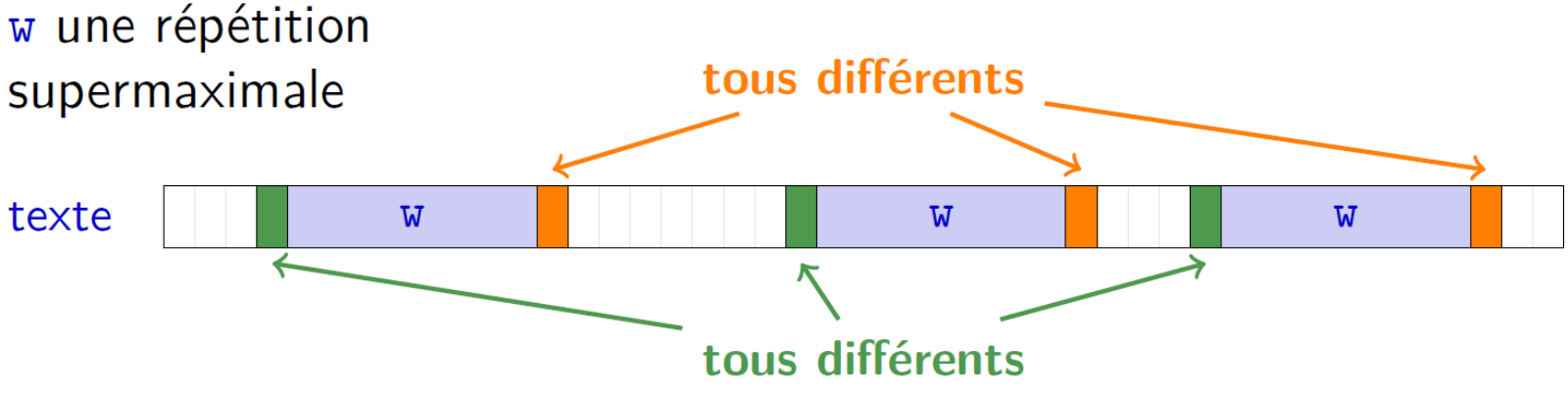
Le nombre de facteurs distincts est $21 - 2 - 1 - 1 - 2 = 15$

De façon générale, le nombre de répétitions est $\sum_i HTR[i]$ et le nombre de facteurs distincts est $n(n+1)/2 - \sum_i HTR[i]$

Table des suffixes : applications

Détection des répétitions supermaximales

Une répétition supermaximale d'un texte est un facteur répété qui n'est facteur propre d'aucune autre répétition



Utiliser une table de suffixes !

La stratégie :

- Dans un premier temps, déterminer les facteurs répétés qui ne sont préfixes propres d'aucune autre répétition
- Puis, filtrer ceux qui également ne sont suffixes propres d'aucune autre répétition

Table des suffixes : applications

Détection des répétitions supermaximales

sur un exemple : GATAAGATTGATG

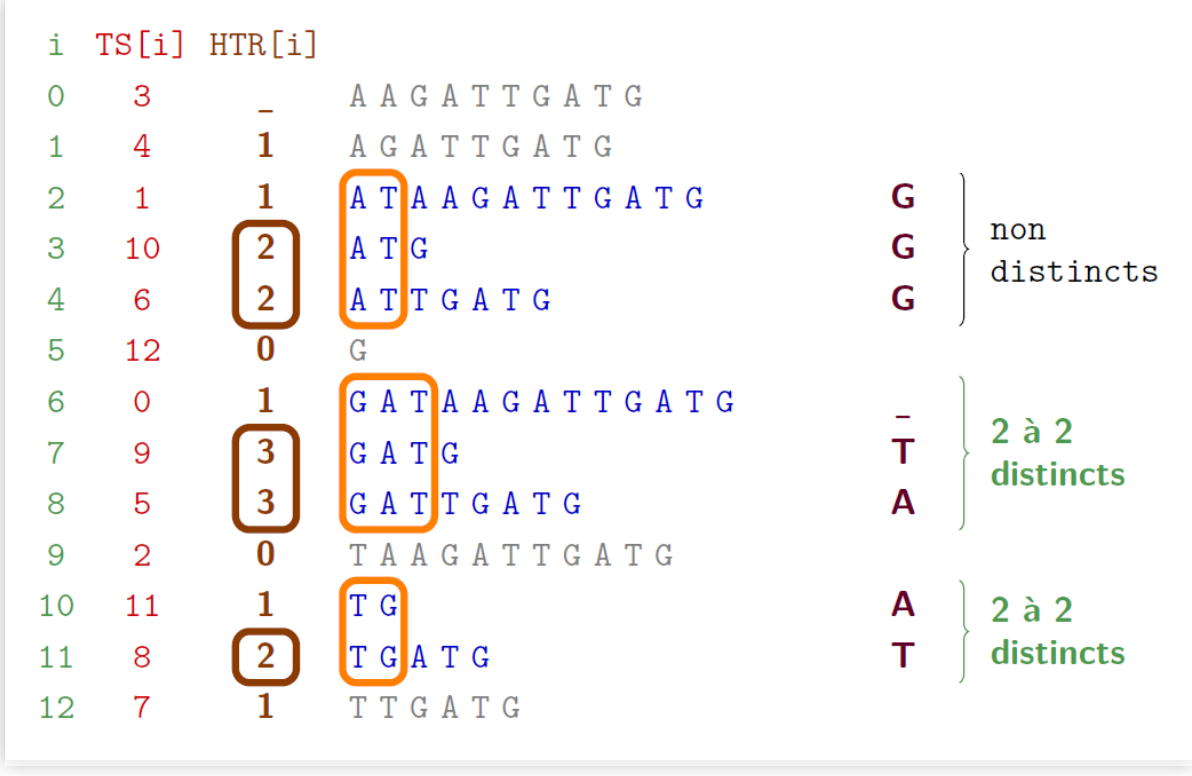


Table des suffixes : applications

Recherche de mot dans un texte

```
Entrée :
    le texte : texte, sa longueur : n, sa table des suffixes : TS
    le mot cherché : mot
Sortie :
    la liste des positions de toutes les occurrences de mot dans texte

    # déterminer l'intervalle de la table indexant les suffixes qui ont mot comme préfixe

    # trouver deb la borne inférieure de l'intervalle
    ga = 0
    dr = n
    tant que ga < dr :
        mil = (ga+dr) // 2
        si mot > texte[TS[mil]:] :
            ga = mil + 1
        sinon :
            dr = mil
    deb = ga

    # trouver fin la borne supérieure de l'intervalle
    dr = n
    tant que ga < dr :
        mil = (ga+dr)//2
        si mot == texte[TS[mil]:][:len(mot)] : # mot est préfixe du suffixe texte[TS[mil]:]
            ga = mil + 1
        sinon : # mot < texte[TS[mil]:][:len(mot)]
            dr = mil
    fin = dr

    retourner  TS[deb:fin]
```

- recherche dichotomique de u dans un texte t : $O(|u| \times \log(|t|))$
- Utilisation judicieuse de HTR et structure pour stocker les longueurs de préfixes de commun : $O(|u| \times \log(|t|))$

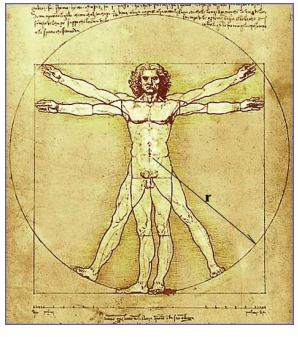
Auto-indexation

Transformée de Burrows-Wheeler & et FM index

Auto-indexation

Introduction

Un facteur critique : l'espace



- Les implantations pour les tables de suffixes occupent au mieux un espace de $n \log(n)$ bits pour un texte de taille n.
- On a en plus besoin du texte.
  Et les données peuvent être grandes !

- Le génome humain : 3400 Mega paires de nucléotides
  → $3400 \times 10^6 \times \log(3400 \times 10^6)$ bits : $13,4$ Go
- La fleur **Paris japonica** 150 Giga paires de nucléotides
  → $150 \times 10^9 \times \log(150 \times 10^9)$ bits : 3 To

Idée : Sacrifier un peu d'efficacité au profit d'un gain d'espace, en utilisant une structure qui contient à la fois le texte et l'index.

→ FM index (Ferragina & Manzini) : Structure basée sur la transformée de **Burrows-Wheeler** (1994)

La transformée de Burrows-Wheeler

Description simple

Étant donné un texte t

- Ajouter à la fin de t un marqueur $\$$ considéré comme inférieur à toute autre lettre.
- Engendrer l'ensemble des $|t| + 1$ rotations (i.e., les permutations circulaires) de $t\$$.
- Trier l'ensemble de ces rotations selon l'ordre lexicographique.
- Retourner la séquence formée du dernier caractère de chaque mot de l'ensemble trié.

La transformée de Burrows-Wheeler

le texte *abracadabra*

Les rotations de *abracadabra$*

i	*texte*[*i*:]*texte*[:*i*]
0	*abracadabra$*
1	*bracadabra$a*
2	*racadabra$ab*
3	*acadabra$abr*
4	*cadabra$abra*
5	*adabra$abrac*
6	*dabra$abraca*
7	*abra$abracad*
8	*bra$abracada*
9	*ra$abracadab*
10	*a$abracadabr*
11	*$abracadabra*

Les rotations triées de *abracadabra$*

$abracadabra
a$abracadabr
abra$abracad
abracadabra$
acadabra$abr
adabra$abrac
bra$abracada
bracadabra$a
cadabra$abra
dabra$abraca
ra$abracadab
racadabra$ab

La séquence obtenue `ard$rcaaaabb`

La transformée de Burrows-Wheeler

Notations

Les rotations triées

$abracadabra
a$abracadabr
abra$abracad
abracadabra$
acadabra$abr
adabra$abrac
bra$abracada
bracadabra$a
cadabra$abra
dabra$abraca
ra$abracadab
racadabra$ab

- F (comme First) la première colonne de la matrice des rotations triées
- L (comme Last) la dernière colonne de la matrice des rotations triées, i.e., le résultat de la transformée

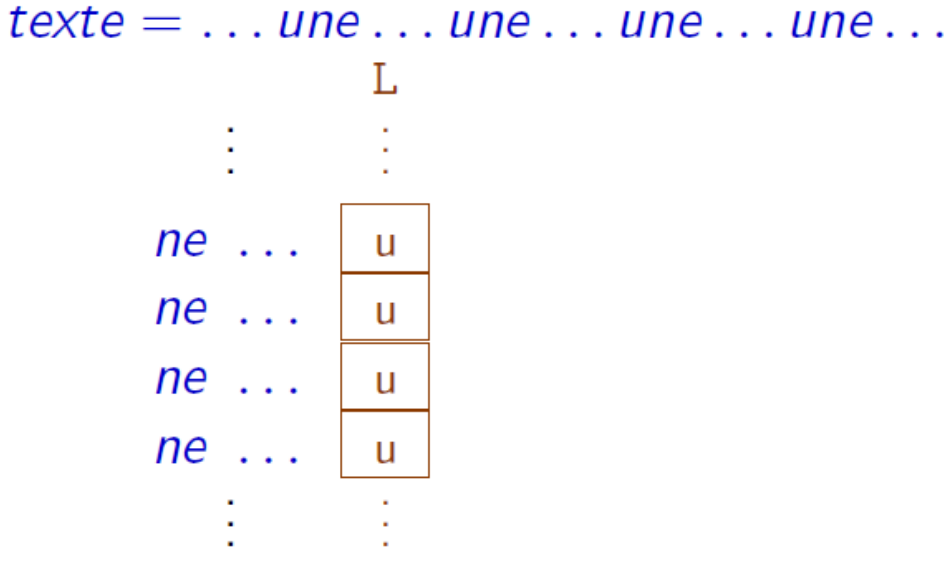
$F = \$aaaaabbcdrr, L = ard\$rcaaaabb$

Remarque : trier les rotations ou trier les suffixes, c'est pareil !

La transformée de Burrows-Wheeler

Une caractéristique exploitée pour la compression de données

Les occurrences d'un même caractère dont les contextes droits sont « proches » sont regroupées



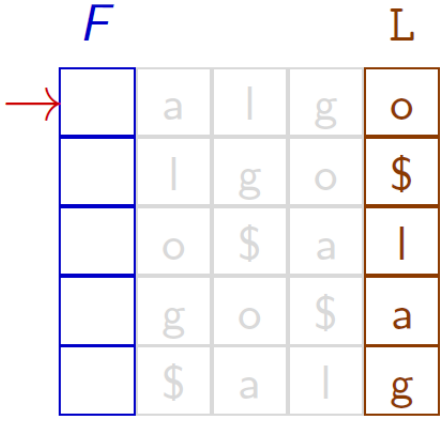
Cette transformée permet d'expliciter les redondances du texte et favorise ainsi une bonne compression.

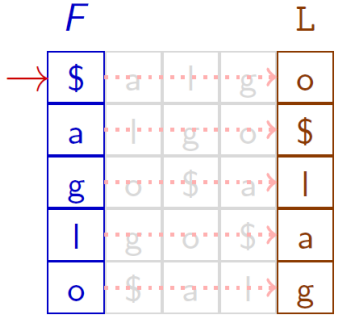
La transformée de Burrows-Wheeler est l'étape préliminaire utilisée dans l'algorithme de compression **bzip2**

La transformée de Burrows-Wheeler

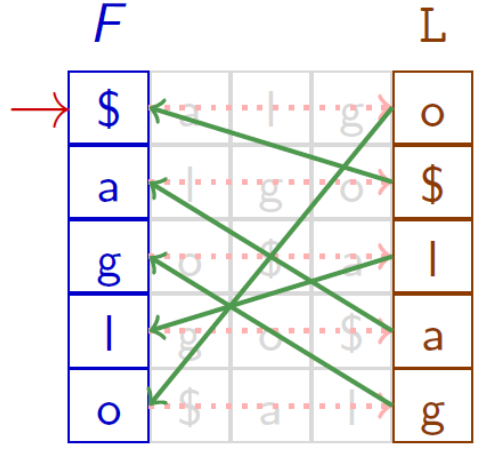
La transformée inverse

Après application de la transformée de Burrows-Wheeler, la séquence obtenue est o$lag.
Quel est le texte initial ?





$ suit *o*
a suit $
g suit *l*
l suit *a*
o suit *g*



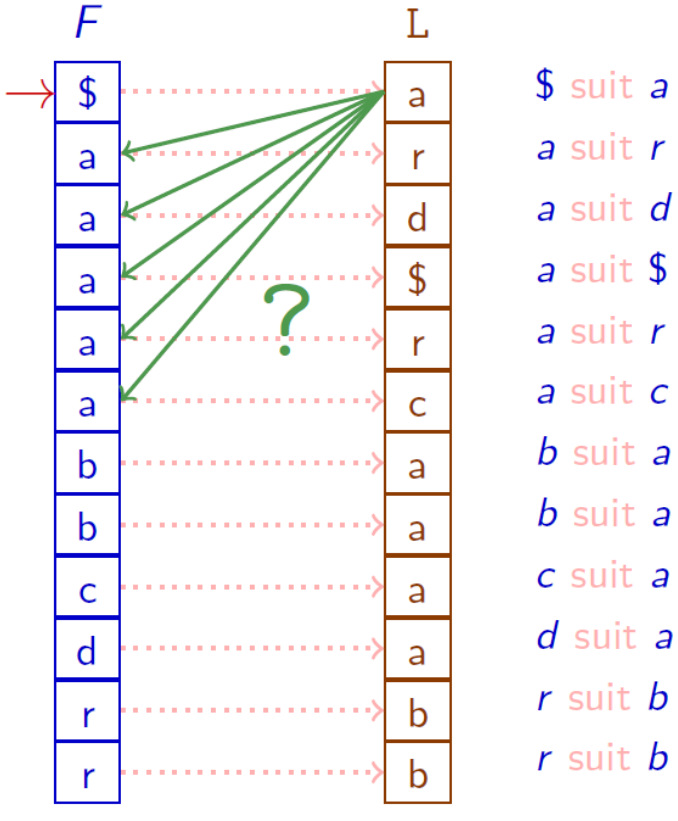
- On retrouve la première colonne F = la dernière colonne L triée
- On reconstruit le texte à partir des deux colonnes F et L :

$$\$ \leftarrow o \leftarrow g \leftarrow l \leftarrow a \leftarrow \$$$

Le cas est simple, tous les caractères du texte $algo$ étant distincts

La transformée de Burrows-Wheeler

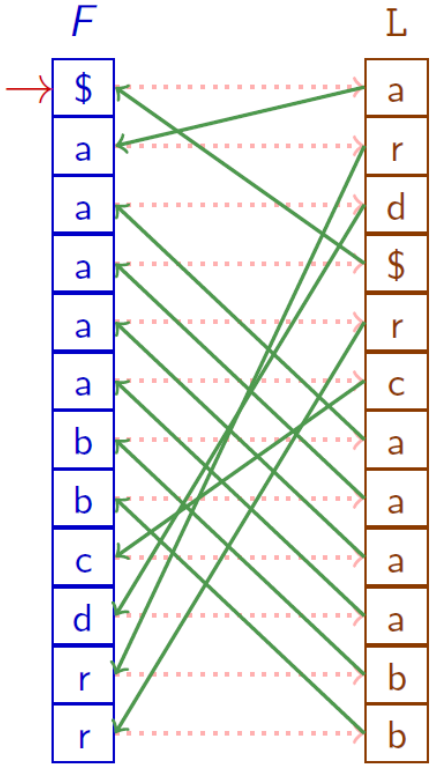
La transformée inverse



Les occurrences d'un même caractère ont le même ordre dans F et dans L

La transformée de Burrows-Wheeler

La transformée inverse



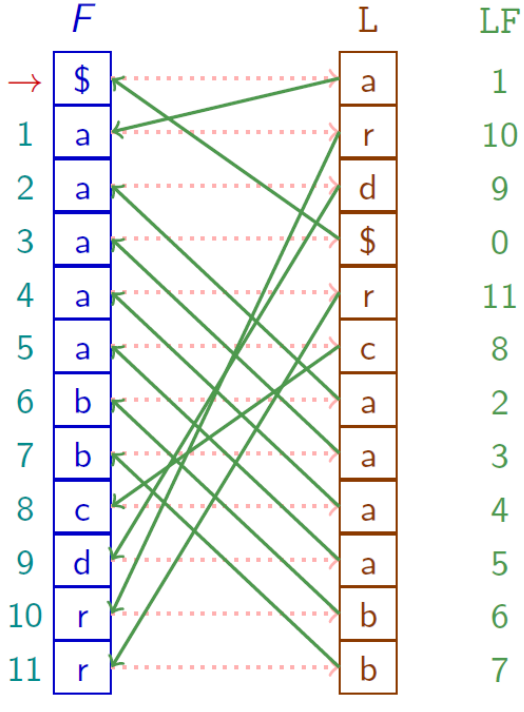
	a1	*b1*	*r1*	*a2*	*c1*	*a3*	*d1*	*a4*	*b2*	*r2*	*a5*	$
$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	
a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	
a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	
a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	
a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	
a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	
b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	
b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	
c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	
d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	
r2	a5	$	a1	b1	r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	
r1	a2	c1	a3	d1	a4	b2	r2	a5	$	a1	b1	

Quel que soit caractère c, la i-ème occurrence de c dans L et la i-ème occurrence de c dans~ F correspondent au même c du texteLes occurrences d'un même caractère ont le même ordre dans F et dans L

La transformée de Burrows-Wheeler

La transformée inverse

En pratique, pour calculer la transformée inverse, on détermine la fonction LF (**Last to First**) qui associe à chaque position i de la dernière colonne L, la position du caractère $L[i]$ dans la première colonne F (le nombre d'occurrences pris en compte).



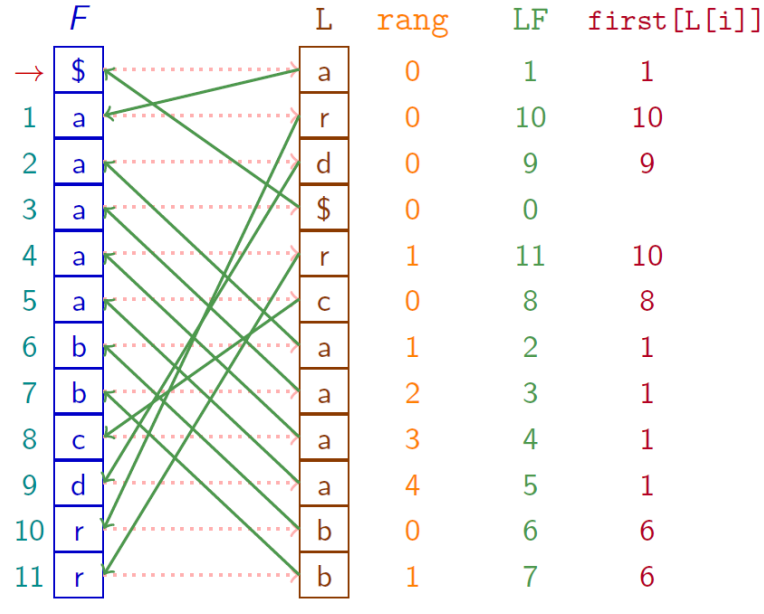
$$0 \xrightarrow{LF} 1 \xrightarrow{LF} 10 \xrightarrow{LF} 6 \xrightarrow{LF} 2 \xrightarrow{LF} 9 \xrightarrow{LF} 4 \xrightarrow{LF} 5 \xrightarrow{LF} 8 \xrightarrow{LF} 11 \xrightarrow{LF} 7 \xrightarrow{LF} 3$$
$$a \quad r \quad b \quad a \quad d \quad a \quad c \quad a \quad r \quad b \quad a \quad \$$$

La transformée de Burrows-Wheeler

La transformée inverse

Calculer efficacement LF « à la volée »

car	first[car]
a	1
b	6
c	8
d	9
r	10



On définit

- $\text{first}[c]$ la position de la première occurrence du caractère c dans F
- $\text{rang}[i]$ le nombre d'occurrences du caractère $L[i]$ sur les positions $< i$

On a alors $LF[i] = \text{first}[L[i]] + \text{rang}[i]$

La transformée de Burrows-Wheeler

Recherche

La recherche est guidée par la fonction LF en lisant le motif à rebours (de droite à gauche, comme Frédéric Paccaut)

(À voir en séance d'exercice)

FM Index (basé sur BWT)

On parle d'auto-index, car l'index contient le texte ($\neq$ arbre des suffixes)

On veut les positions : il faut retrouver l'ordre, i.e., la table TS → On échantillonne et on recalcule avec LF en cas d'erreur de cache

On utilise des vecteurs de bits (librairies) pour calculer rapidement rang et LF (en $O(1)$ pour un alphabet de taille $o(\mathrm{polylog}(n))$

On utilise les primitives suivantes sur un tableau de bits B

- accès à $B[i]$
- $\mathrm{rank}_b(B, i)$ (nbre de bits b aux positions $< i$)
- $\mathrm{select}_b(B, j)$ (position de la j-ième occurrence de b

WIKIPÉDIA
L'encyclopédie libre

Accueil
Portails thématiques
Article au hasard
Contact

Contribuer
Débuter sur Wikipédia
Aide
Communauté
Modifications récentes
Faire un don

Outils
Pages liées
Suivi des pages liées
Importer un fichier
Pages spéciales
Adresse permanente
Information sur la page
Élément Wikidata
Citer cette page

Imprimer / exporter
Créer un livre
Télécharger comme PDF
Version imprimable

Dans d'autres langues
English
Modifier les liens

FM-index

En informatique, un **FM-index** est une compression sans perte basée sur la Transformée de Burrows-Wheeler, avec quelques similitudes avec le Tableau des suffixes. Cette méthode de compression a été créée par Paolo Ferragina et Giovanni Manzini[1], qui la décrivent comme étant un algorithme pluri-usages basé sur une structure de donnée astucieuse. Le nom signifie "indexation intégrale de texte dans l'espace Minute"[2].

Cet algorithme peut, en plus de la compression, être utilisé pour trouver de façon efficace le nombre d'occurrences d'un motif dans le texte compressé, ainsi que pour localiser la position de chaque occurrence du motif dans le texte compressé. Aussi bien le temps et que l'espace de stockage requis ont une complexité sublinéaire par rapport à la taille des données d'entrée. C'est-à-dire que le temps d'exécution et l'espace de stockage requis ne sont pas proportionnels à la taille des données d'entrée.

Les auteurs ont mis au point des améliorations à leur approche première et ont nommé cette nouvelle méthode de compression « FM-Index version 2 »[3]. Une autre amélioration, le FM "respectueux de l'alphabet", combine l'utilisation de la stimulation de compression et les ondelettes [4] pour réduire considérablement l'utilisation de l'espace pour grands alphabets.

Le FM-index a été utilisé entre autres en, bioinformatique[5].

Sommaire [masquer]

Sur le fond [modifier | modifier le code]

Utiliser un index est une stratégie commune pour rechercher efficacement dans un vaste corpus de texte. Lorsque le texte est plus grand que ce que peut contenir la mémoire principale de l'ordinateur, il est nécessaire de compresser non seulement le texte, mais aussi l'index. Lorsque le FM-index a été introduit, il y avait déjà plusieurs solutions qui étaient suggérées pour atteindre ce double but. Elles reposaient sur des méthodes de compression traditionnelles qui essayaient aussi de résoudre le problème de compression d'index. En revanche, FM-index utilise un index compressé de façon native, ce qui signifie qu'il est simultanément capable de compresser les données et d'indexer.

Structures FM-index [modifier | modifier le code]

Un FM-index est créé en prenant d'abord la Transformée de Burrows-Wheeler (BWT) du texte d'entrée. Par exemple, le TNN * de la chaîne T = « abracadabra » est « ard$ rcaaaabb », et ici il est représenté par la matrice M où chaque ligne est une rotation du texte, et les lignes ont été triées lexicographiquement. La transformation correspond à la dernière colonne intitulée L.

I	F		L
1	$	abracadabr	un
2	un	$abracadab	r
3	un	soutien-gorge$ abraca	d
4	un	bracadabra	$
5	un	ab$ Cadabra	r
6	un	Dabra$ abra	c
7	b	RA$ abracad	un
8	b	racadabra$	un

Suivi des pages liées
Importer un fichier
Pages spéciales
Adresse permanente
Information sur la page
Élément Wikidata
Citer cette page

mprimer / exporter
Créer un livre
Télécharger comme PDF
Version imprimable

ans d'autres angues
English
Modifier les liens

Sur le fond [modifier | modifier le code]

Utiliser un index est une stratégie commune pour rechercher efficacement dans un non seulement le texte, mais aussi l'index. Lorsque le FM-index a été introduit, il y a essayaient aussi de résoudre le problème de compression d'index. En revanche, FM

Structures FM-index [modifier | modifier le code]

Un FM-index est créé en prenant d'abord la Transformée de Burrows-Wheeler (BWT) ligne est une rotation du texte, et les lignes ont été triées lexicographiquement. La t

I	F		L
1	$	abracadabr	un
2	un	$abracadab	r
3	un	soutien-gorge$ abraca	d
4	un	bracadabra	$
5	un	ab$ Cadabra	r
6	un	Dabra$ abra	c