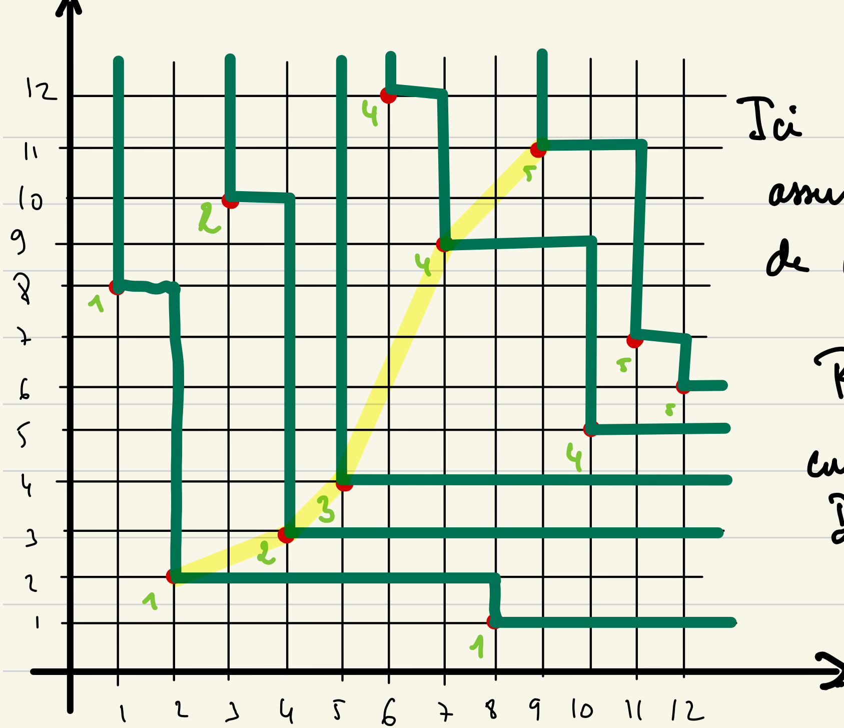
Cours ALEA 2021

N. ENRIQUEZ

I Problème de la + longue sous suite $\nearrow$ d'une permutation aléatoire

<u>Définition:</u> Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, une sous-suite $\nearrow$ de σ, c'est une suite d'entiers $i_1, \dots, i_k$ tq $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$

<u>Théorème:</u> (Erdös-Szekeres) (1935) Pour toute permutation de $\{1, \dots, n\}$ il existe une sous-suite monotone de cardinal $\geq \sqrt{n}$



Ici $n = 12$, on a 5 lignes, ce qui assure de pouvoir construire une sous-suite $\nearrow$ de cardinal 5.

Preuve: Soit L_n le nombre de lignes construites.

De deux choses l'une

① Soit $L_n \geq \sqrt{n}$ et on a une sous suite croissante de cardinal $\geq \sqrt{n}$.

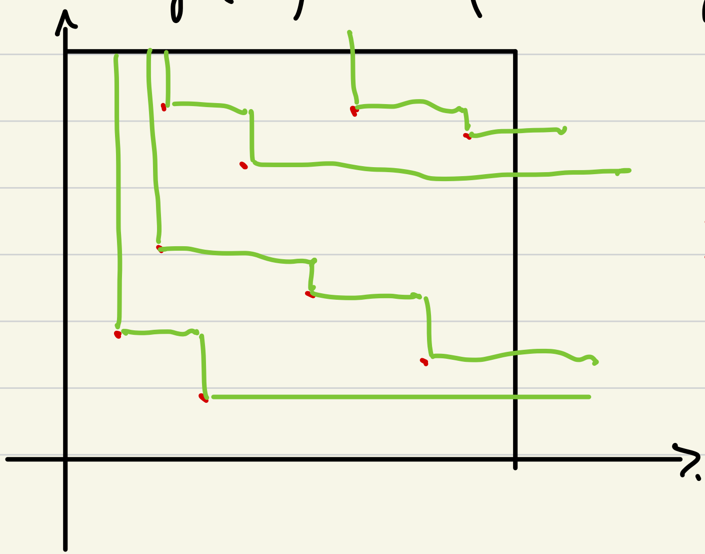
② Soit $L_n \leq \sqrt{n}$, et alors l'une des lignes contiendra un nombre de pts $\geq \sqrt{n}$, et on aura une sous-suite décroissante de cardinal $\geq \sqrt{n}$.

Remarque: le nombre de lignes (de Hammersley) correspond au cardinal MAXIMAL d'une sous suite $\nearrow$ de σ.

Question historique : (Ulam) Etant donnée une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, tirée uniformément dans S_n, quelle est l'asymptotique du cardinal maximal d'une sous-suite croissante de σ ?

Réponse attendue : $\sim C\sqrt{n}$

Hammersley (74) : "A few seedlings of research"



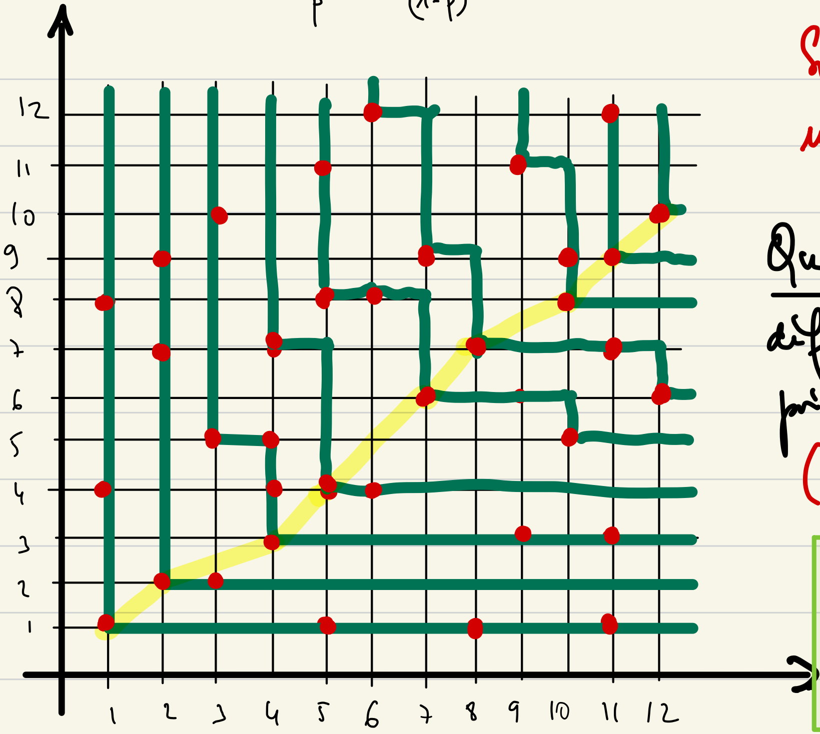
$\sim C\sqrt{n}$.

$\frac{\pi}{2} \lesssim C \lesssim e$

$\boxed{C = 2}$

$\xleftarrow{\text{Th (79)}}$ Logan . Shepp . / Kerov - Vershik .

$p^{|4|+|6|}(1-p)^{|3|+|5|}$



Soit $p \in (0,1)$, on place sur $\mathbb{N}^2$ un point en chaque sommet avec proba p.

<u>Question:</u> Asymptotique du nombre $L_{n,p}$ défini comme le nombre maximal de points qu'un <u>chemin strict NE</u> peut attraper. (N et E ont interdits).

$n = 12$, $p \in (0,1)$

$\#$ pts $\bullet$ $= p n^2$ $\qquad L_{n,p} = 9$

$$\boxed{\text{Réponse: } \lim_{n \to +\infty} \frac{L_{n,p}}{\sqrt{p} \times n} = f(p).}$$

$f(p)$ explicite tq $f(p) \xrightarrow[p \to 0]{} 2$

Bingo !

Argument pour montrer que $\frac{L_n^{(p)}}{n}$ tend vers une constante : théorème sous-additif de Kingman.

Th : (Kingman) Soit $(X_{m,n})_{0\leq m<n}$ une famille de v.a. tq :

① $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ pour tout $m<n$.

② $\forall k \geq 1$, la suite $\left(X_{nk,(n+1)k}\right)_{n\geq 0}$ est suite de v.a iid.

③ $\forall m \geq 1$ les suites $(X_{0,k})_{k\geq 1}$ et $(X_{m,m+k})_{k\geq 1}$ ont m̂ loi.

④ $E[|X_{0,1}|]<+\infty$ et $\exists M>0$ tq $\forall n \geq 1$ $E[X_{0,n}] \geq -Mn$

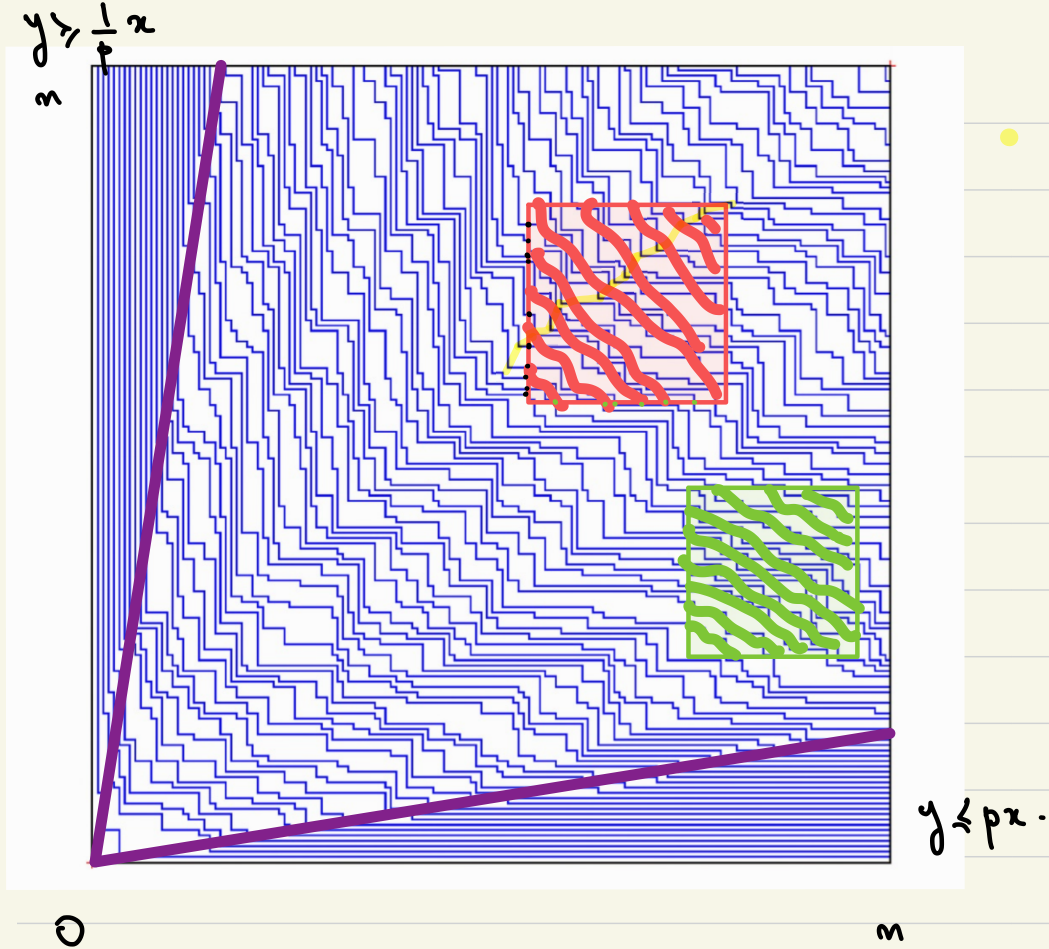
Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \frac{X_{0,n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{E[X_{0,n}]}{n} = \gamma \in [-M,+\infty[$

p.s et dans L^1

$$X_{m,n} = -L^{(p)}_{(m,n]^2}$$

$$-X_{0,n} \geq -X_{0,m} - X_{m,n}$$

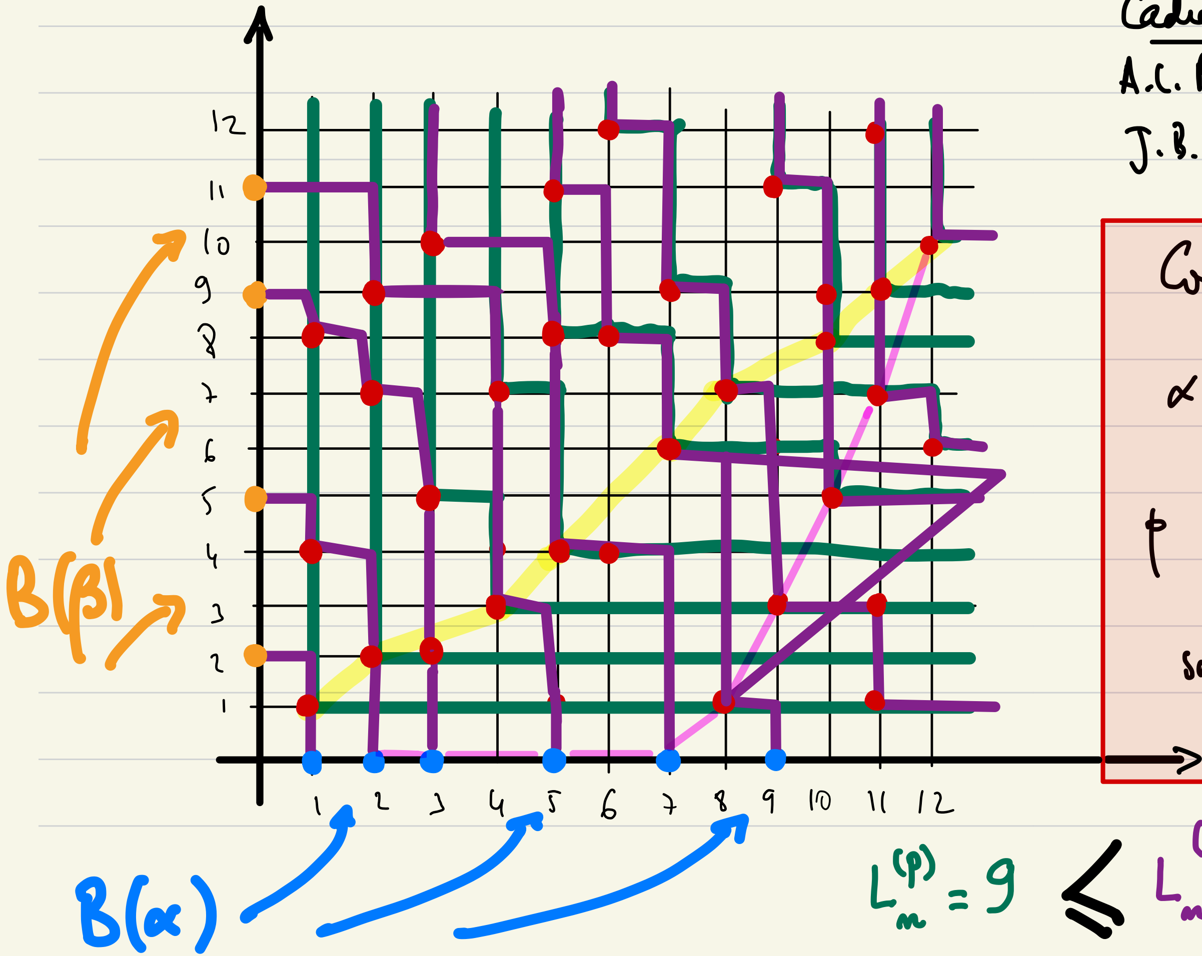
par concaténation.



$y \geq \frac{1}{p}x$
n
$y \leq px$.
0
n

Idée : Introduire des sources et des puits   Cator et Groeneboom (00').

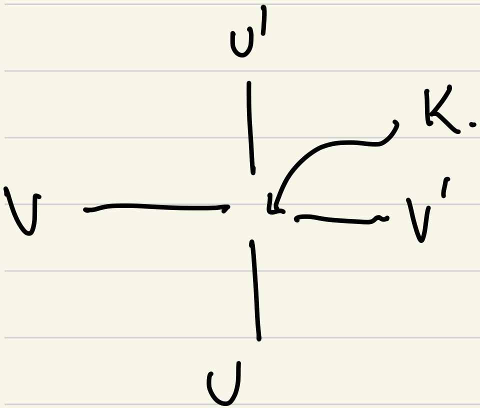
Cadre présenté : A.C. Basdevant, E, L. Gerin, J.B. Gouéré.



Comment choisir α, β en fonction de p pour que le système soit stationnaire ?

$$L_n^{(p)} = 9 \leqslant L_{n,\alpha,\beta}^{(p)} = 10$$

La magie ! Ne considérer qu'une situation locale au voisinage d'un sommet et la stationnarité locale $\Rightarrow$ la stationnarité sur tout le $1/4$ de plan.



U, V, U', V' valent 1 ou 0 en cas de présence de ligne ou pas

$K = 1$ ou 0 en cas de présence de $\bullet$ ou pas.

$(U,V)=(1,1) \Rightarrow (U',V')=(0,0)$

$(U,V)=(1,0) \rightarrow (U',V')=(1,0)$

$(U,V)=(0,1) \Rightarrow (U',V')=(0,1)$

$$P\big((U',V')=(1,0)\big) = P\big((U,V)=(1,0)\big)$$

$$P\big((U',V')=(0,1)\big) = P\big((U,V)=(0,1)\big).$$

$(U,V)=(0,0)$ et $K=1 \Rightarrow (U',V')=(1,1) \rightsquigarrow$

$$P\big((U',V')=(1,1)\big) = P\big((U,V)=(0,0),\ K=1\big)$$

$$\alpha\beta = \bar\alpha\bar\beta p$$

$(U,V)=(0,0)$ et $K=0 \Rightarrow (U',V')=(0,0)$

Hypothèse :

U, V $⫫$ $\quad U \sim \mathcal{B}(\alpha)$

$\qquad\qquad V \sim \mathcal{B}(\beta)$

$K ⫫ (U,V) \quad K \sim \mathcal{B}(p)$

Relation de stationnarité :

$$\boxed{\alpha\beta = \bar\alpha\bar\beta p}$$

$L^{(p)}_{n,\alpha,\beta}$: nombre de lignes qui tombent dans 1 puits. (1)

$+$ nombre de lignes qui finissent sur le côté supérieur du carré. (2)

(1) : # puits $\sim \beta n$ (LGN).

(2) $\overset{\text{(loi)}}{=}$ # sources (par stationnarité).

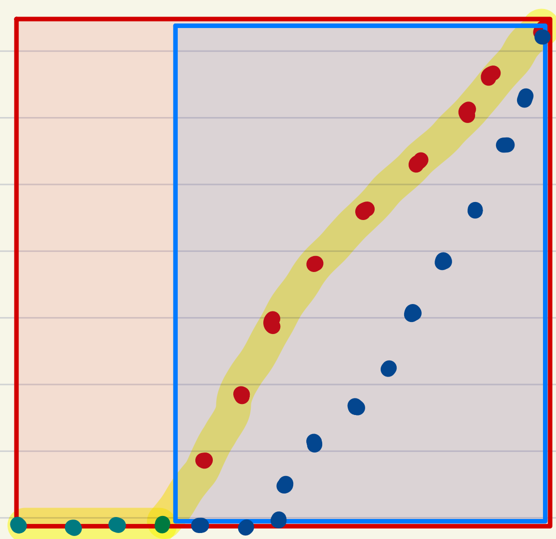
$\sim \alpha n$ (LGN).

$$\boxed{L^{(p)}_{n,\alpha,\beta} \sim (\alpha+\beta)\, n}$$

Hic : ce qui nous intéresse c'est $L_n^{(p)}$! On sait que $L_n^{(p)} \leq L^{(p)}_{n,\alpha,\beta}$

$$\overline{\lim}\ \frac{L_n^{(p)}}{n} \leqslant \inf_{\alpha\beta = \tilde\alpha\tilde\beta p} (\alpha+\beta) \quad \Big(\text{réalisé pour } \alpha=\beta \quad \frac{\alpha}{\tilde\alpha} = \sqrt{p},\ \alpha = \sqrt{p}(1-\alpha) \quad \alpha = \frac{\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\Big) \quad \frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}.$$

Pourquoi l'optimisation en α, β donne le bon résultat ?



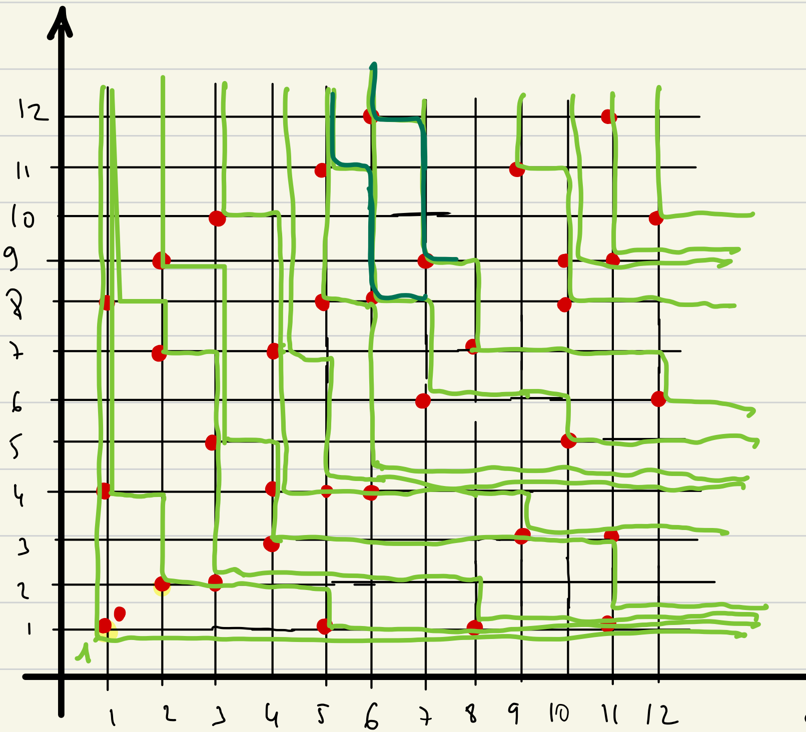
$$L^{(p)}_{n,\alpha_{opt},\beta_{opt}} \overset{?}{\sim} L^{(p)}_{n}$$

Il faut mq on n'utilise pas de source dans le trajet optimal.

Idée: On raisonne par l'absurde, si on mangeait un nombre macroscopique de sources, on pourrait ajouter ces sources, à l'optimal avec source et puits dans le rectangle bleu et le calcul (explicite) montre que l'on ferait mieux que l'optimum jaune contradiction !

II Percolation de dernier passage.

N et E sont permis !



Les règles locales ont changé :

$$(U', V') = f(U, V, K)$$

$$\begin{cases} U' = K + (U - V)_+ \\ V' = K + (V - U)_+ \end{cases}$$

Ici $U, V, U', V' \in \mathbb{Z}_+$

$$x_+ = \max(x, 0)$$

Malheureusement,

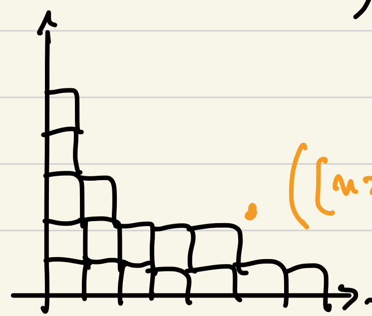
Si $K \sim \mathcal{B}(p)$, on ne trouve pas U, V tq $(U', V') \overset{(loi)}{=} (U, V)$.

par contre

Si $K \sim \exp(1)$ ou $K \sim \mathrm{Geom}(p)$, alors il est possible de trouver une couple (U, V) tq $(U', V') \overset{(loi)}{=} (U, V)$.

si $U \perp\!\!\!\perp V$ $\quad U \sim \exp(\rho)$ $\quad V \sim \exp(1-\rho)$ $\quad 0 < \rho < 1$

alors. $(U', V') \overset{(loi)}{=} (U, V)$.



$\left(\lceil nx \rceil, \lceil ny \rceil\right)$.

$$\frac{L_{[nx,ny]}}{n} \leq \frac{L_{\rho_{\text{opti}}}[nx,ny]}{n} \leq \frac{1}{n} \min_{\rho>0} \left(\frac{nx}{1-\rho} + \frac{ny}{\rho} \right)$$

$$= \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} \right)^2$$

Lignes de niveau $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \text{cste}$ arc de parabole

forme limite du CORNER GROWTH MODEL.

Exercice 1 : Monsieur Jourdain ou "Faire du modèle à 6-vertex sans le savoir".

Revenons au modèle du début du cours où l'on a fixé des puits et des sources, sur les axes. L'aléa provient des points que l'on a placés en chaque point de $\mathbb{N}^2$ avec probabilité p.

A - Modèle à 5 sommets.

1) Pourquoi dit-on que l'on a affaire à un modèle à 5-sommets ?

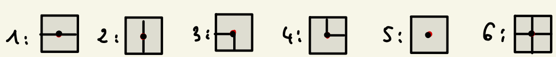
2) Quelle est la probabilité d'émergence d'une configuration de lignes à l'intérieur d'un carré $[0,n]^2$, en fonction du nombre de sommets de chaque type ?

$$p^{|4|}(1-p)^{|5|}$$

B - Passage à 6 sommets.

Vous avez sans doute remarqué que  manquait à l'appel.

1) Trouver une manière analogue à celle du cours, pour engendrer une configuration à 6 sommets, où la probabilité d'une configuration est égale à $p^{|4|+|6|}(1-p)^{|3|+|5|}$, où les sommets de chaque type sont :



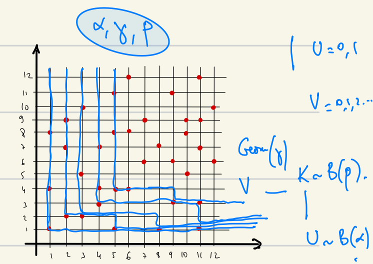
2) Trouver des distributions de sources et puits qui rendent le système ainsi construit, stationnaire.

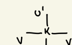
Exercice 2 : À l'Est, il y a du nouveau.

On se propose de reprendre le cours 1, dans le cas où les pas vers l'Est sont autorisés (les pas vers le Nord restent interdits).

Quelle est l'asymptotique du nombre de points (apparaissant avec proba p) que l'on peut attraper par des chemins E, NE dans le carré $[0,n]^2$?

1) Tracer les lignes de Hammersley correspondant au problème dans la configuration ci-contre.



2) Conservant les notations  (ici $U = 0$ ou 1, $K = 0$ ou 1, V entier ≥ 0)

Exprimer (U', V') en fonction de U, V et K.

3) Trouver une famille de distributions stationnaires.

4) Optimiser sur un carré et en déduire le résultat.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ (Lemme de J. Casse).

Soit μ une mesure de proba sur $\mathbb{Z}_+$ et introduisons $(\mu_\Delta)_{\Delta \geq 0}$ la famille de mesures de proba définie par :

$$\boxed{\mu_\Delta(k) = \mu(k)\,\mu(\Delta+k) \Big/ \Big(\sum_{k \geq 0} \mu(k)\,\mu(\Delta+k)\Big)}$$

- Soit (U, V, K) tq $P(U=i, V=j, K=l) = \mu(i)\,\mu(j)\,\mu_{|j-i|}(l)$
- on note $\begin{cases} U' = K + (U-V)^+ \\ V' = K + (V-U)^+ \end{cases}$

Montrer que $(U', V') \overset{(\text{loi})}{=} (U, V)$ (i.e. U', V' indep de loi μ).

(l'exercice est facile, tout le mérite de Jérôme était d'en trouver l'énoncé !)

$i \geq 0$

$$P(U'-V'=i,\ U'+V'=j)$$

$$= P(U-V=i,\ 2K+|U-V|=j)$$

$$= P\Big(U-V=i,\ K=\frac{j-i}{2}\Big)$$

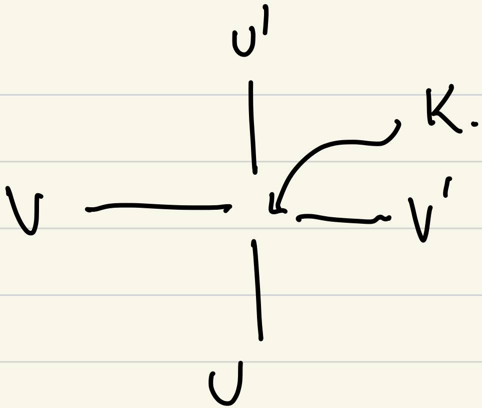
$$= \sum_{l \geq 0} P\Big(U=l+i,\ V=l,\ K=\frac{j-i}{2}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{l \geq 0} \mu(l+i)\,\mu(l)\Big)\,\mu_i\Big(\frac{j-i}{2}\Big).$$

$$= \cancel{\Big(\sum_{l \geq 0} .\Big)}\ \frac{\mu\big(\frac{j-i}{2}\big)\,\mu\big(\frac{j+i}{2}\big)}{\cancel{\sum \mu(k)\,\mu(i+k)}}.$$

$$= P\Big(U = \frac{i+j}{2},\ V = \frac{j-i}{2}\Big).$$

$$= \mu\Big(\frac{i+j}{2}\Big)\,\mu\Big(\frac{j-i}{2}\Big).$$



$(U,V)=(1,1)$ et $K=0 \Rightarrow (U',V')=(0,0)$

$(U,V)=(1,1)$, $K=1 \Rightarrow (U',V')=(1,1)$

$$\boxed{\begin{aligned} U &\sim \mathcal{B}(\alpha) \\ V &\sim \mathcal{B}(\beta) \\ K &\sim \mathcal{B}(p) \end{aligned}}$$

$(U,V)=(1,0) \Rightarrow (U',V')=(1,0)$

$(U,V)=(0,1) \Rightarrow (U',V')=(0,1)$

$(U,V)=(0,0)$ et $K=1 \Rightarrow (U',V')=(1,1)$

$(U,V)=(0,0)$ et $K=0 \Rightarrow (U',V')=(0,0)$

$$P(U'=1, V'=1) = \underbrace{P(K=1)}_{p}\left(\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}\right).$$

$\alpha\beta$ "

$$\boxed{\alpha\beta\bar{p} = \bar{\alpha}\bar{\beta}p.}$$