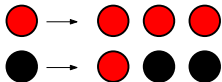
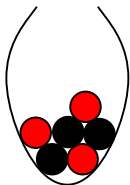


# Urnes de Pólya: approches probabilistes

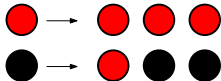
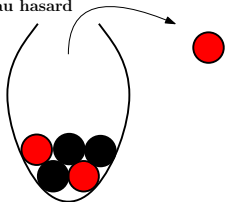
– Cécile Mailler –  
(Prob-L@B – Université de Bath)

# Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?

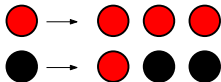
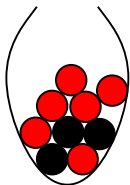


# Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?

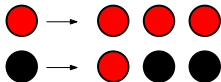
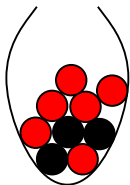
uniformément  
au hasard



# Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?



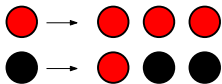
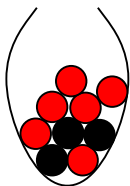
# Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?



Matrice de  
remplacement :

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?



Matrice de  
remplacement :

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un processus de Markov

$$U(n) = \begin{pmatrix} U_1(n) \\ U_2(n) \end{pmatrix},$$

où  $U_i(n)$  est le nombre de boules de couleur  $i$  dans l'urne au temps  $n$ .

Deux paramètres :

- le vecteur de composition initiale  $U(0)$
- la matrice de remplacement  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

→ même chose avec  $d \geq 2$  couleurs.

Comment se comporte  $U(n)$  ?  
notamment quand  $n \rightarrow +\infty$  ?

A priori, la réponse dépend de :

- la composition initiale  $U(0)$
- la matrice de remplacement  $R$ .

Comment se comporte  $U(n)$  ?  
notamment quand  $n \rightarrow +\infty$  ?

A priori, la réponse dépend de :

- la composition initiale  $U(0)$
- la matrice de remplacement  $R$ .

Dans ce cours :

- 1 Urnes de Pólya classiques et martingales
  - a L'urne "originelle" de Pólya et Eggenberger
  - b Le cas "irréductible" : une loi des grands nombres...
  - c ... un "théorème central limite"
  - d ... et un exemple d'application : le profil de l'arbre aléatoire récursif
- 2 Urnes à tirage multiple et approximation stochastique
  - a Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif
  - b L'approximation stochastique
  - c Une loi des grands nombres et un théorème central limite
- 3 Urnes de Pólya à une infinité de couleurs
  - a Motivation
  - b Étude par approximation stochastique
  - c Une autre approche



Comment se comporte  $U(n)$  ?  
notamment quand  $n \rightarrow +\infty$  ?

A priori, la réponse dépend de :

- la composition initiale  $U(0)$
- la matrice de remplacement  $R$ .

Dans ce cours :

- 1 Urnes de Pólya classiques et martingales
  - a L'urne "originelle" de Pólya et Eggenberger
  - b Le cas "irréductible" : une loi des grands nombres...
  - c ... un "théorème central limite"
  - d ... et un exemple d'application : le profil de l'arbre aléatoire récursif
- 2 Urnes à tirage multiple et approximation stochastique
  - a Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif
  - b L'approximation stochastique
  - c Une loi des grands nombres et un théorème central limite
- 3 Urnes de Pólya à une infinité de couleurs

Dans tout le cours, on ne s'intéresse qu'aux urnes telles que  
 $\|U(n)\|_1 (= \# \text{ total de boules au temps } n) \rightarrow \infty$ .

# Urnes de Pólya classiques et martingales

# Les martingales vite fait

Pour un cours moins vite fait : voir, e.g., le cours de Brigitte Chauvin, Alea 2002.

[<http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/martingales.ps>]

## Définition :

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale ssi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

L'espérance conditionnelle vérifie ces trois propriétés :

- 1  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$
- 2 Si  $X = f(Y)$ , alors  $\mathbb{E}[X|Y] = X$ . (Y est "mesurable" par rapport à X.)
- 3 Si X est indépendante Y, alors  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$ .

# Les martingales vite fait

Pour un cours moins vite fait : voir, e.g., le cours de Brigitte Chauvin, Alea 2002.

[<http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/martingales.ps>]

## Définition :

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale ssi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

L'espérance conditionnelle vérifie ces trois propriétés :

- 1  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$
- 2 Si  $X = f(Y)$ , alors  $\mathbb{E}[X|Y] = X$ . (Y est "mesurable" par rapport à X.)
- 3 Si X est indépendante Y, alors  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$ .

## Exemple : la marche aléatoire simple

Supposons que  $M_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ , où les  $\Delta_i$  sont i.i.d.  $\pm 1$  avec proba  $1/2$  :

## Les martingales vite fait

Pour un cours moins vite fait : voir, e.g., le cours de Brigitte Chauvin, Alea 2002.

[<http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/martingales.ps>]

### Définition :

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale ssi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

L'espérance conditionnelle vérifie ces trois propriétés :

- ①  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$
- ② Si  $X = f(Y)$ , alors  $\mathbb{E}[X|Y] = X$ . (Y est "mesurable" par rapport à X.)
- ③ Si X est indépendante Y, alors  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$ .

### Exemple : la marche aléatoire simple

Supposons que  $M_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ , où les  $\Delta_i$  sont i.i.d.  $\pm 1$  avec proba  $1/2$  : on a :

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n + \Delta_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n] + \mathbb{E}_n[\Delta_{n+1}]$$

# Les martingales vite fait

Pour un cours moins vite fait : voir, e.g., le cours de Brigitte Chauvin, Alea 2002.

[<http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/martingales.ps>]

## Définition :

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale ssi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

L'espérance conditionnelle vérifie ces trois propriétés :

- ①  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$
- ② Si  $X = f(Y)$ , alors  $\mathbb{E}[X|Y] = X$ . (Y est "mesurable" par rapport à X.)
- ③ Si X est indépendante Y, alors  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$ .

## Exemple : la marche aléatoire simple

Supposons que  $M_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ , où les  $\Delta_i$  sont i.i.d.  $\pm 1$  avec proba  $1/2$  : on a :

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n + \Delta_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n] + \mathbb{E}_n[\Delta_{n+1}] = M_n + \mathbb{E}[\Delta_{n+1}]$$

## Les martingales vite fait

Pour un cours moins vite fait : voir, e.g., le cours de Brigitte Chauvin, Alea 2002.

[<http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/martingales.ps>]

### Définition :

Une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale ssi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, \dots, M_n] = M_n.$$

L'espérance conditionnelle vérifie ces trois propriétés :

- ①  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$
- ② Si  $X = f(Y)$ , alors  $\mathbb{E}[X|Y] = X$ . (Y est "mesurable" par rapport à X.)
- ③ Si X est indépendante Y, alors  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}X$ .

### Exemple : la marche aléatoire simple

Supposons que  $M_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ , où les  $\Delta_i$  sont i.i.d.  $\pm 1$  avec proba  $1/2$  : on a :

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n + \Delta_{n+1}] = \mathbb{E}_n[M_n] + \mathbb{E}_n[\Delta_{n+1}] = M_n + \mathbb{E}[\Delta_{n+1}] = M_n \quad \square$$

## Propriétés dont on a besoin dans ce cours

- Une martingale positive converge presque sûrement.
- Si  $\sup_{n \geq 0} \|M_n\|^2 < \infty$  (on dit que  $M_n$  est “uniformément bornée dans  $L^2$ ”), alors  $M_n$  converge presque sûrement. [Théorèmes de Doob]



# Propriétés dont on a besoin dans ce cours

- Une martingale positive converge presque sûrement.
- Si  $\sup_{n \geq 0} \|M_n\|^2 < \infty$  (on dit que  $M_n$  est “uniformément bornée dans  $L^2$ ”), alors  $M_n$  converge presque sûrement. [Théorèmes de Doob]
- Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ );  
s’il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ .  
Alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ . [Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo’97, Th. 1.3.15]

# Propriétés dont on a besoin dans ce cours

- Une martingale positive converge presque sûrement.
- Si  $\sup_{n \geq 0} \|M_n\|^2 < \infty$  (on dit que  $M_n$  est “uniformément bornée dans  $L^2$ ”), alors  $M_n$  converge presque sûrement. [Théorèmes de Doob]
- Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ );  
s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ .  
Alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ . [Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]
- Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.  
Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ .  
Alors, en distribution quand  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

[Théorème de la limite centrale pour martingales : voir Duflo'97 Th. 2.1.19]

# L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

## Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ).

## La distribution de Dirichlet :

Soit  $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d : \sum_{i=1}^d x_i = 1\}$  le simplexe de dimension  $d$ . La densité de Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ) est donnée par

$$\frac{\Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_d)}{\Gamma(\nu_1) \dots \Gamma(\nu_d)} \prod_{i=1}^d x_i^{\nu_i - 1} d\Sigma(x_1, \dots, x_d),$$

où  $d\Sigma$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Sigma$ .

NB : Dirichlet(1, ..., 1) est la mesure uniforme sur  $\Sigma$ .

# L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

## Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ).

Deux remarques :

- la limite est aléatoire (non déterministe)
- et elle dépend de la composition initiale de l'urne.

# L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

## Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ).

**Preuve :** Si  $\xi(n+1) :=$  couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ , et  $\mathbf{e}_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique, alors

$$\mathbb{E}_n[U(n+1)] = U(n) + \mathbb{E}_n[\mathbf{e}_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} \mathbf{e}_i$$

# L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

## Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ).

**Preuve :** Si  $\xi(n+1) :=$  couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ , et  $\mathbf{e}_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n[U(n+1)] &= U(n) + \mathbb{E}_n[\mathbf{e}_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} \mathbf{e}_i \\ &= \left(1 + \frac{1}{\|U(0)\|_1 + n}\right) U(n) = \frac{\|U(0)\|_1 + n + 1}{\|U(0)\|_1 + n} U(n). \end{aligned}$$

## L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

### Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

**Preuve :** Si  $\xi(n+1) :=$  couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ , et  $\mathbf{e}_i$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n[U(n+1)] &= U(n) + \mathbb{E}_n[\mathbf{e}_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} \mathbf{e}_i \\ &= \left(1 + \frac{1}{\|U(0)\|_1 + n}\right) U(n) = \frac{\|U(0)\|_1 + n + 1}{\|U(0)\|_1 + n} U(n). \end{aligned}$$

Donc  $M_n := U(n)/(\|U(0)\|_1 + n)$  est une martingale. Comme elle est positive, elle converge p.s. vers une limite que l'on appelle  $\Delta$ .

# L'urne originelle de Pólya et Eggenberger

On prend  $R = \text{Id}_d$ , et  $U(0) = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ .

## Théorème :

[Eggenberger & Pólya '23]

Presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $U(n)/n \rightarrow \Delta$ ,  
où  $\Delta$  est une variable aléatoire de loi Dirichlet( $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ ).

**Preuve :** On a donc montré que  $U(n)/n \rightarrow \Delta$  p.s.

Pour déterminer la distribution de  $\Delta$ , on peut calculer les limites des moments de  $U(n)/n$  et montrer qu'elles sont égales aux moments de la Dirichlet.

voir, e.g., l'appendice de [Chauvin, Mailler, Pouyanne, 2015]





## Un autre cas : quand $R$ est irréductible

### Irréductibilité

La matrice  $R$  est irréductible.

⇒ le rayon spectral de  $R$  en est une valeur propre simple.

### Positivité

- $\sum_{i=1}^d U_i(0) > 0$ ,
- $R_{i,j} \geq 0 \ (\forall i, j)$
- $R_{i,i} \geq -1 \ (\forall i)$ .

### Théorème :

[Athreya & Karlin '68]

Si  $(U(n))_{n \geq 0}$  est positive et irréductible, alors

$$U(n)/n \rightarrow v_1, \text{ p.s.}$$

où  $v_1$  est un vecteur propre à coordonnées positives de  ${}^tR$  associé à  $\lambda_1$ .

Deux remarques :

- la limite est déterministe
- elle ne dépend pas de la composition initiale.

“Loi des Grands Nombres”

## Le cas irréductible : preuve de la LGN

Pour cette preuve, on se réduit au cas  $d = 2$  et  $\|R_i\|_1 = S$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  (cas “balancé”, ou “équilibré”).

$\xi(n+1)$  = couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ ,  
 $R_i$  =  $i$ -ème ligne de  $R$

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{E}_n[U(n+1)] &= U(n) + \mathbb{E}_n[R_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} R_i \\ &= \left( \text{Id} + \frac{{}^t R}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) U(n). \end{aligned}$$

## Le cas irréductible : preuve de la LGN

Pour cette preuve, on se réduit au cas  $d = 2$  et  $\|R_i\|_1 = S$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  (cas “balancé”, ou “équilibré”).

$\xi(n+1)$  = couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ ,  
 $R_i$  =  $i$ -ème ligne de  $R$

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{E}_n[U(n+1)] &= U(n) + \mathbb{E}_n[R_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} R_i \\ &= \left( \text{Id} + \frac{{}^t R}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) U(n). \end{aligned}$$

Donc  $\prod_{i=0}^{n-1} \left( \text{Id} + \frac{{}^t R}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} U(n) \in \mathbb{R}^2$  est une martingale.

## Le cas irréductible : preuve de la LGN

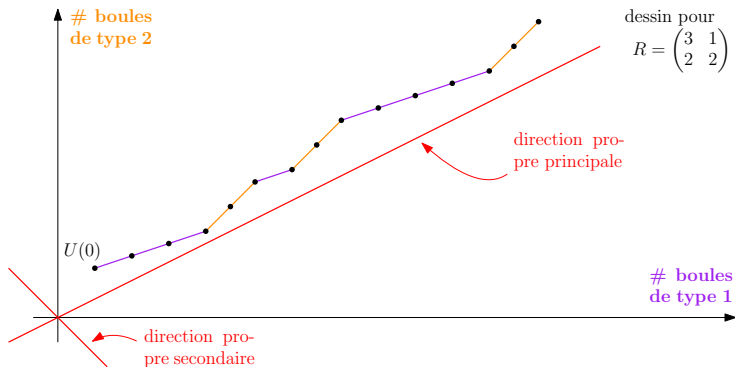
Pour cette preuve, on se réduit au cas  $d = 2$  et  $\|R_i\|_1 = S$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  (cas “balancé”, ou “équilibré”).

$\xi(n+1)$  = couleur de la boule tirée au temps  $n+1$ ,  
 $R_i$  =  $i$ -ème ligne de  $R$

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{E}_n[U(n+1)] &= U(n) + \mathbb{E}_n[R_{\xi(n+1)}] = U(n) + \sum_{i=1}^d \frac{U_i(n)}{\sum_j U_j(n)} R_i \\ &= \left( \text{Id} + \frac{{}^t R}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) U(n). \end{aligned}$$

Donc  $\prod_{i=0}^{n-1} \left( \text{Id} + \frac{{}^t R}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} U(n) \in \mathbb{R}^2$  est une martingale.

On projète sur les deux axes propres pour obtenir deux martingales réelles.



- On peut choisir le premier vecteur propre  $v_1$  tel que

$$\pi_1 U(n) = \pi_1 U(0) + n \quad (\forall n).$$

- $M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2 U(n)$  est une martingale.

( $S$  = première valeur propre de  $R$ )

( $m$  = seconde valeur propre de  $R$ )

## Rappel :

[Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]

Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ ).

S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ ,

alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] = \prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-2} \mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right]$$

## Rappel :

[Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]

Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ ).

S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ ,

alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] = \prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-2} \mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right]$$

---

On a 
$$\prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-2} = \exp \left( -2 \sum_{j=0}^n \log \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right) \right)$$

$$\sim \exp \left( -2 \sum_{j=0}^n \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)$$

$$\sim \exp \left( - (2m/S) \log n \right) \sim n^{-2m/S}.$$

## Rappel :

[Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]

Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ ).

S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ ,

alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] = \prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-2} \sim n^{-2m/S}$$

$$\mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right]$$



## Rappel :

[Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]

Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ ).S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ ,alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] = \prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + jS} \right)^{-2} \sim n^{-2m/S}$$

$$\mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right]$$

---

Et 
$$\mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[ \left( \underbrace{\pi_2 U(n+1) - \pi_2 U(n)}_{\text{ne peut prendre que deux valeurs}} - \underbrace{\frac{m \pi_2 U(n)}{\|U(0)\|_1 + nS}}_{\text{borné}} \right)^2 \right] = \mathcal{O}(1).$$

## Rappel :

[Loi des grands nombres pour martingales : voir Duflo'97, Th. 1.3.15]

Supposons que  $\mathbb{E}\|M_n\|^2 < \infty$  ( $\forall n$ ).

S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\sup_{n \geq 1} n^{-\alpha} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] < +\infty$ ,

alors,  $n^{-\alpha} M_n \xrightarrow{p.s.} 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2] &= \prod_{j=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + jS} \right)^{-2} && \sim n^{-2m/S} \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right)^2 \right] \\ &= \mathcal{O}(n^{-2m/S}). \end{aligned}$$

Donc  $n^{1-2m/S} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(M_{i+1} - M_i)^2] = \mathcal{O}(n^{-m/2})$ , et la LGN s'applique.

On obtient  $n^{1-2m/S} M_n \rightarrow 0$ , et, comme  $\pi_2 U(n) \sim n^{m/S} M_n$ ,

$$\frac{\pi_2 U(n)}{n} \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi_1 U(n)}{n} \xrightarrow{p.s.} v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U(n)}{n} \xrightarrow{p.s.} v_1. \quad \square$$

## Un "théorème central limite"

$\lambda_2$  = valeur propre de  $R$  ayant la plus grande partie réelle après  $\lambda_1$

### Théorème :

[Janson '04, Pouyanne '08]

Supposons que  $(U(n))_{n \geq 0}$  est positive et irréductible.

- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_2) < \lambda_1/2$ , alors  $n^{-1/2}(U(n) - nv_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^2)$ .
- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_2) = \lambda_1/2$ , alors  $(n \log n)^{-1/2}(U(n) - nv_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Theta^2)$ .
- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_2) > \lambda_1/2$ , alors  $n^{-2\operatorname{Re}(\lambda_2)/\lambda_1}(U(n) - nv_1) \xrightarrow{\text{a.s.}} W$

["petites" urnes]

["grandes" urnes]

Remarques :

- $\Sigma^2$  et  $\Theta^2$  sont explicites et ne dépendent pas de  $U(0)$
- $W$  n'est pas explicite, elle dépend de  $U(0)$ , sa loi est inconnue

[Janson '04]

[Chauvin, Pouyanne, Sahnoun '11]

[Chauvin, M., Pouyanne '15]

[M.'18]

## Le cas irréductible : preuve du TCL ( $d = 2$ )

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

Est-ce qu'elle converge a.s. ?

- malheureusement, elle n'est pas positive...

## Le cas irréductible : preuve du TCL ( $d = 2$ )

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

Est-ce qu'elle converge a.s. ?

- malheureusement, elle n'est pas positive...
- est-elle bornée dans  $L^2$  ?

**Lemme :**

[Preuve : Exercice 2]

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$  ("incréments").

Si  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[(\Delta M_n)^2] < +\infty$ , alors  $(M_n)_{n \geq 0}$  est unif. bornée dans  $L^2$ .

On a déjà montré que  $\mathbb{E}[(\Delta M_{n+1})^2] = \mathcal{O}(n^{-2m/S})$ . Donc, si  $m > S/2$ , alors

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[\Delta M_{n+1}^2] < \infty.$$

$(M_n)_{n \geq 0}$  est unif. bornée dans  $L^2$  et donc converge p.s.

## Le cas irréductible : preuve du TCL ( $d = 2$ )

Si  $m > S/2$ , alors il existe  $W$  une v.a. finie telle que

$$\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1}}_{\sim n^{-m/S}} \pi_2(U(n)) \rightarrow W,$$

et donc  $\pi_2 U(n) = n^{m/S} W(1 + o(1))$ .

Cela conclut le cas des "grandes" urnes.

## Le cas irréductible : preuve du TCL ( $d = 2$ )

Si  $m > S/2$ , alors il existe  $W$  une v.a. finie telle que

$$\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1}}_{\sim n^{-m/S}} \pi_2(U(n)) \rightarrow W,$$

et donc  $\pi_2 U(n) = n^{m/S} W(1 + o(1))$ .

Cela conclut le cas des "grandes" urnes.

Que se passe-t-il quand  $m < S/2$  ?

Dans ce cas, la martingale ne converge pas p.s., mais le TCL s'applique...

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

## Rappel :

[TCL pour martingales]

Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.

Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ . Alors,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Dans notre cas,

$$\begin{aligned} \|M_{n+1} - M_n\| &= \prod_{i=0}^n \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} && \leq 1 \\ &\underbrace{\left\| \pi_2 U(n+1) - \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + nS} \right) \pi_2 U(n) \right\|}_{\text{borné}} \end{aligned}$$



$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

## Rappel :

[TCL pour martingales]

Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.

Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ . Alors,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Il existe  $c > 0$  tel que  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2] \sim cn^{-2m/s}$ .

[Exercice 6]

Si  $m < s/2$ , alors  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sim cn^{1-2m/s}$ . Donc, par définition,

$$x \leq c\tau_x^{1-2m/s} (1 + o(1)) \leq x + 1.$$

Par le TCL, et en changeant la variable  $n = \tau_x \Rightarrow x \sim cn^{1-2m/s}$ , on obtient

$$\frac{M_n}{n^{1/2-m/s}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c).$$

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

## Rappel :

[TCL pour martingales]

Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.

Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ . Alors,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Il existe  $c > 0$  tel que  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2] \sim cn^{-2m/S}$ .

[Exercice 6]

Si  $m < S/2$ , alors  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sim cn^{1-2m/S}$ . Donc, par définition,

$$x \leq c\tau_x^{1-2m/S} (1 + o(1)) \leq x + 1.$$

Par le TCL, et en changeant la variable  $n = \tau_x \Rightarrow x \sim cn^{1-2m/S}$ , on obtient

$$\frac{\pi_2 U(n)}{n^{1/2}} \sim \frac{M_n}{n^{1/2-m/S}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c).$$

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

## Rappel :

[TCL pour martingales]

Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.

Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ . Alors,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Il existe  $c > 0$  tel que  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2] \sim cn^{-2m/s}$ .

[Exercice 6]

Si  $m = s/2$ , alors  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sim c \log n$ . Donc, par définition,

$$x \leq c \log \tau_x \leq x + 1.$$

Par le TCL, et en changeant la variable  $n = \tau_x \Rightarrow x \sim c \log n$ , on obtient

$$\frac{M_n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c).$$

$$M_n := \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2(U(n)) \text{ est une martingale.}$$

## Rappel :

[TCL pour martingales]

Supposons que  $\|M_0\| < \infty$  et  $\sup_{n \geq 0} \|M_{n+1} - M_n\| < \infty$  p.s.

Soit  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2]$  et  $\tau_x = \min\{m \geq 0: \sum_{i=0}^m \sigma_i^2 \geq x\}$ . Alors,

$$\frac{M_{\tau_x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Il existe  $c > 0$  tel que  $\sigma_n^2 := \mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2] \sim cn^{-2m/s}$ .

[Exercice 6]

Si  $m = s/2$ , alors  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \sim c \log n$ . Donc, par définition,

$$x \leq c \log \tau_x \leq x + 1.$$

Par le TCL, et en changeant la variable  $n = \tau_x \Rightarrow x \sim c \log n$ , on obtient

$$\frac{\pi_2 U(n)}{\sqrt{n \log n}} \sim \frac{M_n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c).$$



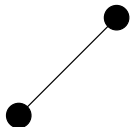
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



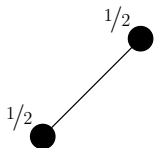
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

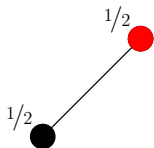


# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

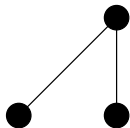




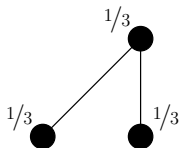
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



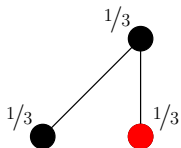
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



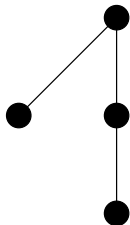
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



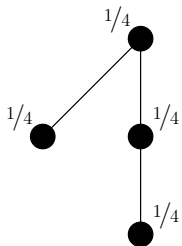
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



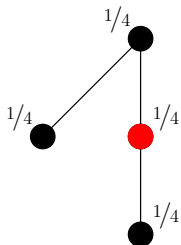
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



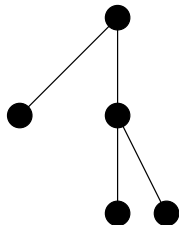
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

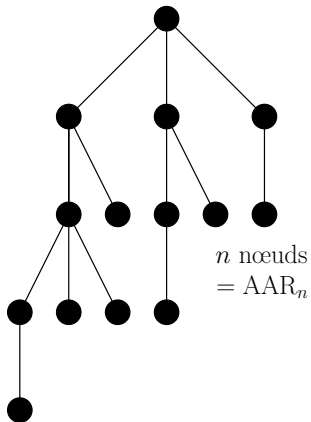


# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

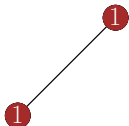




# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

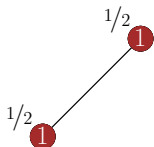


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

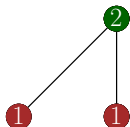


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

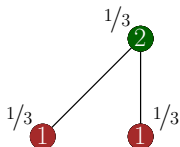


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

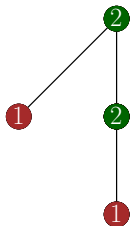


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

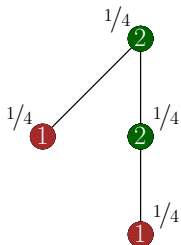


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

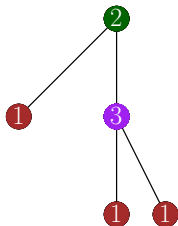


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



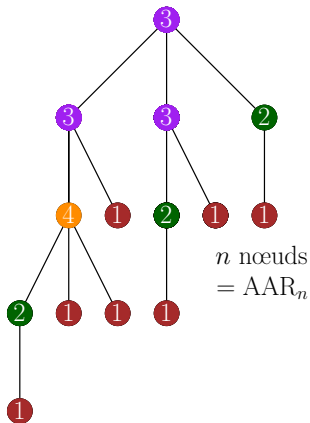
Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.



# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

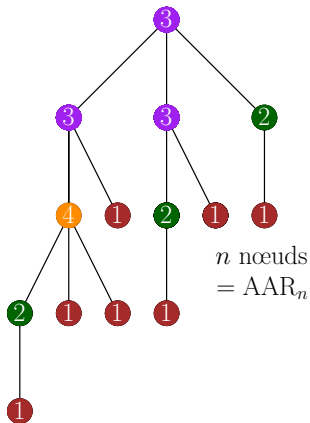


Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



C'est une urne... avec  
 $d = \infty$  couleurs.

Combien de nœuds on degré  $x$  dans  $AAR_n$  ?

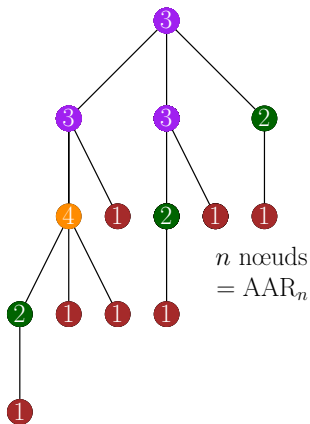
On colore les nœuds : degré  $x \rightsquigarrow$  couleur  $x$ .

- au temps 1, on a 2 nœuds de couleur 1 ;
- à chaque étape,
  - on pioche un nœud uniformément au hasard,
  - s'il est de couleur  $x$ , on le retire de l'urne et on ajoute un nœud de couleur  $x + 1$  et un nœud de couleur 1.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

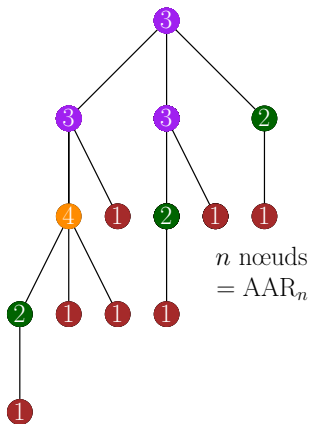
# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

On décide que toutes les couleurs  $\geq M$  sont de la même couleur, disons  $M$  :



C'est une urne... avec  
 $d = \infty$  couleurs.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR

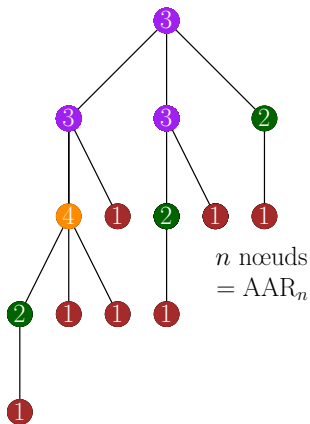


On décide que toutes les couleurs  $\geq M$  sont de la même couleur, disons  $M$  : e.g. pour  $M = 3$ ,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une urne... avec  
 $d = \infty$  couleurs.

# Distribution des degrés sortants dans l'AAR



C'est une urne... avec  
 $d = \infty$  couleurs.

On décide que toutes les couleurs  $\geq M$  sont de la même couleur, disons  $M$  : e.g. pour  $M = 3$ ,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $\lambda_1 = 1$ ,  $v_1 = {}^t (1/2, 1/4, 1/4)$ ,  
et  $\lambda_2 = -1 < 1/2$ , donc c'est une petite urne.

**Théorème :** [Mahmoud & Smythe '92] [Janson '04]

Pour tout  $x \geq 1$ ,

$$\sqrt{n} \left( \frac{U_x(n)}{n} - 2^{-x} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_x^2).$$

## Urnes irréductibles : un bilan

Nous avons montré qu'une urne de Pólya positive et irréductible vérifie

- une “loi forte des grands nombres” et
  - un “théorème central limite” qui dépend du trou spectral de  $R$ .
- 
- Les preuves que l'on a vues pour deux couleurs s'adaptent à  $d$  couleurs en utilisant les mêmes techniques de martingales.
    - La principale difficulté est que les valeurs propres peuvent être complexes, et les espaces propres de dimension  $\geq 2$ .
  - Pour généraliser à des urnes non balancées, une solution est de plonger les urnes en temps continu, et utiliser les techniques de martingales en temps continu.
    - Processus de Galton-Watson multi-types

[Janson '04]  
[Athreya & Ney '72]

# Urnes de Pólya classiques : un bilan

Dans cette section, nous avons étudié :

- le cas originel de Eggenberger et Pólya ( $R = \text{Id}$ ) ;
- le cas irréductible.

Remarques :

- En fait, ce que nous avons montré dans le cas irréductible s'applique à toutes les urnes dont la matrice de remplacement a une valeur propre principale "à la" Perron-Frobenius.
- Les autres cas non-irréductibles peuvent aussi être étudiés avec des techniques de martingales, mais les résultats sont moins universels.

[Janson '05]  
[Bose, Dasgupta, Maulik '09]

# Références : Urnes de Pólya classiques

- [Athreya & Karlin '68] Embedding of urn schemes into continuous time Markov branching processes and related limit theorems. K.B. Athreya and S. Karlin. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1968.
- [Athreya & Ney '78] Branching processes. K.B. Athreya et P.E. Ney. *Ed : Springer*. 2004.
- [Bose, Dasgupta, Maulik '09] Strong laws for balanced triangular urns. A. Bose, A. Dasgupta, et K. Maulik. *Journal of Applied Probability*, 46(2), pp 571-584, 2009.
- [Chauvin, Mailler, Pouyanne '15] Smoothing equations for large Pólya urns. B. Chauvin, C. Mailler and N. Pouyanne. *Journal of Theoretical Probability*, 28, pp 923-957, 2015.
- [Chauvin, Pouyanne, Sahnoun '11] Limit distributions for large Pólya urns. B. Chauvin, N. Pouyanne and R. Sahnoun. *The Annals of Applied Probability*, 21(1), pp 1-32, 2011.
- [Janson '04] Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. S. Janson. *Stochastic Processes and their Applications*, 110(2), pp 177-245, 2004.
- [Mailler '18] Describing the asymptotic behaviour of multicolour Pólya urns via smoothing systems analysis. C. Mailler. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics - ALEA*, XV, pp 375-408, 2018.
- [Pólya & Eggenberger '23] F. Eggenberger and G. Pólya. Über die statistik verketteter vorgäe. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1, pp 279-289, 1923.
- [Pouyanne '08] An algebraic approach to Pólya processes. N. Pouyanne. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 44(2), pp 293-323, 2008.



# Urnes de Pólya à tirage multiple et approximation stochastique

Le processus  $(U(n))_{n \geq 0}$  (sur  $\mathbb{N}^d$ ) dépend de trois paramètres :

- la composition initiale  $U(0)$ ,
- la taille d'une poignée  $m \in \mathbb{N}$ ,
- la règle de remplacement  $R: \Sigma_m^{(d)} \mapsto \mathbb{N}^d$ , où

$$\Sigma_m^{(d)} = \{v \in \mathbb{N}^d: v_1 + \dots + v_d = m\}.$$

Étant donné  $U(n)$ , on définit  $U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$ , où

- Avec remise :  $\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) = \binom{m}{v_1, \dots, v_d} \prod_{i=1}^d \left( \frac{U_i(n)}{T(n)} \right)^{v_i}$ .
- Sans remise :  $\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) = \binom{T(n)}{m}^{-1} \prod_{i=1}^d \binom{U_i(n)}{v_i}$ .

---

$T(n) = \#$  total de boules dans l'urne au temps  $n$ .

$$\binom{m}{v} := \binom{m}{v_1, \dots, v_d} = \frac{m!}{v_1! \dots v_d!}$$

Le processus  $(U(n))_{n \geq 0}$  (sur  $\mathbb{N}^d$ ) dépend de trois paramètres :

- la composition initiale  $U(0)$ ,
- la taille d'une poignée  $m \in \mathbb{N}$ ,
- la règle de remplacement  $R: \Sigma_m^{(d)} \mapsto \mathbb{N}^d$ , où

$$\Sigma_m^{(d)} = \{v \in \mathbb{N}^d: v_1 + \dots + v_d = m\}.$$

Étant donné  $U(n)$ , on définit  $U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$ , où

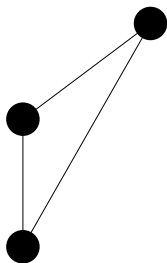
- Avec remise :  $\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) = \binom{m}{v_1, \dots, v_d} \prod_{i=1}^d \left( \frac{U_i(n)}{T(n)} \right)^{v_i}$ .
- Sans remise :  $\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) = \binom{T(n)}{m}^{-1} \prod_{i=1}^d \binom{U_i(n)}{v_i}$ .

---

$T(n) = \#$  total de boules dans l'urne au temps  $n$ .

$$\binom{m}{v} := \binom{m}{v_1, \dots, v_d} = \frac{m!}{v_1! \dots v_d!}$$

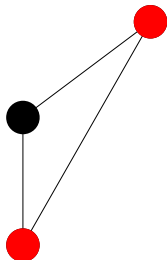
# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

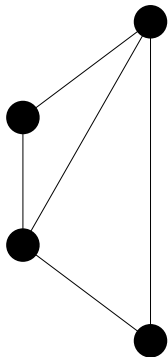
# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

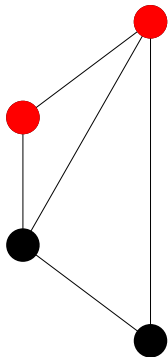
# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

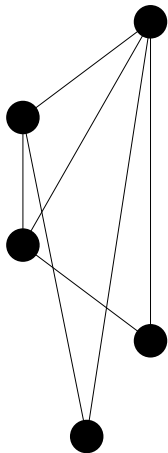
# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif

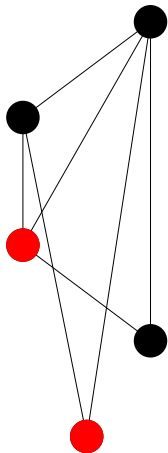


À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.



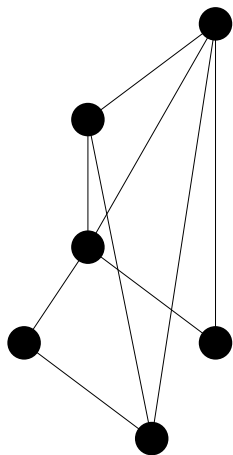
# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

# Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif



À chaque étape :

- on choisit une paire de nœuds (distincts) uniformément au hasard,
- on ajoute un nouveau nœud que l'on relie aux deux choisis.

$X_i(n) = \#$  nœuds de degrés  $i$  au temps  $n$  ( $2 \leq i$ )  
 $(X(n))_{n \geq 0}$  est une urne à tirage multiple :

- $X(0) = 3\mathbf{e}_2$ ,
- $R(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_{i+1} + \mathbf{e}_{j+1} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$

On a bien affaire à une urne de Pólya à tirage multiple.

Notation :  $\mathbf{e}_i$  est le vecteur dont toutes les coordonnées sont 0 sauf la  $i$ -ème qui est 1.

## Approximation stochastique

Étant donné  $U(n)$ , on définit  $U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$ , où

$$\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = \mathbf{v}) = \binom{m}{v_1, \dots, v_d} \prod_{i=1}^d \left( \frac{U_i(n)}{T(n)} \right)^{v_i}.$$

Rappel :  $R: \Sigma_m^{(d)} \mapsto \mathbb{N}^d$ , où  $\Sigma_m^{(d)} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d: v_1 + \dots + v_d = m\}$ .

Les méthodes usuelles ne s'appliquent pas :

- pas de martingale
- pas de plongement en temps continu "utile"

## Approximation stochastique

Étant donné  $U(n)$ , on définit  $U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$ , où

$$\mathbb{P}_n(\xi(n+1) = \mathbf{v}) = \binom{m}{v_1, \dots, v_d} \prod_{i=1}^d \left( \frac{U_i(n)}{T(n)} \right)^{v_i}.$$

Rappel :  $R : \Sigma_m^{(d)} \mapsto \mathbb{N}^d$ , où  $\Sigma_m^{(d)} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d : v_1 + \dots + v_d = m\}$ .

### On a une approximation stochastique :

Si l'on note  $Z_i = U_i(n)/T(n)$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  and  $n \geq 0$ , on a

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}),$$

où  $h$  est une fonction sur  $\Sigma^{(d)}$ ,  $\gamma_n$  et  $\varepsilon_n$  sont  $(Z_1, \dots, Z_n)$ -mesurable,  $\Delta M_{n+1}$  est un incrément de martingale et  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  p.s.

---


$$\Sigma^{(d)} = \{(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d : \sum x_i = 1\}$$

## Preuve

Rappel :

$$U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$$

Notre but :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

$$Z_{n+1} = \frac{U(n+1)}{T(n+1)} = \frac{U(n) + R(\xi(n+1))}{T(n+1)} = Z_n \cdot \frac{T(n)}{T(n+1)} + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)}$$

## Preuve

Rappel :

$$U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$$

Notre but :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \frac{U(n+1)}{T(n+1)} = \frac{U(n) + R(\xi(n+1))}{T(n+1)} = Z_n \cdot \frac{T(n)}{T(n+1)} + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n \left( 1 - \frac{\|R(\xi(n+1))\|_1}{T(n+1)} \right) + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \end{aligned}$$

## Preuve

Rappel :

$$U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$$

Notre but :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \frac{U(n+1)}{T(n+1)} = \frac{U(n) + R(\xi(n+1))}{T(n+1)} = Z_n \cdot \frac{T(n)}{T(n+1)} + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n \left( 1 - \frac{\|R(\xi(n+1))\|_1}{T(n+1)} \right) + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n + \frac{1}{T(n+1)} \underbrace{\left( R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1 Z_n \right)}_{=: Y_{n+1}} \end{aligned}$$

## Preuve

Rappel :

$$U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$$

Notre but :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \frac{U(n+1)}{T(n+1)} = \frac{U(n) + R(\xi(n+1))}{T(n+1)} = Z_n \cdot \frac{T(n)}{T(n+1)} + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n \left( 1 - \frac{\|R(\xi(n+1))\|_1}{T(n+1)} \right) + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n + \frac{1}{T(n+1)} \underbrace{\left( R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1 Z_n \right)}_{=: Y_{n+1}} \\ &= Z_n + \frac{1}{T(n)} \left( \mathbb{E}_n Y_{n+1} + Y_{n+1} - \mathbb{E}_n Y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \right) \end{aligned}$$



## Preuve

Rappel :

$$U(n+1) = U(n) + R(\xi(n+1))$$

Notre but :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \frac{U(n+1)}{T(n+1)} = \frac{U(n) + R(\xi(n+1))}{T(n+1)} = Z_n \cdot \frac{T(n)}{T(n+1)} + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n \left( 1 - \frac{\|R(\xi(n+1))\|_1}{T(n+1)} \right) + \frac{R(\xi(n+1))}{T(n+1)} \\ &= Z_n + \frac{1}{T(n+1)} \underbrace{\left( R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1 Z_n \right)}_{=: Y_{n+1}} \\ &= Z_n + \frac{1}{T(n)} \left( \mathbb{E}_n Y_{n+1} + Y_{n+1} - \mathbb{E}_n Y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \right) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $\mathbb{E}_n Y_{n+1} = h(Z_n) \dots$

## Preuve

Rappel :

$$Y_{n+1} = R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1$$

Notre but :

$$\mathbb{E}_n Y_{n+1} = h(Z_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n Y_{n+1} &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \\ &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \binom{m}{v} \prod_{i=1}^d z_{n,i}^{v_i} (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \end{aligned}$$

## Preuve

Rappel :

$$Y_{n+1} = R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1$$

Notre but :

$$\mathbb{E}_n Y_{n+1} = h(Z_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n Y_{n+1} &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \\ &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \binom{m}{v} \prod_{i=1}^d z_{n,i}^{v_i} (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$h(x) = \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \binom{m}{v} \prod_{i=1}^d x_i^{v_i} (R(v) - \|R(v)\|_1 x)$$

Notons que  $h : \Sigma^{(d)} \rightarrow \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : \sum y_i = 0\}$ .

## Preuve

Rappel :

$$Y_{n+1} = R(\xi(n+1)) - \|R(\xi(n+1))\|_1$$

Notre but :

$$\mathbb{E}_n Y_{n+1} = h(Z_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n Y_{n+1} &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \mathbb{P}_n(\xi(n+1) = v) (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \\ &= \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \binom{m}{v} \prod_{i=1}^d z_{n,i}^{v_i} (R(v) - \|R(v)\|_1 Z_n) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$h(x) = \sum_{v \in \Sigma_m^{(d)}} \binom{m}{v} \prod_{i=1}^d x_i^{v_i} (R(v) - \|R(v)\|_1 x)$$

Notons que  $h : \Sigma^{(d)} \rightarrow \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : \sum y_i = 0\}$ .

$$\text{On a bien } Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}).$$

## Heuristique de l'approximation stochastique

$$\text{On a bien } Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}).$$

Si  $h$  est une fonction Lipschitz, alors  $Z_n$  va asymptotiquement suivre le flot de l'équation différentielle  $y' = h(y)$ . [Duflo '90, Benaïm '99, Pemantle '07]

Dans notre exemple du réseau aléatoire récursif :

$U_1(n) := \#$  de nœuds de degré 2

$U_2(n) := \#$  de nœuds de degré  $\geq 3$

On a  $R \binom{2}{0} = \binom{-1}{2}$ ,  $R \binom{1}{1} = \binom{0}{1}$ ,  $R \binom{0}{2} = \binom{1}{0}$ ,

## Heuristique de l'approximation stochastique

$$\text{On a bien } Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}).$$

Si  $h$  est une fonction Lipschitz, alors  $Z_n$  va asymptotiquement suivre le flot de l'équation différentielle  $y' = h(y)$ .

[Duflo '90, Benaïm '99, Pemantle '07]

Dans notre exemple du réseau aléatoire récursif :

$U_1(n) := \#$  de nœuds de degré 2

$U_2(n) := \#$  de nœuds de degré  $\geq 3$

On a  $R\binom{2}{0} = \binom{-1}{2}$ ,  $R\binom{1}{1} = \binom{0}{1}$ ,  $R\binom{0}{2} = \binom{1}{0}$ , et donc

$$h(x) = x_1^2 \binom{-1}{2} + 2x_1 x_2 \binom{0}{1} + x_2^2 \binom{1}{0} - \binom{x_1}{x_2}.$$

# Heuristique de l'approximation stochastique

$$\text{On a bien } Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}).$$

Si  $h$  est une fonction Lipschitz, alors  $Z_n$  va asymptotiquement suivre le flot de l'équation différentielle  $y' = h(y)$ . [Duflo '90, Benaïm '99, Pemantle '07]

Dans notre exemple du réseau aléatoire récursif :

$U_1(n) := \#$  de nœuds de degré 2

$U_2(n) := \#$  de nœuds de degré  $\geq 3$

On a  $R\binom{2}{0} = \binom{-1}{2}$ ,  $R\binom{1}{1} = \binom{0}{1}$ ,  $R\binom{0}{2} = \binom{1}{0}$ , et donc

$$h(x) = x_1^2 \binom{-1}{2} + 2x_1 x_2 \binom{0}{1} + x_2^2 \binom{1}{0} - \binom{x_1}{x_2}.$$

On utilise  $x_2 = 1 - x_1$  et  $h_1 + h_2 = 0$  pour se limiter à une équation :

$$h_1(x) = -x^2 + (1-x)^2 - x = 1 - 3x.$$

**NB :** En fait, si  $h$  est linéaire, on peut trouver une martingale...

[Kuba & Mahmoud '17]

# Heuristique de l'approximation stochastique

$$\text{On a bien } Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n(h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}).$$

Si  $h$  est une fonction Lipschitz, alors  $Z_n$  va asymptotiquement suivre le flot de l'équation différentielle  $y' = h(y)$ . [Duflo '90, Benaïm '99, Pemantle '07]

Dans notre exemple du réseau aléatoire récursif :

$U_1(n) := \#$  de nœuds de degré 2

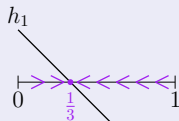
$U_2(n) := \#$  de nœuds de degré  $\geq 3$

On a  $R\binom{2}{0} = \binom{-1}{2}$ ,  $R\binom{1}{1} = \binom{0}{1}$ ,  $R\binom{0}{2} = \binom{1}{0}$ , et donc

$$h(x) = x_1^2 \binom{-1}{2} + 2x_1x_2 \binom{0}{1} + x_2^2 \binom{1}{0} - \binom{x_1}{x_2}.$$

On utilise  $x_2 = 1 - x_1$  et  $h_1 + h_2 = 0$  pour se limiter à une équation :

$$h_1(x) = -x^2 + (1-x)^2 - x = 1 - 3x.$$



**NB** : En fait, si  $h$  est linéaire, on peut trouver une martingale...

[Kuba & Mahmoud '17]



# Loi des grands nombres

Lemme (cas “diagonal”) :

Si  $h \equiv 0$ , alors  $Z_n \rightarrow Z_\infty$  p.s., et  $Z_\infty$  à une densité sur  $[0, 1]$ .

# Loi des grands nombres

## Lemme (cas “diagonal”) :

Si  $h \equiv 0$ , alors  $Z_n \rightarrow Z_\infty$  p.s., et  $Z_\infty$  à une densité sur  $[0, 1]$ .

• On appelle ensemble limite de  $Z$  l'ensemble de ses points d'accumulations :

$$L(Z) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} \{Z_m\}.$$

## Theorème :

[Lasmar, M. & Selmi '18]

Si  $h \neq 0$ , alors :

- ❶ presque sûrement,  $L(Z)$  est un ensemble compact et connexe stable par le flot de  $y' = h(y)$ .
- ❷ s'il existe  $x^*$  tel que  $h(x^*) = 0$  et  $\langle x - x^*, h(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ , alors  $Z_n \rightarrow x^*$  presque sûrement.

## Preuve

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

- $h(x^*) = 0$
- $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0 (\forall x)$

On pose  $V_n = \|Z_n - x^*\|^2$  :

$$V_{n+1} = V_n + \gamma_n^2 \|h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\|^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \rangle.$$

## Preuve

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

- $h(x^*) = 0$
- $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0 (\forall x)$

On pose  $V_n = \|Z_n - x^*\|^2$  :

$$V_{n+1} = V_n + \gamma_n^2 \|h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\|^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \rangle.$$

On prend l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n V_{n+1} &\leq V_n + K\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, \mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1} \rangle \\ &\leq V_n + K\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle + 2\gamma_n V_n^{1/2} \|\mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1}\|, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

## Preuve

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n (h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$$

- $h(x^*) = 0$
- $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0 (\forall x)$

On pose  $V_n = \|Z_n - x^*\|^2$  :

$$V_{n+1} = V_n + \gamma_n^2 \|h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\|^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \rangle.$$

On prend l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n V_{n+1} &\leq V_n + K\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, \mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1} \rangle \\ &\leq V_n + K\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle + 2\gamma_n V_n^{1/2} \|\mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1}\|, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Comme  $x^{1/2} \leq 1 \wedge x$ , on a

$$\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n (1 + 2\gamma_n \|\mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1}\|) + K\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle.$$

Il existe  $c > 0$  telle que  $\gamma_n \leq c/n$  et  $\|\mathbb{E}_n \varepsilon_{n+1}\| \leq c/n$ .

Au total nous avons  $\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n(1 + c/n^2) + K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle$ .

Posons  $W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c/i^2)^{-1} V_n$ , on a

$$\mathbb{E}_n W_{n+1} \leq W_n + \frac{K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle}{\prod_{i=1}^n (1 + c/i^2)},$$

Au total nous avons  $\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n(1 + c/n^2) + K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle$ .  
 Posons  $W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c/i^2)^{-1} V_n$ , on a

$$\mathbb{E}_n W_{n+1} \leq W_n + \frac{K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle}{\prod_{i=1}^n (1 + c/i^2)},$$

et donc, si  $\hat{W}_n = W_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K/i^2 + 2\gamma_i \langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle}{\prod_{j=1}^i (1 + c/j^2)}$ , on a  $\mathbb{E}_n \hat{W}_{n+1} \leq \hat{W}_n$  : on dit que  $(\hat{W}_n)_{n \geq 0}$  est une **sur-martingale**.

Au total nous avons  $\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n(1 + c/n^2) + K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle$ .  
 Posons  $W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c/i^2)^{-1} V_n$ , on a

$$\mathbb{E}_n W_{n+1} \leq W_n + \frac{K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle}{\prod_{i=1}^n (1 + c/i^2)},$$

et donc, si  $\hat{W}_n = W_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K/i^2 + 2\gamma_i \langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle}{\prod_{j=1}^i (1 + c/j^2)}$ , on a  $\mathbb{E}_n \hat{W}_{n+1} \leq \hat{W}_n$  : on dit que  $(\hat{W}_n)_{n \geq 0}$  est une **sur-martingale**.

### Théorème de Doob :

Toute sur-martingale positive converge p.s. vers une v.a. p.s. finie.

Donc  $\hat{W}_n \rightarrow \hat{W}_\infty$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$



Au total nous avons  $\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n(1 + c/n^2) + K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle$ .  
 Posons  $W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c/i^2)^{-1} V_n$ , on a

$$\mathbb{E}_n W_{n+1} \leq W_n + \frac{K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle}{\prod_{i=1}^n (1 + c/i^2)},$$

et donc, si  $\hat{W}_n = W_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K/i^2 + 2\gamma_i \langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle}{\prod_{j=1}^i (1 + c/j^2)}$ , on a  $\mathbb{E}_n \hat{W}_{n+1} \leq \hat{W}_n$  : on dit que  $(\hat{W}_n)_{n \geq 0}$  est une **sur-martingale**.

### Théorème de Doob :

Toute sur-martingale positive converge p.s. vers une v.a. p.s. finie.

Donc  $\hat{W}_n \rightarrow \hat{W}_\infty$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty \not\Rightarrow W_n \rightarrow W_\infty \dots$

Au total nous avons  $\mathbb{E}_n V_{n+1} \leq V_n(1 + c/n^2) + K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle$ .  
 Posons  $W_n = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + c/i^2)^{-1} V_n$ , on a

$$\mathbb{E}_n W_{n+1} \leq W_n + \frac{K/n^2 + 2\gamma_n \langle Z_n - x^*, h(Z_n) \rangle}{\prod_{i=1}^n (1 + c/i^2)},$$

et donc, si  $\hat{W}_n = W_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K/i^2 + 2\gamma_i \langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle}{\prod_{j=1}^i (1 + c/j^2)}$ , on a  $\mathbb{E}_n \hat{W}_{n+1} \leq \hat{W}_n$  : on dit que  $(\hat{W}_n)_{n \geq 0}$  est une **sur-martingale**.

### Théorème de Doob :

Toute sur-martingale positive converge p.s. vers une v.a. p.s. finie.

Donc  $\hat{W}_n \rightarrow \hat{W}_\infty$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty \not\Rightarrow W_n \rightarrow W_\infty \dots$

Posons  $T_a = \inf\{n \geq 0, W_n - \hat{W}_n \geq a\}$  :  $T_a$  est un "temps d'arrêt" (i.e.  $\forall n, \{T_a \leq n\}$  est mesurable par rapport à  $W_0, \dots, W_n$ ), et donc  $(\hat{W}_{n \wedge T_a})_{n \geq 0}$  est aussi une sur-martingale. [Exercice 1]

Conditionnellement à  $T_a = \infty$ ,  $W_n \rightarrow W_\infty$  et  $\sum_{i \geq 0} \gamma_i |\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle| < \infty$ .

Notre but : montrer que  $V_n = \|Z_n - x^*\| \rightarrow 0$  p.s.

Comme  $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{T_a = \infty\} = \Omega$ , on obtient que  $V_n \rightarrow V_\infty$  et

$$\sum_{i \geq 0} \gamma_i |\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle| < \infty \text{ p.s.}$$

Comme  $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{T_a = \infty\} = \Omega$ , on obtient que  $V_n \rightarrow V_\infty$  et

$$\sum_{i \geq 0} \gamma_i |\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle| < \infty \text{ p.s.}$$

Rappel :  $h(x^*) = 0$  et  $\langle x - x^*, h(x) \rangle < 0 (\forall x)$ . Cela implique en particulier que  $h(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ .

Si  $V_\infty \neq 0$ , alors il existe  $\varepsilon$  tel que  $\|Z_i - x^*\| \geq \varepsilon$  pour  $i$  assez grand.

Comme  $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{T_a = \infty\} = \Omega$ , on obtient que  $V_n \rightarrow V_\infty$  et

$$\sum_{i \geq 0} \gamma_i |\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle| < \infty \text{ p.s.}$$

Rappel :  $h(x^*) = 0$  et  $\langle x - x^*, h(x) \rangle < 0 (\forall x)$ . Cela implique en particulier que  $h(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ .

Si  $V_\infty \neq 0$ , alors il existe  $\varepsilon$  tel que  $\|Z_i - x^*\| \geq \varepsilon$  pour  $i$  assez grand.

La fonction  $x \mapsto \langle x - x^*, h(x) \rangle$  est strictement négative, et continue sur le compact  $\Sigma^{(d)} \setminus \mathcal{B}(x, \varepsilon)$ . Il existe donc  $\eta > 0$  tel que :  $\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle \leq -\varepsilon$ , et

$$\sum_{i \geq 0} \gamma_i |\langle Z_i - x^*, h(Z_i) \rangle| \geq \varepsilon \sum_{i \geq i_0} \gamma_i = +\infty$$

parce que  $\gamma_i = 1/(\|U(0)\|_1 + iS) \sim 1/(iS)$ . Impossible, donc  $V_\infty = 0$ .  $\square$

---

Notre but : montrer que  $V_n = \|Z_n - x^*\| \rightarrow 0$  p.s.

## Retour à l'énoncé

Lemme (cas "diagonal") :

Si  $h \equiv 0$ , alors  $Z_n \rightarrow Z_\infty$  p.s., et  $Z_\infty$  à une densité sur  $[0, 1]$ .

## Retour à l'énoncé

### Lemme (cas "diagonal") :

Si  $h \equiv 0$ , alors  $Z_n \rightarrow Z_\infty$  p.s., et  $Z_\infty$  à une densité sur  $[0, 1]$ .

- On appelle ensemble limite de  $Z$  l'ensemble de ses points d'accumulations :

$$L(Z) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} \{Z_m\}.$$

### Theorème :

[Lasmar, M. & Selmi '18]

Si  $h \neq 0$ , alors :

- 1 presque sûrement,  $L(Z)$  est un ensemble compact et connexe stable par le flot de  $y' = h(y)$ .
- 2 s'il existe  $x^*$  tel que  $h(x^*) = 0$  et  $\langle x - x^*, h(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ , alors  $Z_n \rightarrow x^*$  presque sûrement.

## Un peu décevant ?

- **Cas favorables** :  $h$  admet un unique zéro  $x^*$  sur  $\Sigma^{(d)}$ , et  $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ 
  - ▶ Vrai sur “la plupart” des exemples.
  - ▶ Ce  $x^*$  doit vérifier que toutes les v.p. de  $\nabla h(x^*)$  sont négatives.



## Un peu décevant ?

- **Cas favorables** :  $h$  admet un unique zéro  $x^*$  sur  $\Sigma^{(d)}$ , et  $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ 
  - ▶ Vrai sur “la plupart” des exemples.
  - ▶ Ce  $x^*$  doit vérifier que toutes les v.p. de  $\nabla h(x^*)$  sont négatives.
- Si  $m = 1$  le cas irréductible est “favorable” : l’unique zéro de  $h(x) = ({}^tR - S\text{Id})x$  ( $R$  =matrice de remplacement) sur  $\Sigma^{(d)}$  est le vecteur propre à gauche  $v_1$  associé à  $S$ . #AthreyaKarlin

## Un peu décevant ?

- **Cas favorables** :  $h$  admet un unique zéro  $x^*$  sur  $\Sigma^{(d)}$ , et  $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ 
  - ▶ Vrai sur “la plupart” des exemples.
  - ▶ Ce  $x^*$  doit vérifier que toutes les v.p. de  $\nabla h(x^*)$  sont négatives.
- Si  $m = 1$  le cas irréductible est “favorable” : l’unique zéro de  $h(x) = ({}^tR - S\text{Id})x$  ( $R$  =matrice de remplacement) sur  $\Sigma^{(d)}$  est le vecteur propre à gauche  $v_1$  associé à  $S$ . #AthreyaKarlin
- Cas non favorables  $\Leftrightarrow$  cas  $(m = 1)$ -non-irréductibles. Il est normal que ces cas soient plus compliqués. [Janson '06]

## Un peu décevant ?

- **Cas favorables** :  $h$  admet un unique zéro  $x^*$  sur  $\Sigma^{(d)}$ , et  $\langle h(x), x - x^* \rangle < 0$  pour tout  $x \in \Sigma^{(d)}$ 
  - ▶ Vrai sur “la plupart” des exemples.
  - ▶ Ce  $x^*$  doit vérifier que toutes les v.p. de  $\nabla h(x^*)$  sont négatives.
- Si  $m = 1$  le cas irréductible est “favorable” : l’unique zéro de  $h(x) = ({}^tR - S\text{Id})x$  ( $R$  =matrice de remplacement) sur  $\Sigma^{(d)}$  est le vecteur propre à gauche  $v_1$  associé à  $S$ . #AthreyaKarlin
- Cas non favorables  $\Leftrightarrow$  cas  $(m = 1)$ -non-irréductibles. Il est normal que ces cas soient plus compliqués. [Janson '06]
- Dans le cas affine ( $h(x) = Ax + b$ ) on peut appliquer la théorie des martingales. [Kuba & Mahmoud '17]

## Une bonne nouvelle

On dit que  $x^*$  est un zéro stable de  $h$  ssi toutes les valeurs propres de  $\nabla h(x^*)$  sont strictement négatives.

**Théorème [LMS++] :** Pour toute urne équilibrée :

Supposons que  $h$  admette un zéro stable  $x^*$  tel que  $Z_n \rightarrow x^*$  a.s. Soit  $\Lambda$  la valeur propre de  $-\nabla h(x^*)$  avec la plus petite partie réelle. Alors,

- si  $\operatorname{Re}(\Lambda) > S/2$ , alors  $\sqrt{n}(Z_n - x^*) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$  when  $n \rightarrow \infty$ .

Supposons de plus que tous les blocs de Jordan de  $\nabla h(x^*)$  associés à  $\Lambda$  sont de taille 1.

- Si  $\operatorname{Re}(\Lambda) = S/2$ , alors  $\sqrt{n/\log n}(Z_n - x^*) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Theta)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

- Si  $\operatorname{Re}(\Lambda) < S/2$ , alors  $n^{\operatorname{Re}(\Lambda)/S}(Z_n - x^*) \rightarrow W < +\infty$  p.s.

cf. [Zhang '16]

- $\Sigma$  et  $\Theta$  sont explicites et ne dépendent pas de  $U(0)$ .
- C'est bien une généralisation du cas  $m = 1$  de Janson et du cas "affine" de Kuba et Mahmoud.

[Janson '04, Kuba & Mahmoud '17]

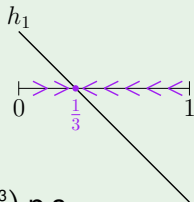
## Exemples à deux couleurs, $m = 2$

### Le graphe aléatoire récursif :

Rappelons que, dans ce cas,

$$R\binom{2}{0} = \binom{-1}{2}, \quad R\binom{1}{1} = \binom{0}{1}, \quad R\binom{0}{2} = \binom{1}{0}, \text{ et}$$

$$h_1(x) = 1 - 3x.$$



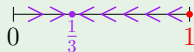
- par notre “loi des grands nombres”, on a  $Z_n \rightarrow \binom{1/3}{2/3}$  p.s.
- comme  $h' \equiv -3$ , alors  $\Lambda = 3 > S/2 = 1$ , et donc

$$n^{3/2} \left( Z_n - \binom{1/3}{2/3} \right) \rightarrow W \quad \text{p.s.}$$

## Exemples à deux couleurs, $m = 2$

### Un exemple non linéaire

Posons  $R\binom{2}{0} = \binom{4}{0}$ ,  $R\binom{1}{1} = \binom{1}{3}$ ,  $R\binom{0}{2} = \binom{1}{3}$ .



On a

$$h_1(x) = (1 - x)(1 - 3x).$$

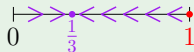
- par notre “loi des grands nombres”  $Z_n \rightarrow \binom{1/3}{2/3}$  p.s.
- comme  $-h'_1(1/3) = 2 = S/2$ , notre “TCL” donne

$$\sqrt{n/\log n} \left( Z_n - \binom{1/3}{2/3} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1/18).$$

Exemples à deux couleurs,  $m = 2$ 

## Un exemple non linéaire

Posons  $R\binom{2}{0} = \binom{4}{0}$ ,  $R\binom{1}{1} = \binom{1}{3}$ ,  $R\binom{0}{2} = \binom{1}{3}$ .



On a

$$h_1(x) = (1 - x)(1 - 3x).$$

- par notre “loi des grands nombres”  $Z_n \rightarrow \binom{1/3}{2/3}$  p.s.
- comme  $-h'_1(1/3) = 2 = S/2$ , notre “TCL” donne

$$\sqrt{n/\log n} \left( Z_n - \binom{1/3}{2/3} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1/18).$$

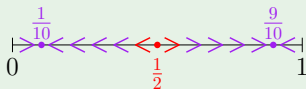
**Remarque** : Dans les exemples à deux couleurs, si  $m = 2$  il ne peut y avoir au maximum qu’un unique zéro stable, mais cela n’est plus vrai pour  $m = 3$ ...

## Exemple à deux couleurs, $m = 3$

### Un exemple avec deux zéros stables

Prenons  $R\binom{3}{0} = \binom{82}{9}$     $R\binom{2}{1} = \binom{91}{0}$     $R\binom{1}{2} = \binom{0}{91}$     $R\binom{0}{3} = \binom{9}{82}$ .

- $h_1(x) = -200(x - 1/10)(x - 1/2)(x - 9/10)$
- $h'_1(1/2) > 0$ ,  $h'_1(1/10) = h'_1(9/10) = -64$
- $\Lambda = 64 > 91/2 = S/2$ , donc



$Z_{n,1} \rightarrow X_\infty \in \{1/10, 9/10\}$    et    $\sqrt{n}(Z_{n,1} - X_\infty) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 4131/67340)$ .

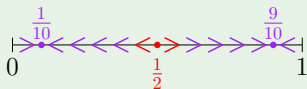


## Exemple à deux couleurs, $m = 3$

### Un exemple avec deux zéros stables

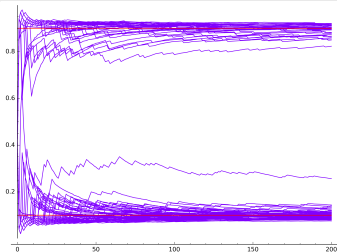
Prenons  $R\binom{3}{0} = \binom{82}{9}$     $R\binom{2}{1} = \binom{91}{0}$     $R\binom{1}{2} = \binom{0}{91}$     $R\binom{0}{3} = \binom{9}{82}$ .

- $h_1(x) = -200(x - 1/10)(x - 1/2)(x - 9/10)$
- $h'_1(1/2) > 0$ ,  $h'_1(1/10) = h'_1(9/10) = -64$
- $\Lambda = 64 > 91/2 = S/2$ , donc



$Z_{n,1} \rightarrow X_\infty \in \{1/10, 9/10\}$    et    $\sqrt{n}(Z_{n,1} - X_\infty) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 4131/67340)$ .

Simulation de 100 trajectoires (200 étapes chacune) commençant à  $\binom{2}{3/5}$  :

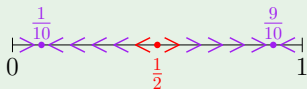


## Exemple à deux couleurs, $m = 3$

### Un exemple avec deux zéros stables

Prenons  $R\binom{3}{0} = \binom{82}{9}$   $R\binom{2}{1} = \binom{91}{0}$   $R\binom{1}{2} = \binom{0}{91}$   $R\binom{0}{3} = \binom{9}{82}$ .

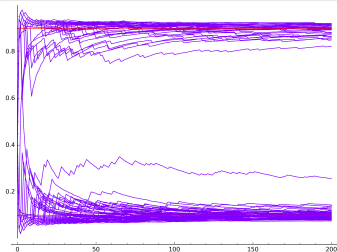
- $h_1(x) = -200(x - 1/10)(x - 1/2)(x - 9/10)$
- $h'_1(1/2) > 0$ ,  $h'_1(1/10) = h'_1(9/10) = -64$
- $\Lambda = 64 > 91/2 = S/2$ , donc



$Z_{n,1} \rightarrow X_\infty \in \{1/10, 9/10\}$  et  $\sqrt{n}(Z_{n,1} - X_\infty) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 4131/67340)$ .

Simulation de 100 trajectoires (200 étapes chacune) commençant à  $\binom{2}{3/5}$  :

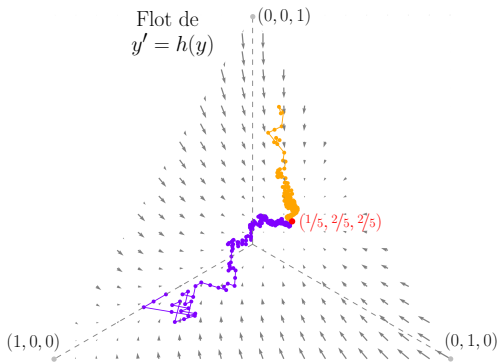
**NB** : expérimentalement, 35% de ces trajectoires convergent vers  $9/10$ .



## Exemples à trois couleurs ( $m = 2$ )

$$\begin{aligned}
 R : (2, 0, 0) &\mapsto (2, 0, 0) \\
 (0, 2, 0) &\mapsto (1, 0, 1) \\
 (0, 0, 2) &\mapsto (1, 1, 0) \\
 (1, 1, 0) &\mapsto (0, 0, 2) \\
 (1, 0, 1) &\mapsto (0, 2, 0) \\
 (0, 1, 1) &\mapsto (0, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Deux trajectoires de 200  
étapes chacune  
commençant respectivement  
en  $(6, 3, 3)$  et  $(2, 6, 20)$  :



$$\sqrt{n}(Z_n - (1/5, 2/5, 2/5)^T) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

$$\Sigma = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 19/13 & -6/13 \\ -1 & -6/13 & 19/13 \end{pmatrix}$$

$$\text{NB : } \Sigma \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

## Un exemple à trois couleurs “défavorable” : pierre-papier-ciseaux

$$R : (2, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0)$$

$$(0, 2, 0) \mapsto (0, 1, 0)$$

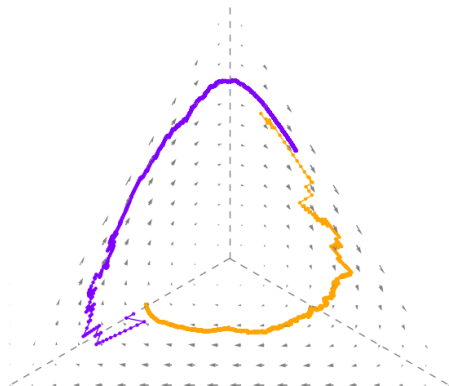
$$(0, 0, 2) \mapsto (0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 0) \mapsto (1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1) \mapsto (0, 1, 0)$$

$h$  a quatre zéros :  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  
 $(0, 0, 1)$  and  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , mais ils sont  
tous “répulsifs”.



**Théorème [Laslier & Laslier '17] :**

La trajectoire de  $Z_n$  s'accumule le long d'un cycle stable  
par le flot de  $y' = h(y)$ .

## Les urnes à multi-tirage

En appliquant la théorie de l'approximation stochastique (classique pour les processus renforcés), nous avons obtenu :

- convergence p.s. de la composition de l'urne dans les cas favorables (un zéro stable dont le domaine d'attraction est le domaine entier privé des éventuels zéros instables) ;
- conditionnellement à  $Z_n \rightarrow x^*$ , un théorème qui donne la vitesse de convergence vers cette limite en fonction du trou spectral de  $\nabla h(x^*)$ .

Malheureusement :

- il n'y a pas de caractérisation "facile" des cas favorables : il faut calculer  $h$ , et trouver ses zéros stables ;
- la vitesse de convergence n'est connue que si toutes les valeurs propres de  $\nabla h(x^*)$  sur  $\Sigma^{(d)}$  sont strictement négatives.

## Références : Urnes à multi-tirage

- [Benaïm '99] Dynamics of stochastic approximation algorithms. M. Benaïm. Séminaire de Probabilités XXXIII, 1999.
- [Duflo '90] Méthodes itératives aléatoires. M. Duflo, Ed. Masson, 1990.
- [Janson '04] Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. S. Janson. *Stochastic Processes and their Applications*, 2004.
- [Janson '06] Limit theorems for triangular urn schemes. S. Janson. *Probability Theory and Related Fields*, 2006.
- [Laslier & Laslier '17] Reinforcement learning from comparisons : Three alternatives is enough, two is not. B. Laslier & J.F. Laslier *Annals of Applied Probability*, 2017
- [Lasmar, M & Selmi '18] Multiple drawing multi-colour urns by stochastic approximation. N. Lasmar, C. Mailler & O. Selmi. *Journal of Applied Probability*, 2018.
- [Kuba & Mahmoud '17] Two-colour balanced affine urn models with multiple drawings. M. Kuba & H. Mahmoud. *Advances in Applied Mathematics*, 2017.
- [Pemantle '07] A survey of random processes with reinforcement R. Pemantle. *Probability Surveys*, 2007.
- [Zhang '16] Central limit theorems of a recursive stochastic algorithm with applications to adaptive designs. L.X. Zhang. *Annals of Applied Probability*, 2016.

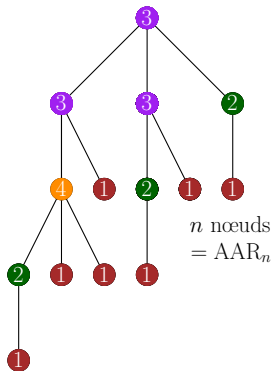
# Urnes de Pólya à une infinité de couleurs

# Une infinité de couleurs ?

Peut-on généraliser la théorie des urnes de Pólya classiques irréductibles à une infinité de couleurs ?

Cas diagonal, cf. [Blackwell & MacQueen '73]

Applications :



Profil de l'AAR.

## Estimer des mesures quasi-stationnaires :

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov sur un espace  $E \cup \{\emptyset\}$  et telle que  $\emptyset$  est un puit.

Une mesure  $\nu$  est quasi-stationnaire pour  $X$  s'il existe  $x \in E$  tel que, pour tout Borel set  $B \in E$ ,

$$\mathbb{P}_x (X_n \in B | X_n \neq \emptyset) \rightarrow \nu(B).$$

Si l'espace est fini, alors on peut approximer la/les MQS en utilisant une urne de Pólya : on voudrait faire pareil quand l'espace est infini.

[Aldous, Flannery & Palacios '88][Exercice 5]



# Processus de Pólya à valeur mesure

[Bandyopadhyay & Thacker ++][M & Marckert '17]

On définit  $(m_n)_{n \geq 0}$  une suite de mesures positives aléatoires sur un espace Polonais  $\mathcal{P}$  (e.g.  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbb{R}^d$  ou tout espace métrique complet).

Deux paramètres :

- la **composition initiale**  $m_0$  (une mesure positive sur  $\mathcal{P}$ ) ;
- les **mesures de remplacement**  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$  (un ensemble de mesures positives sur  $\mathcal{P}$ ).

## Dictionnaire

- $\mathcal{P}$  est l'ensemble des couleurs ;
- $m_n$  est la composition de l'urne au temps  $n$  ;
- Pour tout Borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$ ,  $m_n(\mathcal{B})$  est la *masse des boules de couleur dans  $\mathcal{B}$  dans l'urne au temps  $n$* .

## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

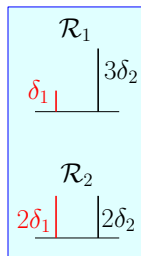
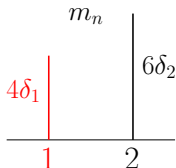
Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$  ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

Le cas original de l'urne à deux couleurs :

$$m_0 = U_1(0)\delta_1 + U_2(0)\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 = a\delta_1 + b\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = c\delta_1 + d\delta_2.$$

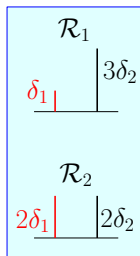
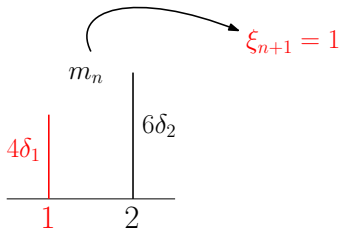


## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

Le cas original de l'urne à deux couleurs :

$$m_0 = U_1(0)\delta_1 + U_2(0)\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 = a\delta_1 + b\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = c\delta_1 + d\delta_2.$$

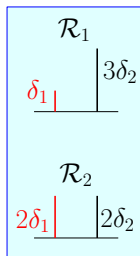
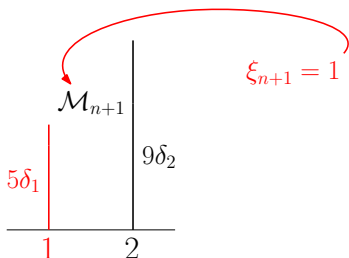


## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

Le cas original de l'urne à deux couleurs :

$$m_0 = U_1(0)\delta_1 + U_2(0)\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 = a\delta_1 + b\delta_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = c\delta_1 + d\delta_2.$$

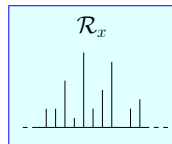
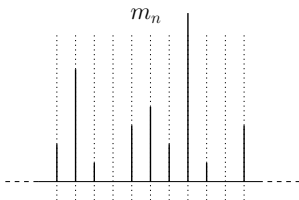


## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n / m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

## Remarques :

- L'ensemble des couleurs peut désormais être infini,

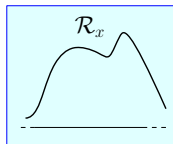
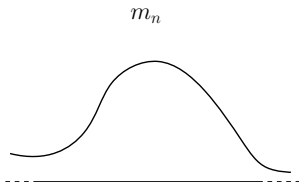


## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

### Remarques :

- L'ensemble des couleurs peut désormais être infini, voire **non-dénombrable**.
- La mesure de composition  $m_n$  peut être à densité (les boules ont alors un poids infinitésimal).



## Définition du processus de Markov $(m_n)_{n \geq 0}$

Au temps  $n + 1$ , on tire au hasard une couleur  $\xi_{n+1} \in \mathcal{P}$  selon la loi  $m_n/m_n(\mathcal{P})$ ; puis on définit  $m_{n+1} = m_n + \mathcal{R}_{\xi_{n+1}}$ .

## Remarques :

- L'ensemble des couleurs peut désormais être infini, voire **non-dénombrable**.
- La mesure de composition  $m_n$  peut être à densité (les boules ont alors un poids infinitésimal).

Sous quelles conditions ce processus *converge-t-il* ?

**Convergence de mesures** :  $\mu_n \rightarrow \mu$  faiblement ssi

pour toute fonction continue bornée  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ .

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Preuve :

$$\tilde{m}_{n+1} = \frac{m_n}{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1}$$



## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Preuve :

$$\tilde{m}_{n+1} = \frac{m_n}{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} = \tilde{m}_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1}$$

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{n+1} &= \frac{m_n}{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} = \tilde{m}_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} \\ &= \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\mathcal{R}_{\xi(n+1)} - \tilde{m}_n\right)}_{=: Y_{n+1}} \end{aligned}$$

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{n+1} &= \frac{m_n}{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} = \tilde{m}_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} \\ &= \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\mathcal{R}_{\xi(n+1)} - \tilde{m}_n\right)}_{=: Y_{n+1}} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (\mathbb{E}_n Y_{n+1} + \Delta M_{n+1}) \end{aligned}$$

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{n+1} &= \frac{m_n}{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} = \tilde{m}_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\mathcal{R}_{\xi(n+1)}}{n+1} \\ &= \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\mathcal{R}_{\xi(n+1)} - \tilde{m}_n\right)}_{=: Y_{n+1}} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (\mathbb{E}_n Y_{n+1} + \Delta M_{n+1}) \end{aligned}$$

On a bien  $\mathbb{E}_n Y_{n+1} = \mathbb{E}_n \mathcal{R}_{\xi(n+1)} - \tilde{m}_n = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\tilde{m}_n(x) - \tilde{m}_n = h(\tilde{m}_n)$   
car  $\xi(n+1) \sim \tilde{m}_n$  conditionnellement à  $\tilde{m}_n$ . □

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Donc  $(m_n)_{n \geq 0}$  est un approximation stochastique à valeurs dans  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ , l'espace des mesures sur  $\mathcal{P}$ ...

- Quand l'espace  $\mathcal{P}$  est compact, c'est relativement standard, et on peut montrer que  $(\tilde{m}_n)_{n \geq 0}$  suit le flot de

$$\frac{d\mu_t}{dt} = h(\mu_t).$$

[Benaïm '99]

## Approximation stochastique

On suppose que l'urne est équilibrée :  $m_0(\mathcal{P}) = \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1 (\forall x)$ .

**Lemme [M & Villemonais ++] :**

Posons  $\tilde{m}_n = m_n/(n+1)$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\tilde{m}_{n+1} = \tilde{m}_n + \frac{1}{n+1} (h(\tilde{m}_n) + \Delta M_{n+1}),$$

avec  $h(\mu) = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu(x) - \mu$ .

Donc  $(m_n)_{n \geq 0}$  est un approximation stochastique à valeurs dans  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ , l'espace des mesures sur  $\mathcal{P}$ ...

- Quand l'espace  $\mathcal{P}$  est compact, c'est relativement standard, et on peut montrer que  $(\tilde{m}_n)_{n \geq 0}$  suit le flot de

$$\frac{d\mu_t}{dt} = h(\mu_t).$$

[Benaïm '99]

- Avec des hypothèse (de type "Lyapunov") sur  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , on peut montrer que cela marche aussi si  $\mathcal{P}$  n'est pas compact.

## Approximation stochastique

On sait que  $(\tilde{m}_n)_{n \geq 0}$  suit le flot de 
$$\frac{d\mu_t}{dt} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu_t(x) - \mu_t.$$

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  la chaîne de Markov de saut à valeurs dans  $\mathcal{P}$  telle que :  $X_0 \sim \mu_0$ , la chaîne saute à taux 1, si elle est en  $x$ , elle saute vers une position aléatoire, distribuée comme  $\mathcal{R}_x$ .

Alors  $X_t \sim \mu_t$  pour tout  $t \geq 0$ .

## Approximation stochastique

On sait que  $(\tilde{m}_n)_{n \geq 0}$  suit le flot de 
$$\frac{d\mu_t}{dt} = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_x d\mu_t(x) - \mu_t.$$

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  la chaîne de Markov de saut à valeurs dans  $\mathcal{P}$  telle que :  $X_0 \sim \mu_0$ , la chaîne saute à taux 1, si elle est en  $x$ , elle saute vers une position aléatoire, distribuée comme  $\mathcal{R}_x$ .

Alors  $X_t \sim \mu_t$  pour tout  $t \geq 0$ .

Donc, s'il existe une mesure de probabilité  $\nu$  telle que  $X_t \rightarrow \nu$  en loi quand  $t \rightarrow \infty$ , pour toute distribution initiale  $\mu_0$  (on dit que  $X$  est "ergodique"), alors  $\tilde{m}_n \rightarrow \nu$  presque sûrement !

### Théorème [M & Villemonais] :

Si la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$  est ergodique de distribution limite  $\nu$  et si  $\mathcal{P}$  est compact, alors  $\tilde{m}_n \rightarrow \nu$  p.s ( $n \rightarrow \infty$ ).

---

$W_{n+1} \sim \mathcal{R}_{W_n}$ , il s'agit de la version en temps discret de  $(X_t)_{t \geq 0}$



## Théorème [M & Villemonais ++] :

Si la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$  est ergodique de distribution limite  $\nu$  et si  $\mathcal{P}$  est compact, alors  $\tilde{m}_n \rightarrow \nu$  p.s. ( $n \rightarrow \infty$ ).

Appliquons ce résultat au cas classique de l'urne  $(U(n))_{n \geq 0}$  à  $d$  couleurs avec matrice de remplacement irréductible  $R$  et balance  $S$ .

On pose  $\mathcal{P} = \{1, \dots, d\}$  et

$$m_n = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^d U_i(n) \delta_i \quad (\forall n).$$

Alors  $m_n$  est le MVPP de mesures de remplacement

$$\mathcal{R}_i = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^d R_{i,j} \delta_j \quad (\forall i).$$

- La chaîne  $(W_n)_{n \geq 0}$  a pour matrice de transition la matrice  $R/S$
- $R/S$  est irréductible  $\Rightarrow (W_n)_{n \geq 0}$  est ergodique et converge vers  $\nu = \sum_{i=1}^d u_i \delta_i$  où  $\boxed{u^{R/S} = u \Leftrightarrow uR = Su}$ .
- Donc  $m_n/n \rightarrow \nu$  p.s.  $\Leftrightarrow U(n)/n \rightarrow u$  p.s.

[Athreya & Karlin '68]



## Approximation stochastique

### Théorème [M & Villemonais ++] :

Si la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$  est ergodique de distribution limite  $\nu$  et si  $\mathcal{P}$  est compact, alors  $\tilde{m}_n \rightarrow \nu$  p.s ( $n \rightarrow \infty$ ).

- On peut aussi traiter le cas où  $\mathcal{P}$  n'est pas compact sous l'hypothèse supplémentaire qu'il existe  $V : \mathcal{P} \rightarrow [1, \infty)$ , telle que
  - ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $\{x \in \mathcal{P} : V(x) \leq n\}$  est relativement compact
  - ▶ il existe  $C > 0$  et  $\theta \in (0, 1)$  tels que

$$\int_{\mathcal{P}} V(y) d\mathcal{R}_x(y) \leq \theta V(x) + C \quad (\forall x \in \mathcal{P}).$$

## Approximation stochastique

### Théorème [M & Villemonais ++] :

Si la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$  est ergodique de distribution limite  $\nu$  et si  $\mathcal{P}$  est compact, alors  $\tilde{m}_n \rightarrow \nu$  p.s ( $n \rightarrow \infty$ ).

- On peut aussi traiter le cas où  $\mathcal{P}$  n'est pas compact sous l'hypothèse supplémentaire qu'il existe  $V : \mathcal{P} \rightarrow [1, \infty)$ , telle que
  - ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $\{x \in \mathcal{P} : V(x) \leq n\}$  est relativement compact
  - ▶ il existe  $C > 0$  et  $\theta \in (0, 1)$  tels que

$$\int_{\mathcal{P}} V(y) d\mathcal{R}_x(y) \leq \theta V(x) + C \quad (\forall x \in \mathcal{P}).$$

- La cas non-équilibré est aussi faisable :
  - ▶ il faut supposer que  $\sup_{x \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_x(\mathcal{P}) \leq 1$
  - ▶ et que la chaîne de Markov sur  $\mathcal{P} \cup \{\emptyset\}$  de noyau  $\mathcal{R}_x + (1 - \mathcal{R}_x(\mathcal{P}))\delta_{\emptyset}$ , absorbée à  $\emptyset$  admet une unique MQS  $\nu$ .
- On peut aussi rajouter des “poids” aux couleurs, “retirer des boules” de l'urne, et rendre la règle de remplacement aléatoire.

## Application : encore l'AAR

$U_i(n)$  = nombre de nœuds de degré  $i$  dans  $AAR_n$ .

$m_n := \sum_{i=1}^{\infty} U_i(n)\delta_i$  est un MVPP avec mesures de remplacement

- $\mathcal{R}_0 = \delta_1$ ,

- $\mathcal{R}_i = \delta_{i+1} - \delta_i + \delta_1$

[on a le droit de retirer des boules]

On pose  $V(x) = (3/2)^x$  et notre théorème s'applique :

$$\tilde{m}_n := \frac{m_n}{n} \rightarrow \nu, \text{ p.s.}, \text{ où } \nu_i = 2^{-i} (i \geq 1).$$

### Théorème :

En fait, on obtient un résultat un tout petit peu plus fort :

$$\int f d\tilde{m}_n \rightarrow \int f d\nu \text{ p.s.},$$

pour toute fonction continue  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f(x) = o((3/2)^x)$  quand  $X \rightarrow \infty$ .

[répond partiellement à une question de Janson '04]

On est loin d'obtenir un TCL, ceci dit...

## Une autre approche : par branchement

Dans cette section, on traite le cas où la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  n'est ergodique qu'après renormalisation :

### Définition :

On dit que la chaîne de Markov  $(W_n)_{n \geq 0}$  est  $(a_n, b_n)$ -ergodique si  $\frac{W_n - b_n}{a_n} \Rightarrow \gamma$  en distribution ( $n \rightarrow \infty$ ) et  $\gamma$  ne dépend pas de  $W_0$ .

On suppose que :

- $0 < m_0(\mathcal{P}) < \infty$ ,
- $\mathcal{R}_x(\mathcal{P}) = 1$  pour tout  $x \in \mathcal{P}$  (l'urne est équilibrée),
- $(W_n)_{n \geq 0}$  est  $(a_n, b_n)$ -ergodique de distribution limite  $\gamma$ ,
- pour tout  $x \in \mathcal{P}$ , pour tout  $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n} - b_n}{a_n} = f(x) \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n}}{a_n} = g(x),$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions mesurables.

## Une autre loi des grands nombres

### Théorème [M & Marckert 17] :

Sous toutes ces hypothèses,

$$n^{-1} m_n(a_{\log n} \cdot + b_{\log n}) \rightarrow \nu \quad \text{en probas,}$$

où  $\nu$  est la distribution de  $\Gamma g(\Lambda) + f(\Lambda)$ , où  $\Gamma \sim \gamma$  et  $\Lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sont indépendantes.

N.B. : si  $X_n \sim m_n$  alors  $\frac{X_n - b_{\log n}}{a_{\log n}} \sim m_n(a_{\log n} \cdot + b_{\log n})$ .

### Exemples :

- Classique irréductible : mais on obtient un résultat plus faible que [Athreya & Karlin '68] (en proba. au lieu de p.s.) ;
- On peut traiter des cas qui ne sont pas couverts par [M & Villemonais ++] :  $a_n \neq 1$  ou  $b_n \neq 0$ .

# Un exemple : le cas de la marche aléatoire simple

Lemme :  $\Delta$  r.v. de moyenne  $m < \infty$  et variance  $\sigma^2 < \infty$ .

Si  $\mathcal{R}_x$  est la distribution de  $x + \Delta$ , alors

$$f(x) = mx, \quad g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

**Preuve :**  $W_n = W_0 + \sum_{i=1}^n \Delta_i$  où  $(\Delta_i)_i$  est une suite i.i.d. de copies de  $\Delta$ .

Par le TCL,  $\frac{W_n - mn}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) =: \gamma$ .

Donc,  $a_n = \sqrt{n}$  et  $b_n = mn$ , et  $(\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon_n = o(1))$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n} - b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n) - mn}{\sqrt{n}} = mx,$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+x\sqrt{n}+\varepsilon_n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

# Un exemple : le cas de la marche aléatoire simple

Lemme :  $\Delta$  r.v. de moyenne  $m < \infty$  et variance  $\sigma^2 < \infty$ .

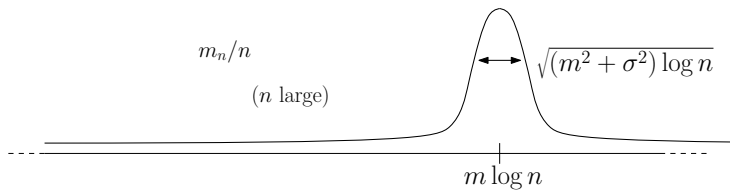
Si  $\mathcal{R}_x$  est la distribution de  $x + \Delta$ , alors

$$f(x) = mx, \quad g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Le théorème s'applique donc, et on obtient

$$n^{-1} m_n (\sqrt{\log n} \cdot + m \log n) \rightarrow \mathcal{N}(0, m^2 + \sigma^2), \text{ en proba.,}$$

car  $\mathcal{N}(0, m^2 + \sigma^2)$  est la loi de  $m\Lambda + \Phi$  ( $\Lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$  indep. de  $\Phi \sim \nu$ ).



[Janson '18] montre convergence p.s. dans ce cas!



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

On suppose pour la preuve  
que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

On suppose pour la preuve  
que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .

$m_0$

## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

On suppose pour la preuve  
que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .

$m_0$

## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

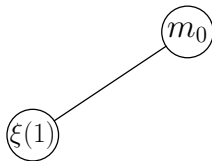
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

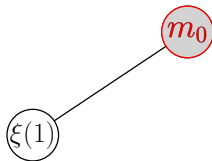
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

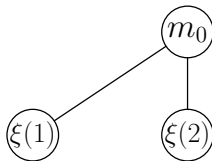
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

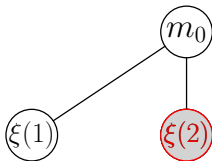
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

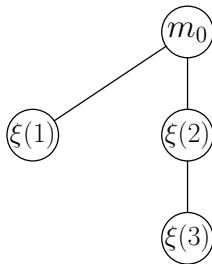
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .





## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

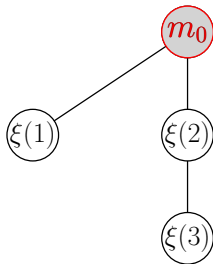
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

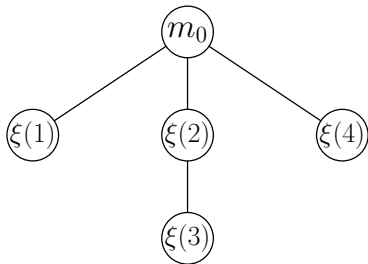
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



## Couplage avec une chaîne de Markov branchante

$$\text{On a } \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right),$$

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

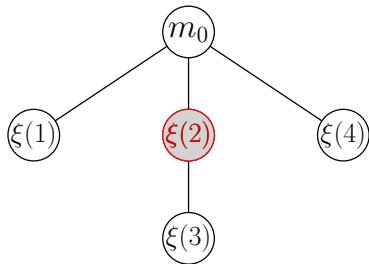
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

### Idée clef :

Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .



# Couplage avec une chaîne de Markov branchante

On a  $\frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left( m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)} \right)$ ,

où  $\xi(i)$  est la couleur tirée au temps  $i$ .

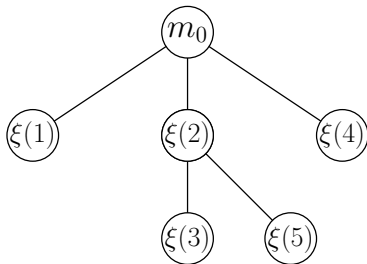
On suppose pour la preuve que  $m_0(\mathcal{P}) = 1$ .

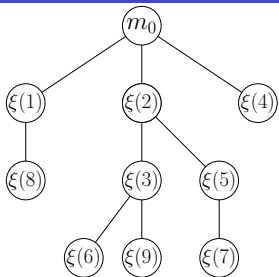
On couple le processus de Pólya avec une **chaîne de Markov branchante (CMB)** sur l'AAR :

## Idée clef :

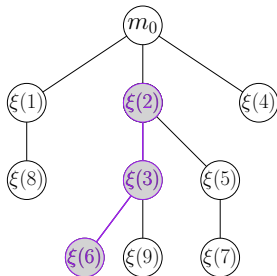
Tirer la couleur  $\xi(i+1)$  selon  $m_i/i$  est équivalent à

- tirer un entier  $u$  uniformément au hasard dans  $\{0, \dots, i\}$  ;
- si  $u = 0$ , tirer  $\xi(i+1)$  selon  $m_0$  ;
- sinon, tirer  $\xi(i+1)$  selon  $\mathcal{R}_{\xi(u)}$ .

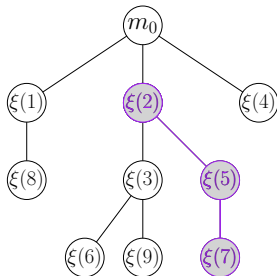




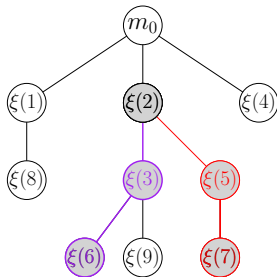
- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;



- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;

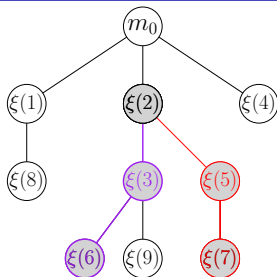


- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;



- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;
  - deux branches distinctes sont indép.

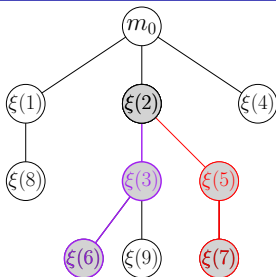




- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - ▶ la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;
  - ▶ deux branches distinctes sont indép.

NB :  $\tilde{m}_n = \frac{1}{n} (m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)})$  est la loi de l'étiquette du "prochain" nœud : nœud numéro  $n + 1$ .

Notons cette étiquette  $X(\nu_{n+1})$ .



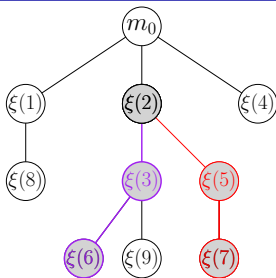
- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - ▶ la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;
  - ▶ deux branches distinctes sont indép.

NB :  $\tilde{m}_n = \frac{1}{n} (m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)})$  est la loi de l'étiquette du "prochain" nœud : nœud numéro  $n+1$ .

Notons cette étiquette  $X(\nu_{n+1})$ .

### On sait que

- $X(\nu_{n+1}) = W_{|\nu_{n+1}|}$  en loi,
- $\frac{|\nu_{n+1}| - \log n}{\sqrt{\log n}} \rightarrow \Lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$  en loi,
- $\frac{W_n - b_n}{a_n} \rightarrow \Gamma \sim \gamma$  en loi.



- l'arbre sous-jacent est l'AAR ;
- les étiquettes sont une CMB de noyau  $(\mathcal{R}_x)_{x \in \mathcal{P}}$ , i.e.
  - la suite des étiquettes le long de chaque branche à la même loi que  $(W_n)_{n \geq 0}$  ;
  - deux branches distinctes sont indép.

NB :  $\tilde{m}_n = \frac{1}{n} (m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_{\xi(i)})$  est la loi de l'étiquette du "prochain" nœud : nœud numéro  $n + 1$ .

Notons cette étiquette  $X(\nu_{n+1})$ .

$$\frac{X(\nu_{n+1}) - b_{\log n}}{a_{\log n}} = \frac{a_{|\nu_{n+1}|}}{a_{\log n}} \frac{X(\nu_{n+1}) - b_{|\nu_{n+1}|}}{a_{|\nu_{n+1}|}} + \frac{b_{|\nu_{n+1}|} - b_{\log n}}{a_{\log n}} \rightarrow f(\Lambda)\Gamma + g(\Lambda)$$

Cela implique que  $\mathbb{E}[\tilde{m}_n(a_{\log n} \cdot + b_{\log n})] \rightarrow \nu$ .

□

On sait que

- $X(\nu_{n+1}) = W_{|\nu_{n+1}|}$  en loi,
- $\frac{|\nu_{n+1}| - \log n}{\sqrt{\log n}} \rightarrow \Lambda \sim \mathcal{N}(0, 1)$  en loi,
- $\frac{W_n - b_n}{a_n} \rightarrow \Gamma \sim \gamma$  en loi.

# Conclusion

Nous avons réussi à généraliser le modèle des urnes de Pólya irréductibles à une infinité de couleurs en exploitant le lien avec les chaînes de Markov branchantes sur l'AAR.

- Une loi forte des grands nombres quand la chaîne de Markov sous-jacente est ergodique sans renormalisation (approximation stochastique).
- Une loi faible des grands nombres dans les cas avec renormalisation (méthodes de branchement).

## Problèmes ouverts :

- quid des fluctuations autour de la limite p.s. ? (TCL)
- peut-on traiter les urnes à tirage multiple et infinité de couleurs ?

## Références : Urnes à une infinité de couleurs

- [Aldous, Flannery & Palacios '88] Two applications of urn processes [...]. *Probability in the engineering and informational sciences*, 1988.
- [Bandyopadhyay & Thacker ++] A new approach to Pólya urn schemes and its infinite color generalization. A. Bandyopadhyay & D. Thacker. ArXiv:1606.05317.
- [Bandyopadhyay & Thacker 14] Rate of convergence and large deviation for the infinite color Pólya urn schemes. A. Bandyopadhyay & D. Thacker. *Statistics and Probability Letters*, 2014.
- [Blackwell & MacQueen '73] Ferguson distributions via Pólya urn schemes. D. Blackwell & J.B. MacQueen. *Annals of Statistics*, 1973.
- [Janson ++] A.s. convergence for infinite colour Pólya urns associated with random walks. S. Janson. ArXiv:1803.04207.
- [M & Marckert '17] Measure-valued Pólya processes. C. Mailler & J.-F. Marckert. *Electronic Journal of Probability*, 2017.
- [M & Villemonais ++] Stochastic approximation on non-compact measure spaces and application to measure-valued Pólya processes. C. Mailler & D. Villemonais. ArXiv:1809.01461.

- 1 Urnes de Pólya classiques et martingales
  - a L'urne "originelle" de Pólya et Eggenberger
  - b Le cas "irréductible" : une loi des grands nombres...
  - c ... un "théorème central limite"
  - d ... et un exemple d'application : le profil de l'arbre aléatoire récursif
  
- 2 Urnes à tirage multiple et approximation stochastique
  - a Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif
  - b L'approximation stochastique
  - c Une loi des grands nombres et un théorème central limite
  
- 3 Urnes de Pólya à une infinité de couleurs
  - a Motivation
  - b Étude par approximation stochastique
  - c Une autre approche

- 1 Urnes de Pólya classiques et martingales
  - a L'urne "originelle" de Pólya et Eggenberger
  - b Le cas "irréductible" : une loi des grands nombres...
  - c ... un "théorème central limite"
  - d ... et un exemple d'application : le profil de l'arbre aléatoire récursif
  
- 2 Urnes à tirage multiple et approximation stochastique
  - a Un exemple d'application : le réseau aléatoire récursif
  - b L'approximation stochastique
  - c Une loi des grands nombres et un théorème central limite
  
- 3 Urnes de Pólya à une infinité de couleurs
  - a Motivation
  - b Étude par approximation stochastique
  - c Une autre approche

Merci !!

# Exercices



## Exercice 1 : temps d'arrêts\*

Pour le contexte, voir page 31.

- On rappelle qu'une suite de variables aléatoires  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une sur-martingale si, pour tout  $n \geq 0$ ,  $M_n \geq \mathbb{E}_n M_{n+1}$ .
- On dit qu'une variable  $T$  est un temps d'arrêt pour  $(M_n)_{n \geq 0}$  si  $\{T \leq n\}$  est  $(M_0, \dots, M_n)$ -mesurable pour tout  $n$ .

Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une sur-martingale et  $T$  un temps d'arrêt pour  $(M_n)_{n \geq 0}$ .  
Montrer que  $(M_{n \wedge T})_{n \geq 0}$  est une sur-martingale.

## Exercice 2 : martingale\*

Pour le contexte, voir page 15.

Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale. On pose  $\Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Montrer que si  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[(\Delta M_n)^2] < +\infty$ , alors  $(M_n)_{n \geq 0}$  est uniformément bornée dans  $L^2$ .

## Exercice 3 : L'urne originelle (1/2)\*

On considère l'urne de composition initiale  $\binom{1}{1}$  et de matrice de remplacement  $R = \text{Id}_2$ . On note  $B_n$  le nombre de boules de couleur 1 (blanc) et  $W_n$  le nombre de boules de couleur 2 (wengé) que l'on a piochées avant l'étape  $n$ .<sup>1</sup>

- a) Montrer que  $(M_n = (B_n + 1)/(n + 2))_{n \geq 0}$  est une martingale. En déduire qu'elle converge presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ . Notons sa limite  $W$ .
- b) Calculer  $\mathbb{P}(B_n = k)$  pour tout entier  $1 \leq k \leq n$  et en déduire la distribution de la limite de  $W$ .
- c) Montrer que, pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\left( N_n(\theta) = \frac{(n+1)!}{B_n!(n-B_n)!} \theta^{B_n} (1-\theta)^{n-B_n} \right)_{n \geq 0}$$

est aussi une martingale.

1. Il y a donc  $B_n + 1$  boules blanches dans l'urne au temps  $n$ .

## Exercice 3 : L'urne originelle (2/2)<sup>\*\*\*</sup>

Questions supplémentaires pour les experts :

[Williams '91]

- d Soit  $W$  une variable aléatoire tirée uniformément au hasard dans  $[0, 1]$ . Conditionnellement à  $W$ , on définit une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de v.a. i.i.d. à valeurs dans  $\{0, 1\}$  telles que  $\mathbb{P}(X_n = 1 | W) = W$ . On note  $A_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Montrer que  $A_n = B_n$  en loi pour tout  $n \geq 1$ .
- e Montrer que  $N_n(\theta)$  est la densité de  $W$  étant donnés  $B_1, \dots, B_n$ .<sup>2</sup>

---

2. Il faudra utiliser que pour toute martingale bornée uniformément dans  $L^1$  dont on note la limite p.s.  $M_\infty$ ,  $\mathbb{E}_n M_\infty = M_n$  ( $\forall n$ ).

## Exercice 4 : Arbre à attachement préférentiel

L'arbre à attachement préférentiel est défini comme suit :  $AAP_0$  est réduit à sa racine. À l'étape  $n + 1$ , on ajoute le nœud numéro  $n + 1$  ( $\nu_{n+1}$ ) à l'arbre, on le relie à un nœud  $\nu_{\xi(n+1)}$  choisi au hasard comme suit parmi les  $n$  premiers nœuds :

$$\mathbb{P}(\xi(n+1) = i) = \frac{\deg_n(i)}{2n},$$

où  $\deg_n(i)$  est le degré de  $\nu_i$  dans  $AAP_n$ .

- a) Pourquoi a-t-on, pour tout  $n$ ,  $\sum_{i=1}^n \deg_n(i) = 2n$ ?
- b) Notons  $X_i(n)$  le nombre de nœuds de degré  $i$  dans  $AAP_n$ . Utiliser une urne de Pólya (à une infinité de couleurs ?) pour montrer que  $X_i(n)/n \rightarrow \frac{4}{i(i+1)(i+2)}$  pour tout  $i > 1$ ,  $X_1(n)/n \rightarrow 2/3$ .

Notez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_i(n)}{n} = \frac{\kappa}{i(i+1)(i+2)} \sim \kappa i^{-3}$ . Un graphe vérifiant cette propriété est dit "scale-free". C'est une propriété typique des grands réseaux (type internet, réseaux sociaux, etc).

## Ex. 5 : Urnes de Pólya et quasi-stationarité\*\*\*\* (1/2)

[Aldous, Flannery &amp; Palacios '88]

Soit  $R = (R_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  une matrice à coefficients positifs. On note  $M = \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d R_{i,j}$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  la chaîne de Markov sur  $\{0, 1, \dots, d\}$  absorbée en 0 et telle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} R_{i,j}/M & \text{si } j \neq 0 \\ 1 - \sum_{j=1}^d R_{i,j}/M & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

### Théorème [Darroch et Seneta '65] :

Il existe une distribution de probabilité  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  tel que  $\sum_i \alpha_i = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_n \neq 0) = \alpha_i$ . Aussi,  $\alpha$  est un vecteur propre à gauche de  $R$  pour sa plus grande valeur propre.

## Ex. 5 : Urnes de Pólya et quasi-stationarité\*\*\*\* (2/2)

On définit  $(V_n)_{n \geq 1}$  le processus de Markov défini comme suit :  $V_1 = 1$  et, conditionnellement à  $V_1, \dots, V_n$ ,

$$\mathbb{P}_n(V_{n+1} = j) = R_{V_n, j} / M + \left( 1 - \sum_{\ell=1}^d R_{V_n, \ell} / M \right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{V_i=j}.$$

Informellement  $V_n$  évolue comme la chaîne de Markov  $X$ , sauf quand elle est absorbée à 0 ; quand cela arrive, elle sélectionne un temps uniforme dans son passé et recommence là où elle était à cet instant aléatoire.

Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{V_i} \rightarrow \alpha$  p.s.

## Exercice 6 : Cas irréductible, condition pour le TCL\*\*

On considère une urne à deux couleurs de matrice de remplacement  $R$  irréductible. On suppose que l'urne est équilibrée et on note  $S$  sa "balance". On note  $m$  la seconde valeur propre de  $R$  et  $\pi_2$  la projection sur la deuxième direction propre.

**Rappel** : Nous avons montré dans le cours (cf. page 4) que

$$M_n = \prod_{i=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{m}{\|U(0)\|_1 + iS} \right)^{-1} \pi_2 U(n)$$

est une martingale.

**Question** : Montrer qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$\mathbb{E}_n[(M_{n+1} - M_n)^2] \sim cn^{-2m/S}.$$

(Voir page 17 pour le contexte !)