CHEMINS DANS LE QUART DE PLAN : EXERCICES

MIREILLE BOUSQUET-MÉLOU, KILIAN RASCHEL

1. Les chemins du trident, par la moulinette

L'objet de cet exercice est d'appliquer la "moulinette" décrite dans la première partie du cours aux chemins du quadrant, issus de $(0,0)$, à pas N, NW, NE et S.
Équation fonctionnelle, groupe associé, somme sur le groupe, extraction de $Q(x,y)$, c'est parti.

2. Les chemins du trident, version combinatoire

Tout de même... voilà un exemple qui peut être abordé de façon plus combinatoire ! En regardant la projection du chemin sur les axes de coordonnées, établir d'abord que

$$Q(0,0;t) = \sum_{n\geq 0} t^{2n} C_n \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} C_k,$$

où $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$ est le n-ième nombre de Catalan, qui compte les chemins de Dyck.

Généraliser pour obtenir la série des chemins finissant en (i,j), sachant que le nombre de chemins de longueur $2n+j$ à pas ± 1, issus de 0, positifs et finissant en j est

$$\frac{j+1}{n+j+1}\binom{2n+j}{n}.$$

3. Où la moulinette s'enraye : les chemins de Gessel

Étudier jusqu'où la moulinette "marche" avec les chemins de Gessel, $\mathcal{S} = \{x, \bar{x}, xy, \bar{x}\bar{y}\}$.

4. Nature des fonctions de "conformal gluing"

Dans la deuxième partie du cours, nous avons vu que la nature des fonctions de "conformal gluing" est liée à la nature de

$$w(x) = \sin^2(a \arcsin(x)),$$

où a est
- entier si le groupe est fini et la covariance $\sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} ij$ négative ou nulle,
- rationnel mais non entier si le groupe est fini et la covariance positive,
- irrationnel si le groupe est infini.

Étudier la nature de cette fonction w.

5. Problèmes de Riemann-Hilbert sur le cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité. Résoudre le problème frontière suivant : trouver toutes les fonctions f telles que
- f est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\mathcal{C}$,
- $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$,
- f vérifie sur $\mathcal{C}$ la condition frontière $f(x) - f(\overline{x}) = g(x)$, où g est une fonction suffisamment régulière sur $\mathcal{C}$ (et $\bar{x}$ est le conjugué de x).

Journées ALEA, CIRM, mars 2011.