Podstawowe własności rachunku operatorowego

Idea metody operatorowej polega na ***znalezieniu przekształcenia pozwalającego zastąpić równania różniczkowo - całkowe przez zwykłe równania algebraiczne***. Przekształcenie to można traktować jako prawo odpowiedniości między dwoma zbiorami funkcji:

$$f(t) \div F(s)$$

Podstawę rachunku operatorowego stanowi *przekształcenie (transformacja) Laplace'a*, określające związek między funkcjami czasu *f(t)* i odpowiadającymi im funkcjami *F(s)* nowej zmiennej zespolonej *s*.

Załóżmy funkcję f(t), która spełnia następujące warunki:

1. f(t)=0 dla t<0,
2. f(t) spełnia warunki Dirichleta:
   - przedział w którym funkcja jest określona można podzielić na przedziały otwarte, w których f(t) jest monotoniczna,
   - w każdym punkcie zachodzi $f(t)=1/2[f(t^-)+f(t^+)]$,
3. f(t) jest całkowalna w każdym przedziale skończonym oraz spełniona jest nierówność $|f(t)| \le Me^{at}$ (M>0, a>0, dla $t>t_g$)

Transformatą Laplace'a funkcji f(t) nazywać będziemy funkcję F(s) zmiennej zespolonej s, określoną wzorem (przy zał. Re(s)≥a):

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt \quad \text{lub} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Wzór powyższy przyporządkowuje funkcji zmiennej rzeczywistej f(t) funkcję zmiennej zespolonej F(s) i nosi nazwę prostego przekształcenia (transformacji) Laplace'a, a całka nazywana jest często całką Laplace'a. Funkcję f(t) nazywać będziemy ***oryginałem***, a funkcję F(s) ***transformatą***.

Możliwe jest również ***odwrotne przekształcenie Laplace'a*** (transformacja odwrotna), pozwalające określić funkcję f(t) odpowiadającą danej transformacie F(s).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)e^{st}ds \quad \text{lub} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania równania całkowego. Ponieważ jest to czynność zazwyczaj pracochłonna, przy wyznaczaniu oryginału danej funkcji zmiennej zespolonej wykorzystuje się, o ile to możliwe, własności przekształcenia Laplace'a oraz tablice transformat.

Podstawowe własności i twierdzenia rachunku operatorowego opartego na transformacji Laplace'a

1. *Twierdzenie o liniowości*:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]=\alpha_1\mathcal{L}[f_1(t)]+\alpha_2\mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. *Twierdzenie o transformacji pochodnych funkcji:*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0^+)-s^{n-2}\cdot f'(0^+)-\ldots-s\cdot f^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)]=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0^+)-\dot{f}(0^+)$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)]=s\cdot F(s)-f(0^+)$$

3. *Twierdzenie o transformacji całki funkcji:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\cdot F(s)$$

4. *Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie rzeczywistej:*

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}\cdot F(s)$$

5. *Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie zespolonej:*

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cdot f(t)]=F(s+a)$$

6. *Twierdzenie o zmianie skali:*

$$\mathcal{L}[f(a\cdot t)]=\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7. *Twierdzenie o różniczkowaniu w dziedzinie zespolonej:*

$$\mathcal{L}[t\cdot f(t)]=(-1)\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\mathcal{L}[t^n\cdot f(t)]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

8. *Twierdzenie o wartości końcowej:*

Jeżeli istnieje: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ i $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ to

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0^+} s\cdot F(s)$$

9. *Twierdzenie o splocie:*

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s),$$

gdzie: $f_1(t) * f_2(t)$ jest splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$.
Splot funkcji określa zależność:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

Rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą transformacji Laplace'a

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a daje prostą metodę rozwiązywania równań różniczkowych, polegającą na ich algebraizacji.

Niech dane będzie zwyczajne równanie różniczkowe ze stałymi współczynnikami:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t),$$

w którym f(t) jest znaną funkcją zmiennej rzeczywistej, oraz warunki początkowe.

Rozwiązując równanie należy:

1. poddać je przekształceniu Laplace'a z uwzględnieniem warunków początkowych,
2. wyznaczyć transformatę Y(s) szukanej funkcji,
3. doprowadzić tę transformatę do postaci

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

4. wyznaczyć szukaną funkcję zmiennej rzeczywistej

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{L(s)}{M(s)}\right]$$

Transformaty Laplace'a najczęściej spotykanych funkcji:

Oryginał f(t)	Transformata F(s)
$\delta(t)$ - impuls Diraca	1
1(t) - skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s \pm a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$