Conditioning of the Roots of a Random Polynomial

Guillaume Moroz
guillaume.moroz@inria.fr
Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France

Context

Numerical Conditioning. *Conditioning* is an important concept to measure the numerical stability of a problem. It serves as an indicator for the precision needed to solve a numerical problem, such as finding a complex solution ζ of a polynomial equation $f(z) = 0$, for instance. In this case, the conditioning, denoted as $\mathrm{cond}(f, \zeta)$, represents the limit of the perturbation of ζ divided by an infinitesimal perturbation of the coefficients of f [2].

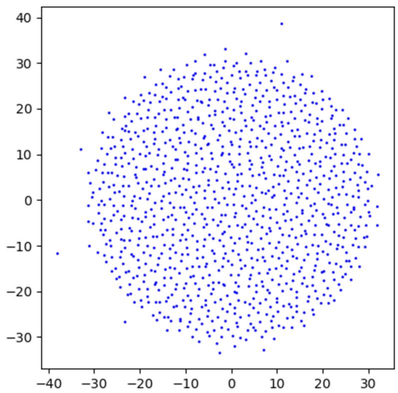
Relative Error. The conditioning associated with an absolute error on the coefficients, in the form of $f_i \pm \varepsilon$, has been extensively studied [1]. However, there are very few studies on the case where the coefficients are perturbed by a relative error, in the form of $f_i \cdot (1 \pm \varepsilon)$. This case is the most common in scientific computation, where arithmetic operations ensure a small relative error.

Objective

The objective of this project is to study the relative numerical conditioning for approximating the roots of a polynomial. Specifically, we will focus on computing the roots of a polynomial in the form:

$$X_0 + \cdots + \frac{X_d}{d!} z^d,$$

where the X_i are independent centered Gaussian random variables. Additionally, we will examine characteristic polynomials of matrices with zero-centered Gaussian random coefficients. This study is particularly important for understanding the numerical conditioning of the characteristic polynomial of a matrix, a topic of debate within the scientific community.



Roots of a random polynomial

Work Environment

The project will be carried out within the Gamble team, at the joint computer science laboratory of Inria, CNRS, and the University of Lorraine in Nancy.

References

[1] Peter Bürgisser and Felipe Cucker. *Condition: The Geometry of Numerical Algorithms.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] Stef Graillat. "Accurate simple zeros of polynomials in floating point arithmetic". In: *Computers & Mathematics with Applications* 56.4 (2008), pp. 1114–1120.

Conditionnement des racines d'un polynôme aléatoire

Guillaume Moroz
guillaume.moroz@inria.fr
Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France

Contexte

Conditionnement numérique. Le *conditionnement* est une notion importante pour mesurer la stabilité numérique d'un problème. En particulier, c'est un indicateur sur la précision nécessaire pour résoudre un problème numérique, comme le problème de trouver une solution complexe ζ d'une équation polynomiale $f(z) = 0$ par exemple. Dans ce cas, le conditionnement noté $\mathrm{cond}(f, \zeta)$ est la limite de la perturbation de ζ divisée par une perturbation infinitésimale des coefficients de f [2].

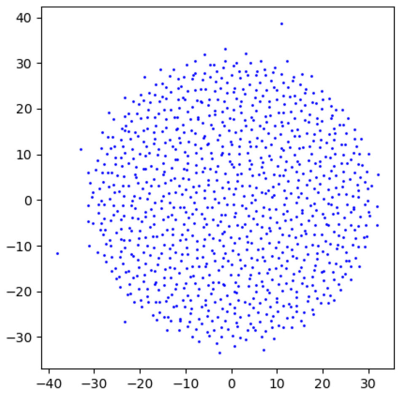
Erreur relative. Le conditionnement associé à une erreur absolue sur les coefficients, de la forme $f_i \pm \varepsilon$, a été largement étudié [1]. Cependant, il existe très peu d'études sur le cas où les coefficients sont perturbés par une erreur relative, de la forme $f_i \cdot (1 \pm \varepsilon)$. Ce cas est par ailleurs le plus fréquent en calcul scientifique, où les opérations arithmétiques garantissent une erreur relative petite.

Objectif

L'objectif de ce stage est d'étudier le conditionnement numérique relatif pour le problème d'approcher les racines d'un polynôme. On s'intéressera notamment au calcul des racines d'un polynôme de la forme :

$$X_0 + \cdots + \frac{X_d}{d!} z^d,$$

où les X_i sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées en zéro. Ou encore aux polynômes caractéristiques d'une matrice à coefficients aléatoires gaussiens centrés en zéro. Cette étude est notamment importante pour comprendre le conditionnement numérique du polynôme caractéristique d'une matrice, qui fait débat dans la communauté scientifique.



Racines d'un polynôme aléatoire

Cadre de travail

Le stage se déroulera au sein de l'équipe Gamble, dans le laboratoire d'informatique mixte Inria, CNRS et Université de Lorraine à Nancy.

References

[1] Peter Bürgisser and Felipe Cucker. *Condition: The Geometry of Numerical Algorithms.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] Stef Graillat. "Accurate simple zeros of polynomials in floating point arithmetic". In: *Computers & Mathematics with Applications* 56.4 (2008), pp. 1114–1120.