質点の運動方程式の解法

2024-7-31 [*1]

高校物理 $+\alpha$ の力学の内容を大学物理の視点から体系的に復習するためのノート．様々な形の運動方程式の解法に主眼を置いており，エネルギーや運動量，角運動量といった保存量 (運動の積分) については (運動方程式を解く際に用いる場合を除いて) 扱わない．節番号や問題番号に*印がついているところは，難しいか，あまり重要ではないので，初めは読み飛ばしてもよい．(a) のようにアルファベットが付いた段落は，本文の内容から少し離れた補足的な内容である．

[*1] 最新版はここからダウンロード可能．

1　質点の運動方程式

1.1　微分方程式としての運動方程式

質量 m の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働いたときに物体に生じる加速度 $\boldsymbol{a}$ は，Newton の運動の第 2 法則 (**運動方程式**)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

で与えられる．加速度 $\boldsymbol{a}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ や速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を用いて $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ と書けるから，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \ , \tag{1.2}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \ , \tag{1.3}$$

などと書くこともできる．つまり，運動方程式は位置 $\boldsymbol{r}$ の時間 t についての 2 階微分方程式である．また，運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を用いると，運動方程式を

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{1.4}$$

と書くこともできる．このノートでは詳しく扱わないが，この表式は質量が変化する場合などにも適用できる最も一般的な形の運動方程式であり，[*2] 本来であればこれを基本法則とすべきである．物理学では時間微分が至る所に現れるので，文字の上に「ドット」を付けて，$\dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ や $\ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ のようにして時間微分を表す方法も広く用いられている．この表記を用いると，運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \ , \tag{1.5}$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \ , \tag{1.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} \ , \tag{1.7}$$

などと書くことができる．ドットを使うと紙面の節約になり，手も疲れない．ただし，物理量の積で表される量の時間微分を書くことはできない．[*3] 運動方程式はその時々に応じて便利な形を使えばよい．

1.2　運動方程式を用いた運動の求め方

運動方程式を用いて運動を決定する標準的な手順は以下の通りである．

(1) 図を描き，注目している物体に働く力を図示する．
(2) 座標系を設定し，運動方程式を立てる．
(3) 初期条件の下で運動方程式を解き，運動を求める．

なお，このノートでは，「(1) 図を描き，注目している物体に働く力を図示する．」を省略する．

1.3　微分方程式についての最低限の知識

運動方程式は微分方程式であり，運動を決定することは，その微分方程式を解くことである．力学を理解するためには，微分方程式の知識がどうしても必要になる．ここでは微分方程式について最低限知っておくべきことを書くが，物理学をより一層深く理解するためには，微分方程式の一般論について学んでおくことが望ましい．このノートで扱う運動方程式の大部分は，適当に整理することで，以下の形の微分方程式に帰着する．[*4]

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \ . \tag{1.8}$$

[*2] つまり，注目している物体の質量が時間変化する場合には，$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dfrac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}$ は正しいが，$m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$ は正しくない．質量が変化する運動の例として有名なのは，燃料を放出しながら飛ぶロケットである．興味があれば「Tsiolkovsky の公式」などで検索してみるとよい．

[*3] $d(xy)/dt = (xy)^{\cdot}$ や $d^2(xy)/dt^2 = (xy)^{\cdot\cdot}$ のような表記もごく稀に見ることがある．

[*4] 例外は，3.2 節，3.3 節，4.1 節，7 章である．

ここで，a と b は定数であり，$f(t)$ は時間の関数である．このノートの大部分は，様々な $a, b, f(t)$ に対して，この微分方程式を解くことに費やされる．この形の微分方程式は**定数係数 2 階線形微分方程式**と呼ばれ，[*5] $f(t)=0$ のものを**斉次形**，$f(t)\neq 0$ のものを**非斉次形**という．「斉次」は「同次」とも書かれる．[*6] $a=b=0$ かつ $f(t)=0$ の場合，微分方程式 (運動方程式) は

$$\ddot{x}=0 \tag{1.9}$$

となる．この微分方程式の場合，時間積分を 2 回行うことで，その解が，

$$x(t)=At+B \tag{1.10}$$

と与えられる．[*7] これが微分方程式の解であるとは，$x(t)$ を代入した微分方程式が任意の時刻 t において恒等的に成り立つことをいう．実際に，$x(t)=At+B$ に対して $\ddot{x}=0$ であるから，この $x(t)$ に対して微分方程式は恒等的に成り立っている．A と B は積分定数であるが，どのような値に選んでも微分方程式の解になっているので，微分方程式の分野では**任意定数**と呼ばれる．このノートでは，任意定数であることが明らかな場合には，特に断らずに新しい文字を用いる．$a=b=0$ であれば，$f(t)\neq 0$ でも，微分方程式を直接積分することによって解を得ることができる．$a=b=0$ でない場合には，微分方程式の解は単純に積分することでは得られないが，2 階微分方程式を解くということは本質的には 2 回の積分を行うことに他ならないので，その解はやはり 2 つの任意定数 (積分定数) を含む．n 階微分方程式の解で，n 個の (独立な) 任意定数を含むものを**一般解**と呼ぶ．ほとんどの場合，一般解の任意定数を適切に選ぶことで，微分方程式の任意の解を表すことができる．[*8] 2 階線形斉次微分方程式の一般解は，2 つの独立な解 $\{x_1(t), x_2(t)\}$ の線形結合

$$x(t)=Ax_1(t)+Bx_2(t) \tag{1.11}$$

の形で表される．2 つの解 $\{x_1(t), x_2(t)\}$ が独立であるとは，比例関係にないことを言う．[*9] 線形微分方程式の独立な解の組 $\{x_1(t), x_2(t)\}$ を**基本解 (系)** と呼ぶ．微分方程式 $\ddot{x}=0$ の基本解は $\{1, t\}$ と選ぶことができる．[*10] 一般解の任意定数に適当な値を代入した解を**特解** (particular solution) または**特殊解**と呼ぶ．運動方程式の場合，時刻 $t=0$ における位置 $x(0)$ と速度 $v(0)$ を，

$$x(0)=x_0\ , \tag{1.12}$$
$$v(0)=\dot{x}(0)=v_0\ , \tag{1.13}$$

のように指定することで，一般解の任意定数を定め，運動を決定することができる．[*11] 時刻 $t=0$ における位置 $x(0)$ と速度 $v(0)=\dot{x}(0)$ の値を与える条件を**初期条件** (initial condition) と呼ぶ．初期条件を与える時刻は必ずしも $t=0$ でなくてもよいが，他の時刻に選ぶ理由が無ければ，$t=0$ に選んでおけばよい．ここまでは暗黙のうちに微分方程式の解が簡単に求まるかのように書いてきたが，微分方程式はいつでも簡単に解けるわけではない．微分方程式を解くことは本質的に積分をすることに他ならず，不定積分を解析的に (初等関数で) 書くことができない関数が無数に存在する事実に鑑みれば，むしろ微分方程式は解けなくて当たり前なのである．このノートでは手計算で解けるような簡単な微分方程式ばかりを扱っている．身の回りの自然現象を理解するための運動方程式のいくつかが，解析的に解くことができる微分方程式で記述されていることは幸運であると言える．解析的に解けない微分方程式に出会った際の対応としては，重要性が小さな項を無視する近似を行ったり，コンピュータを使って数値的に解を得るという方法がある．

[*5] 「定数係数」は文字通り $x, \dot{x}, \ddot{x}$ の係数が定数であること，「2 階」は微分の最高階数が 2 階であること，「線形」は「一次」と同じ意味で $x, \dot{x}, \ddot{x}$ の 1 次式であることを意味する．

[*6] $f(t)$ を x の 0 次式とみなせば，$f(t)=0$ の場合には方程式の各項の次数が全て 1 次に斉 (ととの) っているから「斉次 (せいじ)」，あるいは次数が全て同じ 1 次であるから「同次」という．「斉次」や「同次」といった言葉は，線形代数 (連立一次方程式の理論) の分野からの転用であると思われる．

[*7] 数学的には従属変数の名前と関数名を区別して $x=f(t)$ のように書くほうがよいのかもしれないが，文字が増えて煩わしいので，混乱がない場合には従属変数と関数名に同じ記号を用いて $x=x(t)$ と書くことが物理学では (分野によっては数学でも) よくある．このような慣習が，物理学 (特に解析力学や熱力学の分野) の学習を妨げることがある．個人的には，x はあくまでも (従属) 変数であり，$x(t)$ という表記は x が時間 t に依存することを明示的に表したい場合に用いる補助的な記法であると考えるのが良いと思う．

[*8] 一般解に含まれない解 (特異解) が存在する場合もあるが，このノートでは出てこない．

[*9] より正確には，c_1 と c_2 についての方程式 (t についての恒等式) $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=0$ が $c_1=c_2=0$ という解のみを持つとき，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ は線形独立 (あるいは単に独立) であるという．n 個の関数の線形独立性も同様に定義される．

[*10] $\{1+t, 1-t\}$ など，基本解の選び方は無数にある．簡単な組を選べばよい．

[*11] 目的によっては，異なる時刻 t_1 と t_2 における位置の値を $x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2$ のように指定することで任意定数を定めることもある．いずれにせよ，2 つの任意定数を確定するためには，いつでも 2 つの独立な条件式が必要であるという事実は変わらない．

1.4 基本的な運動

1.4.1 等速直線運動

1 次元の運動を考え，運動方向に x 軸をとる．[*12] 物体に力が働かないとき，運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0 \ , \quad \therefore \ddot{x} = 0 \tag{1.14}$$

となる．この一般解が

$$x(t) = At + B \tag{1.15}$$

と与えられることは先に見た．初期条件

$$x(0) = x_0 \ , \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.16}$$

を課すと，$A = v_0, B = x_0$ が得られ，この初期条件を満たす特解は

$$x(t) = v_0 t + x_0 \tag{1.17}$$

となる．この運動は，**等速直線運動**あるいは**等速度運動**と呼ばれる．このように，運動方程式を解く際は，一般解を求め，初期条件を課して任意定数を定めて特解を得るという流れが一般的である．

(a) 定積分を用いた直接積分形の解法

$$\ddot{x} = f(t) \tag{1.18}$$

という方程式は，時間 t で積分することで解を求めることができるので，直接積分形の微分方程式などと呼ばれる．不定積分を 2 回実行して一般解を求めてから初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ を課して特解を求めてもよいが，以下のように，定積分を用いて一般解を経ずに特解を求めることもできる．

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t dt' \, f(t') \ , \tag{1.19}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \, f(t'') \ . \tag{1.20}$$

1.4.2 等加速度直線運動

1 次元の運動を考え，運動方向に x 軸をとる．物体に一定の力 F_0 が働いているとき，運動方程式は

$$m\ddot{x} = F_0 \ , \quad \therefore \ddot{x} = \frac{F_0}{m} \tag{1.21}$$

となる．一定の加速度 $a_0 \equiv F_0/m$ での直線上の運動なので，この運動は**等加速度直線運動**と呼ばれる．初期条件

$$x(0) = x_0 \ , \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.22}$$

を満たす解は，以下の通りである．

$$v(t) = v_0 + a_0 t \ , \tag{1.23}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \ . \tag{1.24}$$

問 1　等加速度運動する物体の速度が，距離 l だけ進む間に v_1 から v_2 に変化した．加速度を求めよ．

解答　求める加速度を a_0 とする．速度が v_1 から v_2 に変化する時間を t とすると，

$$v_2 = v_1 + a_0 t \ , \quad l = v_1 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \ , \tag{1.25}$$

が成り立つ．第 1 式から得られる $t = (v_2 - v_1)/a_0$ を第 2 式に代入すると，

$$l = v_1 \cdot \frac{v_2 - v_1}{a_0} + \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v_2 - v_1}{a_0} \right)^2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_0} \ , \quad \therefore a_0 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2l} \ . \tag{1.26}$$

[*12] 3 次元空間を考えても，物体に力が働かないときには物体は直線運動をするので，その方向に x 軸をとったと考えれば一般性を失っていない．

2　一様な重力場中の運動

地表付近では，物体は質量に比例した大きさ mg の一様な重力を受ける．ここで，$g \simeq 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ は重力加速度と呼ばれる定数である．[*13] 重力が働く方向を鉛直下向きと表現する．重力のみを受けて運動する質量 m の物体 (質点) を考えよう．水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとると，運動方程式は,

$$m\ddot{x} = 0\ , \tag{2.1}$$
$$m\ddot{y} = -mg\ , \tag{2.2}$$

と書ける．運動方程式の両辺を m で割ることで，加速度についての式,

$$\ddot{x} = 0\ , \tag{2.3}$$
$$\ddot{y} = -g\ , \tag{2.4}$$

が得られる．この加速度についての方程式を運動方程式と呼ぶことも多い．この式を見ると，重力場中の運動は物体の質量 m に依存しないことがわかる．[*14] したがって，重力のみを受けて運動する場合，$1\,\mathrm{kg}$ の鉄と $1\,\mathrm{kg}$ の綿は初期条件が同じであれば，全く同じ運動をすることになる．[*15] これは実際に起こる運動とは乖離しているが，原因はもちろん空気抵抗の存在である．空気抵抗がある場合の落下運動は次節で扱う．運動方程式を時間で積分することで，速度 $v_x(t), v_y(t)$ と位置 $x(t), y(t)$ が順に求まる．以下で一般の初期条件を満たす解を導出し，次節以降で具体的な初期条件を設定して様々な運動について解析する．

水平方向 (x 方向)：　初期条件 $x(0) = x_0, v_x(0) = v_{0x}$ を満たす解は,

$$v_x(t) = v_{0x}\ , \tag{2.5}$$
$$x(t) = x_0 + v_{0x}t\ , \tag{2.6}$$

である．水平方向には力が働かないので，水平方向 (x 方向) に射影した運動は等速直線運動 (等速度運動) となる．

鉛直方向 (y 方向)：　初期条件 $y(0) = y_0, v_y(0) = v_{0y}$ を満たす解は,

$$v_y(t) = v_{0y} - gt\ , \tag{2.7}$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\ , \tag{2.8}$$

である．鉛直下向きに一定の力が働くので，鉛直方向 (y 方向) に射影した運動は等加速度直線運動となる．

問 2　重力加速度がどの程度の大きさなのか，日常で感じる加速度と比較してみよう．直線上の運動のうち日常で最も大きな加速度を感じるのは，飛行機の離陸時の滑走ではないだろうか．そこで，飛行機の離陸直前の速さを $300\,\mathrm{km/h}$,[*16] 加速に要した距離 (滑走路の距離) を $2000\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{km}$ として，離陸に向けた滑走中の飛行機の加速度を見積もってみよ．また，その加速度は重力加速度の何倍か．

解答　加速度は一定値 a_0 とすると，前節の問で導出した式で $l = 2000\,\mathrm{m}, v_1 = 0, v_2 = 300\,\mathrm{km/h}$ として,

$$a_0 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2l} = \frac{(300\,\mathrm{km/h})^2}{2 \cdot 2000\,\mathrm{m}} = 1.74\,\mathrm{m/s^2} = 0.18\,g \tag{2.9}$$

と評価できる．[*17] この加速度を 0.18 G と表現することがあり，日常でも用いられる．この見積もりによれば，飛行機の離陸時には，自分の体重の 20% 程度の力を座席背面から受けていることになるが，これは実感と合うのではないだろう

[*13] 重力加速度の値は地球上の位置 (特に緯度) や高度などによって微妙に (0.1% のオーダーで) 異なる．このノートでは $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ の値を用いる．万有引力を扱う際に詳述するが，地上での重力の正体は，物体が地球から受ける万有引力 (と地球の自転による遠心力の合力) である．

[*14] 重力場中の運動が物体の質量に依存しないというのは重力が持つ重要な性質である．Einstein はこの性質についての考察を通して，現代物理学における重力の最も基礎的な理論である**一般相対性理論**を着想するに至った．

[*15] 鉄球と鳥の羽根を真空中で自由落下させる動画を YouTube で見つけることができる．

[*16] これは新幹線やモータースポーツ (F1 など) での最高時速と同程度である．ちなみに旅客機の巡航速度は 500 ノット $\simeq$ 900 km/h 程度 (1 ノット = 1 海里/h，1 海里 = 1852 m) である．偏西風などに乗れば 1000 km/h 程度に達することもある．

[*17] 実際に加速に要する距離は (安全面を十分に考慮して) 滑走路よりも短いと考えられるから，この結果は離陸距離 x を過大に，すなわち加速度 a_0 を過小に評価しているかもしれない．ただし，速さを 300 km/h とやや大きめに見積もったので，この概算はそれほど外れていないと思う．

か．ちなみに，離陸までの時間 t は，

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a_0} = \frac{2l}{v_2 - v_1} = \frac{2 \cdot 2000\,\mathrm{m}}{300\,\mathrm{km/h}} = 48\,\mathrm{s} \tag{2.10}$$

程度である．飛行機に乗る機会があれば，加速開始から離陸までの時間を測ってみると面白い．

2.1 自由落下

高さ h の位置から物体を静かに落とす場合を考える．[*18] このときの物体の運動を**自由落下運動**と呼ぶ．運動は y 方向のみ考えればよいので，$v_y(t) = v(t)$ と書く．この運動を実現する初期条件は $y(0) = h, v_y(0) = v(0) = 0$ であるから，

$$v(t) = -gt\ , \tag{2.11}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\ . \tag{2.12}$$

問 3 地面に衝突する時刻 t_1 と，地面に衝突する直前の速度 v_1 を求めよ．また，高さ h を適当な値に設定して，t_1 と v_1 を計算せよ．

解答 時刻 t_1 (> 0) は $y(t_1) = 0$ によって定まるから，

$$y(t_1) = h - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0\ , \quad \therefore t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4.5\,\mathrm{s}\left(\frac{h}{100\,\mathrm{m}}\right)^{1/2}\ , \tag{2.13}$$

と求まる．[*19] また，v_1 は $t = t_1$ における速度であるから，

$$v_1 = v(t_1) = -\sqrt{2gh} = -44\,\mathrm{m/s}\left(\frac{h}{100\,\mathrm{m}}\right)^{1/2} = -160\,\mathrm{km/h}\left(\frac{h}{100\,\mathrm{m}}\right)^{1/2}\ . \tag{2.14}$$

2.2 鉛直投げ上げ・投げ下ろし

高さ h の位置から物体に鉛直方向の初速度 v_0 を与える場合を考える．$v_0 > 0$ のときの物体の運動を**鉛直投げ上げ運動**，$v_0 < 0$ のときの運動を**鉛直投げ下ろし運動**と呼ぶ．運動は y 方向のみ考えればよいので，$v_y(t) = v(t)$ と書く．この運動を実現する初期条件は $y(0) = h, v(0) = v_y(0) = v_0$ であり，運動方程式の解は以下の通り．

$$v(t) = v_0 - gt\ , \tag{2.15}$$

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\ . \tag{2.16}$$

問 4 地上 $(y = 0)$ から鉛直上向きに初速 v_0 で物体を投げ上げた．物体が最高到達点に達する時刻 t_1 と最高到達点の高さ y_1 を求めよ．また，物体が地面に落下する時刻 t_2 とそのときの速度 v_2 を求めよ．v_0 を適当な値に設定して，t_1, y_1 と t_2, v_2 を計算せよ．

解答 条件より $h = 0$ である．最高到達点では鉛直方向の速度が 0 となるから，$v(t_1) = 0$ より，

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0\ , \quad \therefore t_1 = \frac{v_0}{g} = 3.1\,\mathrm{s}\left(\frac{v_0}{30\,\mathrm{m/s}}\right) = 2.8\,\mathrm{s}\left(\frac{v_0}{100\,\mathrm{km/h}}\right)\ . \tag{2.17}$$

y_1 は $t = t_1$ における高さであるから，

$$y_1 = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} = 46\,\mathrm{m}\left(\frac{v_0}{30\,\mathrm{m/s}}\right)^2 = 39\,\mathrm{m}\left(\frac{v_0}{100\,\mathrm{km/h}}\right)^2\ . \tag{2.18}$$

地面に落下する時刻 t_2 (> 0) は $y(t_2) = 0$ を満たすから，

$$y(t_2) = v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0\ , \quad \therefore t_2 = \frac{2v_0}{g} = 6.1\,\mathrm{s}\left(\frac{v_0}{30\,\mathrm{m/s}}\right) = 5.7\,\mathrm{s}\left(\frac{v_0}{100\,\mathrm{km/h}}\right)\ . \tag{2.19}$$

[*18] 力学で「静かに」というと「初速度 0 で」ということを意味する．

[*19] 最後の表式は，物理量の典型的な値と，その物理量が他の物理量にどのように依存するのかを同時に表すことができて便利．デメリットは式が長くなること．

ここで，$t_2 = 2t_1$ であり，上昇と下降にかかる時間は等しい．v_2 は時刻 $t = t_2$ における速度であるから，

$$v_2 = v(t_2) = -v_0 \ . \tag{2.20}$$

2.3 水平投射

高さ h の位置から水平方向に初速 v_0 で物体を投げることを考える．このときの物体の運動を**水平投射運動**と呼ぶ．水平方向 (x 方向) の運動の初期条件は $x(0) = 0, v_x(0) = v_0$，鉛直方向 (y 方向) の運動の初期条件は $y(0) = h, v_y(0) = 0$ である．このときの速度は,

$$v_x(t) = v_0 \ , \tag{2.21}$$
$$v_y(t) = -gt \ , \tag{2.22}$$

であり，位置は以下のように求まる.

$$x(t) = v_0 t \ , \tag{2.23}$$
$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \ . \tag{2.24}$$

問 5　物体が地面に落下する時刻 t_1 とそのときの水平方向の位置 x_1 を求めよ．また，地面に衝突する直前の速度 $\boldsymbol{v}_1 = [v_{1x}, v_{1y}]$ と速さ v_1 を求めよ．

解答　鉛直方向 (y 方向) の運動は自由落下と全く同じであるから，$t_1 = \sqrt{2h/g}$ であり，$x_1 = x(t_1) = v_0\sqrt{2h/g}$ と求まる．鉛直方向 (y 方向) の速度は自由落下と同様に $v_{1y} = -\sqrt{2gh}$，水平方向 (x 方向) の速度は一定値 $v_{1x} = v_0$ であるから，v_1 は以下のように求まる．[*20]

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \ . \tag{2.25}$$

2.4 斜方投射

地上から初速 v_0，仰角 θ $(0 < \theta < \pi/2)$ で物体を投げることを考える．このときの物体の運動を**斜方投射運動**と呼ぶ．水平方向 (x 方向) には初速 $v_0 \cos\theta$ の等速直線運動 (等速度運動)，鉛直方向 (y 方向) には初速 $v_0 \sin\theta$ (> 0) の鉛直投げ上げ運動であるから，速度は,

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \ , \tag{2.26}$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt \ , \tag{2.27}$$

と表される．また，$x(0) = y(0) = 0$ とすると，位置は以下のように求まる.

$$x(t) = v_0 t \cos\theta \ , \tag{2.28}$$
$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \ . \tag{2.29}$$

問 6　物体が最高到達点に達する時刻 t_1 と最高到達点の高さ y_1 を求めよ．また，物体が地面に落下する時刻 t_2 とそのときの水平方向の位置 x_2 を求めよ.

解答　最高到達点に達する時刻 t_1 を決める条件は $v_y(t_1) = 0$ であるから,

$$v_y(t_1) = v_0 \sin\theta - gt_1 = 0 \ , \quad \therefore t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \ . \tag{2.30}$$

[*20] この表式を変形すると，$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$ が得られる．左辺は初期状態の力学的エネルギー (運動エネルギーと位置エネルギーの和)，右辺は時刻 $t = t_1$ での力学的エネルギーであり，この式は**力学的エネルギー保存則**を表している．なお，$y = 0$ を重力による位置エネルギーの基準点にとっているので，$t = t_1$ における位置エネルギーは 0 である.

最高到達点の高さ y_1 は，時刻 $t=t_1$ における高さであるから，

$$y_1 = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \ . \tag{2.31}$$

物体が地面に落下する時刻 t_2 (>0) は，

$$y(t_2) = v_0 t_2 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \ , \quad \therefore t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \ , \tag{2.32}$$

となる．これらの結果は鉛直投げ上げ運動で v_0 を $v_0 \sin\theta$ と置き換えたものである．最後に，x_2 は以下の通り．

$$x_2 = x(t_2) = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \ . \tag{2.33}$$

問 7　初速 v_0 が一定のとき，x_2 が最大となる角度 θ を求めよ．

解答　三角関数の 2 倍角の公式を用いると，

$$x_2 = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{2.34}$$

と書ける．$0<\theta<\pi/2$ より $0<2\theta<\pi$ であり，この範囲で x_2 が最大となるのは，$2\theta=\pi/2$，すなわち $\theta=\pi/4=45^\circ$ のときである．そのときの x_2 の値 $x_{2,\max}$ は，

$$x_{2,\max} = \frac{v_0^2}{g} \ . \tag{2.35}$$

問 8　$\theta=\pi/4=45^\circ$ のとき，v_0 を適当に設定して x_2 の値を評価せよ．

解答　$\theta=\pi/4=45^\circ$ のときの x_2 の値は，前問で求めた $x_{2,\max}$ である．

$$x_{2,\max} = \frac{v_0^2}{g} = 92\,\mathrm{m}\left(\frac{v_0}{30\,\mathrm{m/s}}\right)^2 = 79\,\mathrm{m}\left(\frac{v_0}{100\,\mathrm{km/h}}\right)^2 \ . \tag{2.36}$$

問 9　運動の軌跡 (x と y の関係) を求めよ．

解答　$x = v_0 t\cos\theta$ より，$t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$ と書ける．これを $y(t)$ に代入して，

$$y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0\cos\theta} \cdot \sin\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 = x\tan\theta - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2} x^2 \tag{2.37}$$

を得る．したがって，運動の軌跡は 2 次関数で表される．このように，(空気抵抗が無視できるときに) 物体を放ったときの軌跡が 2 次関数で表されることから，2 次関数のことを放物線と呼ぶ．

3　抵抗力が働く場合の運動

§ 抵抗力のモデル化　抵抗力は物体の形状や物体をとり巻く流体 (気体や液体) の状態などに依存し，一般に非常に複雑である．しかし，複雑であるという理由で直ちに抵抗力を扱うことをやめてしまえば，何も分からないままで進歩がない．このような場合，物理学 (より広く科学) では，実際の現象を正確に記述することを (一旦は) 諦め，実際の現象のうち欠かすことのできない重要な要素のみを抽出し，ある種の理想化を行うことで，できる限り自然現象を理解しようと努力する．この理想化のことを**モデル化**と呼ぶ．同じ現象を記述するモデルにも，さまざまな可能性があり得る．モデルに取り入れるべき重要な要素と，切り捨てても影響の少ない要素とを取捨選択するところに，物理学者のセンスが問われる．できるだけ単純で，かつ興味のある現象の重要な点を (定性的にでも) 十分に説明できるようなモデルが，良いモデルだと言える．球体のような単純な形の物体であれば，経験から，抵抗力は「(i) 速度と逆向きに働く」，「(ii) 速度が大きくなると抵抗力も大きくなる」という 2 つの性質を持つと考えてよいだろう．[*21] (i) の性質については抵抗力に負号を付

[*21] これらの性質は，流体の状態や物体の形状によっては成り立たない場合がある．例えば (i) について，モータースポーツの最高峰と言われる F1 で走るフォーミュラカーでは，車両前方と後方についたウイングと呼ばれる板状のパーツによって，前方からの空気を上方に押し上げ，その反作用として下向きの力 (ダウンフォース) を受けて車体を地面に押さえつけることで，高速でコーナーを旋回することができる．普通なら速度と逆向きに働く邪魔な抵抗力を，どれだけダウンフォースという味方に変えられるかというところが，設計者の腕の見せ所である．

けて向きを調整することで実現できる．(ii) を満たすような抵抗力としては様々な可能性が考えられるが，たとえば速さ $v = |\boldsymbol{v}|$ の正冪乗に比例するような力を考えてみることができる．実際に，抵抗力には，速度に比例する**粘性抵抗**と，速度の 2 乗に比例する**慣性抵抗**が存在することが経験的に知られており，簡単な形状の物体に対しては，ある程度の理論的な裏付けもある．[*22] 速度に比例する粘性抵抗 $\boldsymbol{f}_1$ と速度の 2 乗に比例する慣性抵抗 $\boldsymbol{f}_2$ は

$$\boldsymbol{f}_1 = -c\boldsymbol{v} \ , \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = -bv\boldsymbol{v} = -bv^2 \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{v} \ , \tag{3.2}$$

と書くことができる．$c\ (>0)$ と $b\ (>0)$ は空気抵抗の大きさを特徴づける (単位の異なる) 定数である．定数 c の SI 単位は $\mathrm{N/(m/s) = kg/s}$，定数 b の SI 単位は $\mathrm{N/(m/s)^2 = kg/m}$ である．このノートでは主に粘性抵抗と慣性抵抗を考えるが，演習問題で速度の n 乗に比例する抵抗力が働く場合を扱う．

3.1 速度に比例する抵抗力 (粘性抵抗) が働く場合

粘性抵抗 $\boldsymbol{f}_1 = -c\boldsymbol{v}$ のみが働く場合の物体の運動を考えよう．抵抗力以外の力が働かないので，初速度の方向に x 軸をとって，1 次元の運動として解析を行えばよい．運動方程式は

$$m\ddot{x} = -cv = -c\dot{x} \tag{3.3}$$

である．$\gamma = c/m$ を導入すると，運動方程式は

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \tag{3.4}$$

と書き換えられる．抵抗係数 c の SI 単位は $\mathrm{N/(m/s) = kg/s}$ であるから，$\gamma = c/m$ の SI 単位は $\mathrm{/s = s^{-1}}$ である．[*23] 運動方程式を解くには，$\dot{x}$ についての 1 階微分方程式として $\dot{x}$ を求め，それを時間 t で積分することで x を求めればよい．[*24] $\dot{x}$ の一般解は，

$$\dot{x}(t) = Ae^{-\gamma t} \tag{3.5}$$

である．これが微分方程式の解であることは代入して確かめることができ，任意定数 A を含んでいるから確かに一般解である．x の一般解は，これを積分して，

$$x(t) = -\frac{A}{\gamma}e^{-\gamma t} + B \ . \tag{3.6}$$

と書ける．初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ を満たす解は，

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \ , \tag{3.7}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \ , \tag{3.8}$$

[*22] 慣性抵抗は前方の流体分子との衝突によって受ける力が原因となって生じる．慣性抵抗が速度の 2 乗に比例するのは，流体分子から受ける力積と単位時間あたりの衝突回数が共に速度に比例するためである．粘性抵抗については以下のように考えるとよい．静止した流体の中を速さ v で運動する半径 a の球体を考える．球体の表面の流体は粘性のために引きずられて球体と同じ速さ v で運動する．球体の影響がその半径 a 程度まで及ぶとすると，球体の周りの速度勾配 (流体の速さの空間変化率) は v/a 程度であり，球体の表面に働く単位面積あたりの力は，粘性係数 μ を用いて $\mu(v/a)$ 程度と見積もることができる．これに球体の表面積 $4\pi a^2$ をかけると，粘性抵抗は $4\pi\mu av$ 程度と評価できる．この評価は定量的にもそれほど悪くない．実際，係数の 4π を 6π に変えた $f = 6\pi\mu av$ は **Stokes の法則**と呼ばれており，球体の速さが大きくない範囲では実験とよく一致することが知られている．粘性抵抗と慣性抵抗のどちらが優位かを決定する無次元量を **Reynolds 数**と呼ぶ．Reynolds 数が小さいときには粘性抵抗が，大きいときには慣性抵抗が優位になる．詳しくは流体力学で学ぶ．

[*23] 本来なら物理量の**次元**という概念を用いて「c の次元は $\mathrm{M\,T^{-1}}$ であるから，$\gamma = c/m$ の次元は $\mathrm{T^{-1}}$ である．」と書くほうがよいが，物理量の次元について説明をしていないので，ここでは (これ以降も) 物理量の SI 単位を書くことで妥協する．物理量の単位と次元について簡単に述べる．物理量は基本的に「物理量 = 倍数 × 単位」という形で表される．少なくない書籍で「$2\,\mathrm{m/s} \times 5\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}$」と書くべきところを単位を省略して (そして往々にして計算結果のみに $[\cdots]$ や〔$\cdots$〕を用いて単位をつけて)「$2 \times 5 = 10\,[\mathrm{m}]$」のように書いてあるが，物理量が「単位量の何倍か」を表す点を蔑ろにしているので良くない．物理量の計算は必ず単位をつけて行うべきである．$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$ のように，倍数の値を変えることで等号で結ぶことができる単位 (あるいは物理量そのもの) は同じ**次元**を持つという．「3 次元空間」の「次元」とは無関係であることに注意．h や min は時間 (Time) の次元を持つといい，その次元を T で表す．物理量 X の次元を $[X]$ で表し，$[\mathrm{h}] = [\mathrm{min}] = \mathrm{T}$ と書くことが多い．力学に現れる物理量の次元は，ほとんど全て，時間の次元 T，質量 (Mass) の次元 M，長さ (Length) の次元 L の組み合わせ (適当な冪乗の積) で表すことができる．たとえば，加速度 a の次元は，加速度が位置の 2 階微分 $a = \ddot{r} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$ であることから $[a] = [r]/[t]^2 = \mathrm{LT^{-2}}$ であり，力 F の次元は運動方程式 $ma = F$ より $[F] = [m][a] = \mathrm{MLT^{-2}}$ である．電磁気学では独立な次元として電流 (または電荷) が加わる．

[*24] 5 章で紹介するように，これを定数係数 2 階線形微分方程式とみなして解くこともできる．特性方程式 $\lambda^2 = -\gamma\lambda$ より $\lambda = 0, -\gamma$ が得られ，基本解として $\{1, e^{-\gamma t}\}$ がとれるので，一般解はこれらの線形結合で $x(t) = A + Be^{-\gamma t}$ と書ける．あるいは，運動方程式を積分して $\dot{x} = -\gamma x + A$ としてから，変数分離形の微分方程式として解いてもよい．

である．指数関数の引数として現れる γt は無次元量であり，$\gamma t = \mathcal{O}(1)$ となる時間，すなわち $1/\gamma$ 程度の時間が抵抗力による減衰の典型的な時間スケールを与える．この時間 $\tau \equiv 1/\gamma$ を緩和時間と呼んだりする．$t \to \infty$ の極限で速度は $v \to 0$ となり，$x \to x_0 + v_0/\gamma$ より物体は有限の距離 $v_0/\gamma = mv_0/c$ だけしか進めないことがわかる．

(a) **定数 γ を導入する意義**　運動方程式 $m\ddot{x} = -c\dot{x}$ を解く際に新しい定数 γ を導入するのは，単に文字を減らして式を見やすくする以上の意味がある．運動方程式を見ると，質量 m と抵抗係数 c を共通の定数倍しても運動方程式は不変であることがわかる．この事実は，物体の運動は質量 m や抵抗係数 c の値そのものによって決まるのではなく，これらの定数の比 c/m だけで決まることを表している．したがって，m や c を方程式の中に残すよりも，運動を特徴づける量 $\gamma = c/m$ を導入して議論を進めるほうが，現象への理解が深まる．時間の単位で測られる $\gamma^{-1} = 1/\gamma$ という量には，物体が静止するまでの時間スケールという物理的な意味がある．

3.2　速度の 2 乗に比例する抵抗力 (慣性抵抗) が働く場合

次に慣性抵抗 $\boldsymbol{f}_2 = -bv\boldsymbol{v}$ のみが働く場合の物体の運動を考える．前節と同様に 1 次元の運動として解析を行えばよい．運動方程式は

$$m\ddot{x} = -bv^2 \tag{3.9}$$

である．$\ddot{x} = \dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$ と書き，定数 $\beta \equiv b/m$ を導入すると，運動方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2 \tag{3.10}$$

と書き換えられる．抵抗係数 b の SI 単位は $\mathrm{N/(m/s)^2 = kg/m}$ であるから，$\beta = b/m$ の SI 単位は $\mathrm{/m = m^{-1}}$ である．これは変数分離形の微分方程式であるから，

$$\frac{dv}{v^2} = -\beta dt \tag{3.11}$$

と変形してから両辺を積分することで，以下のように解くことができる．

$$-\frac{1}{v} = -\beta t + A\,, \quad \therefore v(t) = \frac{1}{\beta t - A}\,. \tag{3.12}$$

初期条件 $v(0) = v_0$ より $A = -1/v_0$ が得られるから，解は

$$v(t) = \frac{1}{\beta t + 1/v_0} = \frac{v_0}{\beta v_0 t + 1} \tag{3.13}$$

と求まる．位置 x は初期条件 $x(0) = x_0$ の下でこれを積分して，

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\beta}\ln(\beta v_0 t + 1) \tag{3.14}$$

となる．$t \to \infty$ で速度が $v \to 0$ となるのは粘性抵抗の場合と同じであるが，位置は $x \to \infty$ となり，静止するまでに物体は無限大の距離を進む．[*25]

問 10*　速度の $n\ (\neq 1, 2)$ 乗に比例する抵抗力が働く場合の運動方程式 $m\ddot{x} = -b'v^n$ を解け．

解答　$\beta' = b'/m$ を導入すると，運動方程式は $\dot{v} = -\beta' v^n$ と書ける．これは変数分離形であるから本文と同様に解くことができて，初期条件 $v(0) = v_0$ を満たす解は，

$$v(t) = \frac{1}{\left((n-1)\beta' t + 1/v_0^{n-1}\right)^{1/(n-1)}} = \frac{v_0}{\left((n-1)\beta' v_0^{n-1} t + 1\right)^{1/(n-1)}} \tag{3.15}$$

と求まる．位置 x は初期条件 $x(0) = x_0$ の下でこれを積分して，

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{(n-2)\beta' v_0^{n-2}}\left((n-1)\beta' v_0^{n-1} t + 1\right)^{(n-2)/(n-1)}\,. \tag{3.16}$$

[*25] もちろん純粋に数学的な話である．次節で見るように，速度が小さいときには粘性抵抗が重要になるし，摩擦力のように速度に (ほぼ) 依らない力も働くだろうから，物体の運動はいずれ止まる．

問 11* 速度の n (>0) 乗に比例する抵抗力が働く場合を考える．物体に初速 v_0 を与えたとき，物体が静止するまでの時間 T と移動距離 L を求めよ．

解答 前問で求めた $v(t)$ と $x(t)$ を用いてもよいが，ここでは T と L を直接計算してみよう．運動方程式 $dv/dt = -\beta' v^n$ より $dt = -dv/\beta' v^n$ と書けるので，$n \neq 1$ のとき，

$$T = \int_{v=v_0}^{v=0} dt = -\frac{1}{\beta'}\int_{v_0}^{+0} \frac{dt}{v^n} = -\frac{1}{\beta'}\left[-\frac{1}{(n-1)v^{n-1}}\right]_{v_0}^{+0} = \begin{cases} \dfrac{v_0^{1-n}}{\beta'(1-n)} & (n<1) \\ \infty & (n>1) \end{cases} \tag{3.17}$$

となる．$n=1$ のときは前節で計算した通り $T=\infty$ である．次に，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx} \tag{3.18}$$

と書けることを用いて，運動方程式を

$$v\frac{dv}{dx} = -\beta' v^n \ , \quad \therefore dx = -\frac{1}{\beta' v^{n-1}} \tag{3.19}$$

と変形してから積分することで，$n \neq 2$ のとき，

$$L = \int_{v=v_0}^{v=0} dx = -\frac{1}{\beta'}\int_{v_0}^{+0} \frac{dt}{v^{n-1}} = -\frac{1}{\beta'}\left[-\frac{1}{(n-2)v^{n-2}}\right]_{v_0}^{+0} = \begin{cases} \dfrac{v_0^{2-n}}{\beta'(2-n)} & (n<2) \\ \infty & (n>2) \end{cases} \tag{3.20}$$

となる．$n=2$ のときは本文で計算した通り $L=\infty$ である．$1 \leq n < 2$ のときには，物体が静止するまでにかかる時間 T は無限大であるが，物体の移動距離 L は有限になる．

3.3 粘性抵抗と慣性抵抗の両方が働く場合

この章の最後に，粘性抵抗と慣性抵抗の両方が働く場合の運動について議論する．抵抗力は $\boldsymbol{f} = -c\boldsymbol{v} - bv\boldsymbol{v}$ であり，運動方程式は

$$m\ddot{x} = -cv - bv^2 \tag{3.21}$$

となる．$\gamma = c/m$ と $\beta = b/m$ を導入して，運動方程式を

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v - \beta v^2 = -v(\beta v + \gamma) \tag{3.22}$$

と書き直そう．これは変数分離形の微分方程式であるから，

$$\frac{dv}{v(\beta v + \gamma)} = -dt \tag{3.23}$$

と変形してから両辺を積分することで解くことができる．左辺の積分は，

$$\int \frac{dv}{v(\beta v+\gamma)} = \frac{1}{\gamma}\int dv\left(\frac{1}{v} - \frac{\beta}{\beta v + \gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{v}{v+\gamma/\beta} = -\frac{1}{\gamma}\ln\Bigl(1+\frac{\gamma}{\beta v}\Bigr) \tag{3.24}$$

となる．[*26] 右辺の積分は $-t$ であるから，積分定数を C として，

$$-\frac{1}{\gamma}\ln\Bigl(1+\frac{\gamma}{\beta v}\Bigr) = -(t+C) \tag{3.25}$$

を得る．初期条件 $v(0)=v_0$ より $C = \dfrac{1}{\gamma}\ln\Bigl(1+\dfrac{\gamma}{\beta v_0}\Bigr)$ が得られるから，解は

$$v(t) = \frac{\gamma v_0}{(\gamma+\beta v_0)e^{\gamma t} - \beta v_0} \tag{3.26}$$

[*26] 積分結果は $\dfrac{1}{\gamma}\ln\dfrac{v}{\beta v+\gamma}$ と書くこともできるが，対数関数の引数が次元を持つと積分定数 (任意定数) にも次元を持った量の対数が含まれてわかりづらいので，引数は無次元にしておくのが無難．

と求まる．位置 $x(t)$ はこれを積分すればよい．そのためには,

$$v(t) = \frac{\gamma v_0 e^{-\gamma t}}{(\gamma+\beta v_0)-\beta v_0 e^{-\gamma t}} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{(\gamma+\beta v_0)-\beta v_0 e^{-\gamma t}}\frac{d}{dt}\left((\gamma+\beta v_0)-\beta v_0 e^{-\gamma t}\right) \tag{3.27}$$

と式変形して積分公式 $\displaystyle\int dx\,\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|$ を用いるとよい．$x(0)=x_0$ として,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\beta}\ln\frac{(\gamma+\beta v_0)-\beta v_0 e^{-\gamma t}}{\gamma} \tag{3.28}$$

が得られる．$t\to\infty$ で $x \to x_0 + \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{\gamma+\beta v_0}{\gamma}$ であるから，物体が静止するまでの移動距離は $\dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{\gamma+\beta v_0}{\gamma}$ となる．

4 一様な重力場中の運動 (空気抵抗がある場合)

この章では「2 一様な重力場中の運動」では無視していた空気抵抗力を考慮に入れて，一様な重力場中の物体の運動を議論する．前章に続き，空気抵抗力として，速度に比例する粘性抵抗 $\boldsymbol{f}_1$ と速度の 2 乗に比例する慣性抵抗 $\boldsymbol{f}_2$ を考える．

$$\boldsymbol{f}_1 = -c\boldsymbol{v}\ , \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = -bv\boldsymbol{v} = -bv^2\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{v}\ . \tag{4.2}$$

初等的な教科書では粘性抵抗 $\boldsymbol{f}_1 = -c\boldsymbol{v}$ のみを扱っている場合も多く，抵抗力について定性的に理解するだけならそれで十分かもしれない．速度の 2 乗に比例する抵抗力については，余裕があれば計算を追ってみるとよい．もちろん，粘性抵抗と慣性抵抗の両方を考慮して,

$$\boldsymbol{f} = -c\boldsymbol{v} - bv\boldsymbol{v} \tag{4.3}$$

という空気抵抗力のモデルを考えてもよいが，計算の大変さに比べて得られるものが少ないので，このノートでは扱わない．鉛直方向のみに限られた運動の場合には解析的に解くことができるので，興味があれば挑戦してみるとよい．

4.1 速度に比例する空気抵抗力 (粘性抵抗) が働く場合

まずは空気抵抗力が，粘性抵抗

$$\boldsymbol{f}_1 = -c\boldsymbol{v} = -c\dot{\boldsymbol{r}} \tag{4.4}$$

の場合について考える．運動は水平方向 (x 方向) と鉛直方向 (y 方向) の 2 次元座標で記述することができる．鉛直上向きを y 軸の正方向とすると，運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -c\dot{x}\ , \tag{4.5}$$

$$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}\ , \tag{4.6}$$

となる．$\gamma = c/m$ を導入すると，運動方程式は以下のように書き換えられる．

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x}\ , \tag{4.7}$$

$$\ddot{y} = -g - \gamma\dot{y}\ . \tag{4.8}$$

水平方向 (x 方向)： 水平方向 (x 方向) の運動方程式は,

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \tag{4.9}$$

である．これは 3.1 節で議論したものと同じ方程式であり，初期条件 $x(0)=x_0, v_x(0)=\dot{x}(0)=v_{0x}$ を満たす解は以下の通りである．

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\gamma t}\ , \tag{4.10}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\ . \tag{4.11}$$

鉛直方向 (y 方向)： 鉛直方向 (y 方向) の運動方程式は,

$$\ddot{y} = -g - \gamma \dot{y} \tag{4.12}$$

である．この方程式も水平方向 (x 方向) と同様の手法で解くことができる．微分方程式を

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = -\gamma\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) \tag{4.13}$$

と書き直すと，これは水平方向 (x 方向) と全く同じ形の微分方程式であるから，一般解は容易に,

$$\dot{y} + \frac{g}{\gamma} = Ce^{-\gamma t} \ , \quad \therefore \dot{y} = Ce^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \ , \tag{4.14}$$

と求めることができる．y の一般解は，これを積分して,

$$y = -\frac{C}{\gamma}e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + D \ . \tag{4.15}$$

と求まる．初期条件 $y(0) = y_0, v_y(0) = \dot{y}(0) = v_{0y}$ を満たす解は,

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \ , \tag{4.16}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\gamma}\left(v_{0y} + \frac{g}{\gamma}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma}t \ . \tag{4.17}$$

問 12　速度に比例する空気抵抗が働く場合を考える．地上から鉛直上向きに初速 v_0 で物体を投げ上げたとき，物体が最高到達点に達する時刻 t_1 と最高到達点の高さ y_1 を求めよ.

解答　地上を $y = 0$ とすると，初期条件より $y_0 = 0$，$v_{0y} = v_0$ である．最高到達点に達する時刻 t_1 を決める条件は $v_y(t_1) = 0$ であるから,

$$v_y(t_1) = \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t_1} - \frac{g}{\gamma} = 0 \ , \quad \therefore t_1 = \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{g}\right) \ . \tag{4.18}$$

最高到達点の高さ y_1 は，時刻 $t = t_1$ における高さであるから,

$$y_1 = y(t_1) = \frac{1}{\gamma}\left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right)(1 - e^{-\gamma t_1}) - \frac{g}{\gamma}t_1 = \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{g}\right) \ . \tag{4.19}$$

問 13*　運動方程式の解が $\gamma \to +0$ の極限で空気抵抗が無い場合の解に帰着することを示せ.

解答　$0 < \gamma t \ll 1$ のとき，$e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + (\gamma t)^2/2 + \mathcal{O}\big((\gamma t)^3\big)$ と評価できる．このとき,

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) = x_0 + v_{0x}t + \frac{v_{0x}}{\gamma}\cdot\mathcal{O}\big((\gamma t)^2\big) = x_0 + v_{0x}t + v_{0x}t\cdot\mathcal{O}(\gamma t) \ , \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\gamma}\left(v_{0y} + \frac{g}{\gamma}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma}t = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_{0x}}{\gamma}\cdot\mathcal{O}\big((\gamma t)^2\big) + \frac{g}{\gamma^2}\cdot\mathcal{O}\big((\gamma t)^3\big) \\ &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0x}t\cdot\mathcal{O}(\gamma t) + gt^2\cdot\mathcal{O}(\gamma t) \ , \end{aligned} \tag{4.21}$$

と評価できるから，$\gamma \to +0$ のとき，確かに空気抵抗の無い場合の解と一致する．なお，空気抵抗がある場合でも，$0 < \gamma t \ll 1$，すなわち $0 < t \ll 1/\gamma$ が成り立つ短い時間では，空気抵抗は無視できる.

(a) **終端速度**　速度に比例する抵抗力が働く場合の速度は，以下のように表される.

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\gamma t} \ , \tag{4.22}$$

$$v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \ . \tag{4.23}$$

空気抵抗が無い場合の重力場中の運動では，水平方向の速さは一定であり，鉛直方向の速さは重力加速度で増加していく．これに対して，空気抵抗が存在する場合には，どのような初期条件から運動が始まっても，十分に時間が経過したあとには,

$$\lim_{t\to\infty} v_x(t) = 0\ , \tag{4.24}$$

$$\lim_{t\to\infty} v_y(t) = -\frac{g}{\gamma}\ , \tag{4.25}$$

となる．これを**終端速度**と呼び，その大きさを

$$v_\infty = \frac{g}{\gamma} = \frac{mg}{c} \tag{4.26}$$

などと書く．[*27] 同じ質量で大きさや形状が異なる物質の場合，空気抵抗力の大きさを表す定数 c が大きいほうが，終端速度が小さい．これは当然期待される結果である．また，同じ形状で質量が異なる物体の場合，空気抵抗力の大きさを表す定数 c は共通であると考えるのが自然であるから，終端速度は質量の大きな物体のほうが大きくなる．したがって，空気抵抗がある場合には，1 kg の鉄と 1 kg の綿では，前者の方が早く落下する．

(b) **運動方程式を解かずに終端速度を求める方法**　鉛直方向の運動方程式

$$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y} \tag{4.27}$$

において，ある時刻で $\ddot{y} = 0$ となると，[*28] それ以降は速度 $\dot{y}$ は変化せず，運動方程式は力のつり合いの式 $0 = -mg - c\dot{y}$ となる．このときの速度 $\dot{y}(\infty)$ が終端速度であり,

$$0 = -mg - c\dot{y}(\infty)\ , \quad \therefore \dot{y}(\infty) = -\frac{mg}{c} \equiv -v_\infty\ , \tag{4.28}$$

と求まる．この終端速度の求め方は高校物理の教科書に載っている．大学で微分方程式を解く方法を学ぶと，終端速度に至るまでの速度 (や位置) の時間変化を追うことができるようになる．

(c) **水平到達距離**　空気抵抗の無い場合の水平投射運動では，初速 v_0 を固定したとしても，十分な高さから投射を行うことで，任意の水平距離に物体を到達させることができる．[*29] しかしながら，水平方向の解

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \tag{4.29}$$

を見るとわかるように，空気抵抗がある場合には,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\gamma} = x_0 + \frac{mv_{0x}}{c} \tag{4.30}$$

のように，水平到達距離には限界がある．

問 14　地上から初速 v_0，仰角 θ $(0 < \theta < \pi/2)$ で物体を投げることを考える．運動の軌跡 (x と y の関係) を求めよ．

解答　水平方向の初期条件 $x(0) = 0, v_x(0) = v_0\cos\theta$，鉛直方向の初期条件 $y(0) = 0, v_y(0) = v_0\sin\theta$ を満たす解は,

$$x(t) = \frac{v_0\cos\theta}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\ , \tag{4.31}$$

$$y(t) = \frac{1}{\gamma}\left(v_0\sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma}t\ , \tag{4.32}$$

である．第 1 式から,

$$1 - e^{-\gamma t} = \frac{\gamma x}{v_0\cos\theta}\ , \quad \therefore \gamma t = -\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0\cos\theta}\right)\ , \tag{4.33}$$

[*27] 終端速度は英語で “terminal velocity” なので，終端速度の大きさは v_t などとも書かれることがあるが，t は時間にも用いられて混乱の原因になるので，このノートでは v_∞ と書く．

[*28] 数学的には $\ddot{y} = 0$ となるためには (初速が終端速度に一致していない限り) 無限大の時間がかかるが，加速度は $\ddot{y}$ は指数関数的に減少するので，測定可能な精度では十分に短い有限時間で $\ddot{y} = 0$ となると考えてよい．

[*29] もちろん，実際にはあまりに高いと重力が定数 mg で表されなくなる (重力を万有引力の形で表現しなくてはならない) し，地球の曲率が問題になるだろうが，あくまでも数学の問題として．

が得られるから，これらを第 2 式に代入して整理すると，運動の軌跡は

$$y = \left(\tan\theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos\theta}\right) x + \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos\theta}\right) \tag{4.34}$$

と求まる．計算が複雑になるのでこのノートでは扱わないが，物体の水平到達距離は，θ が $\pi/4$ よりも小さいところで最大値をとる．

4.2* 速度の 2 乗に比例する空気抵抗力 (慣性抵抗) が働く場合

次に空気抵抗力が慣性抵抗

$$\boldsymbol{f}_2 = -bv\boldsymbol{v} = -b|\dot{r}|\dot{\boldsymbol{r}} \tag{4.35}$$

の場合について考える．前節と同様に水平方向 (x 方向) と鉛直方向 (y 方向) の 2 次元の運動を考えると，$\dot{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ であるから，運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ , \tag{4.36}$$

$$m\ddot{y} = -mg - b\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ , \tag{4.37}$$

となる．これは $x(t)$ と $y(t)$ の連立微分方程式になっており，これまでのように x 方向と y 方向に運動を分離して解析するということができない．この微分方程式の解析的な一般解は (おそらく) 存在しない．そこで，ここでは鉛直方向のみに限った運動 (鉛直投げ上げと投げ下ろし運動) を解析することで妥協しよう．$x \equiv 0$ (恒等的に 0) と置くと，$y(t)$ のみの運動方程式

$$m\ddot{y} = -mg - b|\dot{y}|\dot{y} \tag{4.38}$$

が得られる．これは本質的には $\dot{y}$ についての 1 階微分方程式であるから，$\dot{y} = v$ と書き，また $\beta \equiv b/m$ を導入して,

$$\dot{v} = -g - \beta|v|v \tag{4.39}$$

としよう．v は速さではなく，正負の値をとる速度であることに注意．速度が上向きか下向きかで v の符号が異なるので，現時点では $|v|$ の絶対値記号を外すことはできない．この絶対値記号の取り扱いについては 2 通りの方法が考えられる．ひとつは素直に場合分けする方法，もうひとつは定数 β に符号を押し付けて一般解を求める方法である．どちらも計算量は大差ないが，ここでは前者の方法を採用しよう．後者の方法はこの節の最後に補足として書いておく．

(i) $v \geq 0$ の場合

まずは $v = \dot{y} \geq 0$ の場合の運動を考えよう．鉛直投げ上げ運動で最高到達点に到達するまでの運動に相当する．このとき $|v| = v$ であるから，運動方程式は

$$\dot{v} = -g - \beta v^2 \tag{4.40}$$

となる．これは数学的には変数分離形と呼ばれる形の微分方程式であり，以下のようにして解くことができる．まずは微分方程式を

$$\frac{dv}{dt} = -\beta\left(v^2 + \frac{g}{\beta}\right) \tag{4.41}$$

と書き直す．ここで従属変数 v を左辺に，独立変数 t を右辺に移すと,

$$\frac{dv}{v^2 + g/\beta} = -\beta dt \tag{4.42}$$

と書き直すことができる．両辺を積分すると，左辺は,

$$\int \frac{dv}{v^2 + g/\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{g}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{g}}v\right) \tag{4.43}$$

となり，右辺は $-\beta t$ となるから，積分定数を C として,

$$\sqrt{\frac{\beta}{g}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{g}}v\right) = -\beta(t + C) \tag{4.44}$$

を得る．これを v について解いて，一般解は

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \tan\left(-\sqrt{\beta g}(t+C)\right) \tag{4.45}$$

と求まる．具体的な運動は適当な初期条件を与えて任意定数 C を決めることで表すことができるが，ここでは $t=0$ で $v=0$ となるように $C=0$ と選んでおこう．

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \tan\left(-\sqrt{\beta g}t\right) . \tag{4.46}$$

今考えている $v \geq 0$ の運動は $t \leq 0$ で起こっており，$t=0$ で最高点に到達する．$t>0$ では解をこの式で表すことはできず，次に求める $v \leq 0$ の場合の解に接続しなくてはならない．$v(t)$ は $-\sqrt{\beta g}t \to \pi/2 - 0$，すなわち $t \to -\pi/(2\sqrt{\beta g})+0$ の極限で $v(t) \to +\infty$ と発散するので，t の範囲は

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta g}} < t \leq 0 \tag{4.47}$$

に限られる．これは，どのような初速 $v_0 > 0$ で運動を始めても，有限の時間 $\pi/(2\sqrt{\beta g})$ 以内で速度が 0 となることを示している．位置 $y(t)$ は $v(t)$ を積分することで，

$$y(t) = \frac{1}{\beta} \ln\cos\left(-\sqrt{\beta g}t\right) . \tag{4.48}$$

と求めることができる．[*30] ただし，$y(0)=0$ とした．

(ii) $v \leq 0$ の場合

次に $v = \dot{y} \leq 0$ の場合の運動を考えよう．初めに上向きの速度 $v > 0$ を持つ鉛直投げ上げ運動の場合も，下向きの重力によっていずれ $v < 0$ となるから，鉛直方向にどのような初速を持っている場合でも，最終的にはこれから求める解で運動が記述される．$|v| = -v$ であるから，運動方程式は

$$\dot{v} = -g + \beta v^2 \tag{4.49}$$

となる．この運動方程式を解くにあたり，$v \leq 0$ であることによって物理量の大小関係がわかりづらくなっている箇所があるので注意が必要である．この小節に限って鉛直下向きを正方向に取り直すこともできるが，余計な混乱を生むといけないので，このままの設定で議論を進める．運動方程式は，このままの形で解き進めてもよいが，先に終端速度を導入しておくと式がわかりやすく書ける．空気抵抗力が速度に比例する場合と同様に，今の場合もいずれ終端速度に達するはずである．実際，一度 $\dot{v} = 0$ が成り立てば，それ以降 v は変化しない．したがって，終端速度の大きさ v_∞ は，

$$0 = -g + \beta v_\infty^2 , \quad \therefore v_\infty = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \ (>0) , \tag{4.50}$$

と求まる．$v \leq 0$ であるから，$\lim_{t\to\infty} v(t) = -v_\infty$ であることに注意．終端速度を用いれば，運動方程式は

$$\dot{v} = \beta(v^2 - v_\infty^2) \tag{4.51}$$

と書き直すことができる．これも変数分離形の微分方程式であるから，

$$\int \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \beta \int dt \tag{4.52}$$

と書き直すことで解が求まる．左辺の積分は，部分分数分解を用いれば，

$$\int \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{1}{2v_\infty} \int dv \left(\frac{1}{v - v_\infty} - \frac{1}{v + v_\infty} \right) = \frac{1}{2v_\infty} \ln \left| \frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right| + C_1 , \tag{4.53}$$

と計算でき，右辺の積分は $\beta \int dt = \beta t + C_2$ であるから，

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left| \frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right| = \beta t + C' . \tag{4.54}$$

[*30] $\int \tan\theta \, d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta = -\int \frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta} d\theta = -\ln|\cos\theta|$.

これを v について解くと,

$$v(t) = \frac{1 + Ce^{2\beta v_\infty t}}{1 - Ce^{2\beta v_\infty t}}\, v_\infty \tag{4.55}$$

となる．初期条件を $v(0) = v_0$ (≤ 0) とすれば，$C = (v_0 - v_\infty)/(v_0 + v_\infty)$ と定まり，この初期条件を満たす解は,

$$v(t) = -\frac{v_\infty \tanh(\beta v_\infty t) - v_0}{v_\infty - v_0 \tanh(\beta v_\infty t)}\, v_\infty \tag{4.56}$$

と書ける．特に $v_0 = 0$ のときには,

$$v(t) = -v_\infty \tanh(\beta v_\infty t) \tag{4.57}$$

となり，鉛直投げ上げ運動の解と $t = 0$ で自然につながる．初速 $v(0) = 0$ から終端速度に達するまでの時間 (緩和時間) の目安 τ は,

$$\tau = \frac{1}{\beta v_\infty} = \frac{1}{\sqrt{\beta g}} \tag{4.58}$$

で与えられる．位置 $y(t)$ は $v(t)$ を積分することで,

$$y(t) = -\frac{1}{\beta} \ln\cosh(\beta v_\infty t) \tag{4.59}$$

と求めることができる．[*31] ただし，$y(0) = 0$ とした．

(d) 速度 v の符号によらない運動方程式の解の求め方　$v > 0$ のときは $\beta' = \beta$ (> 0)，$v < 0$ のときは $\beta' = -\beta$ (< 0) と書くと，運動方程式はいずれの場合も

$$\dot{v} = -g - \beta' v^2 \tag{4.60}$$

と書くことができる．$v = 0$ の場合はどちらに含めてもよい．$v > 0$ の場合と同様にして，変数分離することで運動方程式を以下のように解くことができる．

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\beta'}} \tan\left(-\sqrt{\beta' g}(t + C)\right) . \tag{4.61}$$

$\beta' = \beta > 0$ の場合には先に求めた $v > 0$ の場合の解と当然一致する．$\beta' = -\beta < 0$ のときは，$\sqrt{\beta'} = i\sqrt{\beta}$ と $\tan(i\theta) = i\tanh(\theta)$ を用いると，[*32]

$$v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\beta g}(t + C)\right) \tag{4.62}$$

と書ける．これは一見すると先ほど求めた $v < 0$ の場合の解と形が異なるが，双曲線関数の性質を使い，任意定数を適当に置き換えることで，同じ表式に書き換えることができる．

問 15*　空気抵抗がある場合の初速 $v(0) = 0$ での落下運動を考える．空気抵抗力が速度に比例する場合の速度 $v_1(t)$ と速度の 2 乗に比例する場合の速度 $v_2(t)$ は,

$$v_1(t) = -v_{1,\infty}(1 - e^{-gt/v_{1,\infty}}) = -\frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) , \tag{4.63}$$

$$v_2(t) = -v_{2,\infty} \tanh(\beta v_{2,\infty} t) = -\sqrt{\frac{g}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\beta g}t\right) , \tag{4.64}$$

で与えられる．両者の終端速度が等しくなる場合の定数 γ と β の関係を求めよ．また，この場合の速度 $v_1(t)$ と $v_2(t)$ のグラフを描け．

解答　終端速度が等しくなる条件は，$g/\gamma = \sqrt{g/\beta}$ より，$\beta = \gamma^2/g$ である．これを $v_2(t)$ の表式に代入すると,

$$v_2(t) = -\frac{g}{\gamma} \tanh(\gamma t) = -\frac{g}{\gamma} \left(1 - \frac{e^{-\gamma t}}{\cosh(\gamma t)}\right) . \tag{4.65}$$

これと,

$$v_1(t) = -\frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) , \tag{4.66}$$

を見比べると，$\cosh(\gamma t) > 1$ であるから，常に $v_2(t) < v_1(t)$ であり，$v_2(t)$ のほうが早く終端速度に近づくことがわかる．早いとは言っても，緩和時間は $\tau = 1/\gamma$ のオーダーで等しい．グラフは省略する．

[*31] $\displaystyle\int \tanh s\, ds = \int \frac{\sinh s}{\cosh s}\, ds = \int \frac{(\cosh s)'}{\cosh s}\, ds = \ln(\cosh s).$

[*32] 複素三角関数と双曲線関数の関係は，$\sin(i\theta) = i\sinh\theta$，$\cos(i\theta) = \cosh\theta$ である．

5　振動 — 復元力の下での物体の運動 —

5.1　単振動 — 復元力の下での物体の自由な振動 —

滑らかな水平面上でバネにつながれた質量 m の物体を考える．バネの自然長 (力が加わっていないときの長さ) からの変位 (伸び縮み) が小さい範囲では，物体がバネから受ける力の大きさはその変位に比例し，向きは変位と逆向きで，$F=-kx$ と書ける (**Hooke の法則**).[*33] ここで，k は**バネ定数**と呼ばれる定数であり，[*34] SI 単位は $\mathrm{N/m}=\mathrm{kg/s^2}$ である．Hooke の法則が成り立つ範囲で運動方程式は

$$m\ddot{x}=-kx \tag{5.1}$$

と書ける．運動は質量 m とバネ定数 k の比 k/m のみに依存する．そこで，新しい定数

$$\omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.2}$$

を定義すると，運動方程式は

$$\ddot{x}=-\omega^2 x \tag{5.3}$$

と書くことができる．一般解は

$$x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t) \tag{5.4}$$

である.[*35] この解が一般解であることは，運動方程式を満たすことと，2 つの任意定数 A と B を含むことからわかる．つまり，単振動の運動方程式の基本解として $\{\cos(\omega t)\,,\sin(\omega t)\}$ を選ぶことができる．線形斉次微分方程式の一般解は基本解の線形結合で与えられる．この解は物体の位置が時間的に振動することを表しており，この現象を**単振動**または**調和振動**と呼ぶ．単振動 (調和振動) は，力学や電磁気学はもちろん，量子力学や素粒子論に至るまで，物理学の様々な場面で登場する，非常に (もしかすると物理学においても最も) 重要な現象である．$\omega=\sqrt{k/m}$ は単位時間当たりの位相 (角度) の変化を表す量であり，**角振動数 (角周波数)** と呼ばれる．三角関数の引数 ωt は角度であり，その SI 単位は rad であるから，ω の SI 単位は rad/s である.[*36] 三角関数や指数関数の引数が必ず無次元量であることに注意.[*37] 速度 $v(t)$ は

$$v(t)=\dot{x}(t)=-\omega A\sin(\omega t)+\omega B\cos(\omega t) \tag{5.5}$$

と計算できる．初期条件 $x(0)=x_0, v(0)=v_0$ を満たす解は,

$$x(t)=x_0\cos(\omega t)+\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\ , \tag{5.6}$$

$$v(t)=v_0\cos(\omega t)-\omega x_0\sin(\omega t)\ . \tag{5.7}$$

問 16　初期条件 (i) $x(0)=x_0, v(0)=0$ と，(ii) $x(0)=0, v(0)=v_0$ を満たす解 $x(t)$ を求め，$x_0>0$ と $v_0>0$ の場合の $x(t)$ のグラフを描け.

解答　(i) のとき $x(t)=x_0\cos(\omega t)$，(ii) のとき $x(t)=(v_0/\omega)\sin(\omega t)$ となる．グラフは省略する．(i) は物体を x_0 だけ引っ張って静かに放すという初期条件，(ii) は自然長の位置から初速 v_0 で物体を弾き出すという初期条件を表す.

問 17　バネ定数 k のバネに質量 m の物体を吊り下げて鉛直方向に振動させたときの運動の一般解を求めよ．また，バネの自然長で静かに離した場合の特解を求めよ．ただし，バネの質量は無視できるものとする.

[*33] ものを引っ掛けるフック (hook) ではなく，自然哲学者の Robert Hooke (1635–1703, England) にちなむ.

[*34] 同じ力を加えたとき，バネ定数が大きなバネほど伸び縮みしにくい．バネ定数の大・小を「かたい・やわらかい」と表現することがある.

[*35] 一度 ω を忘れて $\ddot{x}=-x$ と書いてみれば (次元が合わず気持ち悪いが),「2 回微分するとマイナスが付いて元に戻る関数」が解であることがわかる．そのような解としては $\cos t$ と $\sin t$ がすぐに思い浮かぶ．あとは，2 回微分して ω^2 が出てくるように，すなわち 1 回微分して ω が出てくるように，合成関数の微分公式を思い出して t の係数を調整すればよい.

[*36] $\sqrt{k/m}$ の次元は $[\sqrt{k/m}]=[\sqrt{(\mathrm{kg/s^2})/\mathrm{kg}}]=[\mathrm{s^{-1}}]=\mathrm{T^{-1}}$ である．角度は半径に対する円弧の比で無次元量 (つまり $[\mathrm{rad}]=1$) であるから $[\mathrm{rad/s}]=[\mathrm{s^{-1}}]=\mathrm{T^{-1}}$ となり，確かに $\omega=\sqrt{k/m}$ と rad/s は同じ次元を持つ．ただし，次元を見るだけでは角振動数の SI 単位 rad/s と振動数 (周波数) の SI 単位 /s = Hz の区別がつかないので，式に戻って適切な SI 単位を選ばなくてはならない.

[*37] 三角関数や指数関数の Taylor 展開 (Maclaurin 展開) を書いてみれば，引数が次元を持ってはいけいことがわかる．ちなみに，対数関数 $\ln x$ の引数 x は次元を持っても構わない．対数関数の引数も無次元量になるように書いたほうが混乱が無くてよいのではあるが.

解答　鉛直上向きを y 軸とし，バネの自然長の位置を $y=0$ とすると，運動方程式は,

$$m\ddot{y} = -mg - ky \ , \quad \therefore \ddot{y} = -g - \omega^2 y \ , \tag{5.8}$$

となる．$\omega \equiv \sqrt{k/m}$ を定義した．運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(y + \frac{g}{\omega^2}\right) = -\omega^2\left(y + \frac{g}{\omega^2}\right) \tag{5.9}$$

と書き直すことができる．[*38] これは単振動の運動方程式であるから，一般解は,

$$y(t) + \frac{g}{\omega^2} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \quad \therefore y(t) = -\frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \tag{5.10}$$

と求まる．振動の中心 $y_0 \equiv -g/\omega^2 = -mg/k$ は $-mg - ky_0 = 0$ を満たすバネの弾性力 (復元力) と重力のつりあいの位置であり，物体はつりあいの位置を中心とした単振動を行うことがわかる．また，バネの自然長で静かに離した場合，初期条件は $y(0)=0, \dot{y}(0)=0$ であるから，特解は,

$$y(t) = -\frac{g}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}\cos(\omega t) = -\frac{g}{\omega^2}\big(1-\cos(\omega t)\big) = -\frac{mg}{k}\big(1-\cos(\omega t)\big) \ . \tag{5.11}$$

§ 単振動の周期　単振動の一般解は三角関数 $\cos(\omega t)$ と $\sin(\omega t)$ の線形結合で表されている．三角関数は位相 (三角関数の引数を位相と呼ぶ) が 2π だけ変化すると元に戻るので，単振動の解は $\omega T = 2\pi$ を満たす時間 T が経過すると元と同じ状態に戻る．この時間 T を単振動の**周期**と呼ぶ. [*39]

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \tag{5.12}$$

(a) 単振動の一般解の別の表現　三角関数の加法定理を用いると，一般解を

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\sin(\omega t + \phi) \tag{5.13}$$

と書くこともできる. [*40] $C\ (\geq 0)$ を振幅，$\phi \in [0, 2\pi)$ を初期位相と呼ぶ. [*41] A, B と C, ϕ の関係は,

$$A = C\sin\phi \ , \tag{5.14}$$
$$B = C\cos\phi \ , \tag{5.15}$$

である．これを逆に解いて，C と ϕ は,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \ , \tag{5.16}$$
$$\tan\phi = A/B \ , \tag{5.17}$$

と書ける．ただし，$\tan\phi = \tan(\phi+\pi)$ より，ϕ と $(\phi+\pi)$ は同じ $\tan$ の値を与えるから，ϕ は A と B の符号を見て適切に決める必要がある. [*42] この形の解を用いると，速度 $v(t)$ は以下のように計算できる．

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega C\cos(\omega t + \phi) \ . \tag{5.18}$$

[*38] 分かりづらければ，$Y \equiv y + g/\omega^2$ と変数変換すればよい．運動方程式は $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ となる．

[*39] バネ定数 k がわかっているバネに物体をつないで単振動させて周期を測定すると，物体の質量を $m = kT^2/4\pi^2$ で計算することができる．宇宙空間では重力が実質的に無く地上と同じ体重計を使って体重 (質量) を測定することができないので，宇宙飛行士の体重はこのような方法で測定されているそうである．「宇宙 体重測定」などのキーワードで WEB 検索すると，国際宇宙ステーション (ISS) での体重測定の様子を撮影した動画を見つけることができる．ちなみに，このようにして測定した質量を「慣性質量」，地上の体重計で重力として測定した質量を「重力質量」と呼ぶが，現在の測定の精度内ではこれらは一致している．

[*40] もちろん，cos のほうを使って $x(t) = C\cos(\omega t + \phi')$ と書くこともできる．

[*41] 初期位相 ϕ の範囲は $\phi \in (-\pi, \pi]$ ととることも多い．また，C が負の数をとることを許して，ϕ の範囲を $\phi \in [0, \pi)$ あるいは $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$ とすることもできる．その場合，$|C|$ を振幅と呼ぶ．

[*42] 様々なプログラム言語や Excel などの表計算ソフトでは `atan2` という関数が用意されている．これは (x, y) を引数にとり，点 (x, y) の偏角 (x 軸から反時計回りに測った角度) を (多くの場合 $(-\pi, \pi]$ で) 返す．言語によっては引数を (y, x) で指定することもあるので注意．`atan2` を単に Arctan と書いてしまう (プログラムで言えば関数のオーバーロードをする) ことにすれば，$\phi = \mathrm{Arctan}(B, A)$ と書ける．

§ 複素指数関数を用いた解の求め方　単振動の運動方程式は，数学的には定数係数 2 階線形斉次微分方程式と呼ばれる形をしている．この種の微分方程式には汎用性の高い一般的な解法が知られているので，ここで紹介する．解きたい方程式は，x に依存する項を左辺に移項して，

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.19}$$

である．ただし，$\omega \neq 0$ とする．[*43] この方程式の解を $x(t) = e^{\lambda t}$ という形で探してみよう．[*44] 微分方程式の左辺の量を計算してみると，

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} \tag{5.20}$$

となる．$e^{\lambda t} \neq 0$ であるから，λ についての代数方程式

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{5.21}$$

が成り立つことが，$x(t) = e^{\lambda t}$ が微分方程式の解であるための必要十分条件であることがわかる．この方程式を微分方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ の**特性方程式**あるいは**固有 (値) 方程式**などと呼ぶ．指数関数を微分しても (定数倍を除いて) 形が変わらないという性質から，[*45] 線形微分方程式の場合には全ての項を $e^{\lambda t}$ で括ることができる点がこの解法の要点である．以上の手順により，微分方程式を解く問題が代数方程式の問題に帰着した．定数係数の線形微分方程式であれば，何階の方程式でもこの方法で解くことができる．特性方程式は容易に解けて，

$$\lambda = \pm i\omega \tag{5.22}$$

が得られる．特性方程式の解 λ は，(線形代数の分野からの言葉の転用で) **固有値**と呼ばれることがある．異なる 2 つの λ が得られたから，これらを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入したものは微分方程式の独立な 2 解である．したがって，一般解は

$$x(t) = \mathcal{C} e^{i\omega t} + \mathcal{C}^* e^{-i\omega t} \tag{5.23}$$

と書くことができる．ここで，$\mathcal{C}$ は複素数であり，[*46] $x(t)$ が実数であるという条件 $x^*(t) = x(t)$ を用いた．[*47] 一見すると任意定数が 1 つしかないが，$\mathcal{C}$ は複素数なので，実部と虚部がそれぞれ任意定数であり，実数で数えて 2 つある．ここで，Euler の公式 $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ を用いると，

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{C} e^{i\omega t} + \mathcal{C}^* e^{-i\omega t} &= \mathcal{C}\big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big) + \mathcal{C}^*\big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big) \\ &= (\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)\cos(\omega t) + i(\mathcal{C} - \mathcal{C}^*)\sin(\omega t) \ , \end{aligned} \tag{5.24}$$

と書き直すことができ，$A = \mathcal{C} + \mathcal{C}^* = 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{C}), B = i(\mathcal{C} - \mathcal{C}^*) = -2\,\mathrm{Im}(\mathcal{C})$ とおけば，先に求めた単振動の一般解と一致する．このように，大学物理では，複素数を用いて指数関数と三角関数の間を自由自在に行き来するので，手を動かして早めに慣れておくとよい．この方法は次節で減衰振動を解析する際にも用いる．

(b) 単振動の力学的エネルギー — 運動の積分 —　単振動の運動方程式 $m\ddot{x} + kx = 0$ に $\dot{x}$ をかけて変形すると，[*48]

$$0 = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) \tag{5.25}$$

が得られる．つまり，

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.26}$$

[*43] $\omega = 0$ のときには微分方程式は簡単に積分できて，一般解は $x(t) = At + B$ である．

[*44] $x(t)$ が長さの次元を持つのに対して $e^{\lambda t}$ は無次元であるから，本来ならばこれらを等号で結ぶことはできない．長さの次元を持つ適当な定数 A をかけて $x(t) = Ae^{\lambda t}$ などと書くほうが物理的には正しい．しかし，ここで考えている微分方程式は x についての線形斉次微分方程式であり，任意の解の定数倍も解となるから，次元についてはあとで調整すればよい．

[*45] 線形代数という数学分野の用語を借りると，指数関数 $e^{\lambda t}$ は微分演算子 d/dt の固有値 λ に対する固有関数であると言うことができる．

[*46] 以下では，複素数の任意定数を筆記体で表すことにする．

[*47] 一度 $x(t) = \mathcal{C}_1 e^{i\omega t} + \mathcal{C}_2 e^{-i\omega t}$ と置いてから複素共役をとり，$e^{\pm i\omega t}$ の係数を比較することで，$\mathcal{C}_2{}^* = \mathcal{C}_1$ が得られる．$x(t)$ は長さの次元を持つので，「$x(t)$ を基準となる適当な長さ (長さの単位) で割ったものが実数である」と言うほうが適切であるが，「$x(t)$ が実数である」という言い回しも広く用いられるので，あまり気にせず使うことにする．

[*48] $\dot{x}$ をかけるという操作が天下りと感じるかもしれないが，とりあえずは運動方程式を積分する (微分方程式を解く) ための数学的な操作として認めておけばよい．$\dot{x} = dx/dt$ をかけて t で積分することは，$\dot{x}dt = (dx/dt)dt = dx$ より x で積分することに他ならない．運動方程式を位置 x で積分することで，運動エネルギーの変化と仕事の関係 (外力が保存力の場合には力学的エネルギー保存則) が導かれる．運動方程式の積分と保存則の関係については，別のノートにまとめる．力学的エネルギーの変化と仕事の関係や運動量と力積の関係、これに関連した保存則などは，運動方程式の積分によって得られる (Newton 力学という観点から見れば) 二次的な法則である．

という量は，時間によらず一定となる．このように，物体の運動の際に時間的に一定に保たれる量を**保存量**または**運動の積分**と呼ぶ．この場合の保存量 E は**力学的エネルギー**と呼ばれ，右辺の第 1 項と第 2 項をそれぞれ**運動エネルギー**と**ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)** と呼ぶ．先に求めた単振動の運動方程式の一般解 $x(t) = C\sin(\omega t + \phi)$ から，時刻 t における運動エネルギー $K(t)$ とバネのポテンシャルエネルギー $U(t)$ は,[*49]

$$K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 \cos^2(\omega t + \phi)\ , \tag{5.27}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kC^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 \sin^2(\omega t + \phi)\ , \tag{5.28}$$

と計算できる．ここで，$\omega = \sqrt{k/m}$ より $k = m\omega^2$ と書けることを用いた．力学的エネルギー $E(t)$ は運動エネルギー $K(t)$ とポテンシャルエネルギー $U(t)$ の和であるから,

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 \tag{5.29}$$

と計算でき，時間に依存しない定数になる．これで**力学的エネルギー保存則**が確かめられた．C は振幅であるから，単振動の力学的エネルギーは振幅の 2 乗に比例する．

(c)* 運動の積分を用いた単振動の一般解の導出　運動方程式を解くということは，簡単に言えば，時間についての 2 階の微分方程式を積分するということであった．何らかの方法で運動の積分が求まると，2 階微分方程式である運動方程式を時間について 1 回積分した 1 階微分方程式が得られる．実際，力学的エネルギー保存則 $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は $x(t)$ についての 1 階微分方程式と見ることができ,

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x^2} \tag{5.30}$$

と変形できる．ここで，$x_0 \equiv \sqrt{2E/m\omega^2}$ を定義した．これは変数分離形の微分方程式であるから,[*50]

$$\frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \pm\omega\, dt \tag{5.31}$$

と変形してから両辺を積分することで，ϕ を任意定数として,

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \pm\omega t + \phi \tag{5.32}$$

より,

$$x = x_0 \sin(\pm\omega t + \phi) = \pm x_0 \sin(\omega t \pm \phi) \tag{5.33}$$

と解くことができる．いずれの複号も位相 ϕ に吸収させることができるから，これは先に求めた単振動の運動方程式の一般解と一致する．ここで，$x_0 = \sqrt{2E/m\omega^2}$ より $E = m\omega^2 x_0^2/2$ であり，これは初期条件で決まる定数である．

5.2　減衰振動 — 抵抗力が働く場合の振動 —

速度 $v = \dot{x}$ に比例した抵抗力 $f = -c\dot{x}$ $(c > 0)$ が働く場合を考える．運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \tag{5.34}$$

と書ける．$\omega \equiv \sqrt{k/m}$ と $\gamma \equiv c/2m$ を定義すると，運動方程式は,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.35}$$

と書くことができる．この方程式の解を $x(t) = e^{\lambda t}$ と置いて微分方程式に代入することで得られる特性方程式は,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{5.36}$$

[*49] 運動エネルギーは英語で “Kinetic Energy” なので，頭文字をとって K と書かれる．解析力学などの分野では T とも書かれるが，振動の周期 T と紛らわしいので，ここでは使わない．ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) には U や V がよく使われるが，その由来は知らない．

[*50] $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$ の形の微分方程式を変数分離形と呼び，x を左辺，t を右辺に移項してから両辺を積分することで，$\int \frac{dx}{f(x)} = \int dt\, g(t)$ となり，両辺の不定積分を実行すれば解が得られる．

である．特性方程式の解は，

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \equiv \lambda_\pm \tag{5.37}$$

と計算できる．判別式が $\Delta/4 = \gamma^2 - \omega^2 \neq 0$ の場合には 2 つの独立な解 $e^{\lambda_+ t}$ と $e^{\lambda_- t}$ が得られるから，一般解はこれらの線形結合として書くことができる．判別式 $\Delta = 0$，すなわち $\omega = \gamma$ の場合には解が $e^{-\gamma t}$ のひとつしか見つからないので，もうひとつの解を探さなくてはならない．また，判別式 $\Delta/4 = \gamma^2 - \omega^2$ の正負，すなわち ω と γ の大小関係によって λ が実数か複素数かが決まり，解の振舞いが変わるので，以下では場合分けをして議論を進める．

5.2.1 減衰振動 ($\omega > \gamma$)

$\omega > \gamma$ のとき，特性方程式の判別式は $\Delta < 0$ であるから，特性方程式の解は 2 つの異なる複素数となる．そこで，新しい定数 $\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ $(< \omega)$ を定義すると，特性方程式の解は，

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm i\Omega \tag{5.38}$$

と書ける．基本解は $\{e^{(-\gamma+i\Omega)t}, e^{(-\gamma-i\Omega)t}\}$ であり，一般解は，

$$x(t) = \mathcal{C}_1 e^{(-\gamma+i\Omega)t} + \mathcal{C}_2 e^{(-\gamma-i\Omega)t} = e^{-\gamma t}(\mathcal{C}_1 e^{i\Omega t} + \mathcal{C}_2 e^{-i\Omega t}) = e^{-\gamma t}\big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\big) . \tag{5.39}$$

ここで，$x(t)$ の実数条件から $\mathcal{C}_2{}^* = \mathcal{C}_1$ である．最後の表式では，実定数 $A = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_1{}^* = 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{C}_1)$ と $B = i(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_1{}^*) = -2\,\mathrm{Im}(\mathcal{C}_1)$ を定義した．最後の表式より，基本解として実関数の組 $\{e^{-\gamma t}\cos(\Omega t), e^{-\gamma t}\sin(\Omega t)\}$ を選んでもよいことがわかる．振幅が時間経過に伴って $e^{-\gamma t}$ という因子で減衰しながら振動するので，この現象を**減衰振動**と呼ぶ．速度 $v(t)$ は，

$$\begin{aligned} v(t) = \dot{x}(t) &= \Omega e^{-\gamma t}\big(-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\big) - \gamma e^{-\gamma t}\big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\big) \\ &= \Omega e^{-\gamma t}\big(-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\big) - \gamma x(t) , \end{aligned} \tag{5.40}$$

と計算できる．初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ を満たす解は，$\Omega^2 + \gamma^2 = \omega^2$ を用いると，

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(x_0\cos(\Omega t) + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right) , \tag{5.41}$$

$$v(t) = e^{-\gamma t}\left(v_0\cos(\Omega t) - \frac{\omega^2 x_0 + \gamma v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right) . \tag{5.42}$$

(d) 減衰振動の一般解の別の表現　単振動の場合と同様に，減衰振動の一般解は，

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \phi) \tag{5.43}$$

と書くこともできる．ここで，$C > 0$ であり，$Ce^{-\gamma t}$ が振幅を与える．$x(t)$ は包絡線 $x_\pm(t) \equiv \pm Ce^{-\gamma t}$ で挟まれた範囲内で振動する．このとき，速度 $v(t)$ は

$$v(t) = \dot{x}(t) = Ce^{-\gamma t}\big(-\gamma\sin(\Omega t + \phi) + \Omega\cos(\Omega t + \phi)\big) = \omega Ce^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi + \Delta\phi) \tag{5.44}$$

と計算できる．最後の表式では三角関数の合成を用いた．ここで，

$$\Omega = \omega\cos(\Delta\phi) , \tag{5.45}$$

$$\gamma = \omega\sin(\Delta\phi) , \tag{5.46}$$

の関係がある．位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ の関係は，単振動の場合と比較して位相が $\Delta\phi = \tan^{-1}(\gamma/\Omega)$ だけずれる．

(e)* 減衰振動の力学的エネルギー　時刻 t における運動エネルギー $K(t)$ とバネのポテンシャルエネルギー $U(t)$ は，

$$K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\Omega t + \phi + \Delta\phi) , \tag{5.47}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kC^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\Omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\Omega t + \phi) , \tag{5.48}$$

と計算できる．$U(t)$ の計算では $k = m\omega^2$ を用いた．したがって，力学的エネルギー $E(t)$ は，

$$
\begin{aligned}
E(t) = K(t) + U(t) &= \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 e^{-2\gamma t}\left(\cos^2(\Omega t + \phi + \Delta\phi) + \sin^2(\Omega t + \phi)\right) \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 e^{-2\gamma t}\big(1 - \sin(\Delta\phi)\sin(2\Omega t + 2\phi + \Delta\phi)\big)
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

と計算できる．最後の等号では半角の公式と和積の公式を順に用いた．当然のことながら，$\gamma = 0$ のときには単振動の力学的エネルギーの表式と一致する．第 1 項が時間的に単調減少するのに対して，$e^{-2\gamma t}\sin(\Delta\phi)\sin(2\Omega t + 2\phi + \Delta\phi)$ の項は時間的に振動する．特に $\Omega \gg \gamma$ のときには，1 周期 $T = 2\pi/\Omega$ の間には $e^{-2\gamma T} = e^{-4\pi\gamma/\Omega} \simeq 1 + \mathcal{O}(\gamma/\Omega)$ となってほとんど減衰しないので，これらの項の 1 周期に渡る平均の寄与は小さい．したがって，このときの力学的エネルギーの 1 周期に渡る平均値 $\langle E(t)\rangle$ は

$$
\langle E(t)\rangle \simeq \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 e^{-2\gamma t} = E(0)e^{-2\gamma t}
\tag{5.50}
$$

と評価でき，時間経過に伴って指数関数的に減少することがわかる．$\Omega \gg \gamma$ の条件が成り立たない場合でも，$E(t)$ は $e^{-2\gamma t}$ の因子を持つから，力学的エネルギーはやはり時間経過に伴って指数関数的に減少する．[*51]

5.2.2 過減衰 ($\omega < \gamma$)

このとき特性方程式の判別式は $\Delta > 0$ であるから，特性方程式の解は 2 つの異なる実数となる．$\Gamma \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ $(< \gamma)$ を定義すると，特性方程式の解は，

$$
\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm \Gamma = -(\gamma \mp \Gamma)
\tag{5.51}
$$

と書ける．いずれの解も $\lambda_\pm < 0$ であることに注意．したがって，基本解は $\{e^{-(\gamma-\Gamma)t}, e^{-(\gamma+\Gamma)t}\}$ であり，一般解は

$$
x(t) = C_1 e^{-(\gamma-\Gamma)t} + C_2 e^{-(\gamma+\Gamma)t} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\Gamma t} + C_2 e^{-\Gamma t}\right) = e^{-\gamma t}\big(A\cosh(\Gamma t) + B\sinh(\Gamma t)\big)
\tag{5.52}
$$

と書ける．[*52] ここで，$e^{-(\gamma\mp\Gamma)t}$ は (独立な) 実関数であるから，任意定数 C_1 と C_2 は共に実数である．最後の表式は単振動 (減衰振動) の場合と対応した形で書かれており，$t = 0$ で消える $\sinh(\Gamma t)$ が含まれているので，初期条件の設定に便利である．この解は振動せずに減衰するので，この現象を**過減衰**と呼ぶ．$e^{-(\gamma-\Gamma)t}$ と $e^{-(\gamma+\Gamma)t}$ では前者の方が減衰が遅く，時間が経過したのちに重要な解となる．速度 $v(t)$ は

$$
\begin{aligned}
v(t) = \dot{x}(t) &= \Gamma e^{-\gamma t}\big(A\sinh(\Gamma t) + B\cosh(\Gamma t)\big) - \gamma e^{-\gamma t}\big(A\cosh(\Gamma t) + B\sinh(\Gamma t)\big) \\
&= \Gamma e^{-\gamma t}\big(A\sinh(\Gamma t) + B\cosh(\Gamma t)\big) - \gamma x(t)
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

と計算できる．初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ を満たす解は，

$$
x(t) = e^{-\gamma t}\left(x_0\cosh(\Gamma t) + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\Gamma}\sinh(\Gamma t)\right),
\tag{5.54}
$$

$$
v(t) = e^{-\gamma t}\left(v_0\cosh(\Gamma t) - \frac{\omega^2 x_0 + \gamma v_0}{\Gamma}\sinh(\Gamma t)\right),
\tag{5.55}
$$

と書ける．これは同様の初期条件を満たす減衰振動の解の三角関数を双曲線関数で置き換え，Ω を Γ と書き換えたものになっている．[*53] 減衰振動のときと同様にして力学的エネルギーを計算すると，やはり力学的エネルギーは $e^{-2\gamma t}$ の因子で指数関数的に減衰することがわかる．

[*51] 減衰振動の運動方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ の減衰項 $2\gamma\dot{x}$ を右辺に移項し，両辺に $\dot{x}$ をかけて変形することで，

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = -2\gamma\dot{x}^2 \ (< 0)
$$

が得られるので，(単位質量当たりの) 力学的エネルギーは時間経過に伴って減少することが分かる．

[*52] 双曲線関数は，指数関数を用いて，$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ と定義される．

[*53] 実際，過減衰の場合にも $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = i\Gamma \in \mathbb{C}$ を用い，複素三角関数と双曲線関数の関係 $\cos(i\theta) = \cosh\theta$ と $\sin(i\theta) = i\sinh\theta$ を思い出せば，減衰振動の解と過減衰の解は全く同じ形で書くことができる．

(f)* 過減衰の一般解の別の表現　過減衰の一般解は

$$x(t) = e^{-\gamma t}\big(A\cosh(\Gamma t) + B\sinh(\Gamma t)\big) = Ce^{-\gamma t}\sinh(\Gamma t + \eta) \tag{5.56}$$

と書くこともできる．A, B と C, η の関係は,

$$A = C\sinh(\eta)\ , \tag{5.57}$$
$$B = C\cosh(\eta)\ , \tag{5.58}$$

である．[*54] この形の一般解を用いると，速度 $v(t)$ は,

$$v(t) = \dot{x}(t) = Ce^{-\gamma t}\big(-\gamma\sinh(\Gamma t+\eta) + \Gamma\cosh(\Gamma t+\eta)\big) = -\omega Ce^{-\gamma t}\sinh(\Gamma t + \eta - \Delta\eta) \tag{5.59}$$

と書ける．ここで，変位 x に対する速度 v の位相の遅れを表す $\Delta\eta$ を以下を満たすように定義した．

$$\gamma = \omega\cosh(\Delta\eta)\ , \tag{5.60}$$
$$\Gamma = \omega\sinh(\Delta\eta)\ . \tag{5.61}$$

5.2.3　臨界減衰 ($\omega = \gamma$)

このとき特性方程式の判別式は $\Delta = 0$ であるから，特性方程式の解はただひとつの実数

$$\lambda = -\gamma \quad (\text{重根}) \tag{5.62}$$

となり，特性方程式からは解が $e^{-\gamma t}$ のひとつしか求まらず，基本解を構成できない．次の演習問題で確認するように，もうひとつの独立な解は $te^{-\gamma t}$ で与えられ，基本解は $\{e^{-\gamma t}, te^{-\gamma t}\}$ ととることができる．一般解は

$$x(t) = C_1e^{-\gamma t} + C_2te^{-\gamma t} = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2t) \tag{5.63}$$

と書ける．C_1 と C_2 は実数である．この解で記述される現象を**臨界減衰**と呼ぶ．速度 $v(t)$ は,

$$v(t) = \dot{x}(t) = C_2e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t}(C_1 + C_2t) = C_2e^{-\gamma t} - \gamma x(t) \tag{5.64}$$

と計算できる．初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ を満たす解は,

$$x(t) = e^{-\gamma t}\big(x_0 + (\gamma x_0 + v_0)t\big)\ , \tag{5.65}$$
$$v(t) = e^{-\gamma t}\big(v_0 - (\gamma x_0 + v_0)\gamma t\big)\ , \tag{5.66}$$

と書ける．これは同様の初期条件を満たす減衰振動や過減衰の解で $\omega \to \gamma$ の極限をとった形になっている．

問 18　$x(t) = te^{-\gamma t}$ が $\omega = \gamma$ のときの運動方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0$ の解であることを示せ．

解答　$x = te^{-\gamma t}$ より $\dot{x} = (1-\gamma t)e^{-\gamma t}$，$\ddot{x} = (-2\gamma + \gamma^2t)e^{-\gamma t}$ だから,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = \big((-2\gamma+\gamma^2t) + 2\gamma(1-\gamma t) + \gamma^2t\big)e^{-\gamma t} = 0\ . \tag{5.67}$$

問 19　$\omega = \gamma$ のときの運動方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0$ の解を $x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ とおいて $y(t)$ についての微分方程式をつくり，それを解くことで (一般) 解 $x(t)$ を求めよ．

解答　$x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ より $\dot{x} = (\dot{y} - \gamma y)e^{-\gamma t}$，$\ddot{x} = (\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \gamma^2y)e^{-\gamma t}$ であるから，これを運動方程式に代入して,

$$0 = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = \big((\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \gamma^2y) + 2\gamma(\dot{y} - \gamma y) + \gamma^2y\big)e^{-\gamma t} = \ddot{y}e^{-\gamma t}\ , \tag{5.68}$$

を得る．[*55] $e^{-\gamma t} \neq 0$ より $\ddot{y} = 0$ であり，この一般解は $y(t) = C_1 + C_2t$ と求まる．したがって,

$$x(t) = y(t)e^{-\gamma t} = (C_1 + C_2t)e^{-\gamma t}\ . \tag{5.69}$$

[*54] 双曲線関数の加法定理は $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$，$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$.

[*55] $x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ を微分方程式の左辺に代入した結果は，一般に $(A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy)e^{-\gamma t}$ と書けるはずである．ここで，$y_0 \neq 0$ を定数として $y(t) = y_0$ とすると，$(A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy)e^{-\gamma t} = Cy_0e^{-\gamma t}$ となるが，$x(t) = y_0e^{-\gamma t}$ は微分方程式の斉次解であり，この量はゼロとなるべきであるから，$C = 0$ である．つまり，$x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ を微分方程式の左辺に代入した結果には，$\ddot{y}$ や $\dot{y}$ のみが現れ，y は現れない．(この問題で $\dot{y}$ が現れなかったのは特性方程式が重解を持ったためであり，一般には $\dot{y}$ の項が存在する) ここで，$\ddot{y}\ (= d\dot{y}/dt)$ と $\dot{y}$ のみの微分方程式は $\dot{y}$ についての **1 階**微分方程式とみなすことができるから，元の微分方程式と比べて簡単に解くことができる．このように，微分方程式の基本解のひとつ $x(t) = x_1(t)$ を用いて $x(t) = y(t)x_1(t)$ のように従属変数の変数変換を行うことで，$\dot{y}(t)$ について次数の下がった微分方程式が得られる．$x(t)$ と $y(t)$ は一対一に対応するから，この変数変換で一般性は失われない．この手法は**階数降下法**または**定数変化法**と呼ばれる．(細かいことを言えば，定数変化法はもう少し一般的な方法を指し，階数降下法とは区別されることも多い)

(g) 過減衰と臨界減衰の減衰率の比較　減衰振動についての議論を終える前に，臨界減衰の解が過減衰よりも早く減衰するという重要な特徴について述べておく．初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = 0$ を満たす過減衰の解 $x(t)$ と臨界減衰の解 $x_{\mathrm{crit}}(t)$ は，それぞれ，

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\left(\cosh(\Gamma t) + \frac{\gamma}{\Gamma}\sinh(\Gamma t)\right) , \tag{5.70}$$

$$x_{\mathrm{crit}}(t) = x_0 e^{-\gamma t}(1 + \gamma t) , \tag{5.71}$$

と書ける．$t > 0$ のとき $\cosh(\Gamma t) > 1$ かつ $\sinh(\Gamma t) > \Gamma t$ であるから，

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\left(\cosh(\Gamma t) + \frac{\gamma}{\Gamma}\sinh(\Gamma t)\right) > x_0 e^{-\gamma t}\left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma}\cdot \Gamma t\right) = x_{\mathrm{crit}}(t) . \tag{5.72}$$

したがって，$t > 0$ で常に $x_{\mathrm{crit}}(t) < x(t)$ であり，臨界減衰の解 $x_{\mathrm{crit}}(t)$ のほうが早く減衰する．一見すると抵抗力が大きい過減衰のほうが (文字どおり) 早く減衰しそうだと感じるかもしれないが，抵抗力が大きいということは物体が動きづらいということだから，つりあいの位置まで移動するのに余計に時間がかかってしまう．極端な例として，抵抗力が限りなく大きいときには，物体はもはや動くことができず，つりあいの位置まで動くには限りなく長い時間がかかる．抵抗力の大きさが良い塩梅のときに素早くつりあいの位置まで移動して落ち着くことが可能で，それが $\omega = \gamma$ を満たす臨界減衰の場合なのである．

§ まとめ — 減衰振動の運動方程式の解の分類 —　減衰振動の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.73}$$

において，系のパラメータ γ と ω の大小関係によって，解は以下のように分類される．

現象の名称	条件	特性方程式の解 (固有値)	基本解	運動の様子
単振動	$\gamma = 0$	$\lambda_\pm = \pm i\omega$	$\{\cos(\omega t)\, ,\, \sin(\omega t)\}$	一定の振幅で振動
減衰振動	$\omega > \gamma$	$\lambda_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\Omega$	$\{e^{-\gamma t}\cos(\Omega t)\, ,\, e^{-\gamma t}\sin(\Omega t)\}$	減衰しながら振動
臨界減衰	$\omega = \gamma$	$\lambda = -\gamma$	$\{e^{-\gamma t}\, ,\, te^{-\gamma t}\}$	最も素早く減衰
過減衰	$\omega < \gamma$	$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm \Gamma$	$\{e^{-(\gamma-\Gamma)t}\, ,\, e^{-(\gamma+\Gamma)t}\}$	振動せずに減衰

5.3　強制振動 — 周期的な外力による強制的な振動 —

減衰振動の方程式に周期的な外力 $F(t) = F_0 \sin(\omega' t)$ $(F_0 > 0\, ,\, \omega' > 0)$ を加えることを考える．[*56] たとえば，質点に電荷を与えて，そこに周期的な電場 (電磁波など) を加えることを想定すればよい．運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \sin(\omega' t) \tag{5.74}$$

となる．減衰振動の場合と同様に $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ と $\gamma \equiv c/2m$ を定義する．$\omega = \sqrt{k/m}$ は，物体の質量 m とバネ定数 k という，バネにつながれた物体の系の性質のみで決まる系に固有の角振動数なので，**固有角振動数**と呼ばれる．[*57] さらに，単位質量あたりの力 $f \equiv F_0/m$ を定義すると，運動方程式は，

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f \sin(\omega' t) \tag{5.75}$$

と書ける．これは**定数係数 2 階線形非斉次微分方程式**と呼ばれる形の微分方程式である．

§ 定数係数 2 階線形非斉次微分方程式の一般解　以下の議論では，微分方程式が線形であることが重要である．この微分方程式の一般解を求めるには，対応する斉次 (同次) 方程式

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{5.76}$$

[*56] 外力は $F(t) = F_0 \cos(\omega' t)$ などと書いても，時間の原点をずらすだけで同じである．ここでは $t = 0$ で $F(0) = 0$ となるように選んだ．

[*57] 固有角振動数を $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$，外力の角振動数を ω と書いてあるテキストが多い．ここでは単振動から減衰振動まで一貫して使ってきた表記を変えたくなかったので，系の固有角振動数を引き続き ω と書くことにした．(これに限らず) 読んでいる本によって同じ記号でも異なった意味に使われている可能性があるから，注意が必要である．

も合わせて考える必要がある．ここでは分かりやすさのために斉次方程式の未知関数を y と書いた．非斉次方程式に対応する斉次方程式は，**同伴方程式**とも呼ばれる．線形非斉次微分方程式の一般解の求め方は，言葉で書けば，

$$「線形非斉次方程式の一般解」=「特解」+「同伴方程式の一般解」 \tag{5.77}$$

である．[*58] この「言葉の式」は非常に重要なので，そのまま覚えておくことを強く勧める．非斉次方程式の特解を $x_p(t)$，同伴方程式の基本解を $\{y_1, y_2\}$ として，一般解を $Ay_1(t) + By_2(t)$ と書こう．仮定より当然，

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega^2 x_p = f\sin(\omega' t) \ , \tag{5.78}$$

$$\ddot{y}_i + 2\gamma\dot{y}_i + \omega^2 y_i = 0 \ , \quad (i = 1, 2) \ , \tag{5.79}$$

が成り立つ．このとき，求める一般解 $x(t)$ は，

$$x(t) = x_p(t) + Ay_1(t) + By_2(t) \tag{5.80}$$

と表すことができる．これを確かめよう．一般解の要件は，「(i) 微分方程式の解であること」と「(ii) 微分方程式の階数と同じ数の任意定数を含むこと」であるが，A と B は任意定数であるから，(ii) は明らかに満たしている．そこで，(i) を確かめる．$x(t)$ を微分方程式の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x &= (\ddot{x}_p + A\ddot{y}_1 + B\ddot{y}_2) + 2\gamma(\dot{x}_p + A\dot{y}_1 + B\dot{y}_2) + \omega^2(x_p + Ay_1 + By_2) \\ &= (\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega^2 x_p) + A(\ddot{y}_1 + 2\gamma\dot{y}_1 + \omega^2 y_1) + B(\ddot{y}_2 + 2\gamma\dot{y}_2 + \omega^2 y_2) \\ &= f\sin(\omega' t) \ ,\end{aligned} \tag{5.81}$$

となるから，確かに $x(t)$ は微分方程式の解であり，$x(t) = x_p(t) + Ay_1(t) + By_2(t)$ は非斉次方程式の一般解であることがわかった．非斉次方程式の一般解では，特解 x_p の部分が微分方程式の解となることを担い，同伴方程式の一般解 $Ay_1 + By_2$ の部分が任意定数を担っている．同伴方程式は既に解法を学んだ減衰振動の運動方程式に他ならないから，あとは特解を求めればよい．以下では抵抗力が無い場合 $(\gamma = 0)$ とある場合 $(\gamma \neq 0)$ を順に議論する．

5.3.1 抵抗力が無い場合 $(\gamma = 0)$

まずは簡単のために抵抗力が無い場合 $(\gamma = 0)$ を考えよう．解くべき運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f\sin(\omega' t) \tag{5.82}$$

である．非斉次微分方程式の特解はどのようにして求めてもよいが，よく用いられる方法としては，「(i) 右辺 (源泉項) の関数形から推定する方法 (未定係数法)」と「(ii) 定数変化法 (あるいは階数降下法)」がある．汎用性が高い手法は後者であるが，その解説は微分方程式のテキストに譲って，ここでは前者の方法で特解を求めてみる．微分方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = f\cos(\omega' t)$ の左辺に関数 x_p を代入して計算した結果が右辺の $f\sin(\omega' t)$ に一致するためには，x_p が $\sin(\omega' t)$ に比例していればよさそうである．そこで，この方程式の特解 $x_p(t)$ を

$$x_p(t) = C\sin(\omega' t) \tag{5.83}$$

の形で探してみよう．もちろん，この仮定でうまくいかなければ，他の可能性を色々と試してみればよい．この x_p を運動方程式の左辺に代入すると，

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = (\omega^2 - {\omega'}^2)C\sin(\omega' t) \tag{5.84}$$

を得る．これが $f\sin(\omega' t)$ に等しければ $x_p(t) = C\sin(\omega' t)$ は運動方程式の特解である．したがって，$\omega' \neq \omega$ のときには $C = f/(\omega^2 - {\omega'}^2)$ とすれば x_p は運動方程式の解となっている．[*59]

$$x_p(t) = \frac{f}{\omega^2 - {\omega'}^2}\sin(\omega' t) \ . \tag{5.85}$$

一般解は，これに斉次方程式の一般解 $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ を加えることで得られる．したがって，運動は角振動数 ω と ω' の 2 種類の振動が混ざった複雑な時間依存性を示す．

[*58] 同伴方程式の一般解を，もとの非斉次方程式の**余関数**と呼ぶことがある．

[*59] 特解には任意性があり，対応する斉次方程式の解を加えた $x'_p(t) = x_p(t) + \cos(\omega t)$ なども特解である．ある特解 $x_p(t)$ と異なる特解 $x'_p(t)$ は同じ微分方程式，$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = f\sin(\omega' t)$，$\ddot{x}'_p + \omega^2 x'_p = f\sin(\omega' t)$ を満たす．これらの方程式の差をとると，特解の差 $(x_p - x'_p)$ は，同伴方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}(x_p - x'_p) + \omega^2(x_p - x'_p) = 0$ を満たすから，必ず $x'_p = x_p + Ay_1 + By_2$ という形で書くことができる．

§ 共振 ($\omega' = \omega$ のとき)　$\omega' = \omega$ のときには特解は $x_p = C\sin(\omega' t)$ という形では表されないので，別の関数形を仮定する必要がある．このときに x_p の仮定がうまくいかなかった理由は，$\sin(\omega' t) = \sin(\omega t)$ が対応する斉次方程式 $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ の解になってしまっているからである．斉次方程式の解を何倍して左辺に代入しても，必ず 0 になってしまうから，どのように定数 C を選んでも右辺の $f\sin(\omega' t)$ が出てくることはない．この場合の特解を求めるには定数変化法 (階数降下法) を用いるのが普通であるが，それは演習問題にまわして，ここでは天下りに答えを与えてしまおう．

$$x_p(t) = Ct\cos(\omega t) \tag{5.86}$$

とするとうまくいく．[*60] これを $\omega' = \omega$ と置いた微分方程式の左辺に代入して整理すると，

$$-2C\omega\sin(\omega t) = f\sin(\omega t) \tag{5.87}$$

となるから，[*61] $C = -f/2\omega$ とすれば x_p は特解になる．

$$x_p = -\frac{ft}{2\omega}\cos(\omega t) = \frac{ft}{2\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{5.88}$$

この解は振幅 $ft/2\omega$ が時間に比例して増大していくことを表している．この現象は**共振**あるいは**共鳴**と呼ばれる．[*62] 共振が起こる場合には，外力が大きくなくても，それが何周期にも渡って積み重なることで，系に大きな振幅を与えることができる．たとえば，ブランコに乗った友達の背中をタイミングよく押してやることで，ブランコは大きく振れる．子供の小さな力でも，タイミングを合わせて根気よく何度も押すことで，ブランコを大きく振動させることができる．この例の場合には，友達 (とブランコの系) に対して自分の手が加える外力は三角関数で表されるわけではないが，定性的にはここで議論した現象と同じことが起こっていると考えてよいだろう．あるいは，より直接的に共振を体感するには，振り子の糸を持って左右に小さく振ってみればよい．ある一定の周期になったときに振り子の振幅が増大することがわかる．これはまさにここで議論した (三角関数で表される力が駆動力となる) 共振現象である．[*63]

問 20　$\omega' = \omega$ のとき，解くべき運動方程式の右辺 $f\sin(\omega t)$ を $fe^{i\omega t}$ に置き換えた非斉次方程式

$$\ddot{X} + \omega^2 X = fe^{i\omega t} \tag{5.89}$$

を考える．この解 $X(t)$ が求まれば，その虚部 $x = \mathrm{Im}(X)$ が $\ddot{x} + \omega^2 x = f\sin(\omega t)$ の解を与える．定数変化法 (階数降下法) を用いて解を求めよう．斉次方程式の解のひとつ $e^{i\omega t}$ を用いて $X(t) = Y(t)e^{i\omega t}$ と変数変換を行い，$Y(t)$ に対する方程式を求め，それを解くことで $Y(t)$ および $X(t)$ の一般解を求めよ．[*64]

解答　$X(t) = Y(t)e^{i\omega t}$ を微分方程式に代入して整理すると，

$$\ddot{Y} + 2i\omega\dot{Y} = f \tag{5.90}$$

が得られる．これは $\dot{Y}$ についての定数係数 1 階線形微分方程式であるから容易に解けて，

$$Y(t) = -\frac{ift}{2\omega} + \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 e^{-2i\omega t} \tag{5.91}$$

[*60] なぜ $t\sin(\omega t)$ ではなく $t\cos(\omega t)$ とするのかと疑問に思うかもしれない．この疑問は尤もで，本来なら $x_p(t) = C_1 t\cos(\omega t) + C_2 t\sin(\omega t)$ として $C_2 = 0$ を導くほうがよい．非斉次線形微分方程式の特解の推定方法については，微分方程式のノートを参照のこと．

[*61] 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の微分は，Leibniz の法則 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ で計算でき，特に $f(x) = x$ で $n = 2$ のとき，$(xg)'' = x''g + 2x'g' + xg'' = 2g' + xg''$ と簡単に計算できる．

[*62] もちろん実際には振幅がどこまでも大きくなることはなく，あるところで系が破壊されるなどして，仮定している運動方程式が適用できなくなる．共振による破壊の例として有名なのが，タコマナローズ橋 (Tacoma Narrows Bridge) の崩落事故である．ただし，共振が原因ではないという指摘もあるようなので注意．橋が (それほど強くない) 横風を受けたとき，風が橋に当たることによって生じた空気の渦による周期的な力によって激しい揺れが生じ，しばらくして橋は崩落してしまった．この事故は高校物理の教科書のコラムなどに載っていることもあるし，機械系の大学生などは教訓として講義でビデオを見せられることも多いそうである．教養として YouTube などで映像を見ておくとよい．他にも，地震による建造物の倒壊など，共振による破壊現象は枚挙に暇がない．

[*63] 振り子の糸を持って左右に振るという現象を記述する運動方程式は，解析力学という分野の知識を使うと簡単に書き下すことができる．

[*64] $\ddot{x} + \omega^2 x = f\sin(\omega t)$ の解を $x(t) = y(t)\sin(\omega t)$ などとしてそのまま定数変化法で求めようとすると計算が面倒である．解けないわけではないので，興味があれば微分方程式を解く練習と思って取り組んでみるとよい．

を得る．$\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ は複素数の任意定数である．したがって，一般解は

$$X(t) = Y(t)e^{i\omega t} = -\frac{ift}{2\omega}e^{i\omega t} + \mathcal{C}_1 e^{i\omega t} + \mathcal{C}_2 e^{-i\omega t} \tag{5.92}$$

と求まる．[*65]

(h) $\omega' \to \omega$ **の極限**　この小節の最後に，$\omega' = \omega$ の場合の特解は，$\omega' \neq \omega$ の場合の解の $\omega' \to \omega$ の極限として得られるということを紹介しておく．先に求めた $\omega' \neq \omega$ の場合の特解は

$$x_p(t) = \frac{f}{\omega^2 - \omega'^2}\sin(\omega' t) \tag{5.93}$$

であったが，この解で $\omega' \to \omega$ の極限をとると発散してしまい，意味のある結果が得られない．そこで，この特解 x_p に同伴方程式の任意の解を加えたものも特解となることを思い出せば，

$$x'_p(t) = \frac{f}{\omega^2 - \omega'^2}\big(\sin(\omega' t) - \sin(\omega t)\big) \tag{5.94}$$

という特解を考えれば $\omega' \to \omega$ の極限をとることができることがわかる．実際，

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega' \to \omega} x'_p(t) &= \lim_{\omega' \to \omega} \frac{f}{\omega^2 - \omega'^2}\big(\sin(\omega' t) - \sin(\omega t)\big) \\
&= \lim_{\omega' \to \omega} -\frac{ft}{\omega' + \omega}\frac{\sin(\omega' t) - \sin(\omega t)}{\omega' t - \omega t} \\
&= -\frac{ft}{2\omega}\cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{5.95}$$

と計算でき，確かに $\omega' = \omega$ のときの特解が得られる．

5.3.2　抵抗力がある場合 ($\gamma \neq 0$)

次に抵抗力がある場合 ($\gamma \neq 0$) を考えよう．解くべき運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f\sin(\omega' t) \tag{5.96}$$

である．この場合には左辺に $\dot{x}$ に比例する項があるので，左辺に $x(t) = C\sin(\omega' t)$ を代入すると，$\cos(\omega' t)$ に比例した項が出てくるので，$C\sin(\omega' t)$ は特解とはなり得ない．そこで，この項を打ち消すためにあらかじめ $\cos(\omega' t)$ の項を加えておき，特解を，

$$x_p(t) = C\cos(\omega' t) + D\sin(\omega' t) \tag{5.97}$$

の形に仮定してみる．このように，右辺の関数形からの推定によって特解を求める際には，特解の形として，右辺の関数とその微分で現れる関数 (たち) の線形結合をとるとうまくいくことが多い．これを微分方程式の左辺に代入して整理すると，

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega^2 x_p = \Big((\omega^2 - \omega'^2)C + 2\gamma\omega' D\Big)\cos(\omega' t) + \Big(-2\gamma\omega' C + (\omega^2 - \omega'^2)D\Big)\sin(\omega' t)\ , \tag{5.98}$$

となる．したがって，x_p が特解となる必要十分条件は，行列の形で書けば，

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega'^2 & 2\gamma\omega' \\ -2\gamma\omega' & \omega^2 - \omega'^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \tag{5.99}$$

である．これを解いて，

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega'^2 & 2\gamma\omega' \\ -2\gamma\omega' & \omega^2 - \omega'^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \frac{f}{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + (2\gamma\omega')^2}\begin{bmatrix} -2\gamma\omega' \\ \omega^2 - \omega'^2 \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

[*65] この虚部をとり，任意定数を適当に置き換えることで，$\ddot{x} + \omega^2 x = f\sin(\omega t)$ の解が得られる．

$$x(t) = \mathrm{Im}(X(t)) = -\frac{ft}{2\omega}\cos(\omega t) + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ .$$

を得る．[*66] したがって，特解は

$$x_p(t) = \frac{f}{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}\Big(-2\gamma\omega'\cos(\omega' t)+(\omega^2-\omega'^2)\sin(\omega' t)\Big) \tag{5.101}$$

と求まる．一般解はこれに斉次方程式の一般解を加えたものであるが，抵抗力が働く場合の斉次方程式の解は $e^{-\gamma t}$ の因子で減衰するから，十分に時間が経ったあとには，この特解のみが残る．三角関数の合成を用いると，特解は

$$x_p(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}}\sin(\omega' t+\phi) \tag{5.102}$$

と書くことができる．初期位相 ϕ は,

$$\cos\phi = \frac{\omega^2-\omega'^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}}\ , \quad \sin\phi = \frac{-2\gamma\omega'}{\sqrt{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}} \tag{5.103}$$

を満たす角度である．$\omega' \neq \omega$ のときは，tan の逆関数の主値 Arctan を用いて

$$\phi = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{2\gamma\omega'}{\omega^2-\omega'^2}\right) - \pi\,\Theta(\omega'-\omega) \tag{5.104}$$

と書ける．[*67] $\Theta(x)$ は Heaviside の階段関数で，$x>0$ で 1，$x<0$ で 0 の値をとる．$\omega'=\omega$ のときは $\phi=-\pi/2$ である．ω' が大きくなるに従い徐々に位相が遅れ，$\omega'\to\infty$ で $\phi\to-\pi$ となる．また，外力の角振動数の 2 乗 ω'^2 の関数として，振幅 $\mathcal{A}(\omega'^2)$ は

$$\mathcal{A}(\omega'^2) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}} = \frac{f}{\sqrt{\Big(\omega'^2-(\omega^2-2\gamma^2)\Big)^2+4\gamma^2(\omega^2-\gamma^2)}} \tag{5.105}$$

と書ける．したがって，$\omega^2>2\gamma^2$ のときには，$\omega'^2=\omega^2-2\gamma^2$，すなわち $\omega'=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2}$ $(\equiv \omega'_{\max})$ のときに，振幅 $\mathcal{A}(\omega'^2)$ は最大値

$$\mathcal{A}({\omega'_{\max}}^2) = \frac{f}{2\gamma\sqrt{\omega^2-\gamma^2}} \tag{5.106}$$

をとる．$\gamma\neq0$ の場合と異なり，共鳴条件が満たされても振幅は有限値に留まる．一方で，$\omega^2\leq2\gamma^2$ のときには振幅 $\mathcal{A}(\omega'^2)$ は極大値を持たず，ω'^2 の増加に伴って単調に減少する．$\omega'^2\to0$ の極限で $\mathcal{A}(\omega'^2)\to\mathcal{A}(0)=f/\omega^2$ となるが，これは時間に依存しない一定の外力 $F_0=mf$ が働いたときのつりあいの位置が $x=\mathcal{A}(0)$ であることに対応する．一方で，$\omega'^2\to\infty$ の極限で $\mathcal{A}(\omega'^2)\to0$ となるが，これは外力の角振動数 ω' が系の固有角振動数 ω に比べて非常に大きい場合，系が外力の振動についていくことができず，もはや振動できなくなることを示している．

(i) 複素数を用いた特解の求め方　微分方程式は複素数を用いて以下のように解くこともできる．こちらのほうが計算が簡単であるうえに，現象の理解にも役に立つので，教科書にもこちらの方法が掲載されていることのほうが多い．運動方程式を解く代わりに，以下の微分方程式を考える．

$$\ddot{X}+2\gamma\dot{X}+\omega^2X = fe^{i\omega' t}\ . \tag{5.107}$$

変数 X は複素数値をとることに注意．この微分方程式の特解 X_p を求めれば，その虚部 $x_p=\operatorname{Im}(X_p)$ が元の微分方程式の特解となる．[*68] 特解を $X_p(t)=\mathcal{C}e^{i\omega' t}$ の形で探す．[*69] これを微分方程式の左辺に代入すると,

$$\ddot{X}_p+2\gamma\dot{X}_p+\omega^2X_p = \Big((\omega^2-\omega'^2)+2i\gamma\omega'\Big)\mathcal{C}e^{i\omega' t} \tag{5.108}$$

[*66] $\gamma\neq0$ または $\omega'\neq\omega$ のとき，$\det\begin{bmatrix}\omega^2-\omega'^2 & 2\gamma\omega' \\ -2\gamma\omega' & \omega^2-\omega'^2\end{bmatrix} = (\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2>0$ よりこの行列は正則である．

[*67] 脚注*42 で導入した `atan2` 関数を (`atan2` を単に Arctan と書いて) 用いると，この結果は $\phi=-\operatorname{Arctan}(\omega^2-\omega'^2, 2\gamma\omega')$ と書ける．

[*68] 特解 X_p の実部 $\operatorname{Re}(X_p)$ をとると，$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2x=f\cos(\omega' t)$ の特解が求まる．つまり，複素数を用いた解法では，右辺が $f\sin(\omega' t)$ と $f\cos(\omega' t)$ の場合を同時に解いていることになる．

[*69] この係数 $\mathcal{C}$ は複素振幅と呼ばれる．$\mathcal{C}=Ce^{i\phi}$ と表すと，$X_p(t)=\mathcal{C}e^{i\omega' t}=Ce^{i(\omega' t+\phi)}$ より $\operatorname{Im}(X_p)=C\sin(\omega' t+\phi)$ となることから，$\mathcal{C}$ の絶対値 $C=|\mathcal{C}|$ が振幅，$\mathcal{C}$ の偏角 $\phi=\arg(\mathcal{C})$ が位相 (のずれ) の情報を持っていることがわかる．外力の角振動数 ω' を媒介変数として，複素平面上に複素振幅 $\mathcal{C}$ の軌跡を描くと，系の振舞いがよくわかる．

となる．したがって，

$$\Big((\omega^2-\omega'^2)+2i\gamma\omega'\Big)\,\mathcal{C}=f\ ,\quad \therefore \mathcal{C}=\frac{f}{(\omega^2-\omega'^2)+2i\gamma\omega'}\ , \tag{5.109}$$

のように定数 $\mathcal{C}$ を選べば，以下の特解が得られる．

$$\begin{aligned}X_p(t)&=\frac{f}{(\omega^2-\omega'^2)+2i\gamma\omega'}\,e^{i\omega' t}\\&=\frac{f}{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}\Big((\omega^2-\omega'^2)-2i\gamma\omega'\Big)\big(\cos(\omega' t)+i\sin(\omega' t)\big)\ .\end{aligned} \tag{5.110}$$

この虚部をとれば，

$$\mathrm{Im}(X_p)=\frac{f}{(\omega^2-\omega'^2)^2+(2\gamma\omega')^2}\Big(-2\gamma\omega'\cos(\omega' t)+(\omega^2-\omega'^2)\sin(\omega' t)\Big) \tag{5.111}$$

となり，確かに先に計算した特解と一致する．

6 円運動 — 円周上に拘束された運動 —

この章では，棒や糸につながれるなど，何らかの方法で円周上に拘束されて運動する物体を考える．これまでの章では物体に働く力を与えて運動方程式を解くことで物体の運動を調べてきたのに対して，この章では，物体が円運動することを前提として議論を進めるので，円運動する物体にどのような力が働いているかを調べるという，これまでとは逆向きのアプローチで問題に取り組むことになる．

6.1 等速円運動

一定の角速度 ω で半径 r の円運動をする物体を考える．角速度は単位時間あたりの回転角の変化を表す物理量であり，本質的には振動のところで扱った角振動数と同じものである．[*70] 角速度 ω を用いると，時刻 $t=0$ からの回転角の変化は ωt と表される．回転面を x-y 平面にとり，回転の中心に原点をとる．$t=0$ で物体の位置が x 軸上にあったとすると，時刻 t における物体の位置は,

$$x(t)=r\cos(\omega t)\ , \tag{6.1}$$

$$y(t)=r\sin(\omega t)\ , \tag{6.2}$$

と表される．これらを 2 次元ベクトルとして，

$$\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t)]=[r\cos(\omega t),r\sin(\omega t)]=r\,[\cos(\omega t),\sin(\omega t)] \tag{6.3}$$

とまとめて表しておく．このとき，速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ は,

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=[\dot{x}(t),\dot{y}(t)]=r\omega\,[-\sin(\omega t),\cos(\omega t)]\ , \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=-r\omega^2\,[\cos(\omega t),\sin(\omega t)]\ , \tag{6.5}$$

と計算できる．これより，速さ $v=|\boldsymbol{v}|$ と加速度の大きさ $a=|\boldsymbol{a}|$ は,[*71]

$$v=r\omega\ , \tag{6.6}$$

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega\ , \tag{6.7}$$

と書ける．円運動という制約から当然であるが，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は回転中心を基準とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と直交する．また，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ も直交する．

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t)=0\ . \tag{6.8}$$

[*70] 回転の方向は回転軸の方向によって表すことができるので，角速度を回転軸方向を向いたベクトル量 $\boldsymbol{\omega}$ として扱うと便利なことも多い．このノートでは角速度ベクトルの大きさを指して，単に角速度と呼ぶことにする．ちなみに，回転の方向と回転軸の方向は右ネジの関係を正とするのが普通である．

[*71] 2 次元や 3 次元空間のベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさは $v=|\boldsymbol{v}|$ のように同じ文字の細字で表すのが一般的である．このとき，もちろん $v\geq 0$ である．一方で，1 次元の運動で v と書いたときには「1 次元ベクトル」を表すことが多く，v は負の値もとり得るので注意が必要である．

さらに，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と逆向きで，

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2 \boldsymbol{r}(t) \tag{6.9}$$

と書ける．つまり，等速円運動の加速度は回転の中心方向を向いている．この式を運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ と見比べることで，等速円運動を実現するためには，

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{6.10}$$

という力が働いていなければいけないことがわかる．この力は円運動の中心を向き，その大きさは $F = mr\omega^2$ である．このような力は**向心力**と呼ばれる．この関係式

$$mr\omega^2 = F \tag{6.11}$$

を，**等速円運動の運動方程式**と呼ぶ．等速円運動の速さが $v = r\omega$ と書けることから，運動方程式は，

$$mv\omega = F\ , \tag{6.12}$$

$$m\frac{v^2}{r} = F\ , \tag{6.13}$$

などとも書くことができる．その時々で便利な表式を用いればよい．

問 21　高速道路のインターチェンジ (出入口) では，料金所と高速道路の合流地点の間に，方向転換のために円環状の道を走ることがある．このとき，車の速さによっては，車の側面 (ドア) から比較的大きな力を感じる．道路の曲率半径と車の速さを適当に設定し，このときの向心加速度を評価してみよ．

解答　道路の曲率半径 r を $40\,\mathrm{m}$, [*72] 車の速さ v を $40\,\mathrm{km/h}$ あるいは $10\,\mathrm{m/s}$ としてみると，向心加速度 $a = v^2/r$ は，

$$a = \frac{v^2}{r} = 3.1\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{v}{40\,\mathrm{km/h}}\right)^2\left(\frac{r}{40\,\mathrm{m}}\right)^{-1} = 2.5\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{v}{10\,\mathrm{m/s}}\right)^2\left(\frac{r}{40\,\mathrm{m}}\right)^{-1} \tag{6.14}$$

と評価できる．$v = 40\,\mathrm{km/h}$ の場合には，$3.1\,\mathrm{m/s^2} = 0.315\,g$ なので，向心加速度は重力加速度の 30% ほどにもなり，日常で感じる加速度としてはなかなか大きい．[*73]

問 22　地球上の北緯 $\theta = 30^\circ$ の位置における自転の向心加速度を計算せよ．[*74] また，これは重力加速度の何倍か．ただし，地球の半径は $R = 6400\,\mathrm{km}$ とする．北緯は赤道を基準として測るので，球面座標の天頂角とは定義が異なることに注意．

解答　北緯 θ における回転半径は $r = R\cos\theta$ である．また，地球の自転周期 $T = 1\,\mathrm{day} = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$ を用いて角振動数は $\omega = 2\pi/T$ と表されるから，この等速円運動の加速度 a は，

$$a = r\omega^2 = R\cos\theta\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2\cdot 6400\,\mathrm{km}\cdot\cos(30^\circ)}{(86400\,\mathrm{s})^2} = 0.029\,\mathrm{m/s^2} = 3.0\times 10^{-3}\,g \tag{6.15}$$

と評価できる．したがって，向心加速度は重力加速度の 0.3% である．

6.2　極座標における運動方程式

等速円運動の議論を通して明らかになったように，円運動などの特定の運動を解析する際には，Descartes 座標 (Cartesian coordinates) を用いるよりも極座標 (r, θ) を用いるほうが見通しが良い場合がある．そこで，この節では極座標における運動方程式を導出する．極座標の基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ と Descartes 座標の基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ には以

[*72] Google マップで近所のインターチェンジを調べてみるとよい．

[*73] 鈴鹿サーキットには「130R」という高速コーナーがあり，かつてはその名の通り曲率半径が $r = 130\,\mathrm{m}$ であった．このコーナーをレーシングカーは $v = 300\,\mathrm{km/h}$ ほどの速さで通過する．速さが $40\,\mathrm{km/h}$ の 7.5 倍，曲率半径が $40\,\mathrm{m}$ の大体 3 倍なので，130R を通過するドライバーが感じる加速度は $0.315\,g\times 7.5^2/3\sim 6\,g$，すなわち 6 G 程度と評価できる．このような概算ができるのが，この表記の優れたところである．

[*74] 北緯 30° の緯線は，屋久島から南西約 60km に位置する鹿児島県十島村の口之島を通るようである．

下の関係がある．[*75]

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \cos\theta + \boldsymbol{e}_y \sin\theta \ , \tag{6.16}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_y \cos\theta \ . \tag{6.17}$$

Descartes 座標の基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ が位置に依存しないのに対して，極座標の基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向 θ に依存する．つまり，物体の運動をこれらの基本ベクトルで記述する際には，基本ベクトル自身が時間に依存して変化する．Descartes 座標の基本ベクトルは $\dot{\boldsymbol{e}}_x = \dot{\boldsymbol{e}}_y = \boldsymbol{0}$ を満たすから，極座標の基本ベクトルの時間微分は,

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot\theta(-\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_y \cos\theta) = \dot\theta \boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{6.18}$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot\theta(\boldsymbol{e}_x \cos\theta + \boldsymbol{e}_y \sin\theta) = -\dot\theta \boldsymbol{e}_r \ , \tag{6.19}$$

と計算できる．極座標では位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{6.20}$$

と表されるから，これを時間微分して基本ベクトルの微分公式を用いることで，速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ は,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot r \boldsymbol{e}_r + r\dot\theta \boldsymbol{e}_\theta \equiv v_r \boldsymbol{e}_r + v_\theta \boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{6.21}$$
$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\boldsymbol{e}_\theta \equiv a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{6.22}$$

と計算できる．$\boldsymbol{e}_r$ 方向と $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向の速度と加速度を，それぞれ r と θ の添字を付けて定義した．物体に働く外力 $\boldsymbol{F}$ を極座標の基本ベクトルを用いて $\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{e}_r + F_\theta \boldsymbol{e}_\theta$ と表せば，$\boldsymbol{e}_r$ 方向 (r 方向) と $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向 (θ 方向) の運動方程式は，$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ の各成分を比較して,

$$m(\ddot r - r\dot\theta^2) = F_r \ , \tag{6.23}$$
$$m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) = F_\theta \ , \tag{6.24}$$

と書ける．第 1 式は

$$m\ddot r = F_r + mr\dot\theta^2 \tag{6.25}$$

と書き直すことができる．つまり，$mr\dot\theta^2 = mv_\theta^2/r$ を「見かけの力」とみなすことで，動径座標 r に対する運動方程式を 1 次元の運動方程式と同じ形で書くことができる．非慣性系におけるこのような「見かけの力」は**慣性力**と呼ばれる．$mr\dot\theta^2$ は回転中心から離れる向きに働く見かけの力なので，特に**遠心力**と呼ばれる．第 2 式は,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta) = F_\theta \tag{6.26}$$

と書き直すことができる．これは，$F_\theta = 0$ のとき，$L = mr^2\dot\theta = mrv_\theta$ という量が保存する (一定である) ことを示している．L は**角運動量**と呼ばれる．[*76] $F_\theta = 0$ を満たすような力のことを**中心力**という．中心力は動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r = [\cos\theta, \sin\theta]$ を用いて，$\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{e}_r$ と書くことができる．$F_r < 0$ の場合を特に**向心力**と呼ぶ.

(a) 回転行列を用いた基本ベクトルの変換　極座標における基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ と Descartes 座標座標における基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ の関係は，回転行列 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を用いて以下のように書ける.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} \ . \tag{6.27}$$

[*75] 基本ベクトルは座標系に依存した概念であり，「座標値の微小変化に対する位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の変化の方向を向く単位ベクトル」として定義される．つまり，座標値 α に対する基本ベクトルは，$\boldsymbol{e}_\alpha \equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$ と定義される.

[*76] 3 次元空間では角運動量は $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ と定義されるベクトル量である．3 次元空間内で平面内に束縛された運動では，平面内の原点を基準とした角運動量は平面に垂直な方向を向く．この節で扱う平面運動では，この成分を角運動量と呼んでいる.

(b) 座標値の変換を用いた極座標の運動方程式の導出　基本ベクトルの変換を用いた極座標の運動方程式の導出が難しかった場合には，以下のように導出することもできる．ただし，この方法は球座標 (3 次元極座標) では計算量が多く大変である．Descartes 座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係は,

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t)\ , \tag{6.28}$$
$$y(t) = r(t)\sin\theta(t)\ , \tag{6.29}$$

で与えられる．以下では引数の t を省略する．極座標での運動方程式を書き下すためには，Descartes 座標における加速度 $\ddot{x}$ と $\ddot{y}$ を極座標の変数で書き換える必要がある．速度は,

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\ , \tag{6.30}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\ , \tag{6.31}$$

となり，加速度は,

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin\theta\ , \tag{6.32}$$
$$\ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\cos\theta\ , \tag{6.33}$$

と計算できる．これらを Descartes 座標で表された運動方程式に代入すると,

$$m\big((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin\theta\big) = F_x\ , \tag{6.34}$$
$$m\big((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\cos\theta\big) = F_y\ , \tag{6.35}$$

を得る．運動方程式を実際に解くには，$\ddot{r}$ と $\ddot{\theta}$ が分離されていたほうが都合がよい．そこで，第 1 式と第 2 式に $\cos\theta$ や $\sin\theta$ をかけて適当に足し引きすることで,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta\ , \tag{6.36}$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta\ , \tag{6.37}$$

が得られる．極座標における力は

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x\cos\theta + F_y\sin\theta \\ -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

と書けるから,[*77] 極座標における運動方程式が以下の通り得られる．

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r\ , \tag{6.39}$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta\ . \tag{6.40}$$

6.3 一般の円運動

円周上に拘束された運動を考える．円の中心を原点とした極座標をとると，動径座標 r が一定であることから $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ が成り立つ．したがって，極座標における運動方程式は,

$$-mr\dot{\theta}^2 = F_r\ , \tag{6.41}$$
$$mr\ddot{\theta} = F_\theta\ , \tag{6.42}$$

[*77] 力 $\boldsymbol{F}$ は，Descartes 座標と極座標の基本ベクトルを用いて，$\boldsymbol{F} = [F_x\ F_y]\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} = [F_r\ F_\theta]\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix}$ ように 2 通りに表現することができる．基本ベクトルが $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix}$ と変換するとき，$\boldsymbol{F}$ の 2 通りの表現が整合的であるためには，ベクトルの成分は $[F_r\ F_\theta] = [F_x\ F_y]R^{-1}(\theta) = [F_x\ F_y]R(-\theta)$ と変換しなくてはならない．この転置をとると，$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix} = R^T(-\theta)\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$ が得られる．$R(\theta)$ が回転行列 (直交行列) であることから $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)$ が成り立つことを用いた．

となる．したがって，動径方向の力 F_r が角速度 $\dot{\theta}$ を，接線方向の力 F_θ が角加速度 $\ddot{\theta}$ を生じさせることがわかる．特に，$F_\theta = 0$ のとき，$\ddot{\theta} = 0$ より $\dot{\theta} = \omega = \text{Const.}$ となるから等速円運動が実現し，その運動方程式は

$$-mr\omega^2 = F_r \tag{6.43}$$

となり，先に求めたものと一致する．ここで，$mr\omega^2 > 0$ であるから $F_r < 0$，すなわち力 $\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{e}_r$ は向心力である必要がある．

問 23 端点が固定された長さ ℓ の糸に吊るされた錘を平面内で振動させることを考える．これを**単振り子**と呼ぶ．このとき錘は円周上に拘束された運動をする．単振り子の運動方程式を記述し，単振り子の振幅が小さいときの振動の角振動数 ω と周期 $T = 2\pi/\omega$ を求めよ．

解答 鉛直下向きを基準とした極座標をとる．質量 m 錘に働く力は，鉛直下向きの重力 mg と，円の中心を向く張力 S である．したがって，極座標における力は，

$$F_r = mg\cos\theta - S \ , \tag{6.44}$$
$$F_\theta = -mg\sin\theta \ , \tag{6.45}$$

と表される．回転半径 r は $r = \ell$ で一定であるから，これらを極座標における運動方程式に代入すると，

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - S \ , \tag{6.46}$$
$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \ , \tag{6.47}$$

となる．振幅 θ が小さい $(|\theta| \ll 1)$ とき，$\sin\theta \simeq \theta$ と近似できるから，第 2 式は，

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta \ , \quad \therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta \ , \tag{6.48}$$

と近似できる．これは単振動の運動方程式であるから，その角振動数 ω と周期 T は以下の通り．[*78]

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2.0\,\mathrm{s}\left(\frac{\ell}{1\,\mathrm{m}}\right)^{1/2} \ . \tag{6.49}$$

ちなみに，θ の解を運動方程式の第 1 式に代入することで，張力 S を $S = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2$ と計算することができる．

6.4 サイクロトロン運動 — 一様磁場中の荷電粒子の運動 —

円運動を扱ったこの章の最後に，等速円運動の例としてよく扱われる磁場中の荷電粒子の運動について解説する．この題材は電磁気学の知識が必要になるので，力学の基礎に絞ったこのノートで取り上げるのは本意ではないが，講義で扱われる頻度を考えると取り上げないわけにはいかないであろう．磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q を持った荷電粒子は，[*79] 以下の式で表される **Lorentz 力**を受ける．[*80]

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \ . \tag{6.50}$$

電磁気学の知識として仮定するのはこの式のみである．外積の性質から $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ が成り立つので，Lorentz 力は常に速度と垂直に働き，粒子の速さは変えずに方向のみを変える働きをする．[*81] このことは Lorentz 力の

[*78] $\ell = 1\,\mathrm{m}$ の単振り子の周期がほぼ正確に $T = 2\,s$ となったのは偶然ではない．もともと，単振り子の周期が $T = 2\,s$ (往復 2 s，片道 1 s) となるように，1 m という長さ (「メートル」という単位) が定義されたのである．この結果，重力加速度を秒 (s) とメートル (m) で測ったときの値 $g/(\mathrm{m/s^2}) \simeq 9.8$ が，$9.8 \sim \pi^2$ $(= 9.8696\ldots)$ を満たすことになった．メートルの定義については脚注 *88 も参照．

[*79] 正確には，ここで「磁場」と呼んでいる量 $\boldsymbol{B}$ は「磁束密度」と呼ぶべきものであるが，真空中では磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は (単位系に依存する) 定数倍の違いを除いて等しいので，このノートのように単に磁場と呼ぶことも多い．詳しくは電磁気学の教科書を参照のこと．

[*80] 高校では荷電粒子が磁場 $\boldsymbol{B}$ から受ける力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ (外積を用いない高校流の表記ではその大きさ $F = qvB\sin\theta$) を Lorentz 力として学ぶが，大学では電場 $\boldsymbol{E}$ から受ける力も含めて，$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ を Lorentz 力と呼ぶことも多い．これは，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が独立な物理量ではなく本質的に切り離して考えることができないためであるが，詳しくは相対性理論で学ぶ．

[*81] 仕事の概念を用いて次のように説明することもできる．Lorentz 力による仕事率は $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ となるから，Lorentz 力は物体に対して仕事をせず，粒子の運動エネルギーは変化しない．すなわち，粒子の方向は変化してもよいが，速さは変わらない．

みを受ける荷電粒子が等速円運動することを示唆している．これを確かめよう．磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向を z 軸正方向にとり，$\boldsymbol{B} = [0, 0, B]$ と書くと，Lorentz 力は

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = qB \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix} = qB \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

と表される．$F_z = 0$ であるから z 方向には等速で運動する．以降は z 軸に垂直な x-y 平面内の運動のみを考える．運動方程式は,

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \ , \tag{6.52}$$
$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \ . \tag{6.53}$$

と書ける．$\omega \equiv qB/m$ を定義すると，[*82]

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} \ , \tag{6.54}$$
$$\ddot{y} = -\omega\dot{x} \ . \tag{6.55}$$

と書ける．第 2 式を積分すると

$$\dot{y} = -\omega(x - X) \tag{6.56}$$

が得られ，これを第 1 式に代入すると，x についての 2 階微分方程式,

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - X) \ , \quad \therefore \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X \ , \tag{6.57}$$

が得られる．これは $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 X$ と書いて定数係数 2 階線形非斉次方程式とみなして解いてもよいが，$\ddot{x} = d^2(x - X)/dt^2$ と書けることを用いると,

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - X) = -\omega^2(x - X) \tag{6.58}$$

となり，変数 $(x - X)$ についての単振動の方程式と見なすこともできる．この一般解は

$$x(t) = X + R\cos(\omega t + \phi) \tag{6.59}$$

と書ける．また，この式を $\dot{y} = -\omega(x - X)$ に代入して積分することで,

$$y(t) = Y - R\sin(\omega t + \phi) \tag{6.60}$$

が得られる．これらの解は，中心座標が (X, Y) で半径 R，角速度 $\omega = qB/m$ の等速円運動を表している．回転の向きは $q > 0$ のとき z 方向に対して時計回り，$q < 0$ のときは反時計回りである．この運動を**サイクロトロン運動**といい，角速度 $\omega = qB/m$ (あるいはその大きさ $|\omega|$) を**サイクロトロン角振動数**と呼ぶ．ここで解いた微分方程式は x と y の 2 変数に関する 2 階の微分方程式であるから，一般解には任意定数が (X, Y, R, ϕ) の合計 4 つ含まれている．サイクロトロン運動の重要な性質は，角振動数 ω が円運動の半径 R に依らないことである．[*83] すなわち，R は初期条件を用いて自由に設定することができる．具体的な解として，円の中心を原点 $(X, Y) = (0, 0)$ にとり，回転半径を $R = r$，初期位相を $\phi = 0$ とすると,

$$x(t) = r\cos(\omega t) \ , \tag{6.61}$$
$$y(t) = -r\sin(\omega t) \ , \tag{6.62}$$

[*82] Lorentz 力の表式 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ より磁場 $\boldsymbol{B}$ の SI 単位は $\mathrm{N/(C \cdot m/s) = kg\,s^{-2}\,A^{-1}}$ であるから，$\omega = qB/m$ の単位は $\mathrm{C \cdot kg\,s^{-2}\,A^{-1}/kg} = \mathrm{s^{-1}}$ となり，角振動数の単位と等しい．ちなみに，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の SI 単位は T (Tesla, テスラ) である．

[*83] この性質を応用してサイクロトロンと呼ばれる円形の粒子加速装置が開発されたため，この運動がサイクロトロン運動と呼ばれるようになった．$\omega = qB/m$ を「サイクロトロン角速度」ではなく「サイクロトロン角振動数 (角周波数)」と呼ぶのは，おそらく，サイクロトロンという装置が角振動数 ω の交流電場をかけることによって荷電粒子を加速することによる．「角速度」も「角振動数 (角周波数)」も本質的には同じ物理量なので，あまり気にしなくてもよいのかもしれない．なお，「サイクロトロン角振動数 (角周波数)」は，(2π だけ異なるので正確ではないが)「サイクロトロン振動数 (周波数)」と呼ばれることも多い．

と書ける．一様な磁場の下での荷電粒子の運動が等速円運動になるという結果を予め知っていれば，その円の中心を原点とする極座標をとり，サイクロトロン運動の運動方程式を

$$mr\omega^2 = qvB \tag{6.63}$$

と書くことができる．$v = r\omega$ であるから両辺は r で割ることができ，先に述べたように運動方程式は半径に依存しない．結果が等速円運動になるのであれば初めから極座標で議論を進めればよいと考えるかもしれないが，運動を解いてみるまで円の中心が分からないので，極座標の原点が未知数として方程式に入ってきて意外と面倒である．荷電粒子が z 方向にも速度を持っている場合には，荷電粒子の運動は等速らせん運動となる．

問 24　一様な磁場 B に垂直な平面内で電荷 q (>0) の荷電粒子 (質量 m) に初速 v_0 を与えたときの運動を求めよ．

解答　荷電粒子の初期位置を原点にとる．また，磁場の方向を z 軸として $B > 0$ とし，初速の方向に x 軸にとり $v_0 > 0$ とする．本文で求めた一般解に初期条件を課すと，

$$x(0) = X + R\cos\phi = 0\ , \quad y(0) = Y - R\sin\phi = 0\ , \tag{6.64}$$

$$\dot{x}(0) = -R\omega\sin\phi = v_0\ , \quad \dot{y}(0) = -R\omega\cos\phi = 0\ . \tag{6.65}$$

これを解いて，

$$X = 0\ , \quad Y = -\frac{v_0}{\omega}\ (= -R)\ , \quad R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB}\ , \quad \phi = -\frac{\pi}{2}\ . \tag{6.66}$$

したがって，求める解は，$R = v_0/\omega = mv_0/qB$ として，

$$x(t) = R\sin(\omega t)\ , \quad y(t) = -R\big(1 + \cos(\omega t)\big)\ . \tag{6.67}$$

7　万有引力の下での運動

7.1　万有引力の法則

質量を持つ 2 つの物体間には，質量の積に比例し，距離の 2 乗に反比例する引力が働く．これを**万有引力**と呼ぶ．このように物理量が 2 点間の距離の 2 乗に反比例することを，**逆 2 乗則 (逆 2 乗の法則)** と呼ぶ．[*84] 2 つの物体の質量をそれぞれ M と m とし，M を基準とした m の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，質量 m の物体が質量 M の物体から受ける万有引力 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{7.1}$$

と表される．[*85] ここで，$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ は**万有引力定数**または **(Newton の) 重力定数**と呼ばれる比例定数である．万有引力の大きさは

$$F = |\boldsymbol{F}| = G\,\frac{Mm}{r^2} \tag{7.2}$$

であり，その方向は単位ベクトル $-\boldsymbol{r}/r$ によって表されている．万有引力は一方の物体を基準とした座標系においては中心力であり，極座標をとると，

$$F_r = -G\,\frac{Mm}{r^2}\ , \quad F_\theta = 0\ , \tag{7.3}$$

と表される．

[*84] 逆 2 乗則が成り立つのは我々の存在する空間が 3 次元であることが原因であり，万有引力以外にも，静電気の力の法則である Coulomb の法則や光の強度の減衰も逆 2 乗則に従う．3 次元空間で光が距離 r と共に球の表面積 $4\pi r^2$ に反比例して減衰するのと同じように，万有引力の大きさも減衰する．

[*85] $G\,\dfrac{Mm}{r^2}$ が万有引力の大きさで，単位ベクトル $-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ で方向を表している．$\boldsymbol{F} = -G\,\dfrac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$ と書かれることもあるが，大きさ (逆 2 乗則) が分かりづらいので，慣れるまではこの表記はおすすめしない．

(a) 地表付近における重力と万有引力　地上で質量 m の物体に働く重力 mg は，地球が物体を引く万有引力に他ならない．[*86] つまり，地球の質量を M，地球の半径を R として，

$$mg = G\,\frac{Mm}{R^2} \tag{7.4}$$

が成り立つ．ここで，地球の重心と物体との距離が地球の半径となることに注意．[*87] この式を，

$$M = \frac{gR^2}{G}\ , \tag{7.5}$$

と変形すれば，重力加速度 g と地球の半径 R から，地球の質量 M を計算することができる．重力加速度 g は地表における落体や振り子の運動などから求めることができ，地球の半径は $R = 6400\,\mathrm{km}$ と分かっている．[*88] また，万有引力定数 G の値も，精度はそれほど高くはないが，地表における実験で測定することができる．[*89]

問 25　地表での重力加速度を $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，地球の半径を $R = 6400\,\mathrm{km} = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$，万有引力定数を $G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ として，地球の質量を計算せよ．

解答

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\times(6.4\times10^6\,\mathrm{m})^2}{6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}} = 6.0\times10^{24}\,\mathrm{kg}\ . \tag{7.6}$$

7.2　万有引力の下での運動方程式

太陽と地球からなる系のように，大きな質量 M を持つ中心天体の周りを，小さな質量 m を持つ小天体が回る場合を考える．2 つの天体が互いに及ぼす万有引力の大きさは作用反作用の法則から互いに等しいが，天体に生じる加速度は質量に反比例するので，質量比 M/m が大きい場合には中心天体はほぼ静止 (慣性運動) しており，中心天体の静止系は近似的に慣性系と見なせる．[*90] 中心天体の位置を原点とする極座標をとると，小天体の運動方程式は，

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\,\frac{Mm}{r^2}\ , \tag{7.7}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0\ , \tag{7.8}$$

と書くことができる．これらの式を m で割ると，以下の運動方程式が得られる．

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}\ , \tag{7.9}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0\ . \tag{7.10}$$

この式から，小天体の運動が質量 m に依存しないという，重力が持つ非常に重要な性質が読み取れる．

---

*86 実際には，万有引力と地球の自転による遠心力の合力であるが，その影響は，6.1 節の問で見積もったように，1% 未満である．

*87 地球と物体との間の万有引力が，地球の全質量が地球の中心 (重心) に集まった質点と物体との間の万有引力と等しいことは証明を要するが，ここでは認めることにする．これを示すには，地球 (球体) を小さな質点の集まりとみなし，それぞれの質点と物体との間の万有引力の和 (積分) を計算すればよい．

*88 この値は一般常識として覚えておくとよいが，忘れたら地球一周の距離 (子午線や赤道の長さ) である $40,000\,\mathrm{km}$ を 2π で割って求めればよい．地球一周の距離がだいたい $40,000\,\mathrm{km}$ である理由は，$1\,\mathrm{m}$ という長さが，赤道と北極点の間の子午線の長さの 10^{-7} 倍，つまり地球一周の $1/(4\times10^7)$ 倍となるように定められたからである．脚注 *78 で述べたように，もともとは周期が $T = 2\,\mathrm{s}$ の単振り子の長さとして $1\,\mathrm{m}$ という長さが定義されたが，この単位で地球一周の距離を測ると偶然にも $40,000\,\mathrm{km}$ という丁度良い数値になったので，こちらが新しい $1\,\mathrm{m}$ の定義として採用された経緯がある．現在の $1\,\mathrm{m}$ は，1983 年の第 17 回国際度量衡総会において採用された「1 秒の 299792458 分の 1 の時間に光が真空中を伝わる長さ」として定義されている．なお，$1\,\mathrm{s}$ は原子時計を用いて独立に定義されている．

*89 Henry Cavendish によって 1797 年から 1798 年にかけて行われたねじり天秤を用いた実験が有名．ただし，彼の目的は地球の密度の測定であり，後年になってから実験結果を元に万有引力定数の値が計算された．

*90 運動方程式の左辺の小天体の質量 m を換算質量 $\mu \equiv \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^{-1} = \frac{Mm}{M+m}$ に置き換えることで，この節での議論が厳密に成り立つ．右辺の万有引力の表式の中の m は μ で置き換えないことに注意．

7.3 万有引力の下での等速円運動

前節で書き下した小天体の運動方程式,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \ , \tag{7.11}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \ , \tag{7.12}$$

の特解として $r = R$ (Const.) と $\dot{\theta} = \omega$ (Const.) が存在することは,これらを運動方程式に代入してみれば容易に確かめることができる.このとき第 2 式は自明に成り立ち,第 1 式は

$$R\omega^2 = \frac{GM}{R^2} \tag{7.13}$$

となる.これは等速円運動の運動方程式であり,これが満たされるように半径 R と角振動数 ω の関係が定まる.つまり,万有引力の下での運動として,等速円運動がひとつの特解となっている.万有引力の下での一般の運動は次節で議論するが,等速円運動に限っても,様々な事象について理解することができる.[*91] 万有引力による等速円運動の方程式は,中心天体の質量 M,小天体の公転半径 R と公転周期 $T = 2\pi/\omega$ を結びつける関係式であり,このうちの 2 つを知っている場合に,残り 1 つの量を計算することができる.運動方程式は以下のように書き直すこともできる.

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \ . \tag{7.14}$$

太陽系の惑星の運動の場合,右辺の M は太陽質量であり,全ての惑星の運動に共通であるから,右辺は定数となる.つまり,太陽系の全ての惑星は (等速円運動という近似の下で),その公転半径 R と公転周期 T の間に,

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{Const.} \ , \quad \therefore T^2 \propto R^3 \ , \tag{7.15}$$

の関係がある.これは Kepler によって 1619 年に発表され,**Kepler の第 3 法則**として知られている.[*92]

問 26 月は地球のまわりを公転している.月の公転半径は $R = 3.8 \times 10^5\,\mathrm{km} = 3.8 \times 10^8\,\mathrm{m}$,公転周期は 27.3 日 $= 2.36 \times 10^6\,\mathrm{s}$ である.月の公転が等速円運動であると仮定して,地球の質量 M を計算せよ.

解答 万有引力による等速円運動の方程式 $R\omega^2 = GM/R^2$ より,以下のように計算できる.

$$M = \frac{R^3\omega^2}{G} = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3.8 \times 10^8\,\mathrm{m})^3}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \cdot (2.36 \times 10^6\,\mathrm{s})^2} = 5.8 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \ . \tag{7.16}$$

問 27 地球は太陽のまわりを公転している.地球の公転半径は $R = 1.5 \times 10^8\,\mathrm{km} = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$,公転周期は $T = 1$ 年 $= 3.16 \times 10^7\,\mathrm{s}$ である.地球の公転が等速円運動であると仮定して,太陽の質量 M を計算せよ.

解答 万有引力による等速円運動の方程式 $R\omega^2 = GM/R^2$ より,以下のように計算できる.[*93]

$$M = \frac{R^3\omega^2}{G} = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^3}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \cdot (3.16 \times 10^7\,\mathrm{s})^2} = 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \ . \tag{7.17}$$

[*91] 太陽系の惑星の運動は,ほぼ太陽を中心とした等速円運動である.(水星は離心率が 0.2056 とやや大きい) Nicolaus Copernicus (ニコラウス・コペルニクス) が 16 世紀の初めに地動説を唱え,それが広く受け入れられるようになってからも,しばらくの間は天体の運動は円運動であると信じられてきた.天空は神が創りし完全な世界で,天体の運動は完全な図形である「円」によって記述されるべきであると考えられていたのである.天体の軌道が真円ではなく楕円を描くというのは,Johannes Kepler (ヨハネス・ケプラー) が Tycho Brahe (ティコ・ブラーエ) の観測記録を元に軌道計算を行なって初めて判明し,楕円軌道の法則 (Kepler の第 1 法則) として 1609 年に発表された.Copernicus の地動説から Kepler の法則まで 1 世紀に渡って,あるいは (当然ながら円軌道が仮定された) 天動説から数えれば千数百年の間,円運動であると信じられてきたほどに太陽系の惑星の運動は円運動に近い.なぜ太陽系の惑星が円運動に近い軌道を描くのかという疑問の答えを筆者は知らないが,おそらく太陽系形成時 (50 億年ほど前) には様々な楕円軌道 (や双曲線軌道) をしていた天体同士が衝突する過程で,方向性の無い円運動に落ち着いたのではないかと想像する.歪な (離心率が高い) 楕円軌道では他の天体の軌道と交わる可能性が高く,太陽系の長い歴史の中で繰り返し衝突が起きることで,衝突の可能性が少ない同心円状に天体の軌道が並んだのではないだろうか.

[*92] 太陽系の惑星の公転半径や公転周期のデータは Wikipedia の「太陽系」の項目 [Link] などで見ることができる.太陽系の惑星の軌道は実際には楕円運動であり,その場合,次節で見るように Kepler の第 3 法則の計算における公転半径には軌道長半径を用いる.

[*93] 天文学などでは太陽を記号 $\odot$ で表し,太陽質量は $M_\odot$ と書かれることが多い.太陽系の惑星などの運動を精密に解析することにより,$GM_\odot$ の値は 12 桁の精度で決定されている.しかし,万有引力定数 G の測定は難しく現在でも 4 桁の精度しか無いため,太陽質量 $M_\odot$ も 4 桁程度の精度でしかわからない.

問 28　人工衛星が地球 (凹凸の無い半径 $R = 6400\,\mathrm{km}$ の球体と仮定) の表面すれすれを公転するときの速度を求めよ．

解答　万有引力による等速円運動の方程式 $R\omega^2 = GM/R^2$ を $v = R\omega$ を用いて書き換えると，$v^2 = GM/R$ が得られる．地表付近では $g = GM/R^2$ より $GM = gR^2$ が成り立つから，$v^2 = gR$ より

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{9.8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 6400\,\mathrm{km}} = 7.9\,\mathrm{km/s} \tag{7.18}$$

が得られる．[*94] この速度は**第一宇宙速度**と呼ばれ，[*95] 地表から打ち上げられるロケットの到達目標速度である．インターネット中継などでロケットの打ち上げを見る際には，画面にロケットの速さが表示されていることがあるので，第一宇宙速度を意識しながら眺めてみると面白い．

7.4* 万有引力の下での一般の運動

万有引力の下での一般の運動 (Kepler 問題) を考える．この節はやや難しいが，天体の運動の解析が物理学を大きく発展させる要因になったことを考えると，教養として一生に一度くらいは式変形を追ってみることを勧める．小天体の運動方程式は，

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}\ , \tag{7.19}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0\ , \tag{7.20}$$

と書くことができる．前章で議論したように，第 2 式は，

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{7.21}$$

と書き直すことができ，

$$\ell \equiv r^2\dot{\theta} = rv_\theta \tag{7.22}$$

が一定であることがわかる．ℓ は単位質量あたりの角運動量であるから，これは角運動量保存則を表す．微分方程式の観点から見れば，ℓ は任意定数に相当する．これより $\dot{\theta} = \ell/r^2$ であるから，これを第 1 式に代入して整理すると，動径座標 r についての運動方程式が得られる．

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0\ . \tag{7.23}$$

この方程式に $\dot{r}$ をかけて整理すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right) = 0 \tag{7.24}$$

が得られる．$(\cdots)$ の中の第 1 項と第 3 項はそれぞれ，単位質量あたりの運動エネルギーと万有引力によるポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) である．第 2 項は (単位質量あたりの) 遠心力ポテンシャルと呼ばれる量で，ポテンシャルエネルギーの一種である．[*96] したがって，この式は (単位質量あたりの) 力学的エネルギー保存則を表しており，

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \mathcal{E} \tag{7.25}$$

と書くことができる．単振動のところでも述べたように，(単位質量あたりの) 角運動量 ℓ やエネルギー $\mathcal{E}$ のように，運動の際に変化しない量を**保存量**や**運動の積分**と呼ぶ．エネルギー保存則の式を変形すると，

$$\dot{r} = \pm\sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}} \tag{7.26}$$

[*94] 地球の質量 $M = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ と万有引力定数 G の値を使って $v = \sqrt{GM/R}$ と計算してもよい．

[*95] 地球の重力圏を振り切って地表から無限遠点に到達するために必要な初速度を**第二宇宙速度**と呼び，その値は $v_2 = \sqrt{2gR} = 11.2\,\mathrm{km/s}$ である．第二宇宙速度の導出にはエネルギーの知識が必要になるので，このノートでは扱わない．

[*96] 角度方向の速度は $v_\theta = r\dot{\theta} = \ell/r$ であるから，$\ell^2/2r^2 = v_\theta^2/2$ である．動径方向の速度を $v_r = \dot{r}$ と表すと，$K = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2)$ は単位質量あたりの運動エネルギーである．つまり，遠心力ポテンシャルというのは角度方向の速度に対する運動エネルギーをポテンシャルエネルギーに押し付けたものであり，2 次元の運動を動径方向の 1 次元の運動として記述するために便宜的に導入された仮想的なポテンシャルエネルギーである．

となる．この微分方程式を解くと天体の動径座標 $r(t)$ を求めることができ，この解を角運動量保存則から得られる $\dot{\theta}=\ell/r^2$ に代入して積分することで，角度座標の時間依存性 $\theta(t)$ を求めることができる．この計算は難しいので，このノートでは比較的簡単な運動の軌道の式 (r と θ の関係) の導出のみ行う．

(b) 面積速度と Kepler の第 2 法則　微小時間 dt の間に動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ が掃く微小面積 dS は，扇形の面積として

$$dS=\frac{1}{2}r\cdot r\,d\theta=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,dt=\frac{1}{2}rv_\theta\,dt \tag{7.27}$$

と表すことができる．したがって，**面積速度** $\dot{S}\equiv dS/dt$ は

$$\dot{S}=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}rv_\theta=\frac{\ell}{2} \tag{7.28}$$

と計算できる．[*97] ここで，ℓ は単位質量あたりの角運動量で，中心力の下では保存量である．これは，**面積速度一定の法則**または **Kepler の第 2 法則**と呼ばれ，第 1 法則とともに 1609 年に発表された．

7.4.1　軌道の式の導出

軌道の式の標準的な導出方法は，(i) 運動方程式から導く方法と (ii) エネルギー保存則から導く方法の 2 通りあると思われるので，順に説明する．

§ 軌道の式の導出 (i)　軌道の式を以下の運動方程式から導く．

$$\ddot{r}-\frac{\ell^2}{r^3}+\frac{GM}{r^2}=0\ . \tag{7.29}$$

そのためには，時間微分の項 $\ddot{r}$ を θ 微分に書き換える必要がある．合成関数の微分公式と角運動量保存則より

$$\frac{d}{dt}=\dot{\theta}\,\frac{d}{d\theta}=\frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta} \tag{7.30}$$

と書き直せるから，

$$\dot{r}=\frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{\ell}{r^2}r'\ , \tag{7.31}$$

$$\ddot{r}=\frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)=\frac{\ell^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2\ell^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{\ell^2}{r^4}r''-\frac{2\ell^2}{r^5}(r')^2 \tag{7.32}$$

と書ける．ただし，$r'=dr/d\theta, r''=d^2r/d\theta^2$ と書いた．これを運動方程式に代入して整理すると，

$$r''-\frac{2}{r}(r')^2-r+\frac{GM}{\ell^2}r^2=0 \tag{7.33}$$

を得る．この微分方程式は非線形で一見複雑だが，$r=1/u$ という変数変換によって，

$$u''+u=\frac{GM}{\ell^2} \tag{7.34}$$

という単純な線形微分方程式に書き換えられる．[*98] これを定数係数 2 階線形非斉次方程式とみなして解いてもよいが，

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u-\frac{GM}{\ell^2}\right)+\left(u-\frac{GM}{\ell^2}\right)=0 \tag{7.35}$$

と書き直せば単振動の方程式に他ならないから，一般解は，

$$u(\theta)=\frac{GM}{\ell^2}\big(1+e\cos(\theta+\phi)\big) \tag{7.36}$$

と書くことができる．ここで，e と ϕ は任意定数である．e の符号は ϕ を π だけずらすことで吸収できるから，$e\geq 0$ として一般性を失わない．e は離心率と呼ばれる．したがって，軌道の方程式は，

$$r(\theta)=\frac{1}{u(\theta)}=\frac{\ell^2}{GM\big(1+e\cos(\theta+\phi)\big)}=\frac{r_0}{1+e\cos(\theta+\phi)} \tag{7.37}$$

と表される．ここで，長さの次元を持つ定数 $r_0\equiv\ell^2/GM$ を定義した．

[*97] 回転軸方向を向くベクトルとして，面積速度を $\dot{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ と定義してもよい．しかし，面積速度は角運動量の概念が登場する前に用いられていた歴史的な遺物であり，現代では角運動量のみ使っておけば十分である．

[*98] 一般の中心力 $F(r)$ に対しては，$u''+u=\dfrac{1}{m\ell^2u^2}F\left(\dfrac{1}{u}\right)$ となる．

§ **軌道の式の導出** (ii)　次に，軌道の式を以下のエネルギー保存則から導いてみる．

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = \mathcal{E}\ . \tag{7.38}$$

こちらの導出方法の優れている点は，物理的な意味が明確な任意定数 $\mathcal{E}$ が既に方程式の中に現れていることである．先に導出したように，$\dot{r} = (\ell/r^2)r$ と書けるから，これをエネルギー保存則に代入して整理すると，

$$(r')^2 = -r^2 + \frac{2GM}{\ell^2}r^3 + \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2}r^4 \tag{7.39}$$

を得る．このままだと文字が多く扱いづらいので，長さの次元を持った定数 $r_0 \equiv \ell^2/GM$ を用いて無次元の変数を $\rho = r/r_0$ と定義し，また単位質量あたりのエネルギーの次元を持った定数 $\mathcal{E}_0 \equiv \ell^2/2r_0^2$ を用いて無次元の力学的エネルギー $\epsilon = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ を定義すれば，この式は，

$$(\rho')^2 = -\rho^2 + 2\rho^3 + \epsilon\rho^4 \tag{7.40}$$

と書き直せる．[*99] この微分方程式も $\rho = 1/\kappa$ の置き換えによって解きやすくなる．$\rho' = -(1/\kappa^2)\kappa'$ を代入して整理すれば，

$$(\kappa')^2 = \epsilon + 2\kappa - \kappa^2 \tag{7.41}$$

を得る．これより

$$\frac{d\kappa}{d\theta} = \pm\sqrt{\epsilon + 2\kappa - \kappa^2} \tag{7.42}$$

が得られ，これを変形した

$$d\theta = \pm\frac{d\kappa}{\sqrt{\epsilon + 2\kappa - \kappa^2}} \tag{7.43}$$

の両辺を積分することで，

$$\theta = \pm\int\frac{d\kappa}{\sqrt{\epsilon + 2\kappa - \kappa^2}} = \pm\int\frac{d\kappa}{\sqrt{\epsilon + 1 - (\kappa-1)^2}} = \mp\arccos\left(\frac{\kappa - 1}{\sqrt{1+\epsilon}}\right) - \phi \tag{7.44}$$

が得られる．これを κ について解けば，複号に依らず，

$$\kappa(\theta) = 1 + \sqrt{1+\epsilon}\cos(\theta + \phi) \tag{7.45}$$

と書ける．したがって，軌道の式は，

$$r(\theta) = r_0\rho(\theta) = \frac{r_0}{\kappa(\theta)} = \frac{r_0}{1 + \sqrt{1+\epsilon}\cos(\theta+\phi)} \tag{7.46}$$

となり，$e = \sqrt{1+\epsilon} = \sqrt{1 + \mathcal{E}/\mathcal{E}_0}$ と同定すれば，先に求めた結果と一致する．

7.4.2　軌道の式が表す図形

軌道の式

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos(\theta + \phi)} \tag{7.47}$$

がどのような図形になっているのかを調べよう．分母を払うと，

$$r + er\cos(\theta + \phi) = r_0 \tag{7.48}$$

となる．Descartes 座標を $x = r\cos(\theta+\phi), y = r\sin(\theta+\phi)$ によって定義し，$r = -ex + r_0$ と変形してから両辺を 2 乗し，$r^2 = x^2 + y^2$ を用いて整理すると，

$$(1-e^2)x^2 + 2er_0x + y^2 = r_0^2 \tag{7.49}$$

が得られる．これは 2 次曲線であり，x^2 の係数 $1 - e^2$ によって，楕円，放物線，双曲線のいずれかになる．以下で場合分けをして考える．

[*99] このような操作を「無次元化」や「規格化」と呼ぶ．文字が減って式が見やすく (書きやすく) なるのはもちろん，現象が理論のパラメータにどのように依存するのかが分かりやすくなる利点がある．また，コンピュータを用いた数値計算の際にも無次元化をすることが多い．

(i) $(0 \leq) e < 1$ のとき　このとき $0 < 1 - e^2 \ (\leq 1)$ であるから，軌道の式は楕円となる．式を見やすくするために $a = r_0/(1-e^2), b = a\sqrt{1-e^2} = r_0/\sqrt{1-e^2}$ と置いて整理すると，

$$\frac{(x+ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.50}$$

と書けるから，これは中心が $(x, y) = (-ea, 0)$ で，長半径 a と短半径 b がそれぞれ，

$$a = \frac{r_0}{1-e^2} = \frac{r_0}{|\epsilon|} = \frac{GM}{2|\mathcal{E}|} \ , \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{|\epsilon|}} = \frac{\ell}{\sqrt{2|\mathcal{E}|}} = \ell\sqrt{\frac{a}{GM}} \ , \tag{7.51}$$

で与えられる楕円を表す．長半径 a は小天体のエネルギー $\mathcal{E}$ のみに依存し，角運動量 ℓ に依存しない．特に，$e = 0$ のときには，中心が $(x, y) = (0, 0)$ で半径が $a = b = r_0$ の円を表す．離心率 e と (無次元の) 力学的エネルギー ϵ との関係は $e = \sqrt{1+\epsilon}$ であるから，ϵ の範囲は

$$(-1 \leq) \epsilon < 0 \tag{7.52}$$

となり，負の値をとる．このように力学的エネルギーが負の場合，有限な領域内で周期的な運動を続ける．このような運動を一般に束縛運動と呼ぶ．

(ii) $e = 1$ のとき　このとき $1 - e^2 = 0$ であるから，軌道の式は，

$$2r_0 x + y^2 = r_0^2 \ , \quad \therefore x = -\frac{1}{2r_0}(y^2 - r_0^2) \ , \tag{7.53}$$

となり，放物線を表す．軌道が閉じず，物体は無限の彼方からやって来て，点 $(x, y) = (r_0/2, 0)$ で原点 (中心天体) に最も近づいた後，無限の彼方へと飛び去っていく．このような運動を散乱と呼ぶ．実際の物体の運動ではちょうど $e = 1$ となることは無いから，この解はあまり重要ではなく，楕円と双曲線の切り替わりの境界を表すに過ぎない．力学的エネルギーは $\epsilon = e^2 - 1 = 0$ である．

(iii) $e > 1$ のとき　このとき $1 - e^2 < 0$ であるから，軌道の式は双曲線となる．$a = r_0/(e^2-1) = r_0/|1-e^2|$ と $b = a\sqrt{e^2-1} = r_0/\sqrt{e^2-1}$ を定義すれば，軌道の式は，

$$\frac{(x-ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.54}$$

と書くことができる．この解も，物体が無限遠から近づき無限遠に遠ざかっていく散乱である．

§ 軌道の分類　軌道の種類と離心率 e，(無次元の) 力学的エネルギー ϵ の範囲を表にまとめると，以下のようになる．

軌道	離心率	力学的エネルギー
円	$e = 0$	$\epsilon = -1$
楕円	$0 < e < 1$	$-1 < \epsilon < 0$
放物線	$e = 1$	$\epsilon = 0$
双曲線	$1 < e$	$0 < \epsilon$

太陽系の惑星に働く力の大部分は太陽から受ける万有引力であり，他の惑星等から受ける万有引力の影響は小さいので，太陽系の惑星の運動は非常に高い精度で 2 次曲線で近似される．惑星は束縛運動をしているはずであるから，その軌道は一般に楕円である．太陽系の惑星が，太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動くという事実は，**Kepler の第一法則**として知られている．特に，太陽系の惑星の軌道の多くは真円に非常に近く，離心率は $e \simeq 0$ である．逆に，離心率が 1 に近い ($e \lesssim 1$) 大きく歪んだ楕円軌道を描く天体として，数多くの彗星が知られている．おそらく最も有名な彗星である Halley 彗星 (ハレー彗星) の楕円軌道の離心率は $e \simeq 0.967$ であり，その周期は 75.32 年である．

(c) Kepler の第 3 法則　小天体が楕円運動する場合を考える．面積速度一定の法則 (Kepler の第 2 法則) $\dot{S} = \ell/2$ を 1 周期 T で積分すると，

$$S = \frac{T\ell}{2} \tag{7.55}$$

を得る．ここで，S は楕円の面積であり，

$$S = \pi ab = a^{3/2}\frac{\pi \ell}{\sqrt{GM}} \tag{7.56}$$

と計算できるから，以下の Kepler の第 3 法則が得られる．

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\ . \tag{7.57}$$

太陽系の惑星等に対しては，地球の公転のデータ $\dfrac{(1\,\mathrm{au})^3}{(1\,\text{年})^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ で規格化して，[*100] 以下の式が成り立つ．

$$\left(\frac{a}{1\,\mathrm{au}}\right)^3 = \left(\frac{T}{1\,\text{年}}\right)^2\ . \tag{7.58}$$

問 29　Halley 彗星の公転周期は $T = 75.32$ 年 である．軌道長半径を求めよ．

解答　Kepler の第 3 法則より，

$$a = \left(\frac{75.32\,\text{年}}{1\,\text{年}}\right)^{2/3} \times 1\,\mathrm{au} = 17.8\,\mathrm{au} = 2.66\times 10^{12}\,\mathrm{m}\ . \tag{7.59}$$

[*100] 天文単位 au $\equiv$ 149 597 870 700 m $= 1.495978707\times 10^{11}$ m は地球と太陽の平均距離に由来する距離の単位で，地球の軌道離心率が小さい ($e = 0.0167$) ことから，ほぼ地球の軌道長半径に等しい．