TEUBNER-TEXTE zur Mathematik Band 139

E. Krätzel

Analytische Funktionen in der Zahlentheorie

TEUBNER-TEXTE zur Mathematik

Die Reihe soll ein Forum für Beiträge zu aktuellen Problemstellungen der Mathematik sein. Besonderes Anliegen ist die Veröffentlichung von Darstellungen unterschiedlicher methodischer Ansätze, die das Wechselspiel zwischen Theorie und Anwendungen sowie zwischen Lehre und Forschung reflektieren. Thematische Schwerpunkte sind Analysis, Geometrie und Algebra.

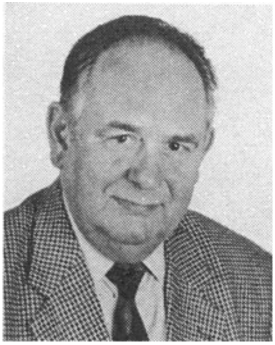
In den Texten sollen sich sowohl Lebendigkeit und Originalität von Spezialvorlesungen und Seminaren als auch Diskussionsergebnisse aus Arbeitsgruppen widerspiegeln.

TEUBNER-TEXTE erscheinen in deutscher oder englischer Sprache.

Analytische Funktionen in der Zahlentheorie

Von Prof. Dr. Ekkehard Krätzel
Universität Wien

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden



Prof. Dr. Ekkehard Krätzel

Geboren 1935 in Leopoldshall. Studium der Mathematik in Jena von 1953 bis 1958. Promotion 1963 und Habilitation 1965 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Von 1966 bis 1969 Dozent, von 1969 bis 1992 ordentlicher Professor an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. 1993 Gastprofessor an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg. 1991 und 1993 bis 1996 Gastprofessor, seit 1994 Honorar-Professor an der Universität Wien.

Arbeitsgebiete: Analytische Zahlentheorie, spezielle analytische Funktionen, Theorie der Gitterpunkte, Exponentialsummen.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage November 2000

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Peter Pfitz, Stuttgart

ISBN-13:978-3-519-00289-5 e-ISBN-13:978-3-322-80021-3
DOI: 10.1007/978-3-322-80021-3

Vorwort

Das Buch ist entstanden aus einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 1993/94 an der Universität Wien gehalten habe, und aus zahlreichen Vorträgen in Seminaren in den Folgejahren. Es handelt sich nicht um eine breit angelegte Einführung in die analytische Zahlentheorie, sondern um eine mehr in die Tiefe gehende Behandlung einzelner Abschnitte, deren Auswahl natürlich von den Interessen des Autors beeinflußt ist. Im inhaltlichen Mittelpunkt stehen Funktionalgleichungen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen auf

- Reziprozitätsgesetze der Zahlentheorie,
- die Behandlung von Gitterpunktsanzahlen in konvexen Körpern,
- weitere zahlentheoretische Probleme wie etwa die Abschätzung Weylscher Summen,

die sich von selbst aus dem Zusammenhang heraus ergeben.

Das Buch wendet sich an einen breit gefächerten Leserkreis: an Personen, die forschend in der analytischen Zahlentheorie tätig sind, an Personen, die sich in das Gebiet der analytischen Zahlentheorie selbständig einarbeiten wollen, und an Studierende höherer Semester, die über Grundkenntnisse der elementaren Zahlentheorie und der Funktionentheorie verfügen. Gelegentlich werden einige Ergebnisse aus der Theorie der speziellen Funktionen und der Integraltransformationen gebraucht. Hier wird auf entsprechende Literatur verwiesen.

Das Buch ist in 5 Kapitel eingeteilt. Dabei wird es durch die Kapitel 2, 3 und 5 geprägt. In den kurzen Kapiteln 1 und 4 werden nur später benötigte Hilfsmittel bereitgestellt, damit sie dann den Fluß der Handlung nicht unterbrechen.

Leitmotiv für Kapitel 2 ist das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste. Es wird gezeigt, daß es sich als unmittelbare Folgerung aus dem Reziprozitätsgesetz der Gaußschen Summen ergibt. Die Gaußschen Summen und ihr Reziprozitätsgesetz wiederum werden aus dem analytischen Verhalten der Jacobischen Thetafunktionen abgeleitet. In gleicher Weise ist eine Behandlung der Dedekindschen Summen und Funktionen möglich. Es werden außerdem verschiedene Beweise für das Reziprozitätsgesetz der Gaußschen Summen auf analytischer Grundlage gegeben, um im nächsten Kapitel zu verdeutlichen, wie schwierig sich die höheren Fälle gestalten, da dort die analytischen Hilfsmittel nur sehr eingeschränkt zur Verfügung stehen. Auf den algebraischen Ausbau wird ganz verzichtet. Dagegen leiten Grenzfälle der Jacobischen Thetafunktionen zur besonderen Stellung der Exponentialsummen in der analytischen Zahlentheorie über.

Im Kapitel 3 werden Fragen von Möglichkeiten der Verallgemeinerung auf höhere Probleme besprochen: Höhere Thetafunktionen und Dedekindsche Funktionen, höhere Gaußsche Summen und Dedekindsche Summen. Grenzbetrachtungen bei Thetafunktionen hinsichtlich ihres Definitionsbereiches führen automatisch auf Weylsche Summen.

Kapitel 5 hat die Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in großen konvexen Bereichen als wichtiges Ziel. Fast nichts von seinem Inhalt befindet sich in meinem Buch "Lattice Points" [47]. Es wird hier ein neuer Zugang zu Gitterpunktsproblemen in konvexen Körpern auf analytischer Grundlage hergestellt. Die wohlbekannten Funktionalgleichungen für analytische Funktionen eines Ellipsoids werden ausgedehnt auf asymptotische Funktionalgleichungen entsprechender analytischer Funktionen von weitgehend allgemeinen konvexen Körpern, die aber keine Punkte Gaußscher Krümmung 0 auf der Oberfläche enthalten. Abschließend wird unser geringes Wissen über Gitterpunkte in konvexen Körpern, die Punkte mit Gaußscher Krümmung 0 auf der Oberfläche besitzen, zusammengetragen.

In den Kapiteln 1 und 4 werden die notwendigen Grundlagen über die Abschätzung einfacher und zweifacher Exponentialsummen zusammengestellt.

Die Entstehung und Fertigstellung dieses Projektes habe ich einem größeren Personenkreis in Wien zu danken. Zuallererst möchte ich meinen herzlichen Dank Herrn Werner Georg Nowak von der Universität für Bodenkultur in Wien und Herrn Harald Rindler vom Institut für Mathematik der Universität Wien aussprechen, die mir in Wien wieder ein wissenschaftliches Betätigungsfeld geboten haben. In zahlreichen Vorlesungen und Seminaren konnte ich mit diesen beiden Herren und mit den Herren Christoph Baxa, Wolfgang Jenkner, Gerald Kuba, Manfred Kühleitner und Johannes Schoissengeier lange wertvolle Diskussionen führen, die wichtige Anregungen für die inhaltliche Gestaltung des Buches geliefert haben. Ebenfalls danke ich für die überaus sorgfältige und kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Wien, Juli 2000 Ekkehard Krätzel

Inhaltsverzeichnis