

ある場の量子論屋のみた数学

立川裕二

第4回 MACS コロキウム

2018年4月27日

数学と理論物理は非常に近い...

と外からは見えるのではないのでしょうか。

For a single target (A) particle and many incident (B) particles with different impact parameters b , the number of scattering events is

$$N = \sum_{\text{all incident particles } i} \mathcal{P}_i = \int d^2b \, n_B \mathcal{P}(b),$$

where n_B is the number density (particles per unit area) of B particles. Since we are assuming that this number density is constant over the range of the interaction, n_B can be taken outside the integral. The cross section is then

$$\sigma = \frac{N}{n_B N_A} = \frac{N}{n_B \cdot 1} = \int d^2b \, \mathcal{P}(b). \quad (4.75)$$

Deriving a simple expression for σ in terms of \mathcal{M} is now a fairly straightforward calculation. Combining (4.75), (4.74), and (4.68), we have (writing $d\sigma$ rather than σ since this is an infinitesimal quantity)

$$d\sigma = \left(\prod_j \frac{d^2p_j}{(2\pi)^2} \frac{1}{2E_j} \right) \int d^2b \left(\prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(k_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\bar{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \right) \times e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B)} \langle \text{out}(\{p_j\}) | \{k_i\} \rangle \langle \text{out}(\{p_j\}) | \{\bar{k}_i\} \rangle, \quad (4.76)$$

where we have used \bar{k}_A and \bar{k}_B as dummy integration variables in the second half of the squared amplitude. The d^2b integral can be performed to give a factor of $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_A^{\perp} - k_B^{\perp})$. We get more delta functions by writing the final two factors of (4.76) in terms of \mathcal{M} . Assuming that we are not interested in the trivial case of forward scattering where no interaction takes place, we can drop the 1 in Eq. (4.72) and write these factors as

$$\langle \text{out}(\{p_j\}) | \{k_i\} \rangle = i\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_j\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_j);$$

$$\langle \text{out}(\{p_j\}) | \{\bar{k}_i\} \rangle = -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \rightarrow \{p_j\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum p_j).$$

We can use the second of these delta functions, together with the $\delta^{(2)}(k_A^{\perp} - k_B^{\perp})$, to perform all six of the \bar{k} integrals in (4.76). Of the six integrals, only those over \bar{k}_A^{\perp} and \bar{k}_B^{\perp} require some work:

$$\int d\bar{k}_A^{\perp} d\bar{k}_B^{\perp} \delta(\bar{k}_A^{\perp} + k_B^{\perp} - \sum p_j^{\perp}) \delta(E_A + E_B - \sum E_j)$$

$$= \int d\bar{k}_A^{\perp} \delta(\sqrt{\bar{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^2 + m_B^2} - \sum E_j) \Big|_{\bar{k}_B^{\perp} = \sum p_j^{\perp} - \bar{k}_A^{\perp}}$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{k_A^{\perp}}{E_A} - \frac{k_B^{\perp}}{E_B} \right|} = \frac{1}{|v_A - v_B|}. \quad (4.77)$$

In the last line and in the rest of Eq. (4.76) it is understood that the constraints $\bar{k}_A^{\perp} + \bar{k}_B^{\perp} = \sum p_j^{\perp}$ and $E_A + E_B = \sum E_j$ now apply (in addition to the constraints $\bar{k}_A^{\perp} = k_A^{\perp}$ and $\bar{k}_B^{\perp} = k_B^{\perp}$ coming from the other four integrals).

By Exercise 14.26, δ is an antiderivation relative to this product. So just as in the case of de Rham cohomology this makes the Čech cohomology $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ into a graded algebra. If \mathfrak{D} is a refinement of \mathcal{U} , then the restriction map $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R})$ is a homomorphism of algebras. Hence the direct limit $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ is also a graded algebra. Note that (14.27); also makes sense for the Čech complex $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ on a topological space X ; this gives a product structure on the Čech cohomology $H^*(X, \mathbb{R})$ of any topological space X .

With the product structures just defined, both inclusions

$$r: \Omega^*(\mathcal{M}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$$

and

$$i: C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$$

are algebra homomorphisms. Since as we saw in Proposition 8.8, for a good cover these homomorphisms induce bijective maps in cohomology

$$H_{\text{deR}}^*(\mathcal{M}) \simeq H_{\text{deR}}^*\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$$

$$H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{deR}}^*\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\},$$

the isomorphism between $H_{\text{deR}}^*(\mathcal{M})$ and $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ is an algebra isomorphism. Because $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ for a good cover \mathcal{U} , we have the following.

Theorem 14.28. *The isomorphism between de Rham and Čech*

$$H_{\text{deR}}^*(\mathcal{M}) \simeq H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

is an isomorphism of graded algebras.

If a double complex K has a product structure relative to which its differential D is an antiderivation, the same is true of all the groups E_r and their operators d_r , since E_r is the homology of E_{r-1} and d_r is induced from D . With product structures, Theorem 14.14 becomes

Theorem 14.29 *Let K be a double complex with a product structure relative to which D is an antiderivation. There exists a spectral sequence*

$$\{E_r, d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+1, q-r+1}\}$$

converging to $H_{\text{deR}}(K)$ with the following properties:

- 1) The $E_2^{p,q}$ term is $H_{\text{deR}}^{p+q}(K)$.
- 2) Each E_r , being the homology of its predecessor E_{r-1} , inherits a product structure from E_{r-1} . Relative to this product, d_r is an antiderivation.

WARNING. Although both E_{∞} and $H_{\text{deR}}(K)$ inherit their ring structures from K , they are generally not isomorphic as rings.

For a single target (A) particle and many incident (B) particles with different impact parameters b , the number of scattering events is

$$N = \sum_{\text{all incident particles } i} P_i = \int d^2b n_B \mathcal{P}(b),$$

where n_B is the number density (particles per unit area) of B particles. Since we are assuming that this number density is constant over the range of the interaction, n_B can be taken outside the integral. The cross section is then

$$\sigma = \frac{N}{n_B N_A} = \frac{N}{n_B \cdot 1} = \int d^2b \mathcal{P}(b). \quad (4.75)$$

Deriving a simple expression for σ in terms of \mathcal{M} is now a fairly straightforward calculation. Combining (4.75), (4.74), and (4.68), we have (writing $d\sigma$ rather than σ since this is an infinitesimal quantity)

$$d\sigma = \left(\prod_j \frac{d^2p_j}{(2\pi)^2} \frac{1}{2E_j} \right) \int d^2b \left(\prod_{i=A,B} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(k_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\bar{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \right) \times e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B)} |\langle \text{out}(\{p_j\} | \{k_i\})_{in} \rangle \langle \text{out}(\{p_j\} | \{\bar{k}_i\})_{in} \rangle|^2, \quad (4.76)$$

where we have used \bar{k}_A and \bar{k}_B as dummy integration variables in the second half of the squared amplitude. The d^2b integral can be performed to give a factor of $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_A^\perp - k_B^\perp)$. We get more delta functions by writing the final two factors of (4.76) in terms of \mathcal{M} . Assuming that we are not interested in the trivial case of forward scattering where no interaction takes place, we can drop the 1 in Eq. (4.72) and write these factors as

$$\langle \text{out}(\{p_j\} | \{k_i\})_{in} \rangle = i\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_j\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_j);$$

$$\langle \text{out}(\{p_j\} | \{\bar{k}_i\})_{in} \rangle = -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \rightarrow \{p_j\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum p_j).$$

We can use the second of these delta functions, together with the $\delta^{(2)}(k_A^\perp - k_B^\perp)$, to perform all six of the \bar{k} integrals in (4.76). Of the six integrals, only those over \bar{k}_A^\perp and \bar{k}_B^\perp require some work:

$$\int d\bar{k}_A^\perp d\bar{k}_B^\perp \delta(\bar{k}_A^\perp + \bar{k}_B^\perp - \sum p_j^\perp) \delta(E_A + E_B - \sum E_j)$$

$$= \int d\bar{k}_A^\perp \delta(\sqrt{\bar{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\bar{k}_B^2 + m_B^2} - \sum E_j) \Big|_{\bar{k}_B^\perp = \sum p_j^\perp - \bar{k}_A^\perp}$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{k_A^\perp}{E_A} - \frac{k_B^\perp}{E_B} \right|} = \frac{1}{|v_A - v_B|}. \quad (4.77)$$

In the last line and in the rest of Eq. (4.76) it is understood that the constraints $\bar{k}_A^\perp + \bar{k}_B^\perp = \sum p_j^\perp$ and $E_A + E_B = \sum E_j$ now apply (in addition to the constraints $k_A^\perp = k_B^\perp$ and $\bar{k}_B^\perp = k_B^\perp$ coming from the other four integrals).

By Exercise 14.26, δ is an antiderivation relative to this product. So just as in the case of de Rham cohomology this makes the Čech cohomology $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ into a graded algebra. If \mathfrak{D} is a refinement of \mathcal{U} , then the restriction map $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathfrak{D}, \mathbb{R})$ is a homomorphism of algebras. Hence the direct limit $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ is also a graded algebra. Note that (14.27) also makes sense for the Čech complex $C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ on a topological space X ; this gives a product structure on the Čech cohomology $H^*(X, \mathbb{R})$ of any topological space X .

With the product structures just defined, both inclusions

$$r: C^*(\mathcal{M}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$$

and

$$i: C^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$$

are algebra homomorphisms. Since as we saw in Proposition 8.8, for a good cover these homomorphisms induce bijective maps in cohomology

$$H_{\text{ét}}^p(\mathcal{M}) \simeq H_p(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$$

$$H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq H_p(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)),$$

the isomorphism between $H_{\text{ét}}^p(\mathcal{M})$ and $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ is an algebra isomorphism. Because $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ for a good cover \mathcal{U} , we have the following.

Theorem 14.28. *The isomorphism between de Rham and Čech*

$$H_{\text{ét}}^p(\mathcal{M}) \simeq H^*(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

is an isomorphism of graded algebras.

If a double complex K has a product structure relative to which its differential D is an antiderivation, the same is true of all the groups E_r and their operators d_r , since E_r is the homology of E_{r-1} and d_r is induced from D . With product structures, Theorem 14.14 becomes

Theorem 14.29 *Let K be a double complex with a product structure relative to which D is an antiderivation. There exists a spectral sequence*

$$\{E_r, d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+1, q-r+1}\}$$

converging to $H_0(K)$ with the following properties:

- 1) The $E_r^{p,q}$ term is $H_0^{p,q} H_r(K)$.
- 2) Each E_r , being the homology of its predecessor E_{r-1} , inherits a product structure from E_{r-1} . Relative to this product, d_r is an antiderivation.

WARNING. Although both E_∞ and $H_0(K)$ inherit their ring structures from K , they are generally not isomorphic as rings.

(左) Peskin & Schröder, “An Introduction to Quantum Field Theory”
 (右) Bott & Tu, “Differential Forms in Algebraic Topology”

分野横断というほどにも離れていないような気もしますが、
両側を一応体験した身からすると案外違うものです。
今日はそのような所をお話したいと思います。

聴衆の皆さんがどんな方が知りたいので、まずいくつか質問を:

聴衆の皆さんがどんな方が知りたいので、まずいくつか質問を：
学部生以下のかた？

聴衆の皆さんがどんな方が知りたいので、まずいくつか質問を:

学部生以下のかた?

院生以上のかた?

次は:

次は:

主に数学をやっている人?

次は:

主に数学をやっている人?

主に物理をやっている人?

次は:

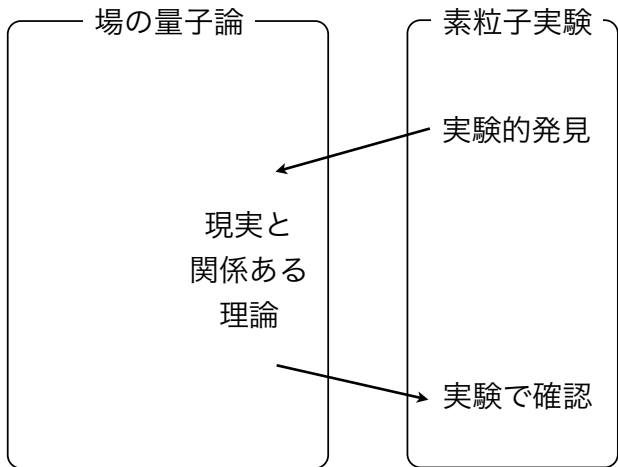
主に数学をやっている人?

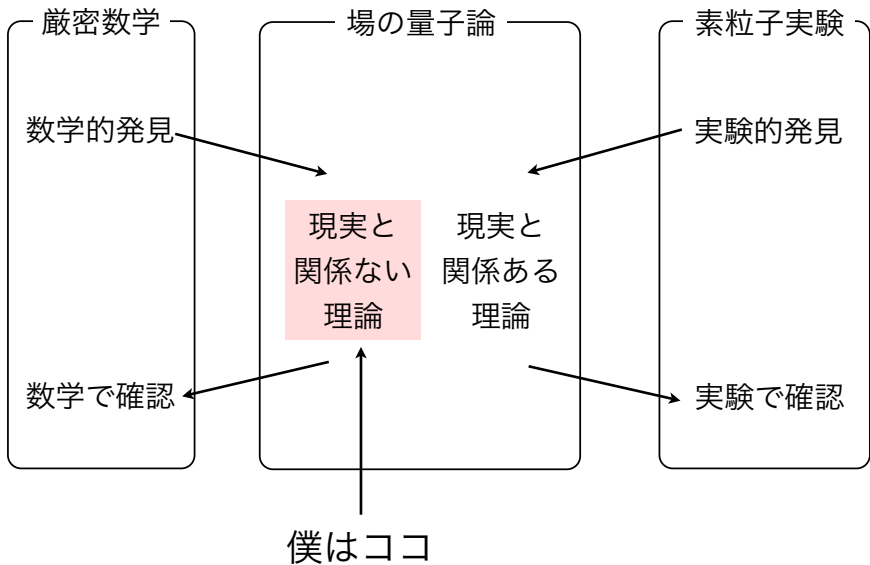
主に物理をやっている人?

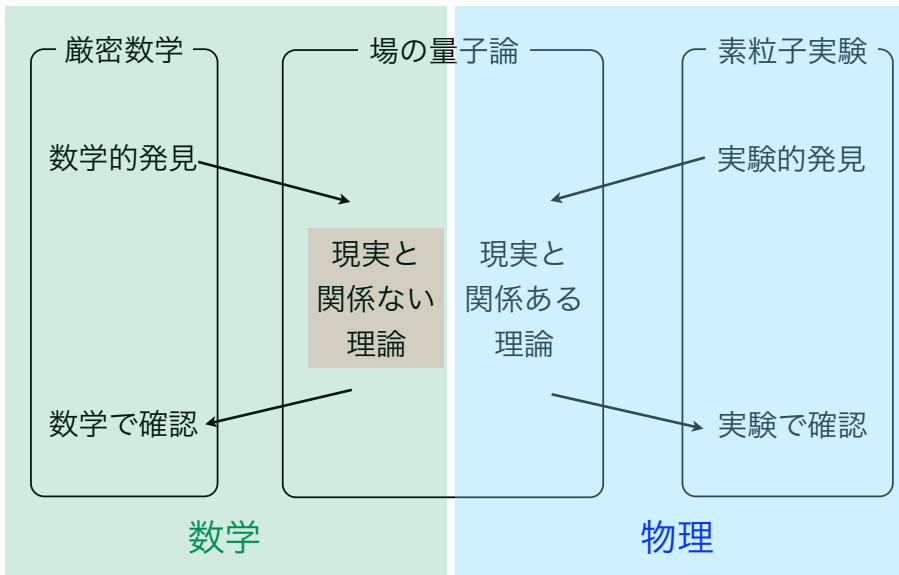
それ以外だけどこのコロキウムに来てみた人?

僕はどうでしょう？

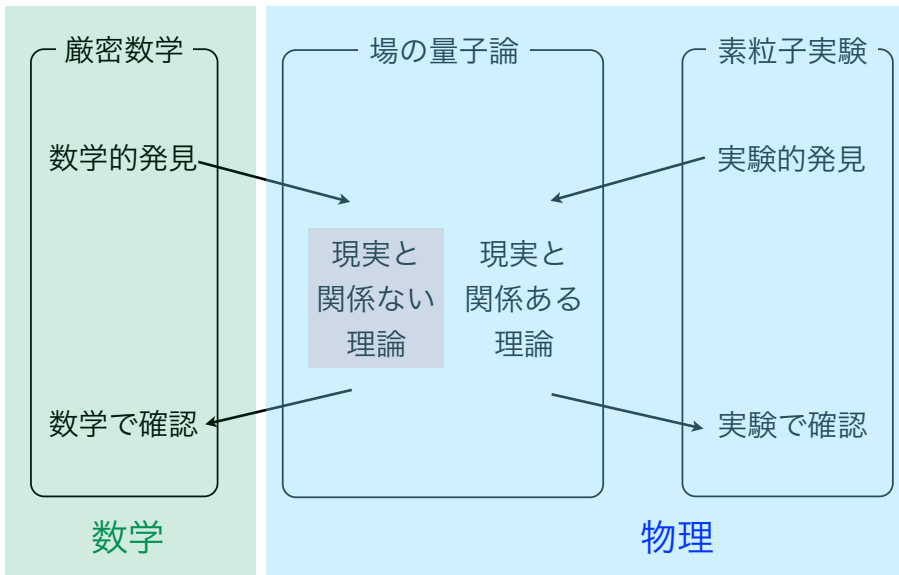
僕の専門は (素粒子論側の) 場の量子論/弦理論です。



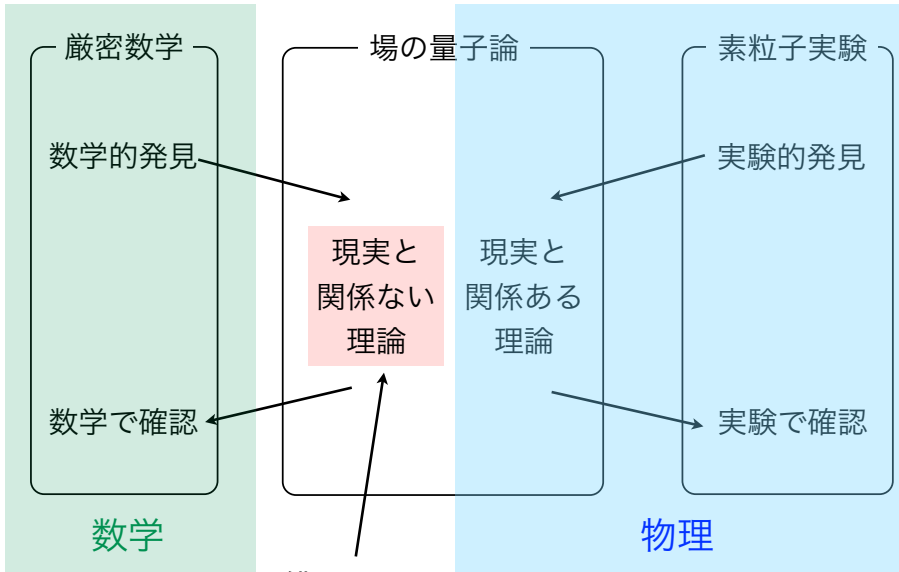




物理の人に聞くと...



数学の人に聞くと...



数学でも物理でもない立場から、

場の量子論と物理と数学の話をしたと思います。

場の量子論とは?

- 場の量子的振舞いを記述する。
- ただし、場とは時間と空間に広がっているものなら何でも、例えば、電磁場、電子の場、格子の揺らぎの場, ...

最初の成功例は量子電磁力学で、

- 量子化された電磁場 = 光が電子などの粒子とどう相互作用するかを記述し、
- 1950 年ごろに枠組みが完成。
- それから地道な発展がある。

量子電磁力学では、理論計算と実験結果は非常に良く合う。

電子の異常磁気モーメントという量では:

$$a_e^{\text{実験}} = 0.01\ 159\ 652\ 181\dots$$

$$a_e^{\text{理論}} = 0.01\ 159\ 652\ 181\dots$$

量子電磁力学では、種々の量は
微細構造定数 $\alpha \sim 1/137$ の冪級数として摂動計算される:

$$a_e = c_1 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots$$

各係数 c_1, c_2, \dots はファインマン図というものを使って計算される。

c_i	値	ファインマン図	文献
c_1	+1/2	1 個	[Schwinger, 1948]
c_2	-0.3	7 個	[Sommerfield/Petermann, 1957-1958]
c_3	+1.1	72 個	[Laporta-Remiddi, hep-ph/9602417]
c_4	-1.9	891 個	[木下・仁尾, hep-ph/0507249]
c_5	+9.2	12672 個	[青山・早川・木下・仁尾, 1205.5368]

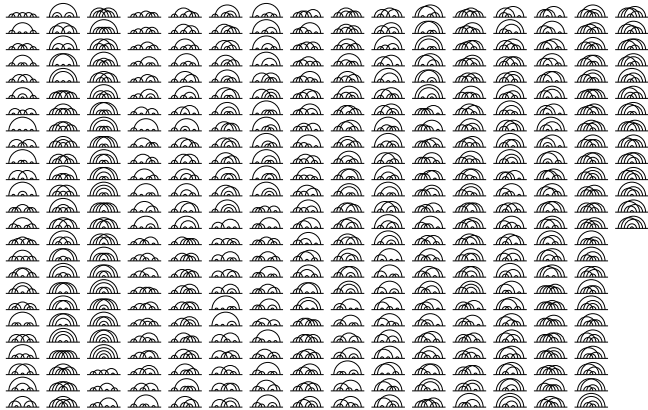


Figure: 389 self-energy diagrams representing 6354 vertex diagrams of Set V.

[<http://www.riken.jp/lab-www/theory/colloquium/kinoshita.pdf>]

(この木下先生のコロキウムは非常にお薦めです。)

クォーク三つを陽子や中性子に組み上げるのが量子色力学。

こちらは量子電磁力学とちがって、冪級数として摂動計算できない。

仕方がないので、理論をまるごと
スーパーコンピュータの上に載せてシミュレーションする。

時空を格子で近似するので、格子量子色力学という。

実験と良く合うようになってきた。

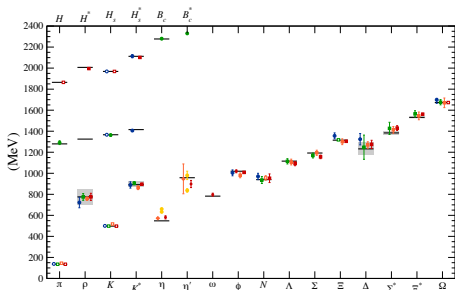


Figure 2: Hadron spectrum from lattice QCD. Comprehensive results for mesons and baryons are from MILC (27, 28), PACS-CS (29), BMW (30), and QCDSF (31). Results for η and η' are from RBC & UKQCD (32), Hadron Spectrum (33) (also the only ω mass), and UKQCD (34). Results for heavy-light hadrons from Fermilab-MILC (35), HPQCD (36), and Mohler & Woloshyn (37). Circles, squares, and diamonds stand for staggered, Wilson, and chiral sea quarks, respectively. Asterisks represent anisotropic lattices. Open symbols denote the masses used to fix parameters. Filled symbols (and asterisks) denote results. Red, orange, yellow, green, and blue stand for increasing numbers of ensembles (i.e., lattice spacing and sea quark mass). Horizontal bars (gray boxes) denote experimentally measured masses (widths). b -flavored meson masses are offset by -4000 MeV.

[Kronfeld 1203.1204]より。

これまで素粒子論の話ばかりだったが、
場の量子論は物性理論においても良く使われる。

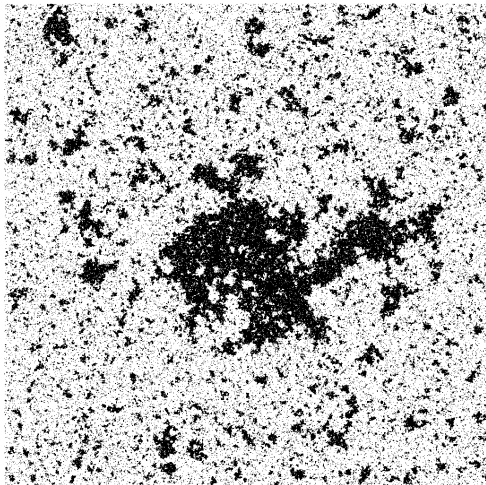
相転移の臨界点を記述するには共形場理論が有効で、
長い長い歴史がある。

最近流行りのトポロジカル物性においても場の量子論が多用される。

それ以外にもたくさん。

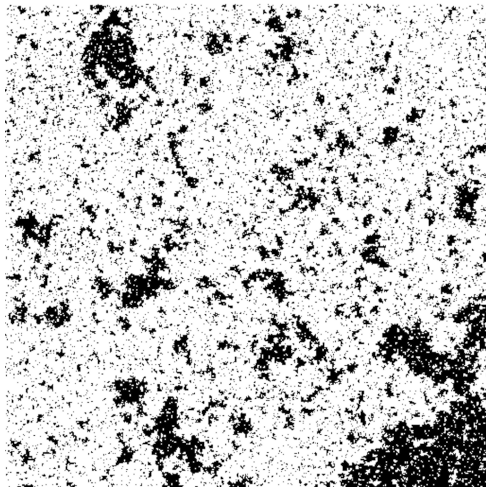
共形場理論というのは、
拡大しても同じようにみえる場の理論ということ。

2次元イジングモデルを相転移点上でシミュレートしてみると:



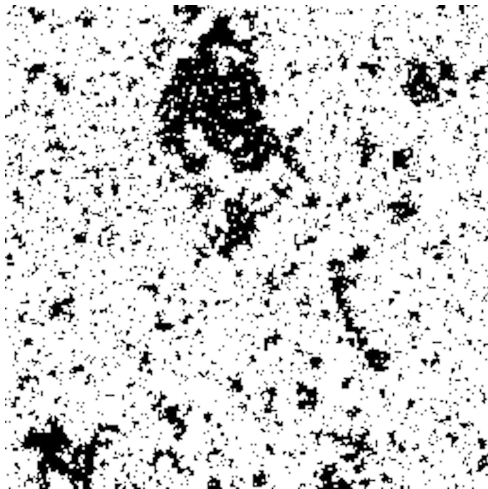
共形場理論というのは、
拡大しても同じようにみえる場の理論ということ。

2次元イジングモデルを相転移点上でシミュレートしてみると:



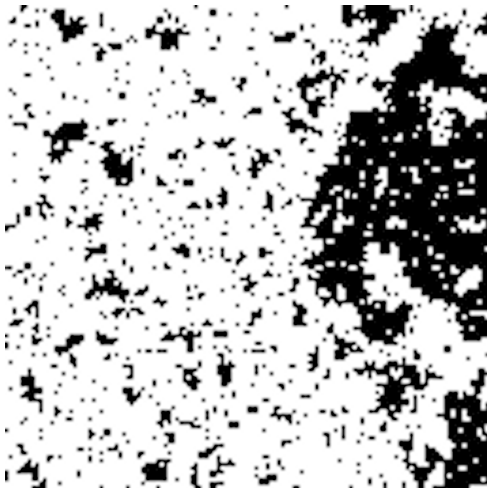
共形場理論というのは、
拡大しても同じようにみえる場の理論ということ。

2次元イジングモデルを相転移点上でシミュレートしてみると:



共形場理論というのは、
拡大しても同じようにみえる場の理論ということ。

2次元イジングモデルを相転移点上でシミュレートしてみると:



2 次元イジングモデルは [Onsager 1944]が厳密に解いた。

3 次元イジングモデルも厳密に解こうとがんばった人は沢山いるが、成功例なし。

もちろん、シミュレーションや実験結果はある。

2010 年ころから 3 次元イジングにも使える数値ブートストラップ法という新たな方法が開発された。

線形計画法/半正定値計画法という数学の分野を応用。

O(2): Scaling Dimensions

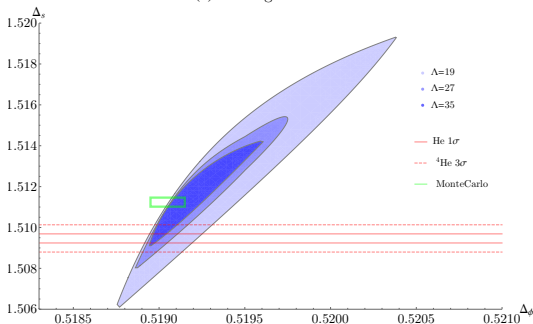


Figure 5: Allowed islands from the mixed correlator bootstrap for $N = 2$ after scanning over the OPE coefficient ratio $\lambda_{sss}/\lambda_{\phi\phi s}$ and projecting to the (Δ_ϕ, Δ_s) plane (blue regions). Here we assumed that ϕ and s are the only relevant operators in their $O(N)$ representations. These islands are computed at $\Lambda = 19, 27, 35$. The green rectangle shows the Monte Carlo determination from [17], while the horizontal lines show the 1σ (solid) and 3σ (dashed) confidence intervals from experiment [16].

[Kos, Poland, Simmons-Duffin, Vichi 1603.04436] より。

このように、場の量子論は

- よく研究されており、
- 実際の数値も精度良く計算でき、
- 実験とも良くあう。

しかし、**数学的には不完全**。どういうことかというとな...

量子力学や、一般相対論だと、
数学者に一言で何をやっているかが説明出来る:

量子力学とは

ヒルベルト空間上のユニタリ演算子の研究。

一般相対論とは

ローレンツ型の計量をもった多様体上の
アインシュタイン方程式の研究。

場の量子論の場合は?

場の量子論とは

???

長らく場の量子論をやっていますから、
何なのか知っているような気はするけれども、
一言で言い表せない。

量子色力学を数学的に満足に定式化して、
閉じ込めを示せば、
賞金 1 億円。



Yang-Mills and Mass Gap



The laws of quantum physics stand to the world of elementary particles in the way that Newton's laws of classical mechanics stand to the macroscopic world. Almost half a century ago, Yang and Mills introduced a remarkable new framework to describe elementary particles using structures that also occur in geometry. Quantum Yang-Mills theory is now the foundation of most of elementary particle theory, and its predictions have been tested at many experimental laboratories, but its mathematical foundation is still unclear. The successful use of Yang-Mills theory to describe the strong interactions of elementary particles depends on a subtle

quantum mechanical property called the "mass gap": the quantum particles have positive masses, even though the classical waves travel at the speed of light. This property has been discovered by physicists from experiment and confirmed by computer simulations, but it still has not been understood from a theoretical point of view. Progress in establishing the existence of the Yang-Mills theory and a mass gap will require the introduction of fundamental new ideas both in physics and in mathematics.

This problem is: Unsolved

<http://www.claymath.org/millennium-problems>

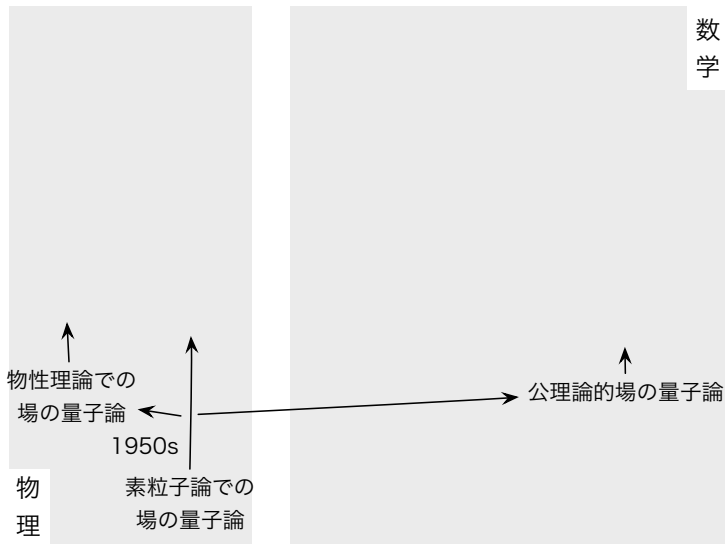
別に数学的に何をやっているかが一言で言い表せなくても、構わないといえば構わない。

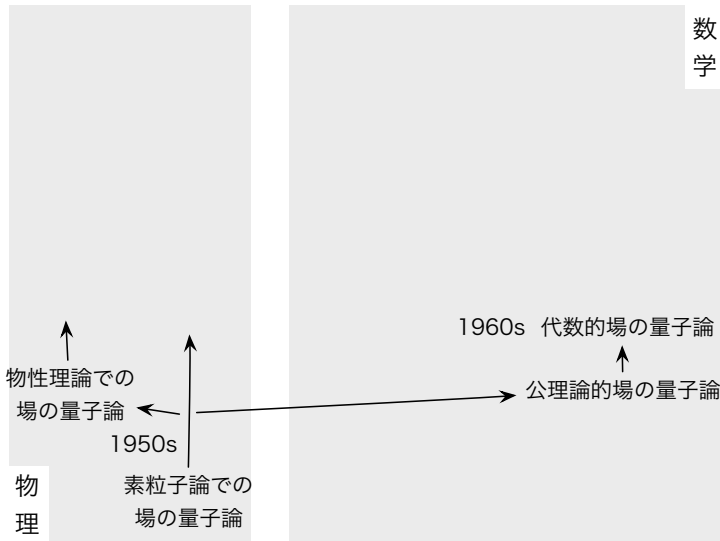
古代エジプト人は、数学的に定式化はしていなかったけれど、ピラミッドをつくりました。

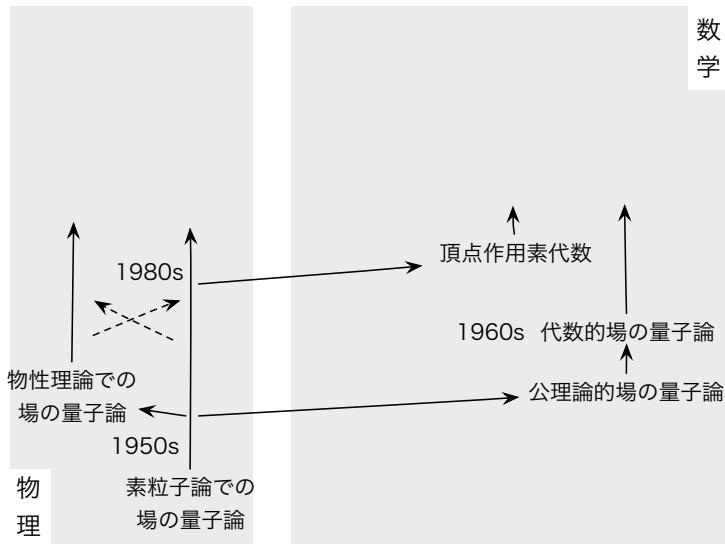
物理屋も、数学的に定式化は出来ていないけれど、計算出来て、実験と合います。

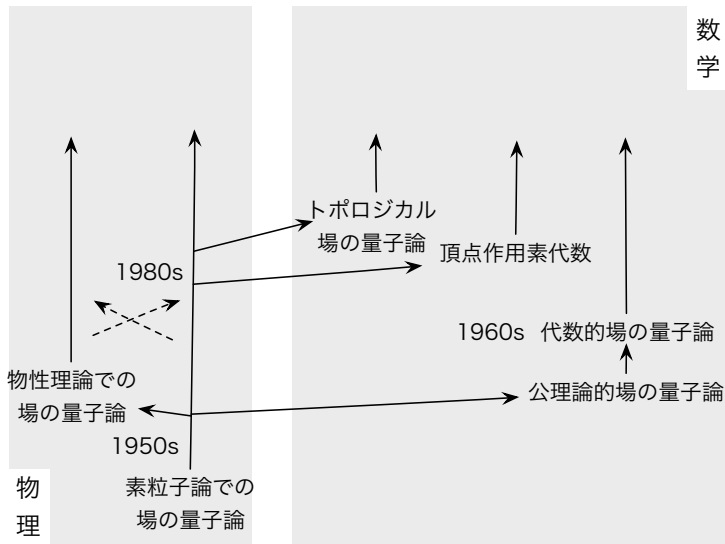
でもまあ、僕としては不満足に感じるわけです。

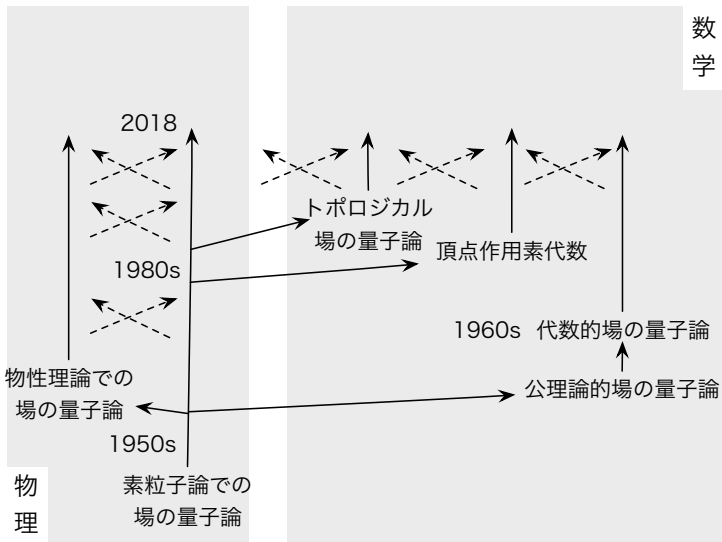
勿論、数学者がこれまで場の量子論を数学にしようと頑張らなかつたわけではありませんが...

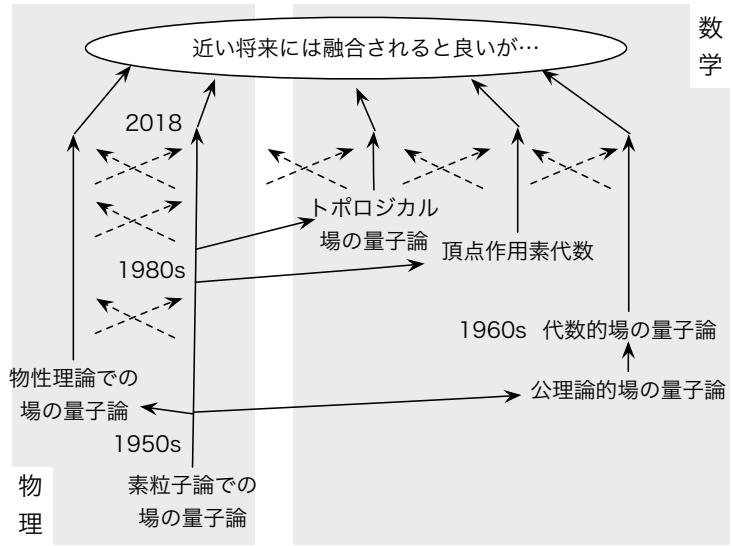












場の量子論の数学



場の量子論における数学



場の量子論からの数学

場の量子論の数学



場の量子論における数学



場の量子論からの数学

場の量子論が数学的に不完全だといっても、

計算の途中には既存の数学は勿論使います。

場の量子論をやりたい、という学部学生さんに
ときどき聴かれる質問に

「数学は何を勉強しておけば良いですか?」というのがあります。

これは難しい質問。

素粒子論での場の量子論をするなら、当然

- ローレンツ群とその標準的な表現のいくつか、
- $SU(N)$ とその標準的な表現のいくつか

ぐらいいはどうしても使うわけですが。

でも、数学の本はどうしても詳し過ぎるので、
必要な場になって必要なものを習うのがよいのではないかと思う。

僕個人の経験では、やっている場の量子論の性質もあり、常に何か新しい数学の分野を学んでいる気がします。例えば:

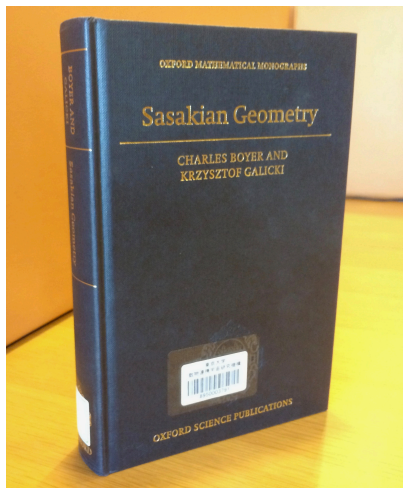
院生のおわりぐらい: 佐々木-Einstein 多様体の理論



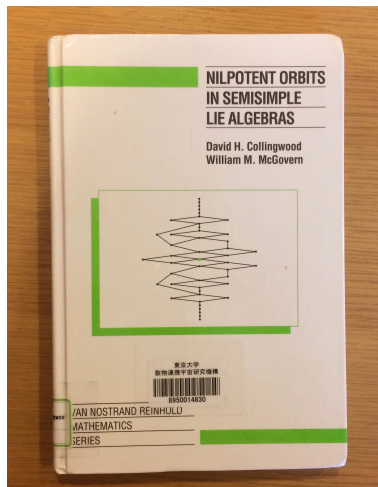
Shigeo SASAKI
1912-1987

[Tohoku Math. J. 39 (1987) i-viii]

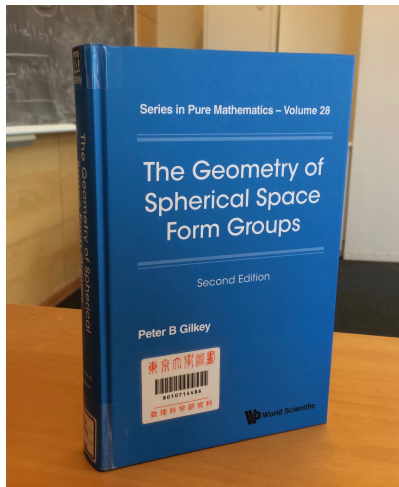
院生のおわりぐらい: 佐々木-Einstein 多様体の理論



ポストクの間: 冪零軌道の理論



ここ数年: 代数トポロジー、特にコボルディズム群の話。



どの分野にしても、

- 僕の調べたい場の量子論の性質を調べる為にどうしても必要になった
- 事前に必要になりそうかは全くわからなかった
- 全ての場の理論屋が知る必要があるわけでは全然ない

やっぱり、その場で勉強するしか無いと思います。

何故コボルディズム群?

最近物性では、トポロジカル物性というのが熱いらしいです。

Symmetry protected topological phases

(SPT 相、対称性被保護位相的相)

と呼ばれるものが重要になってきた。

どういうことかということ、
対称性をひとつ (たとえば \mathbb{Z}_2) を指定して、
その対称性をもち、ギャップのある系を分類することを考える。

ギャップのある系のハミルトニアン空間

自明な相 \times

\mathbb{Z}_2 対称性あり

\mathbb{Z}_2 対称性あり

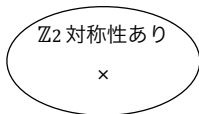
\mathbb{Z}_2 対称性あり

\mathbb{Z}_2 対称性なし

\mathbb{Z}_2 対称性を無視して変形すれば、自明な理論になるものであって、

ギャップのある系のハミルトニアンの空間

自明な相 \times

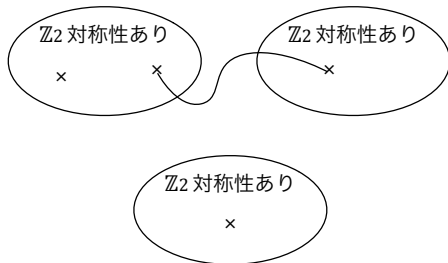


\mathbb{Z}_2 対称性なし

\mathbb{Z}_2 対称性を保ったまま変形できれば、同じものとみなす。

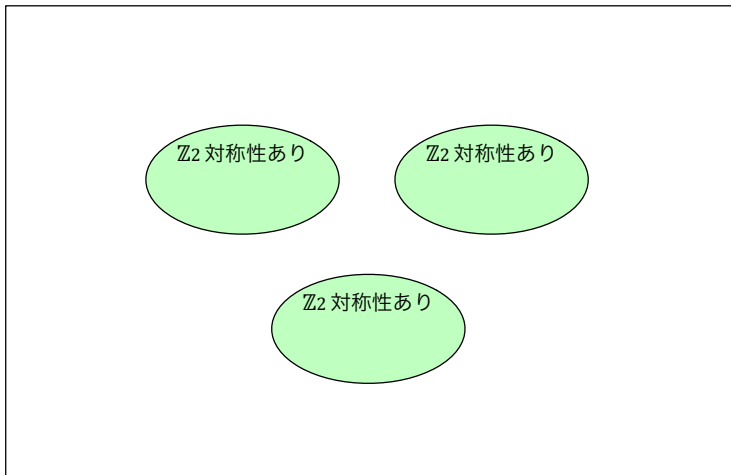
ギャップのある系のハミルトニアンの空間

自明な相 \times



\mathbb{Z}_2 対称性なし

\mathbb{Z}_2 対称性を保ったまま変形できなければ、異なるものとする。



こうやっておおざっぱに分類すれば、三種類あることになる。

考えたい系の空間次元 d と対称性の群 G を与えたとして、

その次元とその対称性をもつ

symmetry protected topological phase を分類しよう。

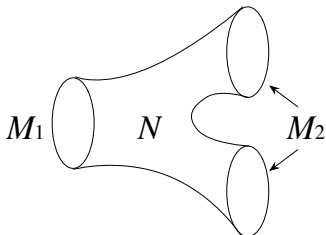
いろいろ研究があったのだけれど、決定版

[Kapustin-Turzillo-Thorngren-Wang 1406.7329] によれば:

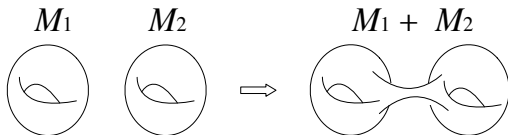
答えは d, G で定まる**ボルディズム群**で与えられる。

ボルディズム群とは、

- 次元 D と、多様体の上の構造 (例えばスピン構造) を固定して、
- D 次元の多様体二つ M_1, M_2 は、 $D + 1$ 次元の多様体 N で $\partial N = M_1 \sqcup \overline{M_2}$ なるものがあるときに同一視 $M_1 \sim M_2$



さらに連結和で群構造をいれる。



これを

Ω_D 構造

と書いて、ボルディズム群という。有限可換群になります。

代数トポロジーという分野です。

何故 **symmetry protected topological phase** と
ボルディズム群 が関係あるのか?

実際の実験においては、有限のサンプルを扱うわけですが、
理論的理想化として、
多様体 M_D の形をした時空を埋め尽くしている場合を考える。

そこで、分配関数を $Z(M_D)$ と書いて、

$$M_D \mapsto \frac{Z(M_D)}{|Z(M_d)|} \in \{\text{絶対値 1 の数}\}$$

という関数を考える。

これがボルディズム群の表現になる。

例えば、空間三次元で、フェルミオンがあり、時間反転対称性 T が $T^2 = (-1)^F$ を満たすような symmetry protected topological phase はトポロジカル超伝導体としても知られているが、これは

$$\Omega_{3+1}^{\text{pin}^+}$$

と書かれて、 pin^+ ボルディズム群と呼ばれるもので分類される。

ここで、Spin 群は SO (特殊直交) 群の二重被覆であるように、Pin 群は O (直交) 群の二重被覆。

物理屋がここまで問題を還元すれば、あとは数学の文献を探すだけ。

1990 年の [Kirby-Taylor “Pin structures on low-dimensional manifolds”,
London Math. Soc. LNS 151, pp.177-242] という文献を開くと...

物理屋がここまで問題を還元すれば、あとは数学の文献を探すだけ。

1990年の [Kirby-Taylor “Pin structures on low-dimensional manifolds”, London Math. Soc. LNS 151, pp.177-242] という文献を開くと...

$\rho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{u}(2)$

gives the isomorphism in the following table.

$\Omega_1^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_2^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Spin} = 0$	$\Omega_4^{Spin} = \mathbf{Z}$
$\Omega_1^{Pin^-} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_2^{Pin^-} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Pin^-} = 0$	$\Omega_4^{Pin^-} = 0$
$\Omega_1^{Pin^+} = 0$	$\Omega_2^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_3^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\Omega_4^{Pin^+} = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$

In §2 we calculate the 1 and 2 dimensional groups and show that the non-zero one dimensional groups are generated by the circle with its Lie group framing S^1 .

空間三次元の時間反転不変トポロジカル超伝導体は、 \mathbb{Z}_{16} で分類される!

これは物性理論屋がもっと物理的直観に基づいて得た結果と合致している。

Kirby-Taylor が 1990 年に $\Omega_4^{\text{pin}^+} = \mathbb{Z}_{16}$ を計算したときは、トポロジカル相との関係など全く考えていなかったと思う。

しかし、Kirby-Taylor が計算をやっておいて、わかりやすくまとめてあるお陰で、
こちらは結果を使うだけで良い。

十五年強ぐらい場の量子論をやっていて感じるのは、なんとか場の理論の問題を数学の問題に帰着すると、かなりの割合で、数学者が既にそれを解決している。だから、あとはその結果を使うだけで良い。

数学者のみなさん、どうもありがとう！

数学者の教科書/論文の (僕にとって) ありがたい点は、

定義と定理がきちんと書いてあるので、証明の詳細がわからなくても、
道具として使えることです。

スマホで何故タッチすると画面の中が動くのかわかっていなくても、
問題なく使えるのと同様です。

物理屋の教科書/論文はそうはいかない。
前提と結果が渾然一体としていて、結局全部読む羽目になる。

場の量子論の数学



場の量子論における数学



場の量子論からの数学

場の量子論の数学



場の量子論における数学



場の量子論からの数学

- ・ まず、昔話。

$$J(\tau) = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856q^4 + \dots$$

J関数といって数学で19世紀から知られている。

典型的な保形関数。

- ・ **1978**年、McKayはつぎのことに気がついた:
当時みつきりそうであった新有限群**モンスター**は
元の数が $8 \cdot 10^{53}$ ぐらいあるのだけれど、
一番小さい非自明既約表現の次元は

196883

である。

- ・ まず、昔話。

$$J(\tau) = \frac{1}{q} - 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856q^4 + \dots$$

J関数といって数学で19世紀から知られている。
典型的な保形関数。

- ・ **1978**年、McKayはつぎのことに気がついた:
当時みつきりそうであった新有限群**モンスター**は
元の数が $8 \cdot 10^{53}$ ぐらいあるのだけれど、
一番小さい非自明既約表現の次元は
196883
である。

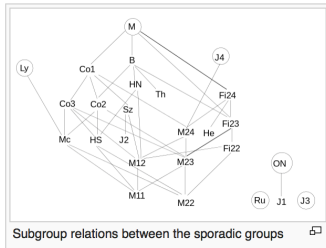
散在型有限單純群:

https://en.wikipedia.org/wiki/Sporadic_group

Names of the sporadic groups [\[edit\]](#)

Five of the sporadic groups were discovered by [Mathieu](#) in the 1860s and the other 21 were found between 1965 and 1975. Several of these groups were predicted to exist before they were constructed. Most of the groups are named after the mathematician(s) who first predicted their existence. The full list is:

- **Mathieu groups** $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$
- **Janko groups** J_1, J_2 or HJ, J_3 or HJM, J_4
- **Conway groups** Co_1 or F_{2-}, Co_2, Co_3
- **Fischer groups** $Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}'$ or F_{3+}
- **Higman–Sims group** HS
- **McLaughlin group** McL
- **Held group** He or F_{7+} or F_7
- **Rudvalis group** Ru
- **Suzuki sporadic group** Suz or F_{3-}
- **O'Nan group** $O'N$
- **Harada–Norton group** HN or F_{5+} or F_5
- **Lyons group** Ly
- **Thompson group** Th or F_{313} or F_3
- **Baby Monster group** B or F_{2+} or F_2
- **Fischer–Griess **Monster group**** M or F_1



- ・ なんか関係あるんじゃないの？
 - ・ J 関数: 保形関数
 - ・ モンスター群: 有限群
- ・ それまで全然関係なかった分野なので、
Monstrous Moonshine
 (“とんでもなく馬鹿げた話”)
と呼ばれた。

- ・ **90年代初頭**には解決されたが、解決には、 **J 関数が特定の形をした24次元の格子の中を動くボゾン弦理論の分配関数であることが重要であった。**

- ・ さて、**1989**年。僕の兄弟子の大栗さんの博士論文では、**K3**という曲がった空間を動く超弦のスペクトルが計算された。

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

http://ooguri.caltech.edu/documents/47-phd_thesis.pdf

- ・ この係数に数学的意味はないの？

- ・ 同時期、次のような数学の文献があった

http://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN356556735_0094

Invent. math. 94, 183–221 (1988)

*Inventiones
mathematicae*

© Springer-Verlag 1988

**Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces
and the Mathieu group**

Dedicated to Professor Masayoshi Nagata on his 60th Birthday

Shigeru Mukai

- ・ 江口さん (僕および大栗さんの指導教員)

「あの係数もマチウ群と関係あるんじゃ？」

そして20年の時が流れ…

- ・ 2009年夏、アスペン。



- ・ 江口さん、大栗さん、僕と三人研究会にいたので、もう一度この件について考えてみることに。
- ・ 僕: 数学辞典の後ろの数表をみてみたらどうか？

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1	23	$7 \cdot 36$	$23 \cdot 11$	$23 \cdot 77$	$55 \cdot 64$	$\overline{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$	$\overline{23 \cdot 45}$	$\overline{23 \cdot 45}$	$\overline{11 \cdot 21}$	$\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	$23 \cdot 21$	$23 \cdot 55$	$23 \cdot 88$	$23 \cdot 99$	$23 \cdot 144$	$23 \cdot 11 \cdot 21$	$23 \cdot 7 \cdot 36$	$77 \cdot 72$	$11 \cdot 35 \cdot 27$			

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \quad (23)$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	45	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{11 \cdot 21}$ $\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\overline{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36	77·72	11·35·27

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1 23 7·36 23·11 23·77 55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$ $\overline{23 \cdot 45}$ $23 \cdot 45$	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\boxed{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21 23·55 23·88 23·99 23·144		23·11·21 23·7·36 77·72 11·35·27		

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned}
 F(\tau) = & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 \\
 & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	1	23	7·36	23·11	23·77	55·64	$\boxed{45}$	$\overline{22 \cdot 45}$	$\overline{23 \cdot 45}$	$23 \cdot 45$	$\boxed{11 \cdot 21}$	$\boxed{770}$
	$(1)_{-}^{24}$	g_{-}	23·21	23·55	23·88	$\boxed{23 \cdot 99}$	23·144	23·11·21	23·7·36	77·72	11·35·27			

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \dots \quad (23)$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)_{24}$	g	1	23	7·36	23·11	23·77	55·64	45	22·45	23·45	23·45	11·21	770
	$(1)_{24}$	g	23·21	23·55	23·88	23·99	23·144	23·11·21	23·7·36	77·72	11·35·27			

対応がある！

「対応がある」とだけ書いた論文を書いた:

Notes on the K3 Surface and the Mathieu Group M_{24}

Tohru Eguchi, Hiroshi Ooguri, and Yuji Tachikawa

Experimental Mathematics, 20(1):91–96, 2011

Copyright © Taylor & Francis Group, LLC

ISSN: 1058-6458 print

DOI: 10.1080/10586458.2011.544585

<https://arxiv.org/abs/1004.0956>

徐々に数学者によって証明されつつある:

arXiv.org > math > arXiv:1211.5531

Search on

Mathematics > Representation Theory

Much ado about Mathieu

Terry Gannon

(Submitted on 23 Nov 2012 (v1), last revised 15 Mar 2013 (this version, v2))

Eguchi, Ooguri and Tachikawa have observed that the elliptic genus of type II string theory on K3 surfaces appears to possess a Moonshine for the largest Mathieu group. Subsequent work by several people established a candidate for the elliptic genus twisted by each element of M24. In this paper we prove that the resulting sequence of class functions are true characters of M24, proving the Eguchi-Ooguri-Tachikawa conjecture. We prove the evenness property of the multiplicities, as conjectured by several authors. We also identify the role group cohomology plays in both K3-Mathieu Moonshine and Monstrous Moonshine; in particular this gives a cohomological interpretation for the non-Fricke elements in Norton's Generalised Monstrous Moonshine conjecture. We investigate the intriguing proposal of Gaberdiel-Hohenegger-Volpato that K3-Mathieu Moonshine lifts to the Conway group Co1.

<https://arxiv.org/abs/1211.5531>

- ・ Higgs さんの論文から実験での確認まで ~50 年
- ・ 僕らの論文から数学での証明まで ~3 年
- ・ 弦理論は現実の物理を説明するには
まだ役に立っていないが、
数学との相互作用は上手くいっている。

もう一つ別のはなし。

ここ十年ほど、とある特定の 6 次元の場の理論の研究が僕を含め超弦理論屋の間では盛んである。

この 6 次元の場の理論を S^4 や $S^3 \times S^1$ 上で考えると
いろいろ数理的に面白いことが起こる。

S^4 の場合を僕と共同研究者の Alday さん、Gaiotto さんでやった。

それを説明するのは時間が足りないので、
Rastelli さんたちのやった $S^3 \times S^1$ の場合を説明したい。

一般に、2次元の場の理論は、2次元空間 M_2 で考えると、分配関数

$$Z(M_2)$$

がある。

6次元の場の理論を4次元空間 $S^3 \times S^1$ 上に還元すると、
 $6 - 4 = 2$ 次元の場の理論になる。

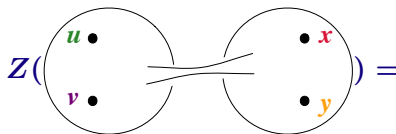
$$Z\left(\begin{array}{c} \bullet x \\ \bullet z \\ \bullet y \end{array}\right) = \prod_{\pm\pm\pm} \Gamma_{p,q}(tx^{\pm 1}y^{\pm 1}z^{\pm 1})$$

ただし

$$\Gamma_{p,q}(z) = \prod_{j,k \geq 0} \frac{1 - z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1 - zp^jq^k}$$

は楕円ガンマ関数という特殊関数。

もうちょっとややこしい例としては、



The diagram shows a genus-2 surface, represented as two circles connected by two horizontal lines. The left circle contains two punctures labeled u (green) and v (purple). The right circle contains two punctures labeled x (red) and y (orange). The entire diagram is enclosed in large blue parentheses, followed by an equals sign.

$$Z\left(\begin{array}{c} \text{Left circle: } u, v \\ \text{Right circle: } x, y \end{array} \right) = \oint \frac{\prod_{\pm, \pm, \pm, \pm} \Gamma(t u^{\pm 1} v^{\pm 1} z^{\pm 1}) \prod_{\pm, \pm, \pm, \pm} \Gamma(t x^{\pm 1} y^{\pm 1} z^{\pm 1})}{\prod_{\pm} \Gamma(t^2 z^{\pm 2}) \prod_{\pm} \Gamma(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi i z}.$$

さて、六次元理論の性質を使うと、次のような変形が出来る:

$$\begin{aligned}
 Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) &= Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) \\
 &= Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right)
 \end{aligned}$$

すなわち

$$Z\left(\begin{array}{c} \bullet u \\ \bullet v \end{array} \begin{array}{c} \bullet x \\ \bullet y \end{array}\right) = Z\left(\begin{array}{c} \bullet y \\ \bullet v \end{array} \begin{array}{c} \bullet x \\ \bullet u \end{array}\right).$$

すなわち

$$\oint \frac{\prod_{\pm p, q} \Gamma(tu^{\pm 1}v^{\pm 1}z^{\pm 1}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(tx^{\pm 1}y^{\pm 1}z^{\pm 1})}{\prod_{\pm p, q} \Gamma(t^2z^{\pm 2}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi iz}$$

$$= \oint \frac{\prod_{\pm p, q} \Gamma(ty^{\pm 1}v^{\pm 1}z^{\pm 1}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(tx^{\pm 1}u^{\pm 1}z^{\pm 1})}{\prod_{\pm p, q} \Gamma(t^2z^{\pm 2}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi iz}$$

すなわち

$$Z\left(\begin{array}{c} \bullet u \\ \bullet v \end{array} \begin{array}{c} \bullet x \\ \bullet y \end{array}\right) = Z\left(\begin{array}{c} \bullet y \\ \bullet v \end{array} \begin{array}{c} \bullet x \\ \bullet u \end{array}\right).$$

すなわち

$$\oint \frac{\prod_{\pm p, q} \Gamma(tu^{\pm 1}v^{\pm 1}z^{\pm 1}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(tx^{\pm 1}y^{\pm 1}z^{\pm 1})}{\prod_{\pm p, q} \Gamma(t^2z^{\pm 2}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi iz}$$

$$= \oint \frac{\prod_{\pm p, q} \Gamma(ty^{\pm 1}v^{\pm 1}z^{\pm 1}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(tx^{\pm 1}u^{\pm 1}z^{\pm 1})}{\prod_{\pm p, q} \Gamma(t^2z^{\pm 2}) \prod_{\pm p, q} \Gamma(z^{\pm 2})} \frac{dz}{2\pi iz}$$

The diagram shows two green arrows pointing from the top-right $y^{\pm 1}$ to the bottom-left $u^{\pm 1}$, and two orange arrows pointing from the top-left $u^{\pm 1}$ to the bottom-right $y^{\pm 1}$, illustrating the exchange of variables in the integrand.

これは場の理論屋によって [Rastelli et al. 0910.2225 [hep-th]] で
予言された。

Rastelli さんによると、こういう意味不明な予言が得られたので、
頑張って楕円ガンマ関数の専門家を探して相談してみたらしい。

そうすると、「うちの昔の学生が丁度証明したところだよ」といって
[van de Bult, 0909.4793 [math.CA]] を教えてもらったそうです。

勿論、数学者の動機は全く異なるものだったと思います。

場の理論自体を記述する数学がまだ不完全だというのはこの講演のはじめに話したことです。
 場の理論自体を記述する数学が完成していれば、
 場の理論屋さんの議論

$$\begin{aligned}
 Z(\text{two circles with } u, v \text{ and } x, y) &= Z(\text{one oval with } u, v, x, y) = Z(\text{one large oval with } u, v, x, y) \\
 &= Z(\text{two circles with } u, x \text{ and } v, y) = Z(\text{two circles with } y, v \text{ and } x, u)
 \end{aligned}$$

によって、実際に特殊関数の等式が証明されることとなります。
 が、これはまだまだ先のことのようにです。

同様に、場の量子論の考察から新たな数学が出て来たケースは
沢山あります。

今回話したのは、かなり小さいケースで、
もっと数学に大きな影響をあたえたものとして

- ミラー対称性
- ザイバーク = ウィッテン方程式

などがある。

これらは、場の理論自体を記述する数学がまだ不完全であるからこそ、
そのもやもやしたところの一部を先に凝縮させて
数学として取り出したようなものではないでしょうか？

聴衆のどなたかが、また新たな数学を取り出すことを期待して、
講演を終えたいと思います。