

## 場の量子論と数学

我々は何で出来ているのか、それはどのように記述されるのか。これは人類の長年の疑問です。体は細胞から出来ており、細胞は分子から出来ており、分子は原子から、原子は原子核と電子から、原子核は陽子と中性子から、陽子と中性子はクォークから出来ています。電子とクォークは素粒子と呼ばれ、現時点ではこれ以上は分解できません。これらの粒子の間に働く力には皆さんも良くご存知の電磁力や、クォークをくっつけて陽子と中性子にしている「強い力」\*1 があります。素粒子とその間の力は、場の量子論という理論物理の枠組みで記述されます。

すぐ下で説明しますように、場の量子論に基づく計算は非常に良く実験結果を再現します。しかし、場の量子論の我々の理解は非常に不完全です。それでいて、場の量子論は数学のいろいろな研究を刺激してきました。この記事では、この不思議なギャップについて少し解説してみたいと思います。

### 場の量子論は不完全である

まず、場の量子論の理解が不完全だということはどういうことでしょうか？ 比較の為、二十世紀初頭にあらわれた、一般相対性理論と量子力学を考えましょう。これらは世間的には難しいという評判ですが、理論の枠組みとしては充分良く理解されています。例え

ば、沢山物理の学生向けの教科書が出版されています。難しいですが、自習することができます。また、数学者に対しては、一般相対論や量子力学が何であるか、一言で伝えることができます。そのためには、「一般相対論とはリーマン多様体上のアインシュタイン方程式の研究である」「量子力学とはヒルベルト空間上のエルミート作用素の研究である」と言えば良いのです。このカギ括弧内の文二つを読者が判るか判らないかはここでは関係ありません。数学者に一言で伝えられるということが、ここでは重要です。

さて、場の量子論ではどうでしょうか。物理の学生向けの教科書は沢山ありますが、自習は困難です。しかし、数学者に対して、一体場の量子論とは何なのか、一言で伝える方法は現時点ではありません。必ずしも数学者に判ってもらう必要は無いかも知れませんが、しかし、伝えられないというのは物理の理解が足りない一端でしょう。

そこでひるがえって、自分が場の量子論を何だと思っているかを反省してみます。\*2 そうすると、私にとって、場の量子論というのは、教科書や種々の論文を通じて学んだ計算手法や結果の茫漠とした集まりにすぎず、筋道の通った一貫した理解に欠けていることに気が付きます。これはおそらく私だけの問題ではありません。例えば、場の量子論の教科書を開いて、読んでみますと、しばしば「前の章で説明したこれこれ

は実は嘘であった。本当のところはこうだ」「先の章で本当はこうだと言ったがそれも実は正しくなく実際はこうだ」と書いてあることが良くあります。こういうことは、一般相対論や量子力学の教科書では滅多にありません。

## 場の量子論は有効である

しかし、それでいて、場の量子論で行われる計算は実験結果と非常に良く合います。例えば、電子ひとつの磁石としての性質を意味する異常磁気能率という量は、電磁力の強さを示す微細構造定数の展開による近似計算をすることで理論的にもとめられますが、実験による測定と見事に一致しています。<sup>\*3</sup>

また、「強い力」は理論物理屋にとっては経路積分という無限次元の積分で定められています。これを計算すれば、さまざまな量を求めることが出来ます。無限次元の積分は現実には実行不可能ですから、頑張って有限和で近似して極限操作をして計算します。これは、世界最速のスーパーコンピューター等をつかって計算がなされており、ここ数年で実験結果を再現するようになりました。<sup>\*4</sup>

クレイ数学研究所が2000年に出した、それぞれ一億円の賞金のかかっているミレニアム問題<sup>\*5</sup>の一つは、実質この極限操作が収束することを数学的に証明

せよという問題ですが、極限を取る前の途中の数字が十分現実にあうことは確認されているわけです。

その他にも、場の量子論は数学的には満足に出来ないにも関わらず、場の量子論を用いてなされた計算結果が、実験結果を見事に再現するという事実は山のようにあります。ですから、古代エジプトやバビロニアでの建築技術が発展したところからユークリッド幾何学が抽出されたように、理論物理における場の量子論から、何か全うなきちんと定義された数学が抽出されるであろう、というのは当然期待されることです。

## 場の量子論の数学的定式化達

勿論、このように思った人は以前から沢山いました。何とんでも、場の量子論自体、もう百年弱研究されています。時期の早いものは1950年代になされた「公理的場の量子論」と呼ばれる分野で、その当時物理学者に知られていた場の量子論の側面を公理化したのですが、その後の理論物理内での理解の進展は生憎取り入れられていません。<sup>\*6</sup> その後1980年代になって数学的に扱いやすいクラスの場の量子論に対していくつかの定式化がなされました。「トポロジカル場の量子論」および「頂点作用素代数」がそれです。しかし、これらは実際の素粒子を記述する場の量子論は扱

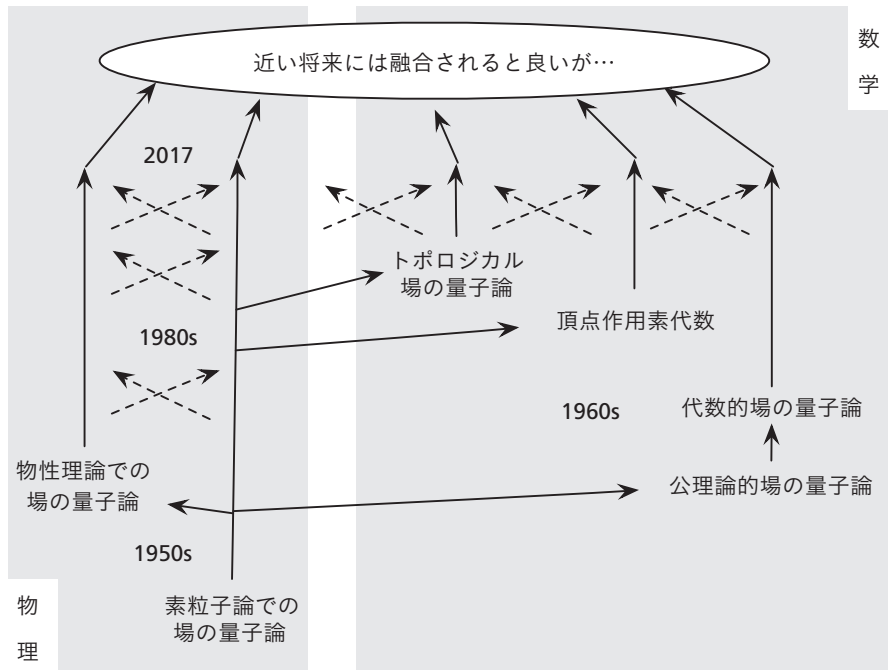


図1 場の量子論のいろいろな定式化達

えません。また、これらの定式化は、一旦なされたあとは、数学内の個別の分野として研究が進展し、定式化間の関連はそれほど多くありませんでした。ようやく、この十年ほど、交流が急に深まってきたようです。このあたりの定式化の関連を図1に載せました。

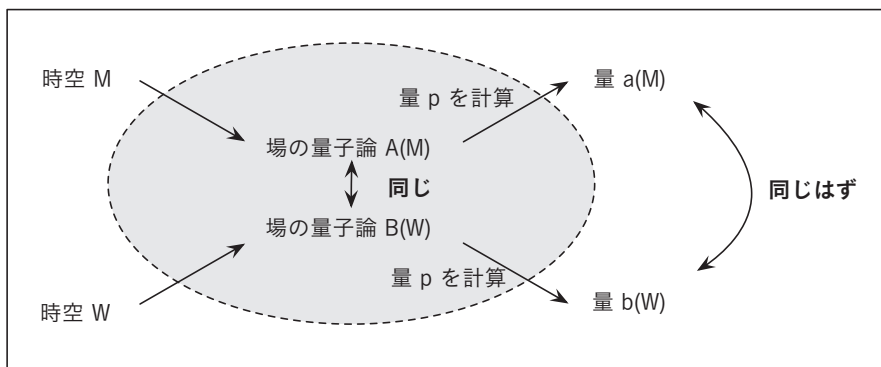
さらに、実際の素粒子を記述する場の量子論は、物理の学生向けの教科書では既にかきましたように、通常経路積分とよばれる無限次元の積分を用いて説明を行います。ですので、数学的に定式化する上での問題は、この無限次元積分をどう正当化するかということである、という捉え方が長らくあります。これを直接数学的に調べようとする「構成的場の量子論」という分野もあります。しかし、ここ十年ほど、理論物理の枠内でも、経路積分ですら記述出来ない場の量子論<sup>\*7</sup>があるであろうということが認識されてきました。です

ので、もし構成的場の量子論が完成したとしても、それは場の量子論の数学の完成ではありません。

### 場の量子論の数学的応用

と、ここまで、場の量子論が数学的に何なのか良く判っていないことを強調してきましたが、それでいて、場の量子論の研究から刺激されて既に沢山のあたらしい数学が生じています。例えば、二次元の場の量子論を調べているところから、1990年代はじめ頃ミラー対称性という数学が生まれました。また、四次元の場の量子論におけるザイバーク=ウィッテンの結果に刺激されて、四次元の高次元の数学的性質がよりよくわかるということがありました。これは数学におけるザイバーク=ウィッテン理論と呼ばれています。<sup>\*8</sup> ち

物理屋にとっては:



数学者にとっては:

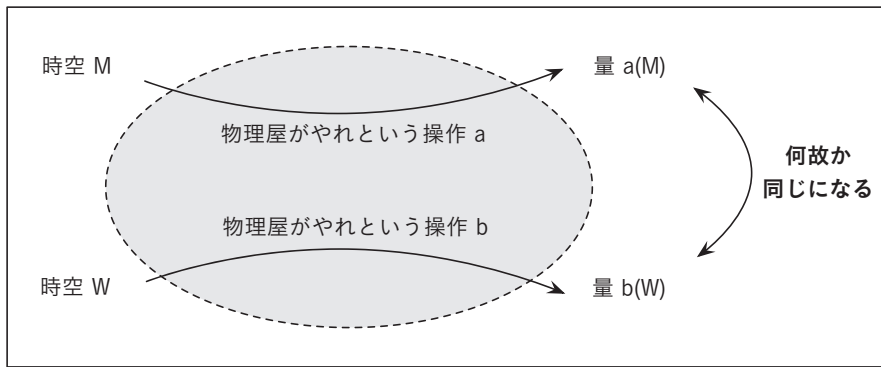


図2 点線の中は数学者にはわからない。

らは1995年頃の話です。また、私自身の寄与を書くのはおこがましいですが、アルダイとガイオットとの理論物理内の共同研究から、インスタントンモジュライ空間の幾何と無限次元代数の表現の間に関係があるべしという数学的予想が得られ、その後有り難いことにいろいろな数学者の研究対象となっています。これは2010年頃の話です。

これらは有る意味数学への場の量子論の応用なのですが、不思議なことに、上で述べたような数学的定式化を研究している分野とはほとんど独立して、また別の数学の分野になっています。これはなぜでしょうか。その理由は、どのようにこれらの数学的応用が現れたかをみると明らかです。例として、ミラー対称性についてみてみましょう。

## 数学的応用が得られる過程

弦理論の研究の過程で、IIA型弦とIIB型弦とよばれる二種類の弦理論がみつかりました。これら二種の弦が時空 $M$ を動いている様子は、二種類の場の量子論 $A(M)$ と $B(M)$ で記述されます。さて、そのうちに、IIA型弦がある時空 $M$ を動いているのはIIB型弦が別の時空 $W$ を動いているのと等価であるという双対性が知られました。するとそれらを記述する場の量子論の間に等式 $A(M) = B(W)$ が成り立ちます。さて、場の量子論からはいろいろな物理量を計算できます。例えば何かの事象が起こる確率 $p$ を考えますと、当然 $p(A(M)) = p(B(W))$ となります。

ここで、 $A(M)$ や $B(W)$ は生憎数学的にはまだ定式化されていないたぐいの場の量子論なので、数学者に

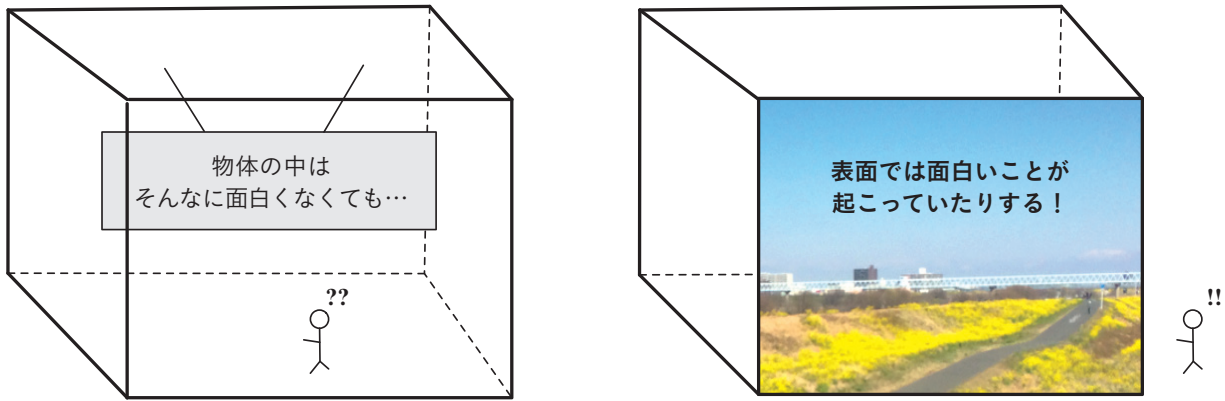


図3 内部がそれほど面白くなくても、表面は面白いことがある。

はなかなかわかりません。しかし、時空  $M$  から  $a(M) = p(A(M))$  を記述する手続き  $a$  は物理屋が根気よく説明すれば理解出来ます。同様に、時空  $W$  から  $b(W) = p(B(W))$  をもとめる手続き  $b$  も理解出来ます。すると、数学者にも、「時空  $M$  で  $a$  という量を計算すると時空  $W$  で  $b$  という量を計算するのと同じになる」という対応は理解出来ることとなります。しかし、 $a$  をもとめる手続きと  $b$  をもとめる手続きは途中に現れた場の量子論を忘れてしまうと全く異なるものに見えます。そのため、この対応は数学的にはとても不思議な対応にみえるわけです。図2を参照ください。

既存の数学で捉えられるものを、一度場の量子論に変換し、それをまた既存の数学で捉えられるものに戻すというのが肝心です。ミラー対称性に限らず、その他の場の量子論の数学的応用もほぼ同様な経緯であられました。場の量子論の立場では同じものが、その時点での厳密な数学ではまだ別のものとしか見えないので、不思議な結果が得られたように思えるのです。上で述べた、既存の諸々の場の量子論の数学的定式化は、以上のような話に役立てるには力がまだまだ足りません。

### 場の量子論の定式化とこれからの僕

この状態はどうすれば改善できるでしょうか？ 図2の点線内を何とか数学者に伝える方法は無いでしょうか？ そのためには、場の量子論はどういうものであるか、どういう性質を満たすものなのか、を、はっきりさせる必要があります。それが出来れば、数学者のためになるだけでなく、物理屋のためにもなるでしょう。というのは、これら、場の量子論の満たすべき性質は、理論物理の枠内でも、教科書にまとまって書き下されたものでは未だ無いからです。

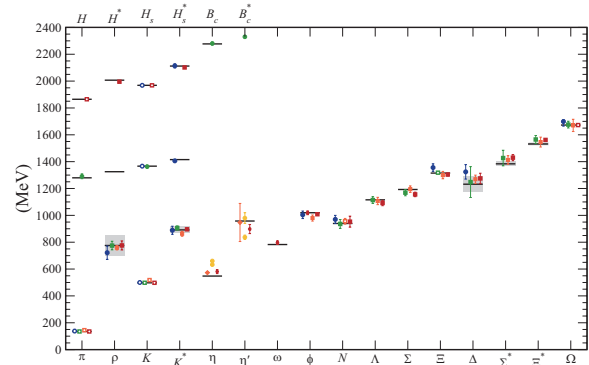
いろいろ論文のそこそこには断片的に書いてはありますが、もっとも重要な所は、実際に研究をやっている物理屋の心の中であって、それが物理屋間でおおまかに共有されているだけです。大きな国際会議中に地震やテロがあって、参加者がみな死んでしまったらどうしましょう。まとまって書き下されていない所から再構成するのは、どれだけ時間がかかるでしょう。そう思って、数年前、僕は実際にそれを自分で書き下してみようとノートを書きはじめました。しかし、百ページほど書いた辺りで、時期が尚早であったことに気が付きました。

というのは、ここ十年来、物性理論でのトポロジカル物質の研究の進展から、これまで僕のような素粒子理論屋の観点からするとほとんど空っぽであると思うような場の量子論でさえも、とても豊かな性質を持ちうる事が知られて来ているからです。物性物理においては、実験対象の試料には必ず表面や境界があります。試料の中ではあまり面白いことが起こっていませんが、試料の表面や境界で豊かな物性がありえます。対応して、場の量子論を考える際に、その中ではほとんど何も面白いことが起こっていませんが、表面や境界で面白いことが起こりえるのです。図3を参照ください。

これは物性物理においては自然な考え方ですが、素粒子論においては盲点だったのではないかと思います。少なくとも僕にとってはそうでした。というのは、この文章のはじめに書いたように、素粒子理論では、この現実世界の微小構成要素を記述している場の量子論を考えることが長らくの主目的です。その場合、この場の量子論は全世界に遍在しています、もしくは世界そのものですから、表面や境界はないわけです。

これらの発展を僕は数年前ようやく知ったのですが、これまでほぼ自明だと思っていた理論が実はまったく自明ではなかったのですから、僕にとっては一大事です。今後数年は、これらの発展をまず自分でも理解してなんとか消化することを目標にしています。これが一段落すれば、また、僕は場の量子論ノートを書き進められるようになるかもしれません。しかし、それはいつのことでしょうか？

- \*1 力に何種類かあって、「強い力」というのはその一種類をさす固有名詞です。強ければどんな力でも指すわけではありません。
- \*2 著者は世間的には理論物理屋の一人ですから、数学者としてではなく物理屋として意見を述べる必要がありそうです。現実と関係ない理論をやっているという意味で物理学者ではなく、厳密でないという意味で数学者でも無いのですが。
- \*3 例えば Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, Makiko Nio, Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant. arXiv:1205.5368 [hep-ph] を参照のこと。実験でも計算でも  $a_e \approx 0.001159652180$  という値が得られている。
- \*4 例えば日本語では青木慎也著「格子QCDによるハドロン物理」(物理学最前線13) 共立出版、英文では Andreas S. Kronfeld, Twenty-First Century Lattice Gauge Theory: Results from the QCD Lagrangian. arXiv:1203.1204 [hep-lat] を参照のこと。そこから図を一つ引用する。横線が中間子の質量の実測値、色々な色の点は各種研究グループの計算結果。



- \*5 <http://www.claymath.org/millennium-problems> を参照。
- \*6 どうしても良いことですが、現在は「ゲージ対称性」「フレーバー対称性」として理論物理では知られている概念は、当時は「局所ゲージ対称性」「大域ゲージ対称性」として知られていました。公理的場の量子論の業界では未だこの古い用語が使われています。大した事では無いのですが、塵も積み重ねれば、業界間のコミュニケーションに齟齬をきたします。
- \*7 「場の量子論」という用語は、分野全体を意味することもありますし、個別の対象をあらわすこともあります。ここでは後者の用法です。
- \*8 物理屋が単にザイバーク=ウィッテン理論という物理側の結果をさし、数学者が単にザイバーク=ウィッテン理論という数学側の結果をさしますが、片側しか知らない人がもう片側の論文をみても殆ど関係はわからないと思います。僕自身若い頃、物理側の話勉強しようとして反対側の文献を借りてきたため、ちんぷんかんぷんであった記憶があります。