

ヤン=ミルズ理論とインスタントン

立川 裕二

1 はじめに

ミレニアム問題としてヤン=ミルズ理論の質量ギャップ問題が選ばれてからはや10年になります。ヤン=ミルズ場は「強い力」を媒介するグルーオンを記述する理論ですが、それは高エネルギーでは質量がないようにふるまうけれども、低エネルギーの領域では小さな領域に閉じこめられ、実際に観測されるものは有質量のグルーボールであろうと思われています。ミレニアム問題は、このヤン=ミルズ理論をきちんと数学的に定義し、低エネルギー領域で質量ギャップが生じることを証明せよという問題です。詳細はこの増刊号の p.?? をご覧ください。

ヤン=ミルズ理論をはじめとする場の理論を数学的に厳密に定義する際は時空を四次元の格子で近似するのが一般的で、格子間隔をゼロにしたときの極限を取ることが問題の本質です。一方、格子で近似してしまえば、理論をそのまま計算機にのせることができます。近年、ヤン=ミルズ理論のスーパーコンピュータによるシミュレーションはますます進歩し、実験で測定されている重粒子や中間子の質量を再現できるようになってきました。ですから、「強い力」がヤン=ミルズ場によって記述されていることは、物理的には疑いはありません。しかし、純粋数学的な証明という方面には、ほとんど進歩はありませんでした。

質量ギャップ問題は、場の量子論の非摂動的振舞いの典型例です。場の量子揺らぎをテイラー展開で扱うというのが摂動論ですが、摂動論をする限りはヤン=ミルズ場は無質量のままです。非摂動的振舞いを理解するには、揺らぎでなくて、有限サイズのヤン=ミルズ方程式の解を考えるのが良いと思われれます。インスタントンはまさにそのような解

です。35年ほど前に提唱されてから、これは常に数学と理論物理の交流を刺激し続け、この10年間にも着実な発展がありました。この稿では、関係のはじまりまで立ち戻って、最新の展開まで概観したいと思います。

2 インスタントンとは

ヤン=ミルズ理論は電磁場を記述するマックスウェル理論の拡張です。電磁場を記述する基本的な量は4元ベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ で、電磁場の強さは $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ で与えられます。ここで、 x は時空 \mathbb{R}^4 の座標、 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ はベクトルの添え字です。電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} は F の成分で、 $\vec{E} = (F_{01}, F_{02}, F_{03})$, $\vec{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$ で与えられるのでした。

ヤン=ミルズ理論は、場を $N \times N$ 行列にすることによって得られます。以下行列を太字で表すことにしますと、ポテンシャルと場の強さの関係は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (1)$$

となります。右辺の第三項として行列の交換子が入り、 F と A の関係が非線形になるところが特徴です。ヤン=ミルズ理論の提唱とほぼ同時期に、この関係式は独立に数学でも提唱されました。数学では、 A は $U(N)$ バンドルの接続、 F はその曲率と呼ばれます。

量子論にはいろいろな定式化がありますが、ヤン=ミルズ理論を扱うには経路積分によるものがあります。すなわち、量子力学的には、場の配位はどのようなものも起こりうる。しかし、配位毎に起こりやすさが決まっているので、それに応じて重みを付けて可能性を足しあげなさいということになり

ます。ですから、積分

$$\int [DA] \exp(-S[A]) \quad (2)$$

を計算するのが先決です。ここで $[DA]$ は場 A の全ての配位について積分することをあらわし、重みは作用

$$S[A] = \int d^4x |\mathbf{F}|^2 \equiv \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (3)$$

の指数関数で与えられます。

A は時空の各点毎に自由度がありますから、 $\int [DA]$ は $\int \prod_{x,\mu} dA_\mu(x)$ で x が \mathbb{R}^4 の全ての点に渡るような無限次元の積分になります。言うは易し行うは難し、この無限次元積分を数学的に正当化しなさいというのがまさにミレニアム問題のはじめの半分です。直接無限次元積分に挑むのはやめて、なんとかこれを近似的に評価できないか考えましょう。 $S[A]$ が小さい配位ほど積分に重要な寄与をしますから、 $S[A]$ を最小化することを考えます。ここで、次の関係式が重要になります:

$$S[A] = \frac{1}{4} \int d^4x |\mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}}|^2 + \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} \mathbf{F}_{\mu\nu} \tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \quad (4)$$

但し、物理の慣習に従って $\sum_{\mu=0}^3$ 等は省略しました。ここで $\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ は完全反対称シンボル $\epsilon_{0123} = 1$ をつかって

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{F}_{\rho\sigma} \quad (5)$$

で与えられます。これは丁度 \mathbf{F} の電場部分 $\vec{\mathbf{E}}$ と磁場部分 $\vec{\mathbf{B}}$ を入れ替える操作です。

さて、式(4)の第二項は必ず $8\pi^2$ の整数倍になることが知られています。その整数を k としましょう。与えられた場の配位 $A(x)$ を連続的に変形すると、式(4)の第一項は変わりますが、第二項は変わらないため、 $S[A]$ を最小化するには

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \quad (6)$$

を解けば良い、そのとき $S[A] = 8\pi^2 k$ となります。 k は物理ではインスタントン数、数学では第二チャーン数と呼ばれる量です。

以上のような考察から、この方程式(6)の解を調べると、ヤン=ミルズ理論を理解する手がかりになるのではないかと考えられました。1970年代のことです。解のことをインスタントンと呼びます。

3 インスタントンの構成

式(1)は非線形であるため、インスタントンを定める方程式(6)も非線形方程式です。よってこれを一般に解くのは一筋縄では行きません。幸いインスタントン数が最小の $k = 1$ の場合は答えを簡単に書き下すことが出来、

$$A(x)_\mu = \frac{\eta_{\mu\nu}(x - x_0)_\nu}{(x - x_0)^2 + \rho^2} \quad (7)$$

となります。ここで、 x_0 は \mathbb{R}^4 の点でインスタントンの中心を、 ρ はその大きさを指定し、勝手に選べますが、 η にはさらに条件がつきます。 x は時空の座標ですから空間だけでなく時間も含まれていることを思い出しますと、上記 A は空間的にも時間的にも x_0 のあたりに局在している励起をあらわし、これがインスタントンの名前の元になっています。Instant (瞬間) + -on (粒子) というわけです。

この解は x_0 に4自由度、 ρ に1自由度、さらに η に $4N - 5$ 自由度あることが知られており、合計 $4N$ パラメタの自由度を持っています。インスタントン数 k が一般の場合に、どれだけインスタントンに自由度があるかは指数定理等を使って簡単に計算することが出来、 $4Nk$ パラメタあることが知られていました。これは、1-インスタントンの場合の k 倍であることに注意してください。ですから、 k -インスタントン解は、あたかも1-インスタントンが k 個あるように振る舞います。しかし、方程式は非線形ですから、安直に足すことによって解をふたつ重ね合わせることは出来ません。非線形なのに解が重ね合わせられるかのように振る舞う、これはソリトン理論との関係を示唆します。

全てのパラメタを持った k -インスタントン解を作ろうと沢山の物理学者が頑張りましたが、決着をつけたのは四人の数学者、アティヤ、ドリinfeld、ヒッチンとマニンによる論文でした。彼らはツイスター理論を駆使し解を構成しました。まず、 $k \times N$ 行列と $N \times N$ 行列を4つずつ用意します。合計 $4(k + N)N$ 個のパラメタの間に、 $3N^2$ 個の条件を課し、さらに N^2 方向を割ることによって、 $4kN$ 次元のパラメタの空間を得ました。ベクトルポテンシャル A はこれらの行列から具体的に

構成することが出来ます。解の持つパラメタのことを数学ではモジュライと呼びます。よって、この $4kN$ 次元のパラメタ空間 $\mathcal{M}_{N,k}(\mathbb{R}^4)$ は、インスタントンのモジュライ空間と呼ばれます。行列のなす線形空間は簡単なものですが、条件を課して割ることによって、 $\mathcal{M}_{N,k}(\mathbb{R}^4)$ は非常に複雑な、しかし興味深い空間になります。

4 ドナルドソン理論

4.1 経路積分とインスタントン

インスタントンをつかって、経路積分を近似することを考えましょう。インスタントンは経路積分(2)に現れる作用 $S[A]$ を最小化するものとして求められました。そこで、勝手な場の配位を

$$\mathbf{A}_\mu(x) = \mathbf{A}_\mu(x; X) + \delta\mathbf{A}_\mu(x) \quad (8)$$

と展開しましょう。ここで、右辺第一項はインスタントンで、そのパラメタ $X \in \mathcal{M}_{N,k}$ は与えられた $\mathbf{A}(x)$ に一番近いように選びます。 $\delta\mathbf{A}$ はそこからのずれです。すると、経路積分は

$$\int [D\mathbf{A}] \longrightarrow \int_{\mathcal{M}_{N,k}} dX \int [D\delta\mathbf{A}] \quad (9)$$

と分解されます。右辺のひとつめの積分は、複雑な空間 $\mathcal{M}_{N,k}$ の上で行われますが、有限次元の積分です。右辺のふたつめの積分は、いまだに無限次元ですが、揺らぎ $\delta\mathbf{A}$ は小さいですので、テイラー展開によって近似することを考えましょう。

このように、揺らぎを展開によって取り込む手法は摂動論と呼ばれ、理論物理では非常に標準的なものです。電磁場の場合に摂動論を展開する方法は朝永、シュウウィンガー、そしてファインマンによって切り開かれ、実験結果を非常によく再現することが知られています。残念なことに、ヤン=ミルズ理論そのものでこの手法をとろうとすると、テイラー展開で取り込もうとする揺らぎの寄与が大きすぎ、そのままではうまくいきません。これで上手くいくなら、ミレニアム問題はもう解決しているでしょう!

しかし、上記の摂動論がうまくいくようなヤン=ミルズ理論の親類もあります。そのためには超対称性を導入します。超対称性は電磁場、ヤン=ミルズ場 \mathbf{A} のようなボゾン場に対して、対応するフェルミオン場 ψ を結びつけるものです。ボゾン場とフェルミオン場は経路積分に際して逆の符号で入ります。この相殺によって、ゆらぎ $\delta\mathbf{A}$ の積分の振舞が良くなります。四次元の超対称性には $\mathcal{N} = 1, 2, 4$ の三種類あります。 $(N$ は行列のサイズ、 \mathcal{N} は超対称性の数であることに注意してください。記法がややこしいですが、80年代からの習慣なので替えられません。) 超対称性が多いほど、ゆらぎの積分の相殺が良くなります。 $\mathcal{N} = 1$ ではまだ揺らぎの寄与は激しく、 $\mathcal{N} = 4$ では相殺が起こりすぎて寄与がゼロになってしまいます。ですから、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論を考えるのが適切です。

4.2 ドナルドソン不変量

さらに話を面白くするために、平らな \mathbb{R}^4 だけでなく、一般に四次元多様体 M を場合を考えます。ウィッテンに従って、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論を M 上で考えて、そこで積分

$$\int [D\mathbf{A}][D\psi]\mathcal{O}(C_1)\cdots\mathcal{O}(C_n)\exp(-S[\mathbf{A}, \psi]) \quad (10)$$

を考えましょう、ただし $\mathcal{O}(C)$ は部分多様体 C に対し自然に定まる場の理論の演算子です。これを分解(9)のもとで計算すると、揺らぎからの寄与がちょうど超対称性により相殺して、無限次元積分が有限次元の積分

$$\int_{\mathcal{M}_{N,k}(M)} \Phi(C_1)\Phi(C_2)\cdots\Phi(C_n). \quad (11)$$

に帰着します。ただし、 $\mathcal{M}_{N,k}(M)$ は M の上で方程式 (6) を考えた場合のインスタントンモジュライ空間で、 $\Phi(C)$ は場の演算子 $\mathcal{O}(C)$ をそこに制限して自然に定まる $\mathcal{M}_{N,k}(M)$ 上のコホモロジー類です。

実は、この積分は、多様体 M のドナルドソン不変量そのものです。多様体が与えられた際に、位相的な情報を取り出すには、その多様体のコホモロジーの積構造等を計算するのが一般的です

が、四次元の場合は微分構造まで考えるとそれらだけでは多様体を区別するには不足であることが知られていました。そこで、ドナルドソンは、多様体 M 自身のコホモロジーだけでなく、多様体 M 上のインスタントンのモジュライ空間のコホモロジーを考えることにしました。インスタントンモジュライは \mathbb{R}^4 上でも複雑な空間です。一般の多様体上ではさらに複雑ですが、それゆえに面白い情報を含みます。この方法は微分構造の入った四次元多様体の交叉形式を決定するなど華々しい結果を導きました。1980年代前半のことです。

この稿ではウィッテンの仕事の先に説明しましたが、彼はドナルドソンの画期的な仕事を物理の立場から理解したいという動機で $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論に至ったのです。しかし、その時点では、彼の仕事は数学を物理で再定式化したというだけでした。しかし、90年代になって事態は大きく進展します。

5 サイバーク=ウィッテン理論

5.1 物理の立場から

ミレニアム問題は、超対称でないヤン=ミルズ理論が、高エネルギーでは質量のないグルーオンを使って記述されるにも関わらず、低エネルギーでは質量のあるグルーボール等で記述されることを示せという問題です。同様の問題を $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論に対しても立てることが出来ます。高エネルギーでは同様に、質量のないグルーオンとその超対称パートナーで記述されますが、低エネルギーではどうなるでしょうか。

$\mathcal{N} = 2$ 超対称性は、低エネルギーでの有効作用が場の正則関数でなければならないという制限をもちます。単なる連続関数と異なり、正則関数には、留数定理により極を定めれば関数形自体が定まってしまうという良い性質があります。作用に極が生じるのは、何か粒子の質量がゼロに近づくことによって作用に発散が生じるのが原因です。ですから、どのような状況でゼロ質量の粒子が現れるか、というのを推測することが出来れば、低エ

ネルギーでの有効作用を決定することができます。このような物理的考察から、サイバークとウィッテンは、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論は、低エネルギーでは、電磁場が軽いモノポール場と相互作用している理論になると結論し、作用を決定しました。作用は正則関数だと書きましたが、それはリーマン面の族を用いて簡潔に記述できることが示されました。これが、物理でいうところのサイバーク=ウィッテン理論です。モノポール場がどこからともなく現れるというのが最も不思議なところですが、低エネルギーでの話のすべての辻褄が合うためには現れねばなりません。

ここで、理論を変更して、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもっているところを $\mathcal{N} = 1$ 超対称性しか持たないようにすることが出来ます。これをサイバーク=ウィッテン理論の立場から調べると、低エネルギーにあらわれるモノポールが凝縮することが判ります。超電導体では電子が凝縮するため、磁場は磁束量子にまとめられ、質量ギャップが生じますが、それと同様に、モノポールが凝縮すると、電場が電束量子にまとめられ、質量ギャップが生じます。これはまさにト・ホーフトが1970年代に提唱していたシナリオそのものです。ですから、サイバーク=ウィッテン理論を認めるならば、 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ヤン=ミルズ理論に関しては質量ギャップの存在が示されたこととなります。勿論、物理の厳密さであつて、数学として必要な厳密さには足りませんが。

5.2 数学の立場から

さて、話を数学との関係に戻しましょう。 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ヤン=ミルズ理論を一般の四次元多様体上で考えると、ドナルドソン不変量が得られると前節で述べました。これと、上記の考察を組み合わせると、ドナルドソン不変量は、インスタントンモジュライのかわりに、電磁場とモノポールの結合した系のモジュライを調べても得られるべし、ということになります。この後者のモジュライ空間は、インスタントンのモジュライ空間よりも格段に簡単な構造を持ちます。これから得られる不変量をサイバーク=ウィッテン不変量と呼びましょう。すると、ドナルドソン不変量で得られたような四次元多様体の精

妙な構造が、非常に少ない労力で得られることになります。これが、数学でいうところのサイバーグ=ウィッテン理論です。これによって四次元の幾何学の理解は大きく進歩しました。1990年代半ばの話です。

ドナルドソン不変量も、サイバーグ=ウィッテン不変量も、数学的に厳密に定義できる量です。物理でいうところのサイバーグ=ウィッテン理論によれば、この二つは等価です。しかし、数学的にはこの二つが一致するというのはひどく非自明な主張です。二つの不変量が双方とも具体的に計算できる多様体に関しては、実際にそれらが一致することは確認できますが、それは場当たりの過ぎます。数学的に一般に等価性を示すにはどうすればいいでしょうか？ミレニアム問題の前半が解決しており、経路積分が数学的に正当化されていれば、物理的なサイバーグ=ウィッテン理論をそのまま厳密化することも出来たでしょうが、それは現状では無理な話です。

また、物理的な立場からも、サイバーグ=ウィッテン理論は素晴らしいながらも少々不満な点があります。なぜなら、低エネルギー作用は、極の位置を推測し、複素関数論を駆使して決定されたからです。しかし、前節で述べたように、 $N = 2$ 超対称性があれば、無限次元の経路積分の計算は、有限次元のインスタントンモジュライ上の積分に帰着します。ですから、低エネルギー作用を直接インスタントン積分を用いて書き下すことができるはずで

6 この10年の発展

6.1 ネクラソフの分配関数

というわけで、沢山の研究者の労力が数年間に渡って費やされましたが、遂に2002年になって低エネルギー作用をインスタントン積分の言葉でひとことで書き下すことがネクラソフによってなされました。結論は判ってしまえば非常に簡単で、

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \int_{\mathcal{M}_{N,k}(\mathbb{R}^4)} 1 \quad (12)$$

で与えられます。ここで、 Z は低エネルギー作用を指数関数の肩に乗せたものですが、右辺の積分は同変コホモロジーの意味で取らねばなりません。「同変」という言葉を説明しましょう。コホモロジーは、与えられた空間にどのような部分空間があるかというのを大ざっぱに捉えます。同変コホモロジーは、与えられた空間に群が対称性として作用している場合に、その作用の仕方を込めて部分空間の様子を捉えるものだと思ってくだされば良いです。

さて、インスタントンは \mathbb{R}^4 上で定義されていますから、自然に四次元の回転群 $SO(4)$ が作用します。また、 $N \times N$ 行列を元に定義されていますから、自然に $N \times N$ のユニタリ群 $U(N)$ が作用します。ですから、これらはインスタントンのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{N,k}(\mathbb{R}^4)$ にも自然に作用します。四次元の回転として x_1-x_2 平面を ϵ_1 、 x_3-x_4 平面を ϵ_2 だけ回転させるものを取ると、 Z は $\epsilon_{1,2}$ が小さい極限で

$$Z \sim \exp\left(-\frac{F}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \dots\right) \quad (13)$$

と振舞い、この F がサイバーグ=ウィッテンがリーマン面の族をつかって計算した低エネルギー作用である、というのがネクラソフが得た物理的な結論です。 Z はネクラソフの分配関数と呼ばれます。

数学的にはこれはインスタントンモジュライ空間に対する証明されるべき主張であり、その後一年のうちにネクラソフ=オコンコフ、中島=吉岡、ブラヴェルマン=エティンゴフの三つのグループにより独立に、またそれぞれ全く別個の方法で証明されました。オコンコフが関連する仕事で2006年の国際数学会議においてフィールズ賞を獲ったのは記憶に新しいところです。これらの仕事によって、物理的なサイバーグ=ウィッテン理論のさらなる数学的正当化がなされましたから、超対称ヤン=ミルズ理論の質量ギャップ問題は解決に少しだけ近づいたといえるでしょう。

6.2 今後の展望

以上見てきたように、インスタントンは数学と物理学を30年以上に渡って橋渡しをしてきました。私

事で恐縮ですが、昨年アルダイ、ガイオットと共に
筆者はインスタントンモジュライ空間の同変コホモ
ロジーの直和

(たちかわ ゆうじ/プリンストン高等研究所)

$$\bigoplus_k H_{SO(4) \times U(N)}^*(\mathcal{M}_{N,k}(\mathbb{R}^4)) \quad (14)$$

上にピラソロ代数の表現の構造が自然に入ること
を偶然発見しました。これはまだ数学的にはきちんと
証明されていませんが、いろいろな計算から物理
的には確実なものだと思います。ピラソロ代数は、
二次元の共形場理論というこれまた長らく数学と物
理の交流を担ってきた無限次元のリー代数です。
このような構造があるという兆候は10年来あり、
物理的サイバーグ=ウィッテン理論において実二次
元のリーマン面が出てくるというのもその一つでし
た。しかし、気が付いてしまえば非常に簡明なこ
のような構造が、2009年になるまで見過ごされて
いたのですから、インスタントンにはまだまだ我々
の知らない数学的構造が沢山隠れているに違いな
く、それは今後も少しずつ明らかになっていくので
しょう。

勿論、ヤン=ミルズ理論の研究はインスタントンの
研究だけではありません。たとえば、行列のサイ
ズ $N \times N$ を無限大にとった極限では、 $N = 4$ 超対
称ヤン=ミルズ理論は5次元の重力理論によって記
述されることが知られています。一方で、この理論
は摂動論に可積分性があることも最近発見され、
これら二つの手法を組み合わせることによって理解
が非常に進んでいます。多くの研究者が、 $N = 4$
理論が完全に解ける日も来るのではないかと思っ
ています。

また、冒頭で述べたように、場の理論を厳密に
扱うには時空を四次元の格子で近似するのが常套
手段ですが、格子近似と超対称性は相性が悪いこ
とが知られていました。しかし、最近超対称ヤン
=ミルズ理論を格子にのせる手法が確立し、計算機
実験もはじまったところです。この方面も大きな発
展があるのではないかと思います。

一方で、超対称でないヤン=ミルズ理論を厳密に
扱う方法にはほとんど進展がありません。この記事
の読者が、将来独創的な方法を開発して突破口を
切り開くことを祈って筆を置くことにします。