

Calcul de courbure d'une surface par méthode level set pour les phénomènes de tension superficielle

M. Coquerelle¹ S. Glockner¹

¹Département TREFLE, Laboratoire I2M, Université de Bordeaux

Journée CPU, 9 septembre 2015



CPU

Le monde numérique au service
de la certification et de la
sécurisation des systèmes

université
de **BORDEAUX**



Sommaire

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

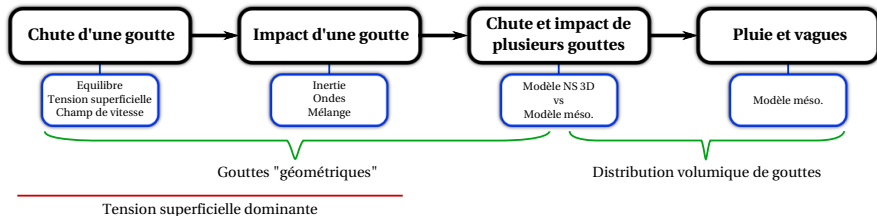
2 Extension précise de la courbure

- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

Simu. num. de l'atténuation des vagues de l'océan par les gouttes de pluie

- S. Glockner (I2M), P. Lubin (I2M), L. Mieussens (IMB), F. Véron (U. of Delaware)



Verrous numériques

- Rapport d'échelle, peu de méthodes adaptées
- Calculs massivement parallèles

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- **La force de tension superficielle**
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

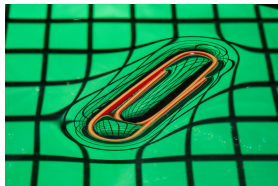
- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

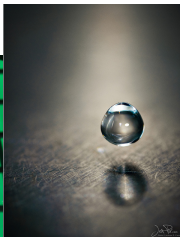
Origine mécanique

Tension superficielle/de surface :

- Située à l'interface entre deux fluides non miscibles.
- Très importante aux petites échelles.



(a) ©Neil Fried



(b) ©Jackson Carson



(c) ©M.-C. Guérout

Erreurs numériques

Quadratiquement proportionnelles à la **courbure** ($\kappa = 1/R$).

Navier-Stokes incompressible

Équations

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

Condition aux bords entre les fluides

- Tension superficielle \sim saut de pression :

$$[p] = \sigma \kappa$$

- Modèle 1 fluide : $\mathbf{F}_{sv} = \sigma \kappa \mathbf{n}$ sur l'interface.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) + \underline{\sigma \kappa_{\Gamma} \delta_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma}}$$

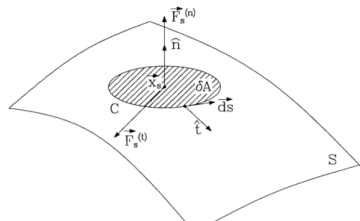


Figure : Force de tension superficielle (schéma extrait de Brackbill).

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- **Problématiques et cadre**
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

Problématiques et cadre

Singularité de $\delta \Rightarrow$ NS ?

Modèle continu adapté \Rightarrow **Continuum Surface-Force (CSF)**.

$$\sigma \kappa_{\Gamma} \delta_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma} \Rightarrow \sigma \kappa \nabla c$$

L'interface Γ

- Transport **précis** :
 - Erreurs $O(h^M)$ sur $\Gamma \Rightarrow$ Erreurs $O(h^{M-2})$ sur κ .
- Choix de la représentation ? \Rightarrow **Level Set ϕ**
 - \Rightarrow WENO 5

Calcul des grandeurs : \mathbf{n} , κ

- \mathbf{n} : dérivées premières de $\Gamma \Rightarrow \mathbf{n} = \nabla \phi / |\nabla \phi|$
- κ : dérivées secondes de $\Gamma \Rightarrow \kappa_{LS} = \nabla \cdot \mathbf{n}$.

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

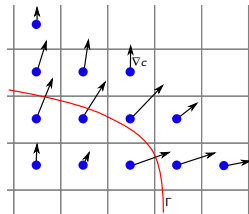
- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

Modèle CSF

Modèle de Brackbill : $\mathbf{F}_{TS} = \sigma \kappa \nabla c$

Besoin de κ autour de l'interface \Rightarrow **extension**.



Difficultés

- 1 Calculer κ précisément (et aisément) ?
 - Rappel : erreurs sur la tension superficielle **quadratiques** en la courbure.
- 2 κ sur les points de grille \Rightarrow késako ?

Approche proposée : **extension précise** de κ

- 1 **Idée** : κ dans le domaine = κ du **point le plus proche** sur Γ .
 - 1 κ constant dans la direction normale.
- 2 Au moins à l'ordre 2 \Rightarrow **ordre 4 réalisé**.

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

- **Erreurs sur la courbure**
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

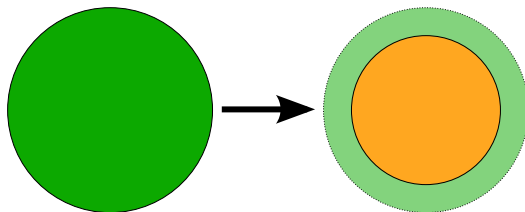
Erreurs sur la courbure \Rightarrow dynamique de la surface

Une méthode CSF précise dépend du calcul **précis** de la courbure.

Trois critères

- 1 Précision p/r courbure exacte.
- 2 Déviation minimale le long de la surface.
- 3 Variation minimale dans la direction normale.

Effets sur la dynamique :



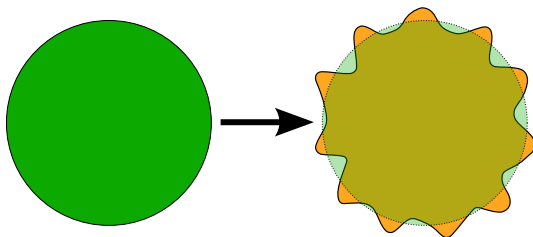
Erreurs sur la courbure \Rightarrow dynamique de la surface

Une méthode CSF précise dépend du calcul **précis** de la courbure.

Trois critères

- 1 Précision p/r courbure exacte.
- 2 Déviation minimale le long de la surface.
- 3 Variation minimale dans la direction normale.

Effets sur la dynamique :



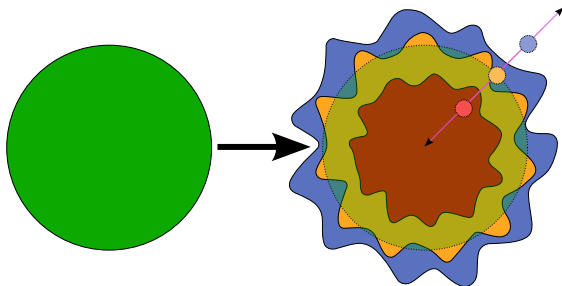
Erreurs sur la courbure \Rightarrow dynamique de la surface

Une méthode CSF précise dépend du calcul **précis** de la courbure.

Trois critères

- 1 Précision p/r courbure exacte.
- 2 Déviation minimale le long de la surface.
- 3 Variation minimale dans la direction normale.

Effets sur la dynamique :



Lignes directrices

- 1 Motivations et problématique
 - Contexte
 - La force de tension superficielle
 - Problématiques et cadre
 - Synthèse et direction de recherche choisie
- 2 Extension précise de la courbure
 - Erreurs sur la courbure
 - **Extension de la courbure par Closest Point**
 - Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF
- 3 Conclusion

Principe de l'extension par Closest Point

Approche basée sur [Herrmann]

Courbure en un point = courbure du point le plus proche :

$$\kappa_{CP}(\mathbf{x}) = \kappa(CP(\mathbf{x}))$$

Par interpolation de $\kappa_{LS} = \nabla \cdot \mathbf{n}$

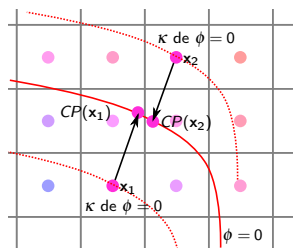


Figure : Extension par méthode de Closest Point.

Propriétés du Closest Point [Macdonald]

- 1 Distance minimum : $CP(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid d(\mathbf{y}, \Gamma) \text{ est minimum}\}$
- 2 Colinéarité : $\overrightarrow{\mathbf{x}CP(\mathbf{x})} \parallel \mathbf{n}(\mathbf{x})$

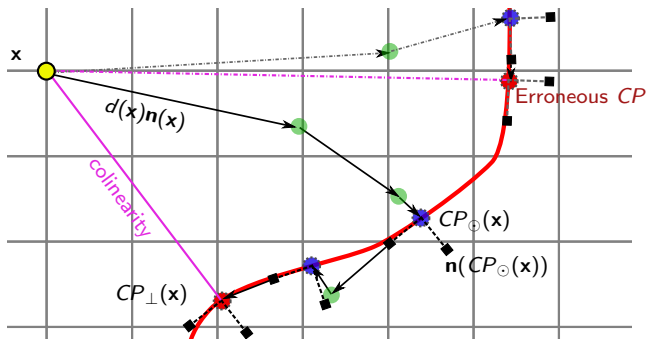
Algorithme

Principe : descente de Newton

- 1 ϕ indique une distance, $\nabla\phi$ une direction.
- 2 CP_{\odot} : assure $\phi = 0$ [Herrmann].

Apport

CP_{\perp} : assure la colinéarité [Coquerelle].



Avec

$$d(x) = \phi(x)$$

$$n(x) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Convergence spatiale pour une ellipse

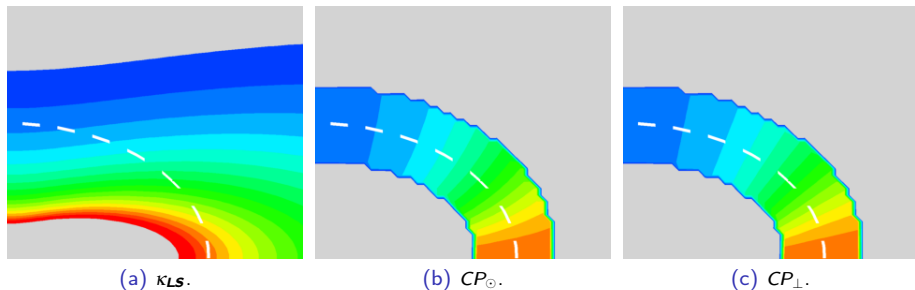
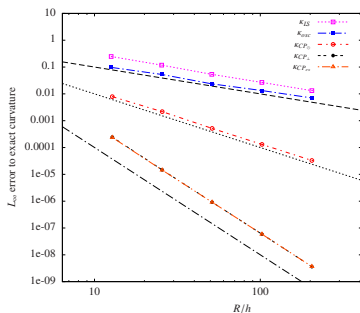


Figure : Profils de courbure.



Méthode	L_{∞}	Dév. normale
κ_{LS}	1	1
CP_{\odot} [Herrmann]	2	2
CP_{\perp} [Coquerelle]	4	2
CP_{ex}	4	2

Table : Ordres de convergence.

Lignes directrices

1 Motivations et problématique

- Contexte
- La force de tension superficielle
- Problématiques et cadre
- Synthèse et direction de recherche choisie

2 Extension précise de la courbure

- Erreurs sur la courbure
- Extension de la courbure par Closest Point
- Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

3 Conclusion

Résultats numériques avec Navier-Stokes CSF

Cas d'étude

- 1 Disque à l'équilibre.
- 2 Disque transporté à l'équilibre.
- 3 Montée de bulle.

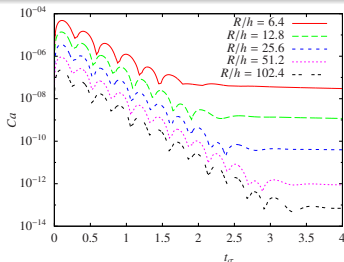
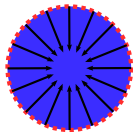
Applications

- 1 Chute d'une goutte dans l'air.
- 2 Chute d'une goutte sur une surface libre.
- 3 Chute de plusieurs gouttes sur une surface libre.

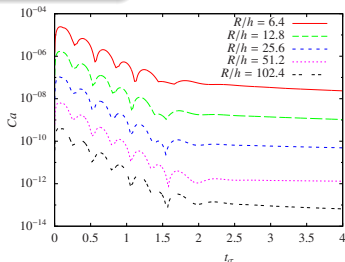
Disque à l'équilibre

Cas d'étude

- 1 Etat d'équilibre \Rightarrow **vitesse nulle** : $\nabla p = \frac{1}{We} \kappa n \delta_{\Gamma}$
- 2 Erreurs numériques sur $\kappa \Rightarrow$ **courants parasites**.



(a) Ordre 2.



(b) Ordre 4.

Figure : Nombre capillaire (équiv. vitesse max.).

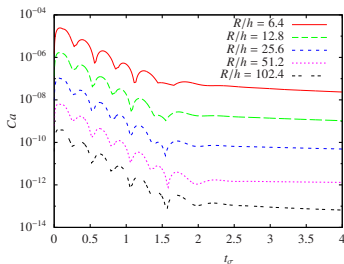
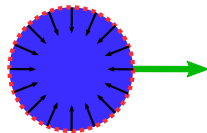
Résultats

- 1 Convergence à l'ordre 4.
- 2 P/r à la littérature : Ca est 10 à 100 **inférieur** (maillage grossier).

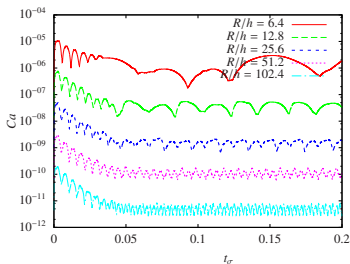
Disque transporté

Cas d'étude

- 1 Idem avec vitesse de translation fixe.
- 2 Erreurs de transport sur ϕ plus importantes.



(a) Sans transport (rappel).



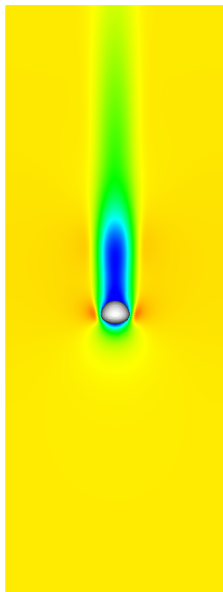
(b) Avec transport.

Figure : Nombre capillaire.

Résultats

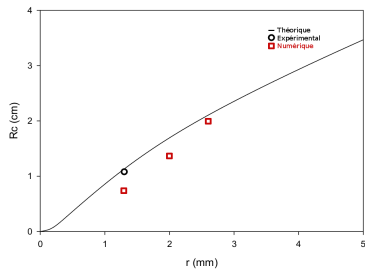
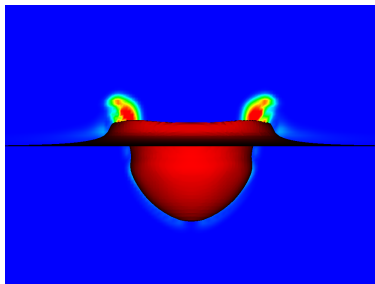
Convergence à l'ordre 4 (VOF-PLIC : à peine ordre 1 [Popinet]).

Applications dans le cadre du projet



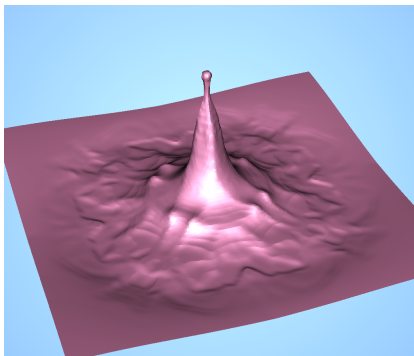
Chute d'une goutte, profil de vitesse.

$64 \times 64 \times 640$, 32 coeurs.

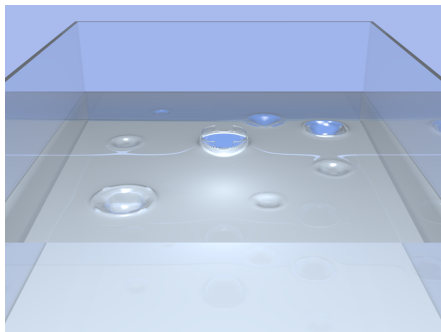


Cavité formée après l'impact. $256 \times 256 \times 128$, 64 coeurs.

Applications



Chute d'une goutte sur une surface. $150 \times 150 \times 75$, 32 coeurs.



Chute de gouttes sur une surface. $400 \times 400 \times 200$, 128 coeurs.

Conclusion

À retenir

- 1 Précision dépendant de :
 - 1 Transport de Γ .
 - 2 Calcul de $CP(\mathbf{x})$: seuils, interpolation.
- 2 Navier-Stokes :
 - 1 Ordre 2 en espace...
 - 2 Mais **utile** d'avoir un ordre > 2 pour la force de tension superficielle !
- 3 Parallélisation réalisée : grands domaines, petits pas de temps.



M. Coquerelle, S. Glockner

A fourth-order accurate curvature computation in a level set framework for two-phase flows subjected to surface tension forces.

Corrections soumises à JCP.

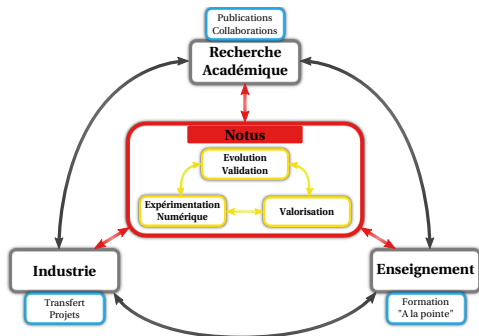
Perspectives

- 1 Calcul + précis et efficace du CP .
- 2 Réinitialisation de LS : $\phi = \pm |\overline{\mathbf{x} CP(\mathbf{x})}|$.
- 3 Contrainte sur le pas de temps due à la tension superficielle.

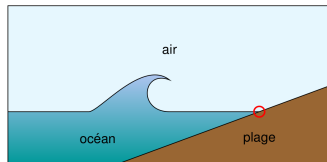
Intégration dans le projet Open Source Notus

Code de calcul Notus

- 1 **Ordre 2** (a minima) partout :
 - 1 Navier-Stokes,
 - 2 Interactions fluide-structure \Rightarrow post-doc **CPU J. Picot**,
 - 3 Transport d'interfaces \Rightarrow post-doc **CPU A. Lemoine**,
 - 4 Tension superficielle \Rightarrow post-doc **CPU M. Coquerelle**.
- 2 Massivement parallèle.
- 3 Validation rigoureuse.



notus
Computational Fluid Dynamics



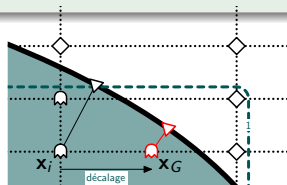
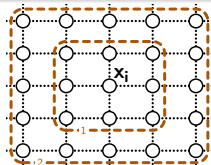
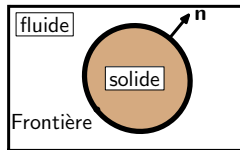
Projet inter Labex : Micro-climat dans les grottes ornées

D. Lacanette, T. Milcent, S. Glockner

- 1 Obstacles de formes quelconques dans un maillage cartésien.
- 2 Résoudre $\Delta u = f$ avec des CL Dirichlet ou Neumann

Réalisations

- 1 Maillage non uniforme.
- 2 Ordre 2 ([Mittal,Coco]).
- 3 **Stencil compact.**



En cours

- 1 Finalisation pour Navier-Stokes.
- 2 Article JCP en préparation.

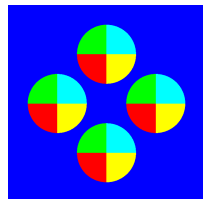
Collab. CELIA : Méthode Moment-Of-Fluid (MOF)

J. Breil, S. Glockner

- 1 Similaire à VOF-PLIC + centre de masse. Phases multiples (> 3).
- 2 Reconstruction à l'ordre 2, maillage quelconque.

Réalisations

- 1 Implémentation et validation 2D.
- 2 **Formule analytique pour le reconstruction.**



Test du vortex. 5 phases. 128×128 .

En cours

- 1 Implémentation 3D.
- 2 Article JCP en préparation.
- 3 \Rightarrow Couplage avec Level-Set (MOF-LS) + CP pour tensions superficielles.