

Application de la méthode des frontières immergées aux équations de Navier-Stokes

Joris Picot

Stéphane Glockner Thomas Milcent

Delphine Lacanette

GdT — I2M TREFLE

notus
Computational Fluid Dynamics



17 décembre 2015

Contexte — Objectifs

Simulation des écoulements d'air dans les grottes de Lascaux

- ▶ Équations de Navier-Stokes incompressible
- ▶ Géométrie complexe
- **Utilisation d'une méthode de frontières immergées (IBD)**
Avec un maillage cartésien
- ▶ Calculs très intensifs :

$$\Delta x = 30 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad 5 \times 10^6 \text{ points} \quad \rightarrow \quad 50 \text{ cœurs}$$

$$\Delta x = 5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad 1000 \times 10^6 \text{ points} \quad \rightarrow \quad 10\,000 \text{ cœurs}$$

en comptant 100 000 points par cœur

- **Algorithme massivement parallèle nécessaire**

Organisation du travail

1. Étude du parallélisme avec les frontières immergées

Implémentation parallèle dans Notus

2. Pour l'équation de Laplace
3. Pour les équations de Navier-Stokes

Application aux grottes de Lascaux

4. Application à des frontières quelconques

Organisation du travail

1. Étude du parallélisme avec les frontières immergées **OK!**

Implémentation parallèle dans Notus

2. Pour l'équation de Laplace **OK!**
3. Pour les équations de Navier-Stokes **OK!**

Application aux grottes de Lascaux

4. Application à des frontières quelconques

Menu du jour

- I. Résumé de la méthode pour l'équation de Laplace
 - a. Fonctionnement des frontières immergées
 - b. Contraintes liées au parallélisme
 - c. Résultats

- II. Application aux équations de Stokes et Navier-Stokes
 - a. Méthode prédicteur-correcteur
 - b. Analyse de la consistance — Stokes
 - c. Analyse de la consistance — Navier-Stokes

- III. Résultats obtenus avec Notus
 - a. Écoulement de Poiseuille
 - b. Écoulement autour du cylindre

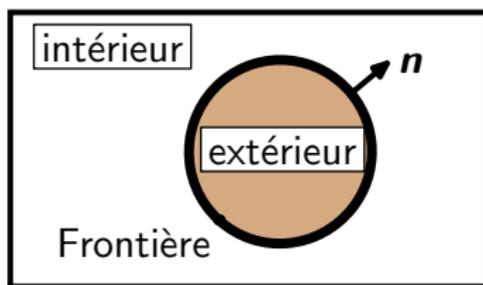
Conclusions

I. Résumé de la méthode pour l'équation de Laplace

I. a. Fonctionnement des frontières immergées

Domaine séparé en deux

- ▶ À l'intérieur : $\Delta u = f$
- ▶ Cond. limites à la frontière :
 - ▶ Dirichlet et Neumann

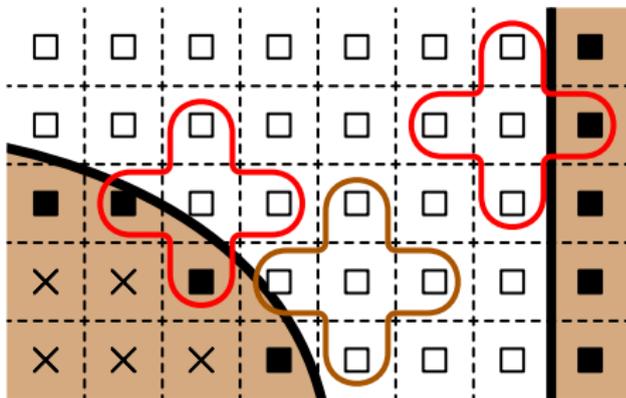


Discrétisation

- ▶ Maillage *cell-centered*
- ▶ Sys. linéaire : $\Delta U = F$

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\Delta x^2} = F_i$$

- ▶ Dans le stencil de Δ :
 - ▶ $U_{i\pm 1}$ peut ne pas être défini
 - C'est un **nœud fantôme**



I. a. Fonctionnement des frontières immergées

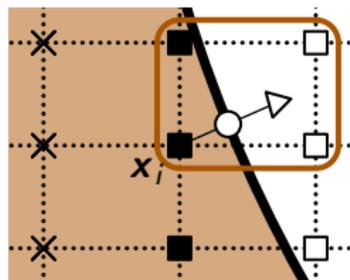
Discrétisation des conditions limites

- ▶ Interpolation ou diff. finies

$$\sum_j \beta_j U_j = u_B \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\sum_j \gamma_j U_j = \partial_n u_B \quad (\text{Neumann})$$

- ▶ Sys. linéaire : $\mathcal{E}U = B$
- ▶ Finalement, on résout : $(\Delta + \mathcal{E})U = F + B$



Différences entre cond. limites au bord et immergées

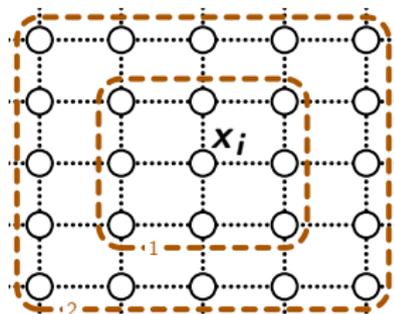
- ▶ Les nœuds fantômes ne sont pas connus à l'avance
- ▶ Les coefficients β_j et γ_j ne sont pas connus à l'avance
- ▶ Les conditions limites sont **couplées**

I. b. Contraintes liées au parallélisme

- ▶ Le stencil de discrétisation est compact d'ordre c si :

$$|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|_\infty > c \Rightarrow \Delta_{ij} = 0$$

Δ ne relie pas des points trop éloignés



- Les solveurs massivement parallèles exigent des matrices à stencil **compact d'ordre 1**

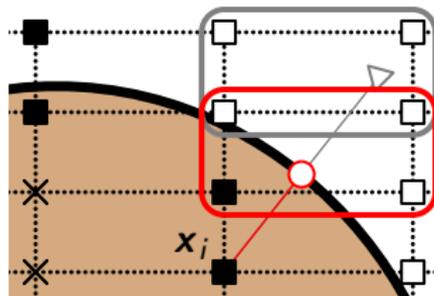
Méthodes IBD compact d'ordre 1

- ▶ N'existent pas dans la littérature
- ▶ C'est l'objet de l'étude préliminaire

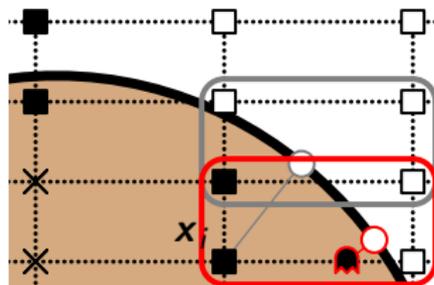
I. b. Contraintes liées au parallélisme

Solutions apportées

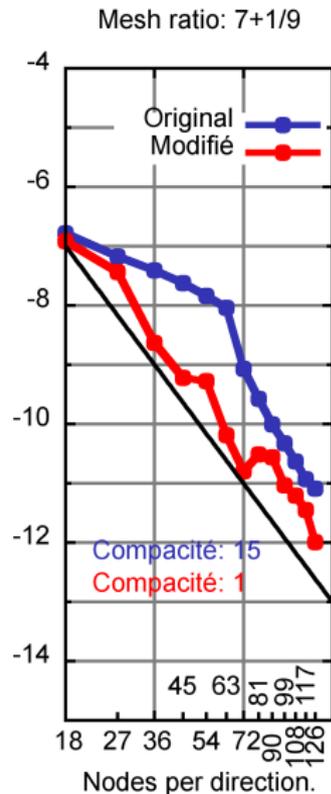
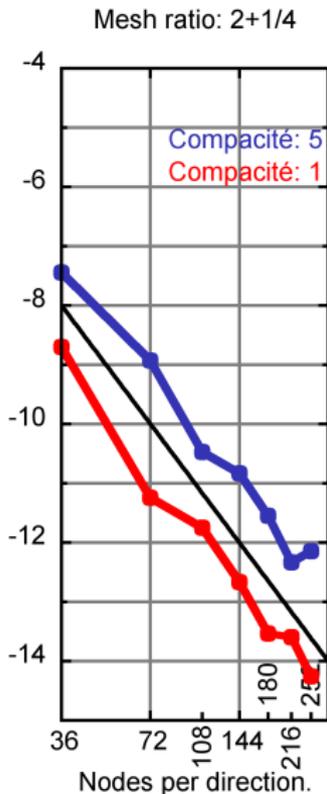
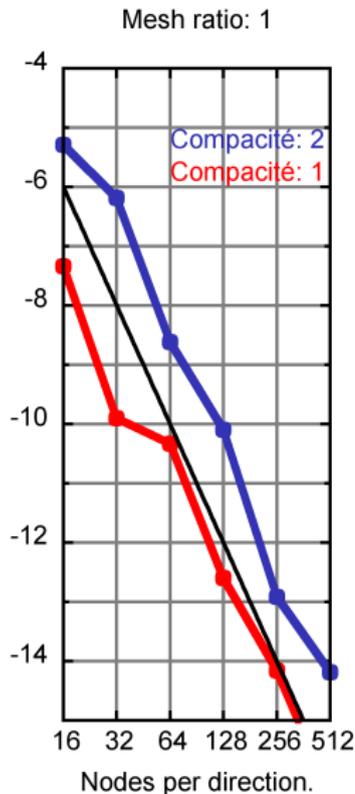
- Utilisation d'une **extrapolation directe** au lieu de linéaire



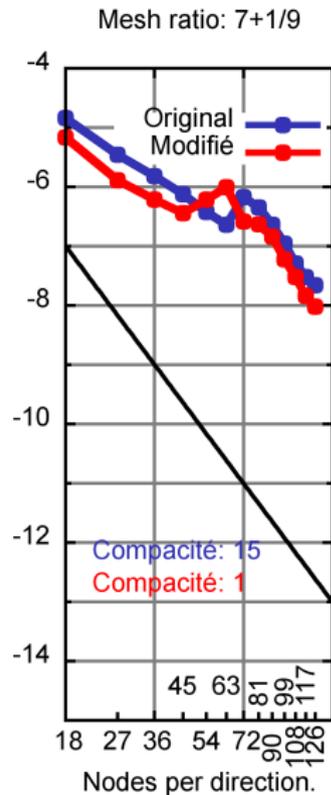
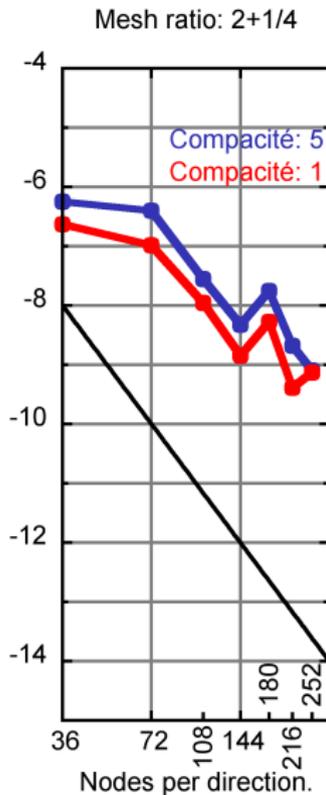
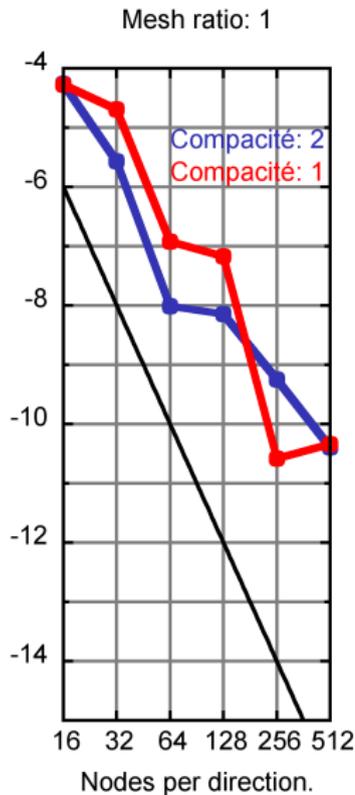
- **Décalage des points fantômes** pour les maillages anisotropes



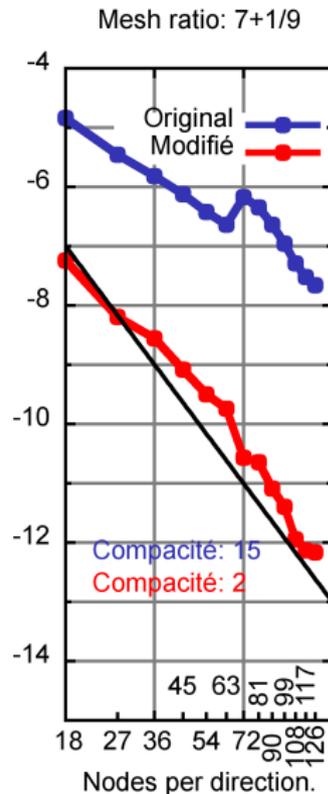
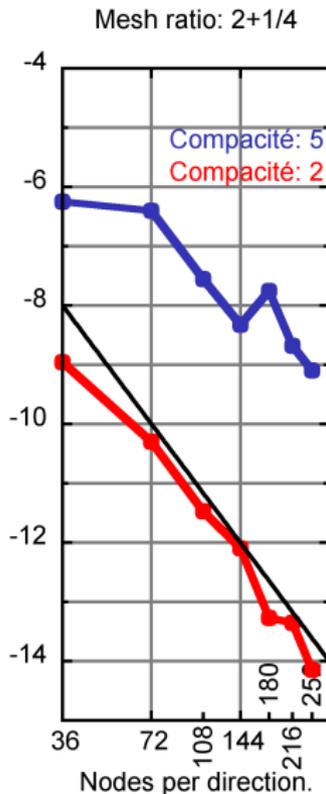
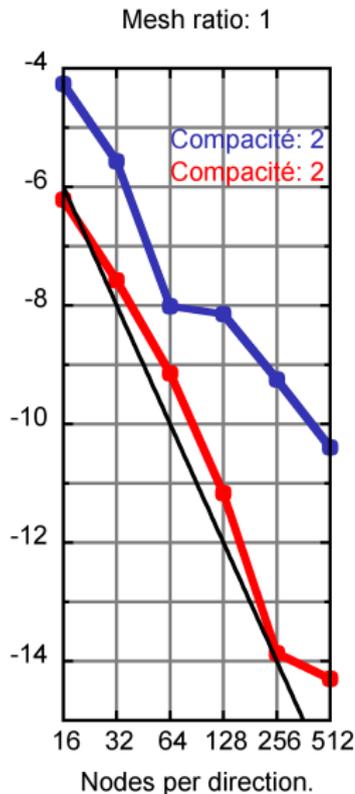
Conditions limites : Dirichlet



Conditions limites : Neumann



Conditions limites : Neumann



II. Application à l'équation de Stokes

II. a. Méthode prédicteur-correcteur

Équation de Stokes

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

(Densité ρ est uniforme et $\frac{p}{\rho} \rightarrow p$)

Conditions limites

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \partial_n p &= 0\end{aligned}$$

Méthode prédicteur-correcteur

$$\mathbf{u}^* - \nu \delta t \Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \delta t \nabla p^n + \delta t \mathbf{f} \quad (\text{prédiction})$$

$$\delta t \Delta \phi = \operatorname{div} \mathbf{u}^*$$

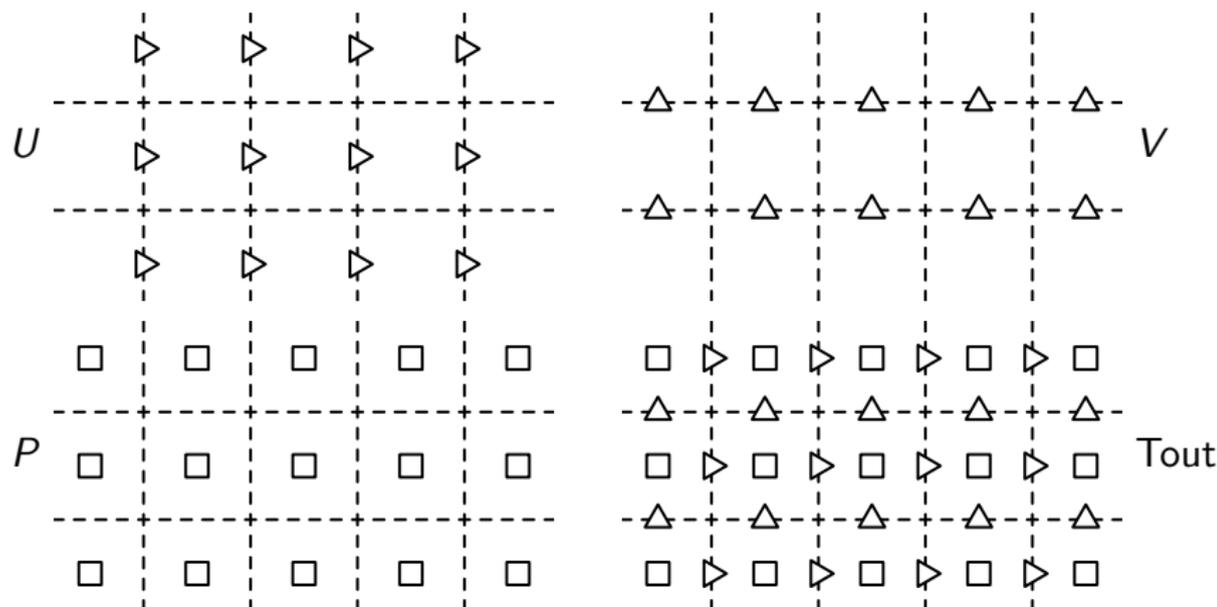
$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (\text{correction})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \delta t \nabla \phi$$

II. a. Méthode prédicteur-correcteur

Discrétisation

- ▶ Vitesse discrétisée au centre des **faces** : $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$
- ▶ Pression discrétisée au centre des **cellules** : $p \rightarrow P$



II. a. Méthode prédicteur-correcteur

Discrétisation des équations

$$(I - \nu \delta t \Delta) \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^n - \delta t \nabla P^n + \delta t \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\delta t \Delta \Phi = \operatorname{div} \mathbf{U}^* \quad (2)$$

$$P^{n+1} = P^n + \Phi \quad (3)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* - \delta t \nabla \Phi \quad (4)$$

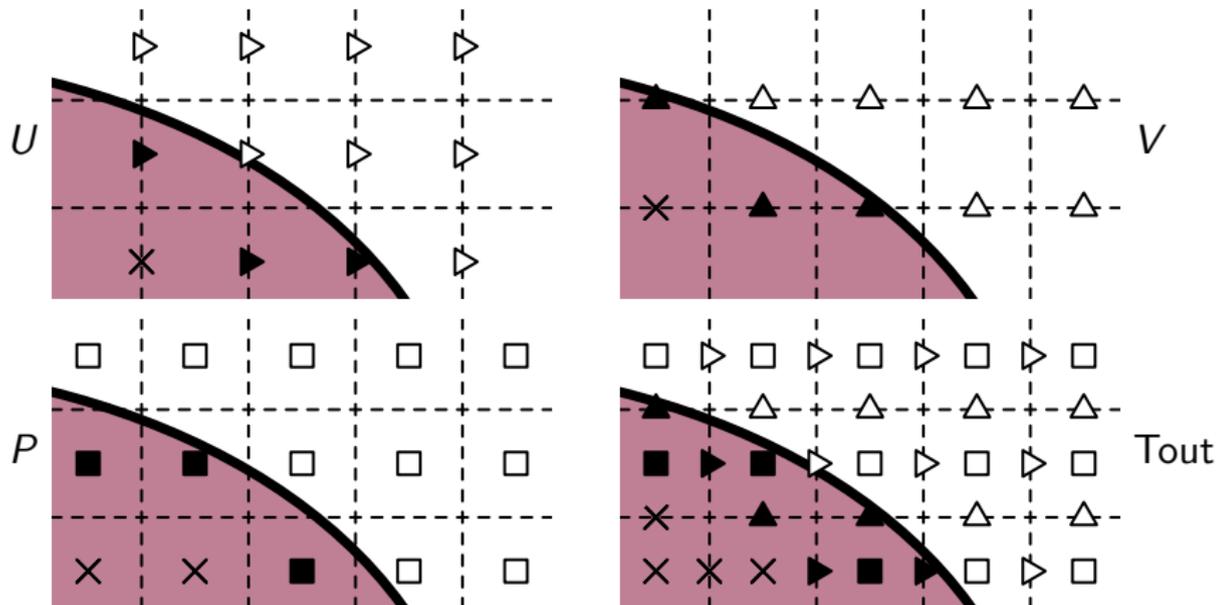
Discrétisation des équations

- ▶ Résolution de systèmes linéaires :
 - ▶ Helmholtz : $I - \nu \delta t \Delta$
 - ▶ Laplace : Δ
- ▶ Opérateurs différentiels (produits matrices-vecteurs) :
 - ▶ Gradient : $\nabla P^n, \nabla \Phi$
 - ▶ Divergence : $\operatorname{div} \mathbf{U}^*$
- ▶ Additions et produits scalaires.
- **Ces opérations sont-elles adaptées aux frontières immergées ?**

II. b. Analyse de la consistance – Équations de Stokes

Résolution de systèmes linéaires

- ▶ Traitement identique à l'éq. de Laplace pour U , V , P .
- ▶ Cellules fantômes définies indépendamment sur chaque maillage.



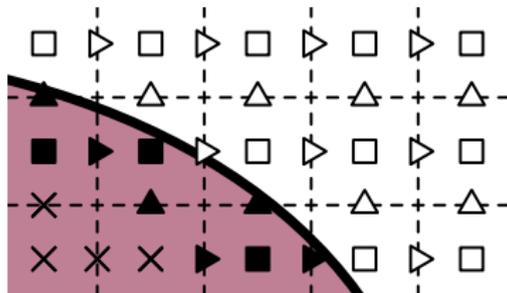
II. b. Analyse de la consistance – Équations de Stokes

Où sont définies les variables ?

- ▶ Système

$$\delta t (\Delta + \mathcal{E}) \Phi = \operatorname{div} \mathbf{U}^* + B :$$

$\operatorname{div} \mathbf{U}^*$			Φ
□	○	→	○
■	×	↘	○



- ▶ Système $(I - \nu \delta t \Delta + \mathcal{E}) \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^n - \delta t \nabla P^n + \delta t \mathbf{F} + B :$

	\mathbf{U}^n	∇P^n	\mathbf{F}		\mathbf{U}^*
□	○	○	○	→	○
■	×	×	×	↘	○

- ▶ Un système linéaire accepte un second membre défini sur les nœuds intérieurs, et renvoie un champ défini sur les nœuds **intérieurs et fantomes**.

II. b. Analyse de la consistance – Équations de Stokes

Opérateurs différentiels

- ▶ Différences finies centrées :

$$(\nabla P)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x}$$

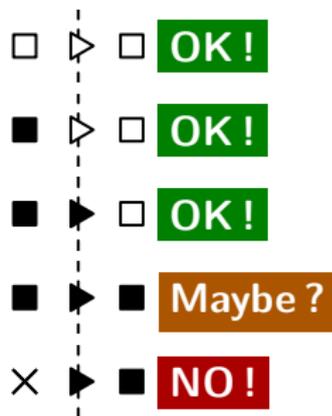
$$(\operatorname{div} \mathbf{U})_i = \frac{\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

- ▶ Pas toujours défini sur les nœuds fantômes.

Où sont définies les variables ?

	P^n		∇P^n
□	○	→	○
■	○	→	×

	\mathbf{U}^*		$\operatorname{div} \mathbf{U}^*$
□	○	→	○
■	○	→	×

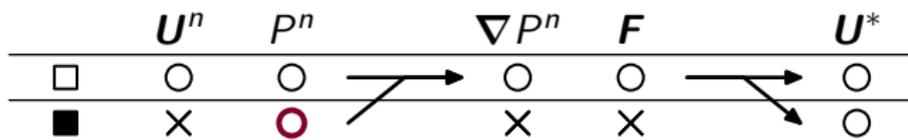


- ▶ Un op. différentiel accepte un argument défini sur les nœuds intérieurs et fantômes, et retourne un champ défini sur les nœuds **intérieurs uniquement**.

II. b. Analyse de la consistance – Équations de Stokes

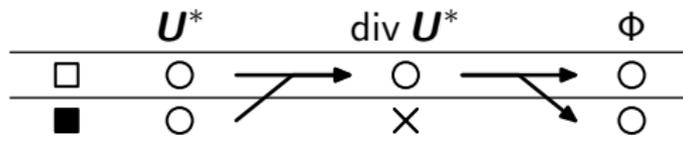
Bilan sur les équations de Stokes

1. Pour obtenir la prédiction \mathbf{U}^* :



- Il faut P^n sur les nœuds fantômes.

2. Pour obtenir l'incrément de pression Φ :



II. b. Analyse de la consistance – Équations de Stokes

3. Pour obtenir la pression P^{n+1} :

	P^n	ϕ		P^{n+1}
□	○	○	→	○
■	○	○	→	○

► **Donc P^{n+1} est bien défini sur les nœuds fantômes.**

4. Pour obtenir la vitesse U^{n+1} :

	U^*	ϕ		$\nabla\phi$		U^{n+1}
□	○	○	→	○	→	○
■	○	○	↘	×	→	×

■ **Attention : U^{n+1} n'est pas défini sur les points fantômes.**

► Mais “ U^{n+1} défini sur les nœuds intérieurs” suffisant, pour Stokes.

II. c. Méthode prédicteur-correcteur

Équation de Navier-Stokes

Conditions limites

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \partial_n p &= 0\end{aligned}$$

(Densité ρ est uniforme et $\frac{p}{\rho} \rightarrow p$)

Discrétisation du terme d'inertie

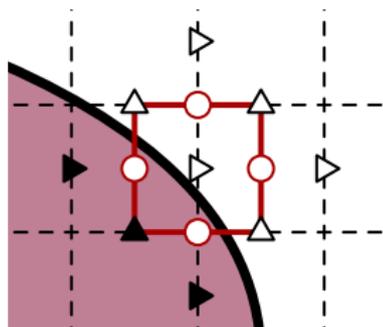
► Formulation : $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \overbrace{\mathbf{u} \operatorname{div}(\mathbf{u})}^{=0}$

► Linéarisation semi-implicite :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \approx \operatorname{div}(\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}^n)$$

II. c. Méthode prédicteur-correcteur

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}^n)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{U_{i+1}^* U_{i+1}^n - U_i^* U_i^n}{\Delta x}$$
$$U_i^n = \frac{U_{i+\frac{1}{2}}^n - U_{i-\frac{1}{2}}^n}{2}$$



- La vitesse \mathbf{U}^n doit être correcte **sur les nœuds fantômes**.

Solution proposée

- ▶ Au lieu de :
$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* - \delta t \nabla \Phi \quad (4)$$

- ▶ On extrapole le champ de vitesse après l'étape de correction :

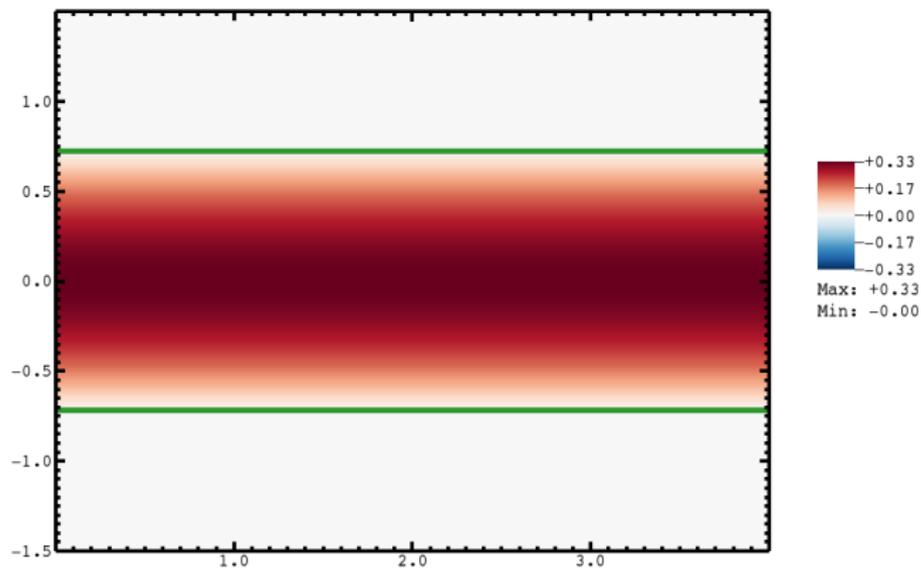
$$\mathbf{U}^{**} = \mathbf{U}^* - \delta t \nabla \Phi \quad (4)$$

$$(\mathbf{I} + \mathcal{E})\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{**} + B \quad (5)$$

III. Résultats avec Notus

III. a. Écoulement de Poiseuille

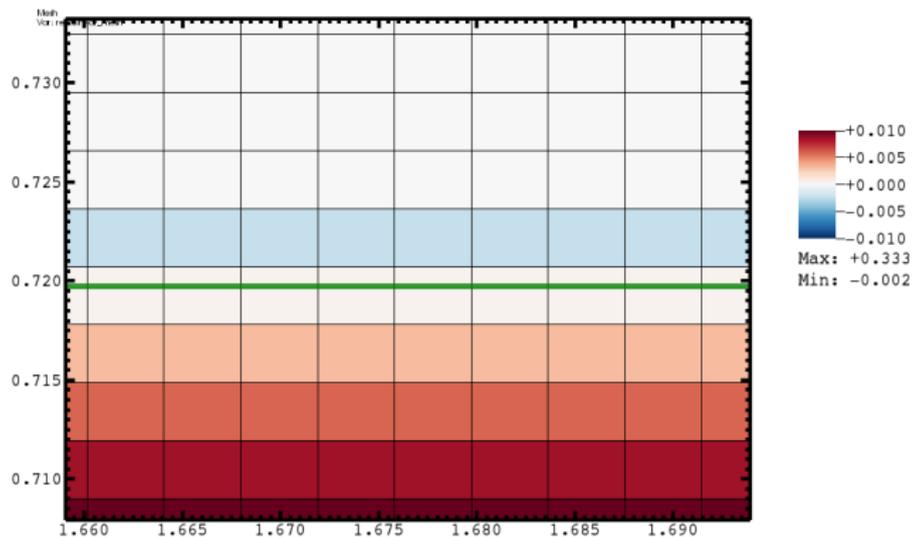
Illustration du champ stationnaire obtenu



- ▶ Composante horizontale de la vitesse.
- ▶ Frontière immergée en vert.

III. a. Écoulement de Poiseuille

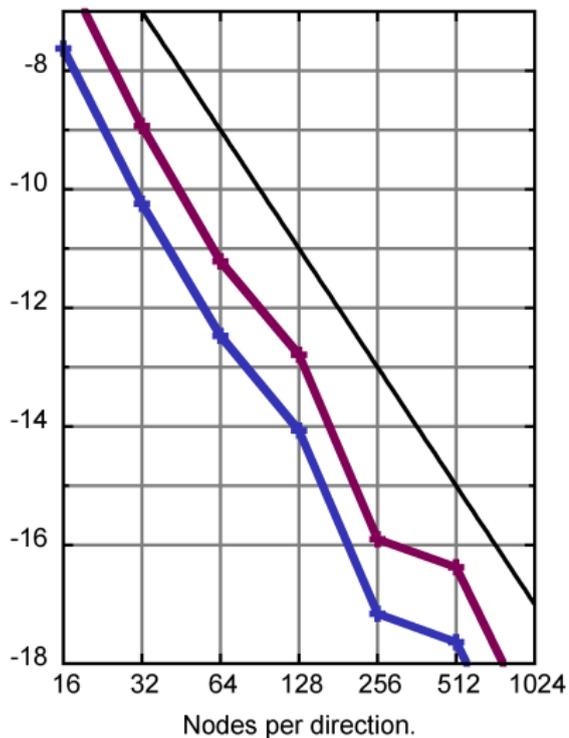
Illustration du champ stationnaire obtenu



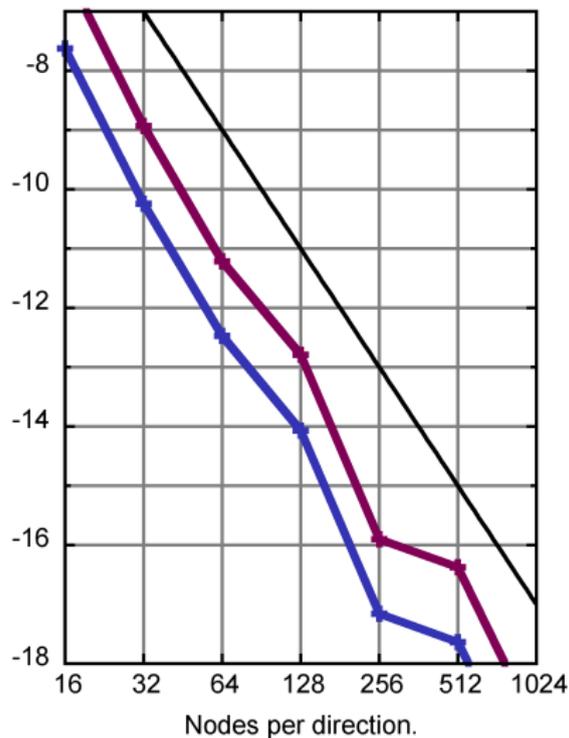
- ▶ Zoom au bord de la frontière.
- ▶ Les cellules fantômes ont été laissées pour illustration.

III. a. Écoulement de Poiseuille

Éq. de Stokes

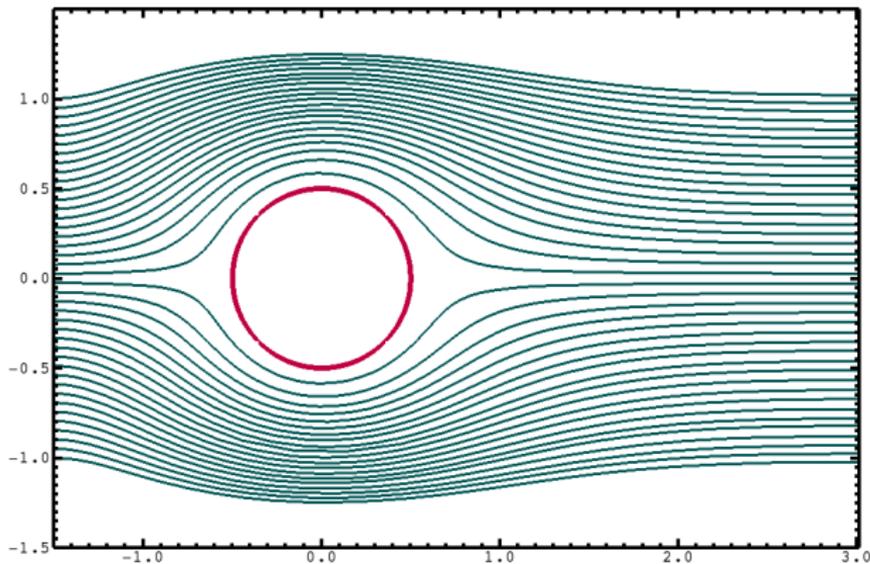


Éq. de Navier-Stokes



III. b. Écoulement autour du cylindre

Illustration du champ stationnaire obtenu

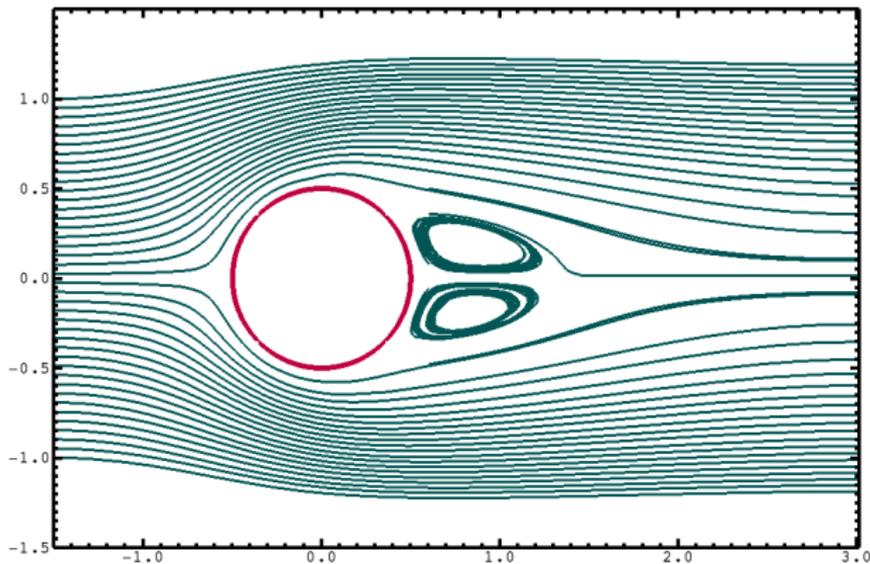


► $Re = 20$

► Équations de Stokes.

III. b. Écoulement autour du cylindre

Illustration du champ stationnaire obtenu

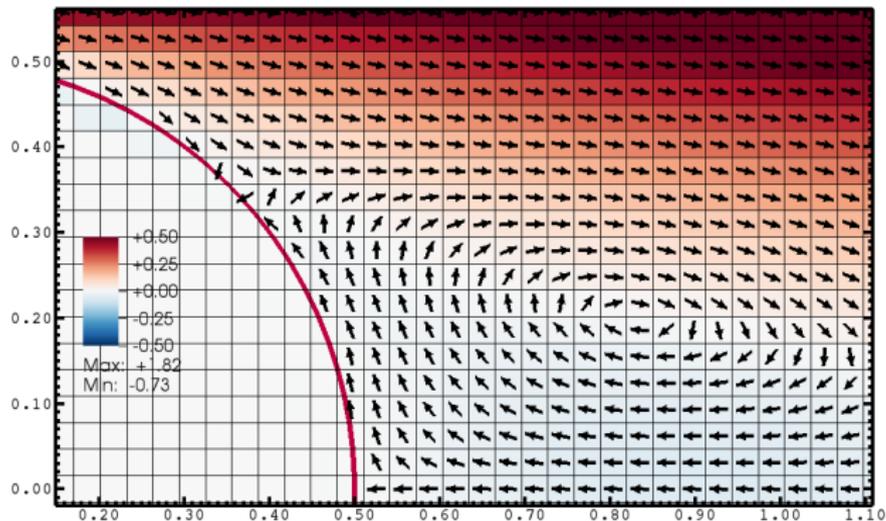


► $Re = 20$

► Équations de Navier-Stokes.

III. b. Écoulement autour du cylindre

Illustration du champ stationnaire obtenu



► $Re = 20$

- Vecteurs normalisés.
- Couleurs : composante horizontale de la vitesse.

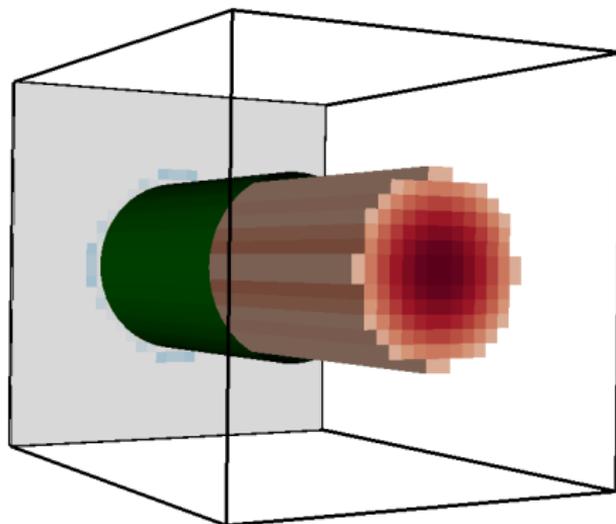
Conclusions

1. On a une méthode des frontières immergées dans Notus
 - ▶ qui fonctionne avec les équations de Navier-Stokes
 - ▶ qui est précise à l'ordre 2
 - ▶ qui est compacte
 - ▶ qui fonctionne sur des grilles anisotropes

2. Originalité des travaux
 - ▶ approche compacte sur grilles anisotropes
 - ▶ Résolution de Navier-Stokes avec un terme d'inertie semi-implicite

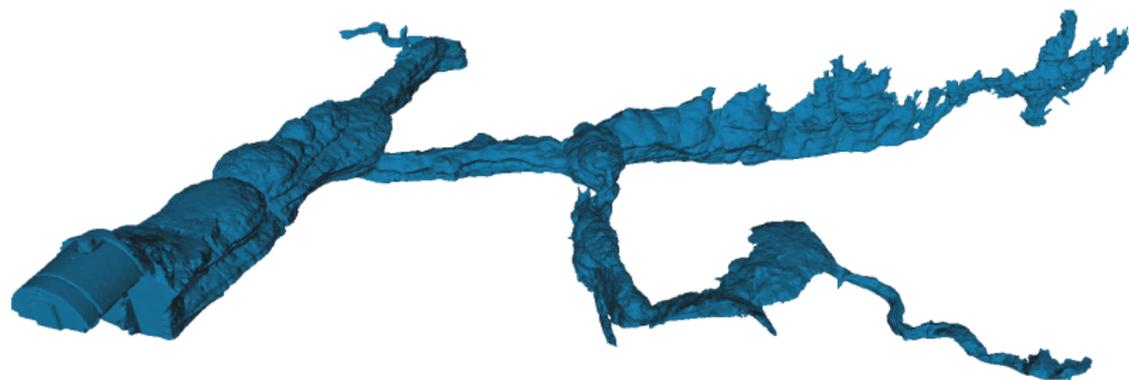
Perspectives

1. Calcul d'intégrales (travail en cours)
 - ▶ Garantir un volume d'intégration indépendant du maillage
2. Finaliser les simulations 3D (travail en cours)



Perspectives

3. Calculer des « levelset » pour des frontières quelconques
 - ▶ Simulation des grottes de Lascaux



Perspectives

4. Performances parallèles de la résolution de $\Delta + \mathcal{E}$
 - ▶ L'article (Coco & Russo, 2012) propose un algorithme
5. Diphasique
 - ▶ Couplage avec MOF.

