

Méthode de frontières immergées parallélisée

Joris Picot

Stéphane Glockner Thomas Milcent

Delphine Lacanette

GdT — TREFLE-MFN

notus
Computational Fluid Dynamics



19 mars 2015

Contexte — Objectifs

Simulation des écoulements d'air dans les grottes de Lascaux

- ▶ Équations de Navier-Stokes incompressible
- ▶ Géométrie complexe
- **Utilisation d'une méthode de frontières immergées (IBM)**
Avec un maillage cartésien
- ▶ Calculs très intensifs :

$$\Delta x = 30 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad 5 \times 10^6 \text{ points} \quad \rightarrow \quad 50 \text{ cœurs}$$

$$\Delta x = 5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad 1000 \times 10^6 \text{ points} \quad \rightarrow \quad 10\,000 \text{ cœurs}$$

en comptant 100 000 points par cœur

- **Algorithme massivement parallèle nécessaire**

État de l'art

Dans la littérature, on trouve des IBM :

- ▶ pour Navier-Stokes incompressible
- ▶ convergents au deuxième ordre
- ▶ pour des maillages régulier isotropes et des *octree*

Dans la littérature, on ne trouve pas ou trop peu d'IBM :

- ▶ appliqué à des solveurs parallèles, massivement parallèles
- ▶ sur des maillages anisotropes

En conséquence

- **On se base sur une méthode IBM existante [Mittal et al., 2008]**
- **Que l'on adapte aux solveurs parallèles et anisotropes**

Organisation du travail

1. Étude du parallélisme avec l'équation de Poisson 2D
 - ▶ Faisabilité?
 - ▶ Limites?
 - ▶ Quelles conditions limites?
2. Implémentation parallèle dans Notus
 - a. Pour l'équation de l'énergie 3D
 - b. Pour l'équation de Navier-Stokes 3D
3. Application aux grottes de Lascaux

Menu du jour

I. Éléments théoriques

- a. Contrainte du stencil de discrétisation
- b. Principe d'une méthode de frontières immergées

II. Méthode IBM de référence

- a. Extrapolation linéaire
- b. Défauts identifiés

III. Améliorations de la méthode IBM

- a. Extrapolation directe
- b. Décalage des points fantômes

Conclusions

I. Éléments théoriques

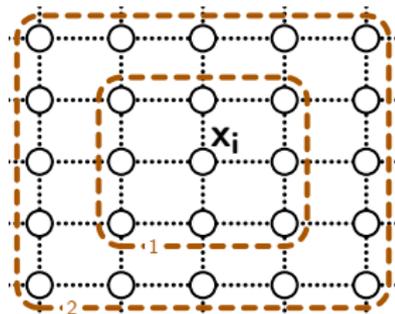
I. a. Contrainte du stencil de discrétisation

- ▶ Le problème est discrétisé en un système linéaire :

$$AU = F$$

- ▶ Le stencil de discrétisation est compact d'ordre c si :

$$|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|_\infty > c \Rightarrow A_{ij} = 0$$



A ne relie pas des points trop éloignés

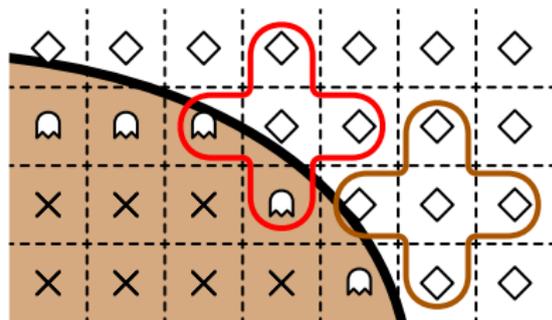
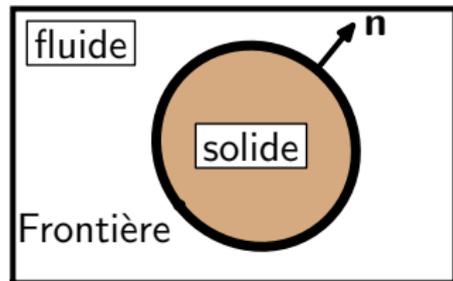
- ▶ Le domaine compact associé C^c (cf. figure ci-contre)

Performance des solveurs

- ▶ Préconditionneurs géométriques multigrilles : bonne scalabilité mais n'existent que pour des stencils compact d'ordre 1.
- **Le stencil de notre IBM doit idéalement être compact d'ordre 1**

I. b. Principe d'une IBM

- ▶ Domaine numérique séparé :
 - ▶ Domaine *fluide / solide*
- ▶ Équation de Poisson dans le fluide
 - ▶ $\Delta u = f$
- ▶ C. L. de Dirichlet *ET* de Neumann
 - ▶ Les deux seront utiles pour N.-S.
- ▶ Dans le stencil de Δu :
 - ▶ $U_{i\pm 1}$ peut ne pas être défini
 - C'est un **point fantôme**
- ▶ $U_{i\pm 1}$ est alors défini par *extrapolation du fluide*
 - ▶ Compatible avec les C. L.
 - **Convergent au 2e ordre**



II. Méthode IBM de référence

II. a. Extrapolation linéaire [Mittal *et al.*, 2008]

Utilisation de différences finies

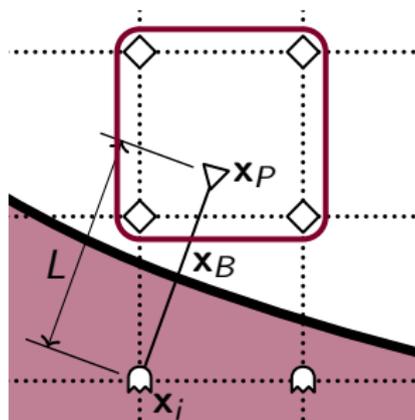
- ▶ Dirichlet : $\frac{U_i + u_P}{2} = u_B$
- ▶ Neumann : $\frac{u_P - U_i}{L} = \frac{\partial u_B}{\partial \mathbf{n}}$

Avec :

- ▶ $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_P$ déterminés par levelset en \mathbf{x}_i
- ▶ u_B et $\frac{\partial u_B}{\partial \mathbf{n}}$ donnés par C. L.
- ▶ u_P écrit sous forme d'une interpolation $u_P = \sum b_j U_j$
- **Équation pour le point i :**

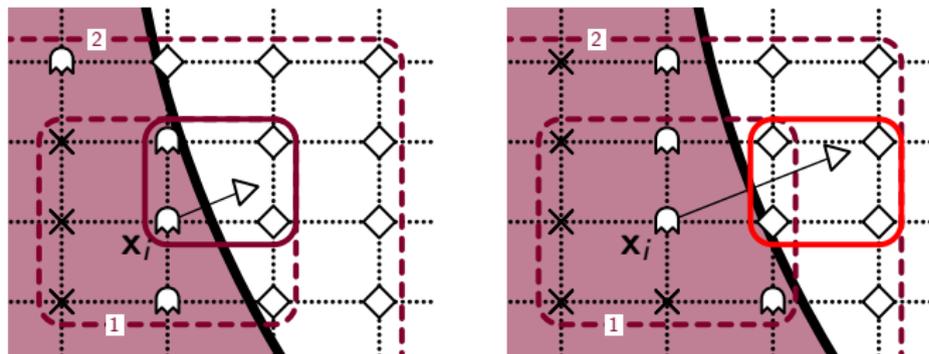
$$\frac{1}{2} U_i + \sum \frac{b_j}{2} U_j = u_b \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\sum \frac{b_j}{L} U_j - \frac{1}{L} U_i = \frac{\partial u_B}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{Neumann})$$



II. b. Défauts identifiés

1. Le stencil n'est pas compact d'ordre 1 :



Des points d'interpolation sortent du domaine C^1 quand x_P est loin de x_i .

II. b. Défauts identifiés

1. Le stencil n'est pas compact d'ordre 1
2. Le cas Neumann ne converge pas au 2e ordre

- ▶ Développements de Taylor :

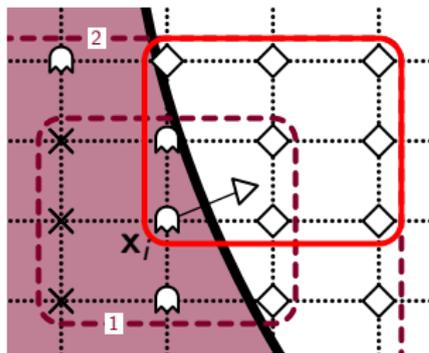
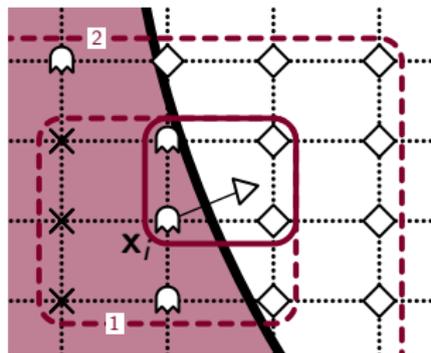
$$\frac{1}{2}U_i + \sum \frac{b_j}{2}U_j = u_b + \mathcal{O}(L^2) + \mathcal{O}(\Delta^p) \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\sum \frac{b_j}{L}U_j - \frac{1}{L}U_i = \frac{\partial u_B}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{O}(L^2) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta^p}{L}\right) \quad (\text{Neumann})$$

- ▶ L et Δ équivalents car $L < 2\Delta$
- ▶ Pour Dirichlet : $p \geq 2$
- ▶ Pour Neumann : $p \geq 3$

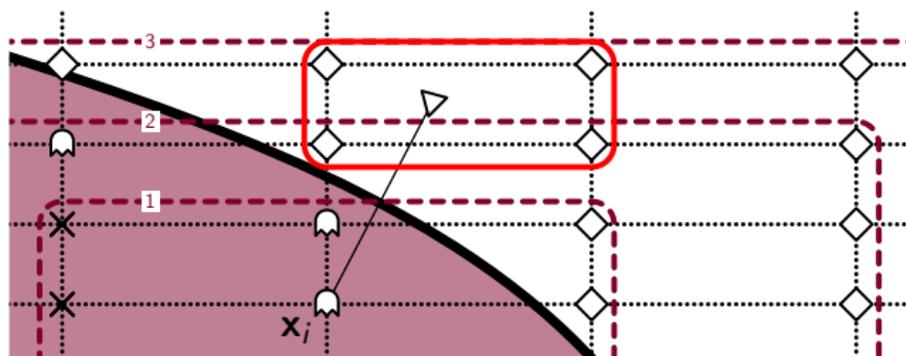
II. b. Défauts identifiés

1. Le stencil n'est pas compact d'ordre 1
2. Le cas Neumann ne converge pas au 2e ordre
 - ▶ Lorsque $p = 3$: aucune chance d'être compact d'ordre 1 :



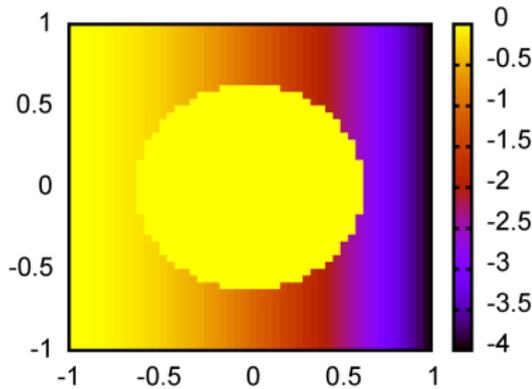
II. b. Défauts identifiés

1. Le stencil n'est pas compact d'ordre 1
2. Le cas Neumann ne converge pas au 2e ordre
3. L'anisotropie du maillage réduit la compacité
 - ▶ Dans le cas ci-dessous, x_P sort du domaine C^2

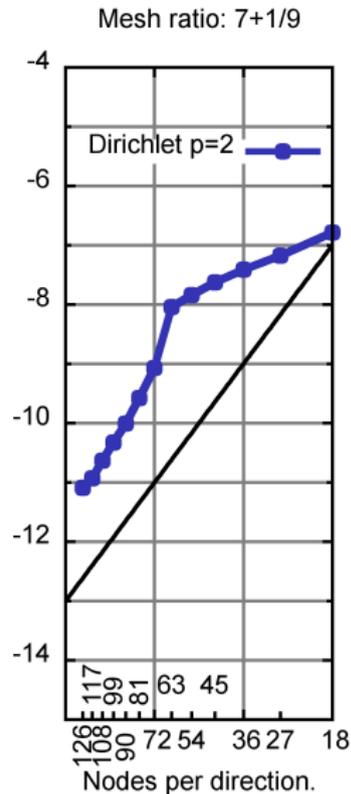
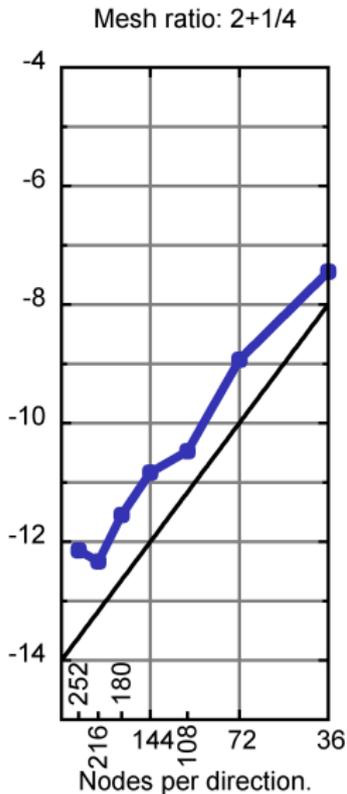
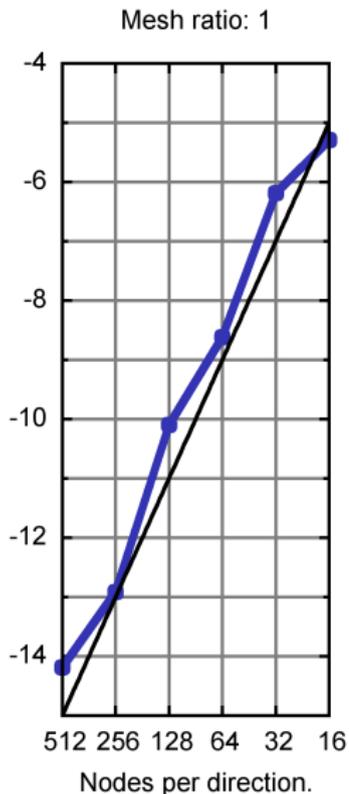


II. c. Exemple

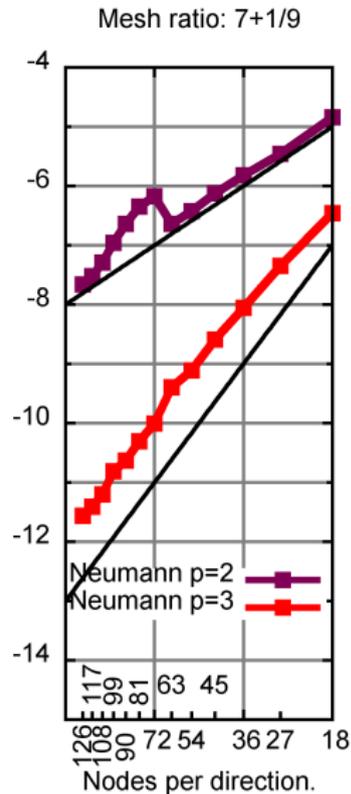
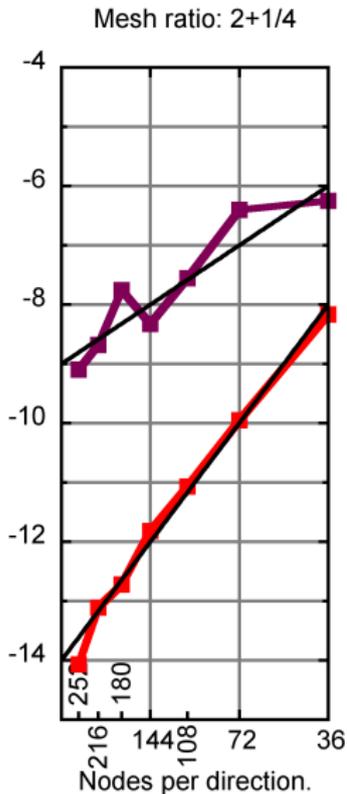
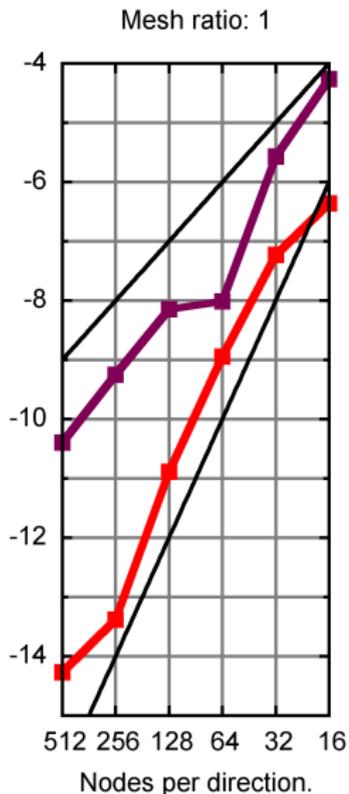
- ▶ Équation de Poisson 2D
- ▶ Interface sphérique $r = \frac{5}{8}$
- ▶ Solution parabolique
- ▶ Conditions de Dirichlet au bords du domain cartésien
- ▶ Comparaison solution exacte / solution numérique



II. c. Exemple



II. c. Exemple



III. Améliorations de la méthode IBM

III. a. Extrapolation directe [Coco & Russo., 2012]

Interpolation de u_B directement

- ▶ Dirichlet : $u_B = \sum b_j U_j$
- ▶ Neumann : $\frac{\partial u_B}{\partial \mathbf{n}} = \sum (\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{n}_j) U_j$

$$\text{avec } \partial_x u_B = \sum d_{xj} U_j$$
$$\partial_y u_B = \sum d_{yj} U_j$$

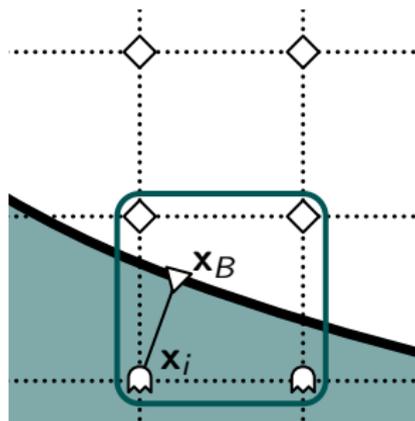
- ▶ Les points d'interpolation de u_B sont plus proches de \mathbf{x}_i que ceux de u_P

- **Cette méthode est compacte d'ordre 1**

- ▶ Dans le développement de Taylor, L n'existe plus

- **L'ordre n'est plus limité à 2**

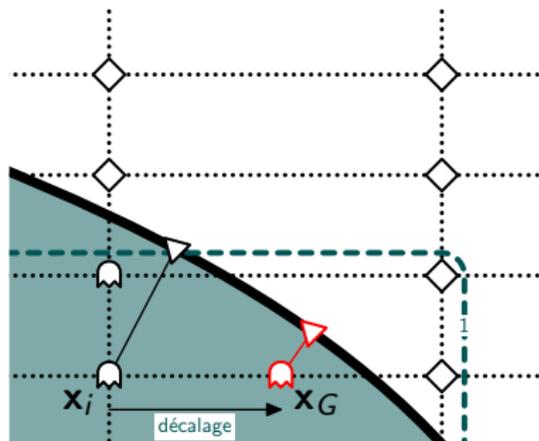
- **Pour les maillages isotropes seulement**



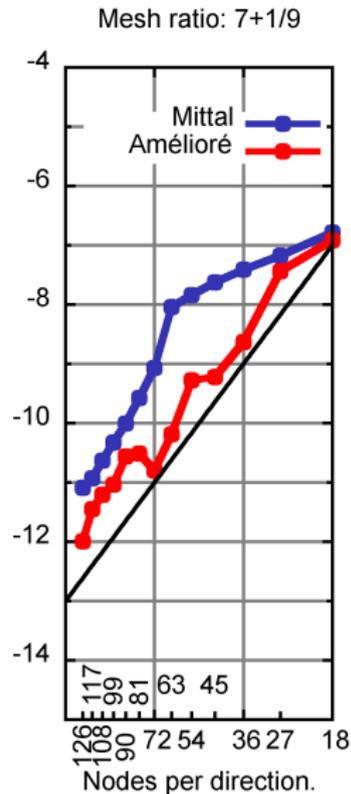
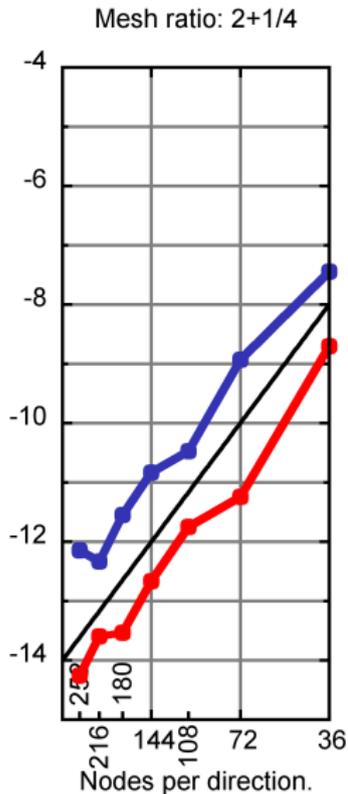
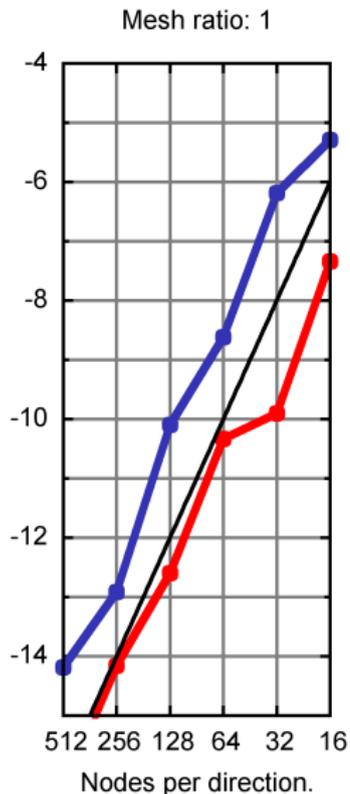
III. b. Décalage des points fantômes

Utilisation de \mathbf{x}_G au lieu de \mathbf{x}_i

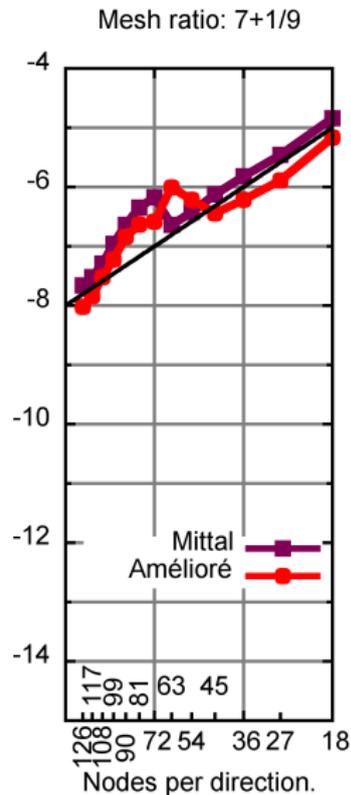
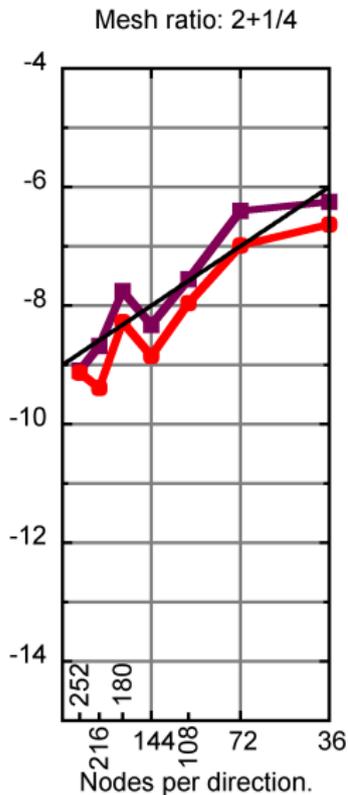
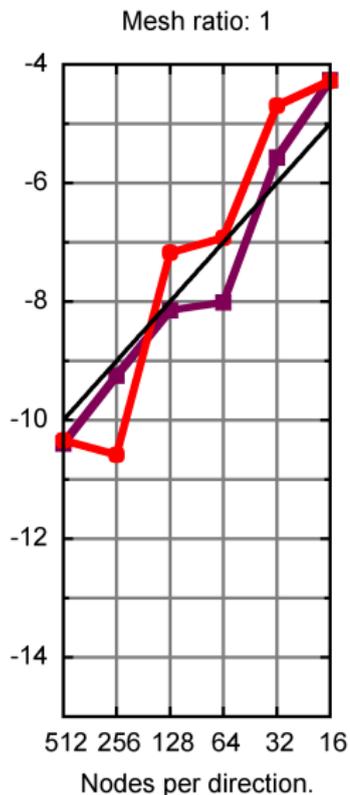
- ▶ Initialement en \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_G est décalé vers la frontière
- ▶ Le \mathbf{x}_B correspondant se rapproche de \mathbf{x}_G
- ▶ On peut montrer l'existence d'un \mathbf{x}_G tel que $\mathbf{x}_B \in C^1$
- ▶ Les extrapolations linéaire et directe s'expriment de la même manière
- ▶ $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_P$ déterminés par levelset en \mathbf{x}_G (hors maillage)
- **L'équation reste compacte d'ordre 1 quelque soit l'anisotropie**



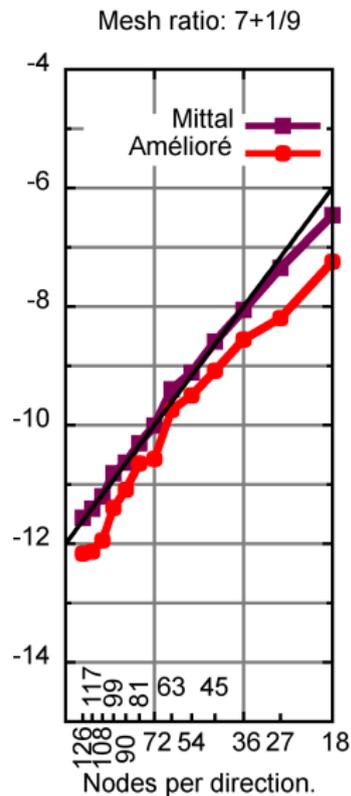
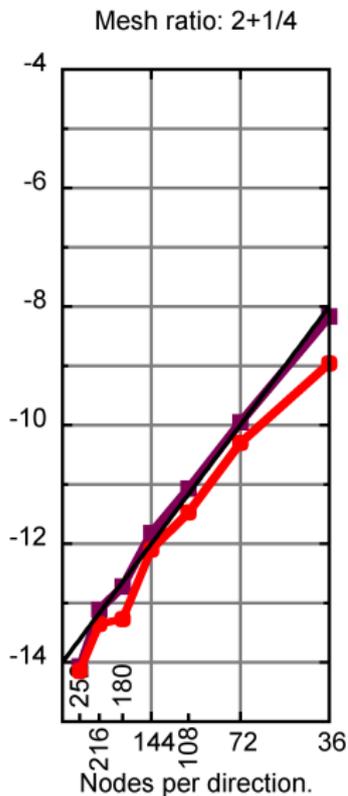
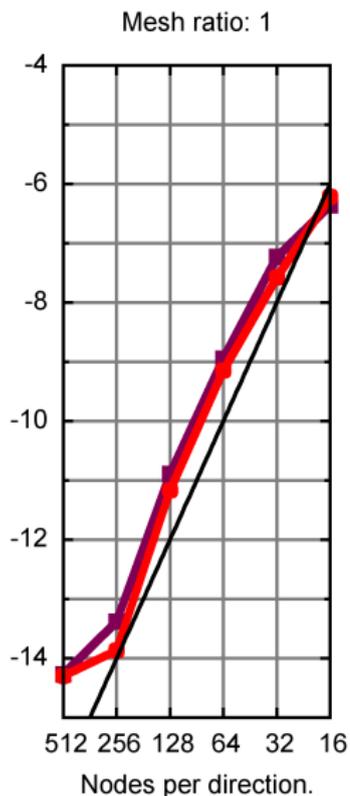
III. c. Exemple



III. c. Exemple



III. c. Exemple



Bilan — Conclusion

1. On a mis au point une IBM compacte d'ordre 1 :
 - ▶ convergente au 2e ordre pour des conditions de Dirichlet
 - ▶ convergente au 1e ordre pour des conditions de Neumann
2. On a également une IBM compacte d'ordre 2 :
 - ▶ convergente au 2e ordre pour des conditions de Neumann
3. Ces méthodes supportent les maillages anisotropes

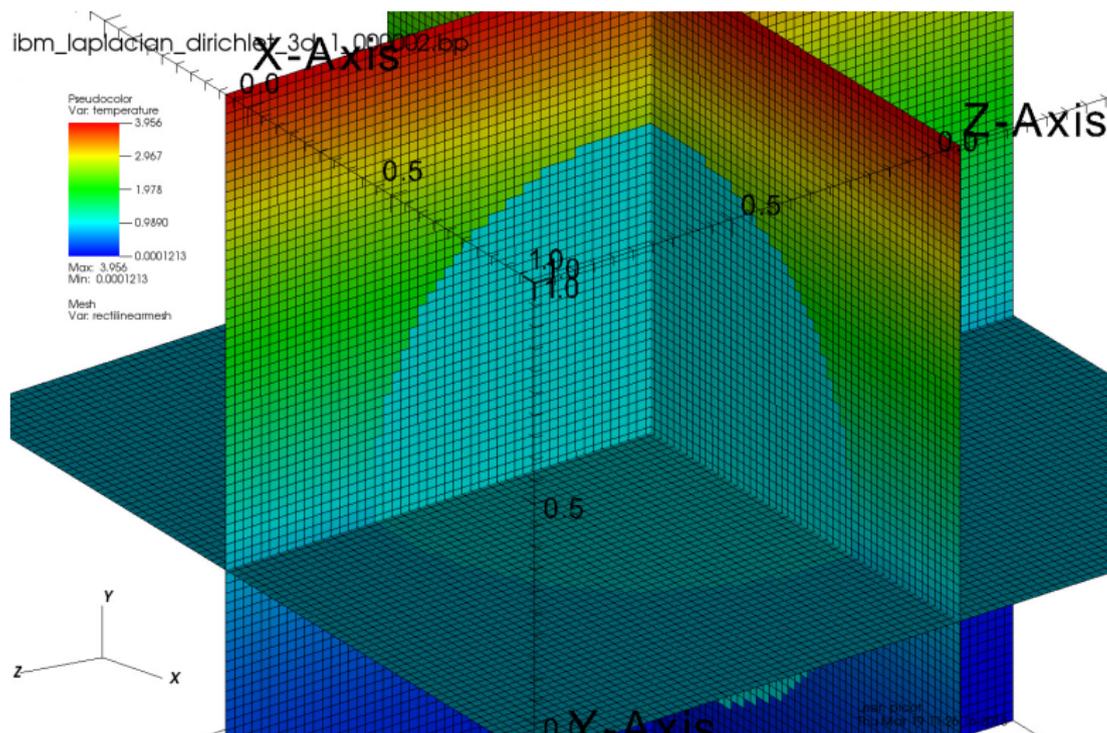
Implémentation parallèle et 3D dans Notus



1. Pour l'équation de l'énergie

- ▶ C'est codé pour les conditions de Dirichlet et Neumann
- ▶ Ça marche en 3D et en parallèle
- ▶ Validation en cours

Suite — Perspectives



- Résolution : 240^3 sur 27 processeurs

Implémentation parallèle et 3D dans Notus

1. Pour l'équation de l'énergie
 - ▶ C'est codé pour les conditions de Dirichlet et Neumann
 - ▶ Ça marche en 3D et en parallèle
 - ▶ Validation en cours

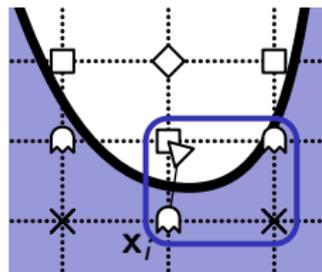
2. Pour l'équation de Navier-Stokes (semaines à venir)
 - ▶ Terme d'inertie explicite
 - ▶ Formellement une combinaison de cas de figures déjà rencontrés

Suite — Perspectives

Application aux grottes de Lascaux (vers l'été)

1. Cas des frontières creuses

- ▶ Il arrive que le point d'interpolation soit dans le solide
- ▶ Des solutions sont déjà prévues
- ▶ Mais aujourd'hui, priorité sur Navier-Stokes



2. Création du champ levelset adapté

- ▶ Calcul aux points du maillage
- ▶ Calcul aux points \mathbf{x}_G

Merci de votre attention

