to be entered

[SA3] entd

1682
2651
2653
→ 108
560

Please enter 2651-2653

A108

A682

A5817

A259689

A259690

A560

A259698 - A259707

Albert SADE

Sur les Chevauchements des Permutations

1949

—

CHEZ L'AUTEUR
14, Bd du Jardin Zoologique
MARSEILLE

Overlapping

SUR LES CHEVAUCHEMENTS DES PERMUTATIONS

INTRODUCTION

1\. — PROBLÈME DE LEMOINE. — De combien de manières peut-on replier sur un seul une bande de p timbre-poste ? (*E. Lucas, Théorie des nombres, 1891, p. 120*). Les numéros des timbres forment une permutation, appelée « planar » par *J. Becker* (lettre de *J. Touchard du 2-7-1949*).

2\. — DÉFINITIONS. — Deux éléments de même parité, a et b, d'une permutation des éléments 1, 2, 3,.... n, forment un *chevauchement* si, dans cette permutation, l'un des nombres a ou $a+1$, et celui-là seul, est placé entre b et $b+1$. On peut échanger a et b. Ex. 2 et 6 dans 3724615. Il y a 8 dispositions possibles des 4 éléments en chevauchement. Les « planars » sont les permutations sans chevauchement. Les autres peuvent présenter 1, 2, 3,... chevauchements. Le nombre de ceux-ci étant préservé dans toute permutation circulaire, on peut faire commencer toute permutation par 1; il en sera désormais ainsi.

$F(n, a) = Nb$ des permutations de degré n qui ont a chevauchements ;

$M_n = Nb$ maximum de chevauchements que puisse avoir une permutation de degré n.

Un *t-uple* est un choix de t chevauchements d'une même permutation. Une permutation avec a chevauchements possède C_a^t *t-uples*.

$G(n, t) = Nb$ des *t-uples* qui apparaissent dans la totalité des $(n-1)!$ permutations de n éléments. $G(n, 1) = g(n)$.

$S(n, p) = Nb$ total des chevauchements formés par l'élément 1 dans l'ensemble des permutations de degré n, où l'élément n occupe la $p^{\text{ième}}$ place après 1.

$$S_n = \sum_{p=1}^{n-1} S(n, p).$$

Les éléments e, $e+1$, $e+2$, $e+3, \ldots$, $e+k$, d'une permutation P forment une *suite montante de longueur k* s'ils sont rangés de gauche à droite dans P, avec intercalation possible d'autres éléments, et si $e+k+1$ n'est pas à droite de $e+k$, ni $e-1$ à gauche de e. En échangeant « droite » et « gauche » on a une suite descendante. Ex. : 176852943 offre 3 suites 123, 34567, 789, de longueurs 2, 4 et 2.

$[x]$ est le plus grand entier contenu dans x.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

I. — PERMUTATIONS SANS CHEVAUCHEMENTS

3\. — DEFINITIONS. — Dans cette 1re partie le mot « permutation » signifie « permutation sans chevauchement ».

$P_n = Nb$ des permutations de degré $n = F(n, o)$.

$Q(n, a) = Nb$ de celles dont la première suite a pour longueur a.

$T(n, a) =$ Idem, mais dont le deuxième élément n'est pas 2.

$R(n, s) = Nb$ des permutations qui ont s suites.

$Z(n) = \Sigma T(n, a)$ $(a = 2, 3, \ldots, n-1)$.

$H(m, t) = Q(m+2t, 2t)$, $J(m, t) = Q(m+2t+1, 2t+1)$.

$A(m, t) = T(m+2t+1, 2t+1)$ $B(m, t) = T(m+2t, 2t)$.

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = Nb$ des permutations dont les 1re, 2e, 3e, ... suites ont pour longueurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$U(n, q) = Nb$ des permutations de degré n, dont le 2e élément est q.

$V(n, i) = Nb$ des permutations de degré n, qui, par l'adjonction d'un $n+1^{\text{ème}}$ élément, fournissent i nouvelles permutations.

$L_n =$ Borne supérieur de P_n.

614927

4. — CONSTRUCTION DES PERMUTATIONS. — Soit une permutation P. En écrivant le $n+1^e$ élément, il y a un certain nombre, i, de places, pour lesquelles on obtient encore une permutation. Ex. 1243 fournit 2 permutations 12453. et 12543.

5. — ALBUMS. — On range ces permutations nouvelles dans l'ordre où elles se présentent quand on fait occuper à $n+1$ les i places convenables, de droite à gauche. Chaque album sert à dresser le suivant :

$n = 2$;	12.
$n = 3$;	123, 132.
$n = 4$;	1234, 1243, 1342, 1432

Deux permutations équidistantes des extrêmes sont inverses et ont la même valeur de i.

6. ~~8~~. — MAXIMUM DE i. — Il est évident que :

$$i \leqslant \left[\frac{n}{2} + 1\right] = r.$$

Les permutations qui en fournissent r dérivent de la permutation naturelle en insérant entre les éléments a et $a+1$ ($a \equiv n$, (mod. 2)), tous les suivants, transcrits, dans l'ordre inverse, puis en faisant subir l'opération analogue à la partie inversée... etc. Ex. : 123456789 devient 123498765, puis 123478965. On trouve :

$$V(n, r) = 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

car il n'y a que deux manières d'adjoindre deux éléments $n+1$ et $n+2$ en respectant la règle de symétrie ci-dessus.

A5817 ~~2651~~ '''

7. — TABLE DE $V(n, i)$. — Dans cette table, tirée des albums on a :

$$P_n = \Sigma V(n, i) = \Sigma i V(n-1, i) \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots r).$$

L_n is just a bound

A682

Δ-A259689

$n \diagdown i$	2	3	4	5	6	P_n	L_n
2	1					1	1
3	2					2	2
4	2	2				4	4
5	6	4				10	10
6	10	10	4			24	25
7	32	26	8			66	70
8	68	64	34	8		174	196
9	220	186	82	16		504	588
10	528	488	276	98	16	1406	1764
11	1722	1490	740	226	32	4210	5544
12						12196	17424

A259690

~~? related to Catalan mod~~

8. — BORNE SUPERIEURE DE P_n. — Chaque schéma de *Sainte-Laguë* (*Les Réseaux*; 1926, *p*. 39) est séparé en 2 parties par l'axe *A*. *Errera* (*Acad. R. Belg.* 11; 1931 ; *p*. 1-26, N^o 6) a déterminé le nombre $f(k)$ des 1/2 courbes distinctes $n = 2k$;

$$f(k) = \frac{1}{k+1} C_{2k}^{k}.$$

Toute disposition d'Errera, dans un 1/2 plan, ne se raccordant pas avec toute disposition dans l'autre, le produit :

$$L_{2k-1} = \frac{1}{k+1} C_{2k}^{k} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}.$$

est une borne supérieure de P_{2k-1}. Si $n = 2k+1$, on trouve.

$$P_n \leqslant L_{2k} = \left(\frac{1}{k+1} C_{2k}^{k}\right)^2$$

Les valeurs de L sont à droite, dans la table (7).

9. — ELEMENT QUI OCCUPE LA 2^e PLACE. — *Sainte-Laguë* a déjà observé

$$U(n, 2) = P_{n-1} ;$$

on a aussi :

$$U(n, 3) = P_{n-2}.$$

Pour $U(n, 4)$ il faut prendre les P_{n-3} permutations de degré $n-3$ et compter chacune d'elles autant de fois qu'elle fournit de permutations de $n-2$ éléments, d'où :

$$U(n, 4) = P_{n-2}.$$

10. — ECHELLE DE DERIVATION. — On tire de (9) :

$$P_n = P_{n-1} + 2P_{n-2} + aP_{n-3} + bP_{n-4} + \cdots + uP_1. \quad (n \geqslant 4).$$

En calculant $a, b, c \ldots u$, au moyen de la table (7), on trouve :

$$P_n = P_{n-1} + 2P_{n-2} + 2P_{n-3} + 2P_{n-4} + 10P_{n-5} + 12P_{n-6} + 66P_{n-7}$$
$$+ 94P_{n-8} + 504P_{n-9} + 826P_{n-10} + \ldots \quad (n \leqslant 12).$$

Quand q est impair le coefficient de P_{n-q} est $P_q = 1, 2, 10, 66, 504$. En supposant le 11^e coefficient égal à $P_{11} = 4210$, on conjecture :

$$P_{13} = 37370.$$

11. — NOMBRE DE SUITES. — On voit immédiatement que :

$$R(n, 1) = R(n, n-1) = 1.$$

Pour calculer $R(n, 2)$ soit $2h$ la longueur de la suite montante et

$$n = 2k + 1.$$

Le nombre correspondant de permutations est égal à celui des partitions de $k - h$, en h parts $\geqslant 0$, soit C_{k-1}^{h-1}. En intégrant :

$$\Sigma C_{k-1}^{h-1} = 2^{k-1} - 1 \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, k-1).$$

En ajoutant le nombre analogue relatif à la suite montante impaire :

$$R(2k+1, 2) = 2^k + 2^{k-1} - 2.$$

De même :

$$R(2k, 2) = 2\Sigma C_{k-1}^{h-1}, \qquad (h = 1, 2, \ldots k-1) = 2^k - 2.$$

On calcule aisément R par $\Delta R = 2^{\left[\frac{n}{2}-1\right]}$ (table 14).

12. — CALCUL DE $R(n, n-2)$. — Toutes les suites, sauf une, sont binomes. Si p est l'élément médian de la suite qui en contient 3, on trouve $p - 1$ solutions pour $p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ et $n - p$ solutions pour

$$p \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

En sommant depuis $p = 2$ jusqu'à $n - 1$.

$$R(n, n-2) = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] = M_{n+1} \qquad \text{(voir N° 36).}$$

On calcule R par $\Delta R = \left[\frac{n}{2}\right]$ (table 14).

13. — $R(n, 3)$. — $R(n, 3)$ se compose de 2 formules à 4 termes, dont le plus simple est :

$$\sum_{h=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{k-h-1} C_{h+i-1}^{i} C_{k-h}^{i}$$

les autres étant pratiquement inabordables.

14. — TABLE DE $R(n, s)$. — On trouve, d'après (11 à 13) et les albums

new

A259698

$n \diagdown s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma s R$.
2	1									1
3	1	1								3
4	1	2	1							8
5	1	4	4	1						25 22 ?
6	1	6	10	6	1					72
7	1	10	23	22	9	1				229
8	1	14	44	61	41	12	1			689
9	1	22	88	158	147	71	16	1		2 222
10	1	30	151	353	436	300	114	20	1	6 873

2652

A259699
A259700

15. — LONGUEUR DE LA PREMIÈRE SUITE. — Soit une permutation de

degré [illegible]nt la première suite a pour longueur a. Supprimons l'élément 1 et diminuons les autres d'une unité. Si aucun élément de la première permutation n'est situé entre 1 et 2 on obtient une permutation de $n-1$ éléments dont la première suite a pour longueur $a-1$. La réciproque est vraie. Mais si la première permutation n'a pas 2 pour deuxième élément, la suppression du premier élément fera naître une permutation qui ne commencera pas par 1. Le nombre de ces permutations est $T(n, a)$, d'où :

$$Q(n, a) = Q(n-1, a-1) + T(n, a).$$

16. — CONSÉQUENCES. — On déduit de (3) et (15) :

$$A = J - H\,; \qquad B(t) = H(t) - J(t-1);$$
$$A + B = \Delta J\,; \qquad A(t-1) + B(t) = \Delta E(t).$$

Si l'on écrit C^t pour C^t_{t+l-1}, et si A, B, H, J, sont mis sous la forme de polynomes en C, on aura :

$$J = (A + B)C,$$

le produit symbolique $C^t C$ signifiant C^{t+1}.

17. — SUITES DE LONGUEUR DONNÉE. — Si l'on pose $\left[\frac{a_i}{2}\right] = t_i$, on trouve que (a_1, a_2) est le nombre des partitions de t_2+1 en t_1+1 parts ≥ 0, soit :

$$(a_1, a_2) = C^{t_1}_{t_1+t_2+1}$$

S'il y a 3 suites, il faut distinguer suivant les parités de a_2 et a_3 : On trouve pour (a_1, a_2, a_3) :

$$C^{t_1}_{t_1+t_2+1} \quad C^{t_2+1}_{t_2+t_3+2} \qquad \text{si } a_2 \text{ est pair.}$$

$$\sum_{s=0}^{t_2} C^{t_1}_{t_1+t_2+t_3+1-s} \; C^{t_3}_{t_3+s} \qquad \text{si } a_2 \text{ est impair et } a_3 \text{ impair,}$$

$$\sum_{s=0}^{t_2} C^{t_1}_{t_1+t_2+t_3+2-s} \; C^{t_3}_{t_3+s} \qquad \text{si } a_2 \text{ est impair et } a_3 \text{ pair.}$$

S'il y a 4 suites, on trouve :

$$(a_1,\ 2t_2+1,\ 2t_3+1,\ 2t_4+1) = C^{t_2+1}_{t_2+t_3+2} \sum_{h=1}^{t_1+1} C^{t_2}_{t_2+h-1} \; C^{t_1+1}_{t_1+t_3+t_4+3-h}.$$

18. — On dresse ainsi le tableau des valeurs de $(a_1, a_2, \ldots)$ en fonction de $t_1 = t$; voici quelques exemples :

$$(2t, 1, 2, 2, 2) \quad = C^2 + 2C^3 + C^4,$$
$$(2t, 3, 1, 1, 1, 1) = C + C^2,$$
$$(2t, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, k, 1) = \left[\frac{k}{2} + 1\right]t, \qquad (k \geq 1)$$
$$(2t, 1, 2k+1) = C^{k+1}_{t+k} \qquad (k \geq 0).$$

19. — Comme il suffit de connaître A et B, on se restreint aux permutations dont le deuxième élément n'est pas 2. On trouve par exemple :

pour $(2t, 2, 1, 1, 2, 1)$ .... $2C + 2C^2$,

pour $(2t, 4, 1, 2)$ .... C^2, etc.

20. — On obtient ainsi :

$A(1, t) = 0,$	$B(1, t) = 1,$
$A_2 \quad = 0,$	$B_2 \quad = 2,$
$A_3 \quad = 0,$	$B_3 \quad = 3 + 2C,$
$A_4 \quad = C,$	$B_4 \quad = 7 + 5C,$
$A_5 \quad = 2C,$	$B_5 \quad = 15 + 14C + 4C^2,$
$A_6 \quad = 6C + 5C^2$	$B_6 \quad = 41 + 34C + 12C^2,$
$A_7 \quad = 15C + 11C^2,$	$B_7 \quad = 101 + 95C + 48C^2 + 8C^3.$

21. — On en déduit H et J par les formules (16). Exemple :

$$J_7 = (A_7 + B_7)C = 101C + 110C^2 + 59C^3 + 8C^4,$$

d'où $\qquad H_7 = J_7 - A_7 = 86C + 99C^2 + 59C^3 + 8C^4.$

22. — On trouve alors :

$$Q(p, p) = 1, \qquad Q(p, 2) = \frac{1}{2} P_n,$$
$$Q(p+1, p) = \left[\frac{p}{2}\right], \qquad Q(p+2, p) = 2\left[\frac{p}{2}\right],$$
$$Q(p+3, p) = \left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{p}{2} + 4\right],$$
$$Q(p+4, p) = 3\left[\frac{p}{2}\right]\left[\frac{p}{2} + 3\right] + \left[\frac{p-1}{2}\right] \cos^2 \frac{p+1}{2}\pi \text{ ; etc.}$$

23. — TABLE DE T (n, a).

A560 new

259701

$n \diagdown a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Z(n)
2	0											0
3	1	0										0
4	2	0	0									0
5	5	0	1	0								1
6	12	0	2	0	0							2
7	33	1	7	0	1	0						9
8	87	2	17	0	2	0	0					21
9	252	11	55	2	9	0	1	0				78
10	703	26	145	4	22	0	2	0	0			199
11	2105	109	467	27	81	3	11	0	1	0		699
12	× 6098	280	1295	63	215	6	27	0	2	0	0	1888

[illegible]

259702

unfortunately wrong?

24. — TABLE DE Q (n, a).

259703

$n \diagdown a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	P_n
2	1											1
3	1	1										2
4	2	1	1									4
5	5	2	2	1								10
6	12	5	4	2	1							24
7	33	13	12	4	3	1						66
8	87	35	30	12	6	3	1					174
9	252	98	90	32	21	6	4	1				504
10	703	278	243	94	54	21	8	4	1			1 406
11	2105	812	745	270	175	57	32	8	3	1		4 210
12	× 6098	2385	2107	808	485	181	84	32	10	5	1	12 196 ×

[illegible]

A682 again

25. — RELATION en sommant l'égalité (15), on a :

$$\Sigma Q(n, a) = \Sigma Q(n-1, a-1) + \Sigma T(n, a) \qquad (a = 2, 3, \ldots, n-1)$$

ou

$$\frac{1}{2} P_n = P_{n-1} + Z(n)$$

ce qui donne par itération :

$$P_n = 2^{n-2} + \Sigma Z(n-p+1) 2^p, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

CONJECTURES. — L_{n+1} tend vers $4L_n$ pour n infini ; donc le quotient de 2 valeurs consécutives de P_n est compris entre 2 et 4. Il tend vers une valeur voisine de 3 (peut-être Π). On peut supposer que

$$P_n \sim a L_n \left(\frac{\Pi}{4}\right)^n, \qquad n \to \infty, \qquad a = \text{Cte}.$$

II. — PERMUTATIONS AVEC CHEVAUCHEMENTS.

27. — CRIBLE. — Dorénavant, le mot « permutation » reprend son sens général. Par le principe d'inclusion et exclusion, on a :

$$P_n = (n-1)! - G(n, 1) + G(n, 2) - G(n, 3) + \ldots$$

28. — CALCUL DE $G(n, 1)$ ET DE $S(n, p)$. — Supposant d'abord n pair, on trouve

$$S(n, p) = S_{n-1} + (n-4)!\,(C^2_{n-p-1} + C^2_{p-1})$$

d'où $$S(n, n-p) = S(n, p).$$

29. — En sommant :

$$S_n = \sum^{n-1} S(n, p) = (n-1)S_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)!$$

30. — CAS OÙ n EST IMPAIR. — Alors 1 et $n-1$ ne sont pas de même parité et ne peuvent chevaucher ; donc

$$S(2k+1, p) = S_{2k}.$$

Finalement on a

$$S_{2k+1} = 2k\, S(2k+1, p) = 2k S_{2k}.$$

31. — En remplaçant k par $k+1$, $k+2$, ... et faisant $k = 2$, on a :

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\frac{n}{2} - 1\right](n-1)!$$

$$S(2t, p) = \frac{1}{3}(t-2)(2t-1)! + (2t-4)!\,(C^{2t}_{2t-p-1} + C^{2}_{p-1})$$

259705

~~259706~~

d'où la table :

32. — TABLE DE $S(n, p)$ ET DE S_n.

259704

$n \diagdown p$	1	2	3	4	5	6	7	8	S_n
2	0	0							0
3	0	0	0						0
4	1	0	1						2
5	2	2	2	2					8
6	20	14	12	14	20				80
7	80	80	80	80	80	80			480
8	840	720	648	624	648	720	840		5 040
9	5040	5040	5040	5040	5040	5040	5040	5040	40 320

33. — Une permutation, son inverse et sa complémentaire ont le même nombre de chevauchements.

34. — ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES DE $g(n)$. — Le nombre des chevauchements présenté par $n-1$ dans l'ensemble des permutations où n occupe sa k^e place est égal au nombre des chevauchements formés par 1 dans l'ensemble des permutations (commençant par 1) où n est à la $n-k^e$ place, c'est-à-dire $S(n, n-k)$, ou encore (28) $S(n, k)$; donc :

$$g(n) = (n-1)g(n-1) + \Sigma S(n, k) = (n-1)g(n-1) + S_n.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

puisque chaque permutation de degré $n-1$ en fournit $n-1$ de degré n.

Finalement (31) :

$$g(n) = (n-1)!\,g(n-1) + \frac{1}{3}\left[\frac{n}{2} - 1\right](n-1)!$$

35. — INTEGRATION DE $g(n)$. — On remplace successivement n par $n+1$, $n+2$, ..., $n+p$, on multiplie par les facultés convenables et on rouve en ajoutant :

$$g(n+p+1) = (n-1)n(n+1) \ldots (n+p)g(n-1) + \frac{1}{3}(n+p)!$$
$$\left\{\left[\frac{n-2}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \ldots\ldots + \left[\frac{n+p-1}{2}\right]\right\}$$

et enfin, en faisant $n = 2$ et $g(1) = 0$:

$$g(p) = \frac{1}{3}\,\Sigma\left[\frac{t}{2}\right](p-1)! = \frac{1}{3}\left[\frac{p-1}{2}\right]\left[\frac{p-2}{2}\right](p-1)!$$

36. — CALCUL DE M_n. — L'élément 1 peut présenter un chevauchement avec tout élément impair inférieur à n, soit $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ chevauchements. L'élément 2 peut en présenter $\left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$. L'élément 3 $\left[\frac{n}{2}\right] - 2$. L'élément 4, $\left[\frac{n-1}{2}\right] - 2$. Etc. Le nombre total des chevauchements est donc au maximum :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \left[\frac{2}{n}\right] - 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$$
$$= \left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] = M_n.$$

Pour que ces chevauchements existent il faut et il suffit que les éléments soient rangés dans l'ordre :

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2k \pm 1, 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots 2k.$$

ou dans l'ordre inverse. On reconnait le fait pour les premières valeurs de k et on le généralise par induction complète.

Chaque permutation est aussi complémentaire de l'autre, ce qui pourrait servir à les déterminer. On a $F(n, M_n) = 2$.

37. — THEOREME. — On a donc (35) :

$$g(n) = \frac{1}{3} M_n (n-1)!$$

Le nombre moyen des chevauchements est le tiers de leur nombre maximum.

38. — CALCUL DE $F(n, M_n - 1)$. — On vérifie pour $n = 5, 6 \ldots$ que

$$F(n, M_n - 1) = 12.$$

Ces permutations proviennent, 1° des permutations de $(n-1)$ éléments avec M_{n-1} chevauchements, prolongées de façon que l'élément n offre $M_n - M_{n-1} - 1$ chevauchements, ; 2° des permutations de $n-1$ éléments avec $M_{n-1} - 1$ chevauchements, prolongées de manière que l'élément n présente $M_n - M_{n-1}$ chevauchements.

39. — On découvre que les 12 permutations ont des formes générales se reproduisant par la transformation ci-dessus. Ce sont, pour $n = 2k$:

$D_1 = 1, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k-2, 2k, 3.$

$D_2 = 1, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k-1, 4, 2, 6, 8, \ldots, 2k-2, 2k, 3.$

$D_3 = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-5, 2k-1, 2k-3, 2, 4, 6, \ldots 2k-4, 2k, 2k-2.$

$D_4 = 1, 2k, 3, 5, 7, \ldots, 2k-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k-4, 2k-2.$

$D_5 = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k-4, 2k, 2k-2.$

$D_6 = 1, 2k, 3, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2, 2k-1, 4, 6, 8, \ldots, 2k-4, 2k-2.$ et les 6 inverses. Pour $n = 2k+1$:

$E_1 = 1, 5, 7, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k, 3.$

$E_2 = 1, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k-1, 2k+1, 4, 2, 6, 8, \ldots, 2k, 3.$

$E_3 = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k+1, 2k-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k-4, 2k, 2k-2.$

$E_4 = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-1, 2, 2k+1, 4, 6, 8, \ldots, 2k-2, 2k.$

$E_5 = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-3, 2k+1, 2k-1, 2, 4, 6, \ldots, 2k.$

$E_6 = 1, 2k, 3, 5, 7, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2, 4, 6, 8, \ldots 2k-2, 2k-2$ et les 6 inverses. Donc, à partir de $n = 5$, on a toujours :

$$F(n, M_n - 1) = 12.$$

Le mécanisme de reproduction est le suivant :

$$n = 2k + \left\{\begin{array}{c|cccccccccc} 0 & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & & & & \\ 1 & E_1 & E_2 & & & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & & \\ 2 & D_1 & D_2 & & & & & D_3 & D_4 & D_5 & D_6. \end{array}\right.$$

40. — CALCUL DE $F(n, M_n - 2)$ — On arrive encore à des formes générales comme :

$D^{10}_{2k+2p} = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k + 2p - 1, 2, 4, 6, 8, \ldots$
$\ldots 2k - 4, 2k, 2k - 2, 2k + 2, 2k + 4, \ldots 2k + 2p.$

$D^{10}_{2k+2p+1} = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2k + 3, 2k + 5, \ldots 2k + 2p + 1, 2, 4, 6, 8,$
$\ldots, 2k - 4, 2k, 2k - 2, 2k + 2, \ldots 2k + 2p.$

qui se perpétuent indéfiniment. D'autres donnent deux solutions en passant de n à $n+1$, une en passant de $n+1$ à $n+2$, et 0 ensuite, comme par exemple E_2 (49) etc. Le tableau suivant rend compte des accroissements successifs de $\frac{1}{2}$ F.

$n =$	7	8	9	10	11
	12				
	14	14			
	9	9	9	9	9 ..
		2			
		9	9		
		3	3	3	3 ...
			1		
			11	11	
			2	2	2 ...

41. — On en déduit :

$$\frac{1}{2}\mathrm{F}(2k+1) - \frac{1}{2}\mathrm{F}(2k) = 1 + 11 + 2 - (2 + 11) = 1,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{F}(2k) - \frac{1}{2}\mathrm{F}(2k-1) = 2 + 9 + 3 - (1 + 9) = 4,$$

$\mathrm{F}(n, \mathrm{M}_n - 2$ est donné par la table suivante, où la formule est valable à partir de $n = 9$:

$$n = 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \ldots\ldots\ldots \quad n$$

$$\mathrm{F} = 0,\ 10,\ 34,\ 70,\ 74,\ 70,\ 78,\ 80,\ \ldots,\ 10\left[\frac{n}{2} + 3\right] - 2\cos^2\frac{n\Pi}{2}.$$

42. — TABLE DE $\mathrm{F}(n, a)$. — La dernière colonne contient $g(n) = \Sigma a\mathrm{F}(n, a)$. On y vérifie les résultats (35), (38), (41).

~~A259706~~ A259707

259706

$n \diagdown a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$g(n)$
2	1										0
3	2										0
4	4	2									2
5	10	12	2								16
6	24	48	34	12	2						160
7	66	196	230	144	70	12	2				1440
8	174	684	1178	1218	930	534	234	74	12	2	15120

43. — SUITES. — *Théorème.* — *Si l'on considère l'ensemble des permutations des éléments* 1, 2, 3, ..., n *avec* a *chevauchements, le nombre de celles qui ont un nombre pair de suites est égal au nombre de celles qui en possèdent un nombre impair*. Car une permutation a toujours une suite de plus ou de moins, que son inverse.

44. — Si l'on remplace une permutation par sa conjuguée, les suites de l'une reviennent les séquences de l'autre. Le théorème (43) est corrélatif de celui de *D André* (*CR. Paris* 97, 1883 : *p.* 1356) ; mais il est indépendant de la valeur de a, tandis que celui de M. André ne s'applique qu'à l'ensemble entier des permutations.

45 — INVERSIONS. — Si deux permutations inverses ont a chevauchements elles ont i et $C_2^{n-1} - i$ inversions. Donc

Si $n \equiv 0$ *ou* 3 (*mod.* 4), *le nombre des permutations avec* a *chevauchements qui ont un nombre pair d'inversions est égal au nombre de celles qui en possèdent un nombre impair*.

Quand $n = 4k + 2$, *les permutations de degré* n *avec* a *chevauchements dans lesquelles l'élément* n *occupe une place de rang impair, se répartissent en 2 classes d'égal effectif, suivant qu'elles ont un nombre pair ou impair d'inversions*.

Ces deux propositions généralisent le théorème connu.

Albert SADE.

Pertuis, juillet 1949.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet.