[ZMP 15 361– 1870] ns

2482
108
311
1147

XV.

Vier combinatorische Probleme.

Von

Ernst Schröder

in Pforzheim.

I und II.

Bei meiner Beschäftigung mit Abfassung eines elementaren Lehrbuches wurde mir die Frage von Interesse: **auf wie viele Arten eine Summe von n Gliedern** (oder auch ein Product von n Factoren) **sich eigentlich schreiben lasse?** Die beiden Fundamentaleigenschaften der Addition, welche auch der Multiplication zukommen, sind bekanntlich: das **Commutationsgesetz**, welches für den einfachsten Fall durch die Formel ausgedrückt wird:

$$a + b = b + a,$$

und allgemein gefasst aussagt, dass die Reihenfolge oder **Anordnung** der Glieder beliebig ist; ferner das **Associationsgesetz**, welches im einfachsten Falle durch die Formel dargestellt wird:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

und überhaupt aussagt, dass die **Gruppirung** der Glieder, ihre Zusammenfassung oder Einschliessung mittels Klammern ebenfalls beliebig ist. Wie viele Darstellungen einer Summe sich durch verschiedene Anordnung der Glieder ergeben, ist nun längst untersucht, und führte (bei durchweg verschiedenen Gliedern) auf die bekannte Permutationszahl

$$1.2.3 \ldots n = n!;$$

hingegen habe ich nirgends die entsprechende Aufgabe behandelt gefunden, zu untersuchen, wieviel verschiedene Darstellungen einer Summe sich dadurch ergeben, dass man die Glieder jedesmal in anderer Weise durch Parenthesen verbindet, ohne übrigens die Reihenfolge derselben zu ändern. Dieses letztere Problem soll nun gelöst werden. Alle möglichen Darstellungen der n-gliedrigen Summe überhaupt erhält man, wenn die auf alle Arten gruppirten Glieder noch sämmtlich permutirt werden, und findet sich

361

ihre Anzahl, indem man die von uns gesuchte Anzahl der möglichen Gruppirungen mit der Anzahl $n!$ der Anordnungen multiplicirt.

Es liegt jedoch nahe, die Aufgabe auf zweierlei Arten zu verstehen. Erstens kann man nämlich verlangen, dass eine Summe aus mehreren Zahlen durch fortschreitende (additive) Verknüpfung von immer nur zwei Zahlen ausgerechnet werde, so etwa, wie dies z. B. bei einem Producte von n Factoren nothwendig geschehen muss, oder man kann auch zweitens das gleichzeitige Addiren mehrerer Zahlen als eine neue, von der ebenerwähnten verschiedene Operation zulassen. Es bieten sich also zwei Probleme, welche ich der Kürze halber zusammen behandeln und durch die Chiffren I und II unterscheiden will. Bei dem ersten Problem muss jede Darstellung der n-gliedrigen Summe volle $n-2$ Parenthesen enthalten; bei dem zweiten Problem dürfen von diesen Parenthesen noch beliebig viele in Wegfall kommen. In beiden Fällen bezeichne ich mit α_n die gesuchte Anzahl der möglichen Gruppirungen oder Associationen der n in bestimmter Ordnung aufeinanderfolgenden Glieder.

Es ist dann

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha^2{}_1 = 1,$$

ferner

ad I. $\alpha_3 = 2\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4 = 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3$ etc.,

ad II. $\alpha_3 = \alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1^4 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2$ etc.,

und man findet, dass allgemein die Recursion besteht:

$$1) \quad \begin{cases} \text{I.} & \alpha_{n+1} = \sum\limits_{a=1}^{a=n} \alpha_a \alpha_{n+1-a}, \\ \text{II.} & \alpha_{n+1} = \mathbf{S}\dfrac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)!}{a_1!\,a_2!\ldots a_n!}\,\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}\ldots\alpha_n^{a_n}, \end{cases}$$

wo die Summe S sich erstreckt über alle positiven ganzzahligen Wurzeln (incl. 0) der Gleichung:

$$2) \qquad 1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \ldots + n.a_n = n+1.$$

Die Gleichung 1) II. gilt auch für den ersten Fall, wenn man noch die Forderung

$$3) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2$$

hinzunimmt, indem sich alsdann die Gleichung 1) I. in etwas anderer Darstellung ergiebt.

Um diese Recursionen zunächst einzusehen, bedenke man ad I, dass die $n+1$-gliedrige Summe jedenfalls in letzter Instanz durch Zusammenfassung der Glieder zu einer zweigliedrigen gemacht sein muss; dies kann aber nur geschehen durch Zusammenfassung der a-ersten, desgleichen der $n+1-a$-letzten Glieder, wo $a=1, 2 \ldots n$ ist. Die erste Gliedergruppe lässt sich aber laut Definition der α auf α_a, die zweite auf α_{n+1-a} Arten durch verschiedenartige Association ihres Inhalts in Untergruppen eintheilen, also die beiden Gliedergruppen mit einander verbunden auf $\alpha_a . \alpha_{n+1-a}$

Arten, mithin die ganze Summe auf soviel Arten, als diese für $a=1, 2 \ldots n$ gebildeten Producte zusammengenommen angeben.

Ad II wird die ganze Summe in letzter Instanz zerlegt erscheinen in $a_1, a_2 \ldots a_n$, beziehungsweise $1, 2 \ldots n$-gliedrige Summen, wobei aber, da die Gliederzahl im Ganzen $n+1$ betragen muss, die Relation 2) besteht. Diese Partialsummen sind resp. $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ verschiedener Darstellungen fähig, genauer gesagt: eine jede der a_m m-gliedrigen Theilsummen lässt sich durch verschiedenartige Association ihrer Glieder auf α_m Arten darstellen; sämmtliche $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ Theilsummen in einer bestimmten Ordnung mit einander verknüpft, lassen sich also auf $\alpha_1^{a_1} . \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}$ Arten weiter gliedern.

Diese Theilsummen können aber in $p = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1 ! a_2 ! \ldots a_n !}$ verschiedenen Anordnungen mit einander verknüpft werden, wobei indessen zu beachten ist, dass die vorgeschriebene Ordnung der Glieder gewahrt werden muss; hat man sich also jene Theilsumme mitsammt den Parenthesen, welche sie enthalten, permutirt gedacht, so musste die ursprüngliche Reihenfolge der Glieder durch Versetzung derselben (ohne Veränderung der Parenthesen) wiederhergestellt sein. Darnach ist die Anzahl der möglichen Darstellungen einer letztinstanzlich in a_1 eingliedrige, a_2 zweigliedrige ... und a_n n-gliedrige Theilsummen zerlegten Summe gleich

$$p . \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n},$$

und die Anzahl der Darstellungen dieser Summe überhaupt wird gefunden, wenn man diese Zahl für alle Arten letztinstanzlicher Zerlegungen bildet und summirt.

Mit Hilfe der also bewiesenen Recursionen 1) kommt es jetzt darauf an, die Zahlen α_n independent als Functionen von n darzustellen. Auf den ersten Blick scheint dieses sehr schwierig, da die Recursionen nicht einmal linear sind und schon bei linearen Recursionen mit ohne Ende wachsender Gliederzahl die Aufgabe allgemein noch nicht gelöst ist.

Ihre Lösbarkeit in dem gegenwärtigen Falle verdankt die Aufgabe einem zufälligen Umstande, dem, dass die Coefficienten p eben die Permutationszahlen sind.

Setzt man nämlich für eine beliebige, nur hinreichend kleine Zahl z:

$$4) \qquad F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n z^n,$$

und bezeichnet mit **Jacobi** den Coefficienten von z^n in der Entwickelung einer Function $\Phi(x)$ nach steigenden Potenzen von z mit $[\Phi(z)]_{z^n}$, so zeigt sich durch Vergleichung der Recursion 1) I. mit dem polynomischen Satze, dass dieselbe auch, wie folgt, geschrieben werden kann:

$$5) \text{ I.} \qquad \alpha_{n+1} = [F(z)^2]_{z^{n+1}}.$$

Desgleichen ist in 1) II. rechter Hand die Summe aller Glieder, für welche $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ constant $= a$ ist, einerlei mit $[F(z)^a]_{z^{n+1}}$, und da a alle Werthe von 2 bis $n+1$ annehmen kann, so schreibt sich 1) II. auch, wie folgt:

$$5) \text{II.} \qquad \alpha_{n+1} = \sum_{a=2}^{a=n+1} [F(z)^a]_{z^{n+1}}.$$

Zur Vereinfachung dieser Formeln 5) könnte noch n für $n+1$ geschrieben werden; sie würden dann aber nur für $n > 1$ Giltigkeit haben. Diese Darstellung der gesuchten Zahlen kann nun nebst dem Werthe $\alpha_1 = 1$ in die Gleichung 4) einsetzen, durch welche man ihre erzeugende Function $F(z)$ definirt ist. Dadurch ergiebt sich eine Relation, aus welcher es gelingt, diese erzeugende Function selbst zu bestimmen; zunächst nämlich:

$$\text{I.} \qquad F(z) = z + \sum_{n=2}^{n=\infty} z^n [F(z)^2]_{z^n};$$

$$\text{II.} \qquad F(z) = z + \sum_{a=2}^{a=\infty} \sum_{n=a}^{n=\infty} z^n [F(z)^a]_{z^n};$$

nachdem noch bei II die Summationsordnung umgekehrt worden.

Nach der Bedeutung des Symbols $[\Phi(z)]_{z^n}$ ist aber

$$\sum_{n=a}^{n=\infty} z^n [\Phi(z)]_{z^n} = \Phi(z),$$

wenn die in eine Mac Laurin'sche Reihe entwickelte Function $\Phi(z)$ mit der a^{ten} Potanz von z beginnt. Da in der That $F(z)$ mit dem Gliede $\alpha_1 z$, sowie $F(z)^a$ mit $\alpha_1{}^a z^a$ beginnt, so wird also:

$$6) \quad \begin{cases} \text{I.} & F(z) = z + F(z)^2, \\ \text{II.} & F(z) = z + \sum_{a=2}^{a=\infty} F(z)^a = z + \dfrac{F(z)^2}{1 - F(z)}. \end{cases}$$

In beiden Problemen haben wir demnach eine bezüglich $F(z)$ quadratische Gleichung gewonnen, aus welcher diese Function berechnet werden kann. Man findet jedesmal zwei Werthe, von welchen der eine zu verwerfen ist, weil die Reihenentwickelung der Function mit dem Terme z beginnen, also die 0^{te} Potenz von z herausfallen muss. Die richtigen Werthe sind nach Auflösung jener quadratischen Gleichungen:

$$7) \quad \begin{cases} \text{I.} & F(z) = \tfrac{1}{2}\{1 - (1 - 4z)^{\frac{1}{2}}\}, \\ \text{II.} & F(z) = \tfrac{1}{4}\{1 + z - [1 - z(6 - z)]^{\frac{1}{2}}\}, \end{cases}$$

wenn unter den $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Potenzen diejenigen Werthe verstanden werden, welche die Binomialreihe liefert.

Diese beiden Functionen sind nun lediglich noch nach Potenzen von z zu entwickeln, damit der Coefficient von z^n aus ihnen entnommen werden könne. Ad 1 bietet dies nicht die geringste Schwierigkeit, und erhält man:

8) I. $$\alpha_n = (-1)^{n-1}\, 2^{2n-1}\, (\tfrac{1}{2})_n\,,$$

oder, in einer für die Rechnung bequemeren Form dargestellt:

$$\alpha_n = \frac{2}{n-2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\dots(n-3)},\quad \text{für } n > 3,$$

woraus beiläufig auch die Recursion

$$\alpha_{n+1} = 2\,\frac{2n-1}{n+1}\,\alpha_n$$

folgt.

Ad II wird man zuerst durch Anwendung des Binomialtheorems nach Potenzen von $z\,(6-z)$, hierauf die einzelnen Glieder durch abermalige Anwendung desselben nach Potenzen von z selbst entwickeln. Das Ordnen nach Potenzen von z geht bequemer von statten, wenn man auch die abbrechenden Binomialreihen noch ins Unendliche fortsetzt. So wird nun:

8) II. $$\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4}\sum_{a=0}^{a=n} (\tfrac{1}{2})_a\,(a)_{n-a}\,6^{2a-n}.$$

Ordnet man die durch diesen Summenausdruck dargestellte Reihe nach fallenden Potenzen von 6 an und setzt sie ins Unendliche fort, so convergirt die entstehende Reihe, so lange nicht einzelne Glieder unendlich werden, für alle möglichen complexen Werthe von n, da der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder mit wachsendem Stellenzeiger der Grenze $\frac{1}{9}$ zustrebt. Man erhält so einen analytischen Ausdruck für eine Function, durch welche nicht nur die Reihe der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ interpolirt, sondern überhaupt die Grösse α_n im ganzen Bereich der Zahlenebene als Function von n explicirt wird. Ist jedoch n eine natürliche Zahl, so vereinfacht sich die obige Gleichung wegen $(a)_{n-a} = 0$ für $2a < n$, und zerfällt in die beiden folgenden:

9) II. $$\left\{\begin{aligned} \alpha_{2n} &= -\tfrac{1}{4}\sum_{c=0}^{c=n} (\tfrac{1}{2})_{n+c}\,(n+c)_{n-c}\,6^{2c},\\ \alpha_{2n+1} &= \tfrac{1}{4}\sum_{c=0}^{c=n} (\tfrac{1}{2})_{n+c+1}\,(n+c+1)_{n-c}\,6^{2c+1},\end{aligned}\right.$$

deren Glieder auch noch nach dem Schema $(\alpha)_\beta\,(\beta)_\gamma = (\alpha)_\gamma\,(\alpha-\gamma)_{\beta-\gamma}$ umgeformt werden könnten. Für die Berechnung bequemer sind die Ausdrücke:

10) II. $$\left\{\begin{aligned} \alpha_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{a=0}^{a=n}\frac{(-1)^{n-a}\,(2n+2a-3)!\,3^{2a}}{(n+a-2)!\,(n-a)!\,(2a)!},\\ \alpha_{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{a=0}^{a=n}\frac{(-1)^{n-a}\,(2n+2a-1)!\,3^{2a+1}}{(n+a-1)!\,(n-a)!\,(2a+1)!},\end{aligned}\right.$$

A 1003 really

in welchen jedoch $n > 1$, resp. > 0 sein muss. Die allgemeine Ausführung der Summation ist mir nicht gelungen. Nach 8) I und 10) II berechnet man leicht die ersten Werthe der Coefficienten, etwa von α_1 bis α_{10}:

I.	1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, — 108
II.	1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049. — 2482

Eine sechsgliedrige Summe z. B. lässt sich demnach, Alles in Allem genommen, schon auf 141840 Arten überhaupt anschreiben; ersetzte man das + Zeichen durch irgend ein anderes, weder commutatives, noch associatives Functionszeichen, so würden sich ebenso viele verschiedene Werthe des Rechenergebnisses herausstellen.

Schliesslich eine Bemerkung über die Zulässigkeit der angestellten Betrachtungen. Für die Giltigkeit derselben war es erforderlich, dass die vorkommenden Reihen convergirten. *A posteriori* lässt sich nun leicht einsehen, dass ad I: $mod\, z < \frac{1}{4}$, und ad II: $mod\, z < 3 - 2\sqrt{2} = 0{,}17157\ldots$ sein muss, wenn die Reihe für $F(z)$ convergiren soll, da dieses die kleinsten Werthe von z sind, für welche die Derivirten von $F(z)$ unendlich werden, nämlich die Grundzahl der $\frac{1}{2}$ten Potenz in 7) verschwindet. Wegen 6) musste überdies z ad II so klein gedacht werden, dass $mod\, F(z) < 1$ wurde. — Das Verhältniss zweier aufeinanderfolgender Coefficienten α nähert sich bei wachsendem Stellenzeiger ad I der Grenze 4, ad II der Grenze $3 + 2\sqrt{2} = 5{,}828427\ldots$. Schwieriger dürfte ad II die Aufgabe sein, die Art des Unendlichwerdens von α_n selbst für $lim\, n = \infty$ zu bestimmen.

Es ist nebenbei das für die Zahlentheorie nicht uninteressante Resultat gefunden, dass die für die Coefficienten α angegebenen Ausdrücke 8) bis 10) stets ganze Zahlen sein müssen, was namentlich ad II schwer direct zu beweisen sein dürfte.

III und IV.

Verwandt mit den beiden vorigen Problemen sind die beiden folgenden, bei denen es auf die Anordnung der Elemente (Glieder), die bisher eine vorgeschriebene war, nicht ankommen soll.

III. Es sind n Elemente gegeben, z. B. körperliche, im Raume bewegliche Individuen, die ich abermals Glieder nennen will. Von diesen kettet man irgend zwei dadurch an einander, dass man sie mit einer geschlossenen, etwa einfach zusammenhängenden und sich selbst nicht schneidenden Oberfläche — einer Zelle gleich — umhüllt. Diese Hülle sammt ihrem Inhalt wird nun als neues Glied betrachtet und auf die neue Menge von nunmehr $n-1$ Elementen die nämliche Operation so lange fortgesetzt angewendet, bis der ganze Complex schliesslich zu einem zweigliedrigen geworden ist. Es fragt sich, wievielerlei Complexionen durch diesen Process erhältlich sind, d. h. auf wieviel Arten derselbe vollzogen werden kann.

IV. Man theilt die n Elemente auf beliebige Weise in Gruppen, nämlich eventuell in einige eingliedrige, einige 2, 3 ... $n$gliedrige; jede Gruppe von mehr als einem Elemente umschliesst man durch eine geschlossene Oberfläche und lässt die letztere sammt ihrem Inhalt als ein den übrigen coordinirtes Element gelten. Die neue Menge von (selbstverständlich weniger als n) Elementen wird demselben Process wiederholt unterworfen, so lange es beliebt, beziehungsweise so lange es angeht, indem die Einschliessung analog den vorigen Problemen nur so weit gehen darf, dass der resultirende Complex noch aus mehr als **einem** Elemente besteht. Es soll die Anzahl der Complexionen gefunden werden, welche durch diesen Process gebildet werden können.

In den beiden Problemen will ich die gesuchte Anzahl der möglichen associativen Gliederungen des n-gliedrigen Complexes mit β_n bezeichnen und unter der Annahme aufsuchen, dass alle Elemente als individuell verschieden betrachtet werden. Den Gegensatz dieser Probleme mit den beiden vorigen wird man am besten kennzeichnen, wenn man III und IV als ein Problem der **freien** oder **ungeordneten**, hingegen I und II als ein Problem der **bedingten** oder **geordneten** Association hinstellt. Es ist auch *a priori* ersichtlich, dass $\beta_n > \alpha_n$, aber $< n!\,\alpha_n$ sein wird; denn nimmt man die Elemente wie die Glieder einer Summe in eine Reihe geordnet an und lässt die Klammern durch geschlossene Oberflächen vertreten, so sieht man, dass die α_n bedingten Associationen sich sämmtlich unter den β_n freien vorfinden, und umgekehrt auch die β_n freien unter den bedingten nach Permutation ihrer Elemente; dieses gilt sowohl, wenn man die Probleme I und III, als wenn man II und IV unter sich vergleicht. Aus den für die Probleme III und IV angegebenen Bestimmungen geht nämlich hervor, dass eine Permutation der Elemente keine Aenderung bewirkt und zu keiner neuen Complexion führt, wenn sie nur die Wirkung hat, dass die von ein und derselben Hülle umschlossenen, einander coordinirten Elemente unter sich vertauscht werden; zu einer neuen Gliederung führt das Permutiren nur, sofern einzelne Elemente aus der gedachten Hülle heraus- und andere dafür hereintreten.

Selbstredend durfte keine der Hüllenflächen eine andere schneiden. Wollte man auch Einschliessung eines einzelnen Elementes zulassen (jedoch keine mehrfache), so wäre β_n noch mit 2^n zu multipliciren und bei fernerer Zulassung einer Einschliessung des ganzen Complexes mit 2^{n+1}.

Die Methode, deren ich mich nun zur Ermittelung der gesuchten Zahlen bediene, ist der vorigen ähnlich, wenngleich sich die Ausführung (namentlich ad IV) interessanter gestaltet.

Ich stelle zuerst eine Recursion zur Berechnung der Grössen β_n auf. Man hat:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_1^2 = 1,$$

ferner:

völlig explicirt erhalten werden und in den Gliedern ihrer Reihenentwickelung mit Potenzen höherer (iterirter) Logarithmen der halben Summationsvariabeln $log\,log\,\frac{c}{2}$, $log\,log\,log\,\frac{c}{2}$ etc. behaftet sind.

Die Gleichung 37) giebt endlich für ganze positive Argumente den Werth der Function β_{n+1} in geschlossener Form, als ein Aggregat von ganzen Zahlen. Darnach ist z. B.

311 →

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 4, \quad \beta_4 = 26, \quad \beta_5 = 236 \ldots.$$

Der Quotient $\beta_{n+1} : \beta_n$ nähert sich für $n = \infty$ der selbst unendlichen Grenze

$$n\,(2\,log\,2 - 1).$$

Beträchtlich schwieriger dürfte die Lösung der vorstehenden Probleme für den Fall sein, dass unter den ursprünglichen Elementen einzelne einander gleich sind.